Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería
Tarea 1

Álvaro Osorio

25 de Septiembre de 2015

1. Introducción

El objetivo de la presente tarea es calcular el radio efectivo del sol para lo cual, primero deberemos obtener la constante solar y la energía total por unidad de área emitida por un cuerpo negro con la temperatura efectiva del sol (5778 K), comparando estas dos cantidades y usando el hecho de que el flujo se conserva, podemos obtener el radio efectivo del sol.

La constante solar se define como la cantidad de radiación solar por unidad de tiempo y por unidad de superficie medida en la parte externa de la atmósfera. Se busca determinar esta cantidad integrando numéricamente el espectro del sol (el cual esta en unidades de energía por unidad de tiempo por unidad de área por unidad de longitud de onda), en la practica esto es integrar numéricamente el flujo en función de la longitud de onda para lograr esto se tomaran los datos desde el archivo sun_AMO.dat el cual contiene el espectro del sol justo medido afuera de la atmósfera terrestre.

Para obtener la energía total por unidad de área emitida por un cuerpo negro con la temperatura efectiva del sol usaremos la función de Planck dada por:

$$B_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2/\lambda^5}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \tag{1}$$

Donde h es la constante de Planck, c es la velocidad de la luz en el vació, k_B es la constante de Boltzmann, T es la temperatura del cuerpo negro (en nuestro caso 5778 K) y λ es la longitud de onda. Se puede demostrar que el problema de obtener la integral de la función de Planck es equivalente a lo siguiente:

$$P = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \tag{2}$$

Donde P es el área bajo la función de Planck.

2. Procedimiento

En base a los datos del archivo sun_AMO.dat podemos calcular la constante solar, estos datos se presentan como el flujo v/s la longitud de onda, por lo cual para la integración numérica tomaremos el flujo como la variable dependiente y la longitud de onda como la variable independiente, en este caso usaremos el método trapezoidal, para obtener la integral numérica de curva, se utiliza este método sobre otros ya que la discretización de la curva no es uniforme y el método trapezoidal se puede implementar sin mayores dificultades para casos como estos.

Para calcular la integral de la ecuación (2), la cual esta definida en un intervalo infinito, utilizaremos el siguiente cambio de variable $y = arctan(x)$, con este cambio de variable la integral de la ecuación (2) nos queda:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^3(y) + \tan^5(y)}{e^{\tan(y)} - 1} \tag{3}$$

Con esto la integral queda en definida en un intervalo finito y por lo tanto podemos resolverla numéricamente, en este caso utilizaremos el método de Simpson 1/3 para resolver esta integral, para este caso en particular podemos definir los intervalos, por simplicidad estos se tomaran uniformes, además se tomaran 1000 intervalos para discretizar la función, este valor fue elegido ya que entregaba buenos resultados, tema que se abordara en la siguiente sección, y su tiempo de computo era bajo.

3. Resultados

Al graficar los datos del archivo sun_AMO.dat tenemos lo siguiente:

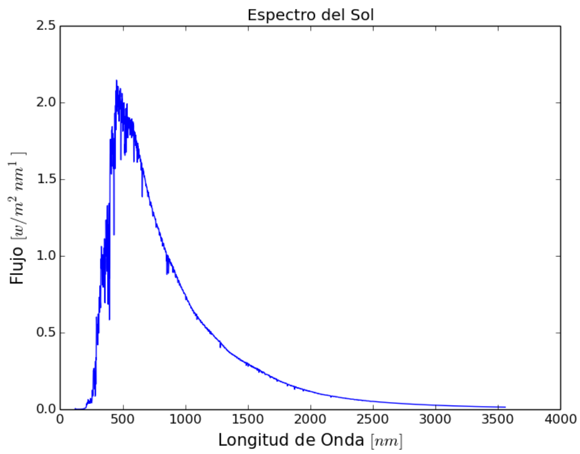

Figura 1: Espectro del Sol en la atmósfera terrestre

El valor del área bajo la curva de esta función es 1366,09079684 W/m^2, usando la función de Scipy integrate.trapz nos entrega 1366,09079684 W/m^2 lo cual es lo mismo, esto se puede deber a que el algoritmo utilizado por la función de Scipy y el implementado es el mismo, con la diferencia que el algoritmo implementado tuvo un tiempo de ejecución de $t = 0{,}005457s$, mientras que el la función integrate.trapz solo de $t = 0{,}000167$ o sea fue 10 veces mas rápido.

A la hora de realizar comparaciones con los métodos de integración para el caso de la función de Planck solo tomaremos la función (3), ya que lo demás es solo multiplicar por constantes conocidas, por lo tanto tenemos que el valor de la integral con el algoritmo implementado es 6,49393940162 y usando la función de Scipy integrate.quad es 6,49393940227 con lo que la diferencia entre ambos es de $6{,}48666897973e-10$, para este caso el algoritmo implementado tuvo un tiempo de ejecución de $t = 0{,}030176$ mientras que la función integrate.quad $t = 0{,}001774$, en este caso podemos decir que la función implementada utiliza una función creada para definir la función a integrar esto puede ser muy costoso pero como el numero de iteraciones era bajo esto era irrelevante, pero en si hace que sea mas lento que la función integrate.quad.

Sobre el calculo del radio efectivo del sol tenemos que es:

$$R_s = (\frac{K}{P})^{1/2} a_0 \tag{4}$$

Donde R_s es el radio del sol, K es constante solar, P es la energía total por unidad de área emitida por un cuerpo negro con la temperatura efectiva del sol y a_0 es la distancia del sol a la tierra, con esta ecuación nos da que el radio efectivo del sol es 695511508.079 m.