

(1 Punkt)

2. Die Mandelbrot-Menge

Eines der bekanntesten Fraktale ist die Mandelbrot-Menge¹. Ihre Visualisierung in Abbildung 2 ist auch als “Apfelmännchen” bekannt.

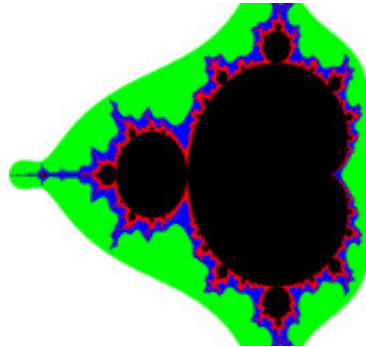


Abbildung 2: “Apfelmännchen”.

Die Mandelbrot-Menge \mathbb{M} besteht aus allen komplexen Zahlen $c = x + iy \in \mathbb{C}$, für welche die rekursiv definierte Folge

$$z_{n+1} := z_n^2 + c, \quad \text{mit} \quad z_0 := 0 \quad (1)$$

beschränkt bleibt. Die graphische Darstellung der Mandelbrot-Menge erfolgt in der komplexen Zahlenebene. Dabei werden die Punkte der Menge schwarz und der Rest farbig dargestellt.

Wie findet man heraus, ob eine komplexe Zahl $c = x + iy$ in \mathbb{M} liegt oder nicht?

Zuerst werden zu einer Zahl $c \in \mathbb{C}$ rekursiv die Folgenglieder z_n , $n \leq n_{\max}$ bestimmt. Die Rekursion wird abgebrochen, wenn entweder die maximale Anzahl n_{\max} rekursiver Aufrufe erreicht ist oder der Betrag von z_n größer oder gleich 2 ist. Wird die maximale Rekursionstiefe n_{\max} erreicht, so nimmt man an, dass die Zahl c innerhalb der Mandelbrot-Menge liegt. Der entsprechende Punkt (x, y) zu c wird dann in der graphischen Darstellung schwarz eingefärbt. Wird die Rekursion vorzeitig wegen $|z_n| \geq 2$ abgebrochen, so bekommt der entsprechende Punkt eine Farbe, die der Iterationszahl entspricht.

- (a) Schreiben Sie eine rekursive Funktion, welche für die übergebenen Punkte $c \in \mathbb{C}$ und $z_0 = 0$ die Folgenglieder der komplexen Folge (1) bestimmt und die maximal erreichte Rekursionstiefe n zurückgibt. Als Abbruchbedingung soll die beschriebene Bedingung $|z_n| \geq 2$ oder $n > n_{\max}$ dienen.

(3 Punkte)

- (b) Nutzen Sie Funktionen aus den Übungsblättern 05 und 06! Die Bildpunkte der komplexen Zahlenebene im Bereich $\{-2 \leq x \leq 1, -1 \leq iy \leq 1\}$ sollen auf ein BMP abgebildet werden. Ermitteln Sie für jeden Bildpunkt mittels der in (a) geschriebenen Funktion eine Rekursionstiefe n zu jