Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería
Tarea 3

Álvaro Osorio

8 de Octubre de 2015

1. Introducción

El objetivo de la presente tarea es resolver numéricamente sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, una es la ecuación que modela el oscilador de Van der Pol y la otra es el sistema de Lorentz, en la primera se utilizara el método de Runge-Kutta de orden 3 y en la segunda ecuación se utilizara el mismo metodo pero de orden 4.

2. Pregunta 1

Tenemos que el oscilador de Van der Pol es un oscilador con amortiguamiento no lineal y su evolución temporal obedece a la siguiente ecuación temporal de segundo orden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu(x^2 - a^2)\frac{dx}{dt} \tag{1}$$

Usando el siguiente cambio de variable:

$$s = \sqrt{k}at \tag{2}$$

$$y = \frac{x}{a} \tag{3}$$

Tenemos:

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -y - \mu^*(y^2 - 1)\frac{dy}{ds} \tag{4}$$

Con esto tenemos que la ecuación depende de un solo parámetro y como mi RUT es 17.951.786-8 el $\mu^* = 1{,}786$, ahora podemos integrar numéricamente la ecuación usando el método de Runge-Kutta de orden 3, lo primero es pasar de una ecuación diferencial de segundo orden a un sistema de dos ecuaciones de primer orden con esto el problema queda de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \frac{dy}{ds} \\ \frac{dv}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -y - \mu^*(x^2 - 1)v \end{pmatrix} \tag{5}$$

Ahora aplicamos el método de Runge-Kutta de orden 3 para cada ecuación al mismo tiempo, ya que las ecuaciones son acopladas.

Tenemos como resultado lo siguiente:

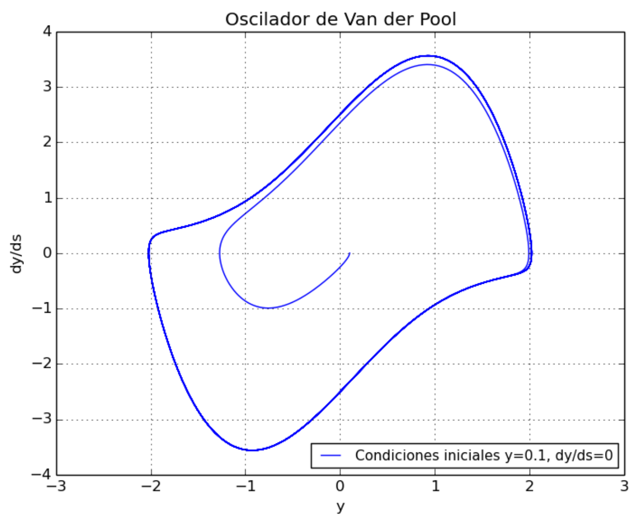

Figura 1: Trayectoria en el espacio con C.I. $y = 0{,}1$ $dy/ds = 0$

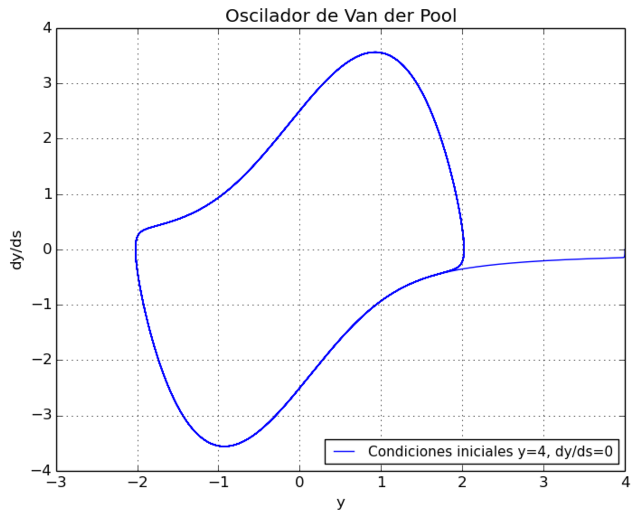

Figura 2: Trayectoria en el espacio con C.I. $y = 4\ dy/ds = 0$

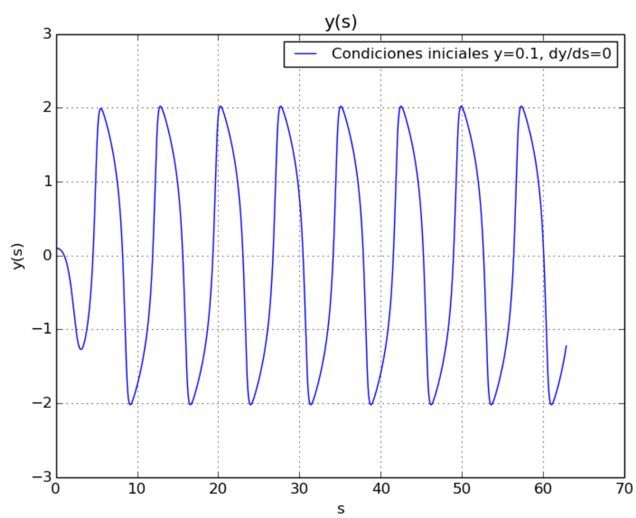

Figura 3: Trayectoria en el espacio con C.I. $y = 0{,}1\ dy/ds = 0$

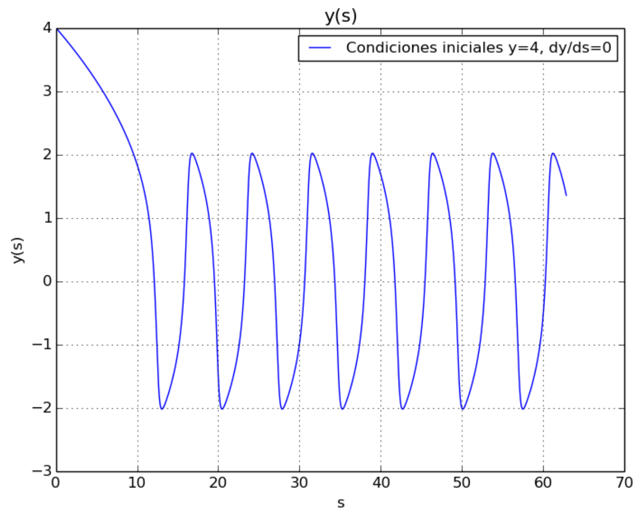

Figura 4: Trayectoria en el espacio con C.I. $y = 4$ $dy/ds = 0$

3. Pregunta 2

En esta pregunta tenemos el sistema de Lorentz, que consta del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\frac{dx}{ds} = \sigma(y - x) \tag{6}$$

$$\frac{dy}{ds} = x(\rho - z) - y \tag{7}$$

$$\frac{dz}{ds} = xy - \beta z \tag{8}$$

Los parámetros que utilizaremos son $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ y $\rho = 28$, a diferencia de la pregunta anterior ahora usaremos un método ya implementado en la librería scipy.integrate, mas específicamente usaremos la función ode, luego de probar diferentes condiciones iniciales se opta, por usar como condiciones iniciales el vector $(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, 10)$

Los resultados son los siguientes:

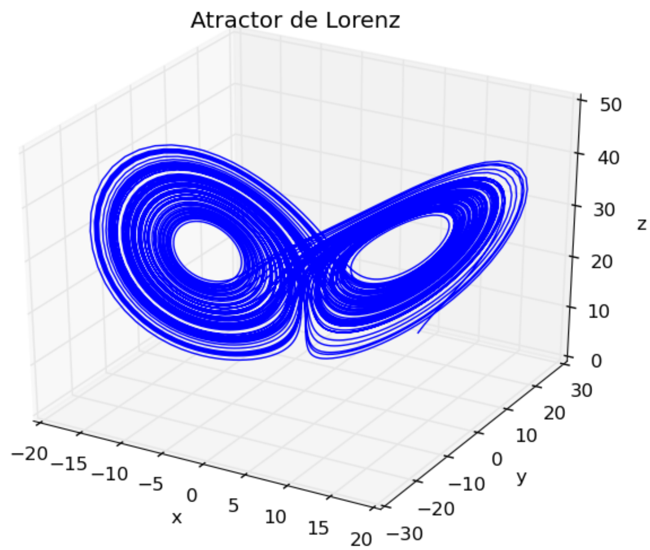

Figura 5: El atractor de Lorenz en 3-D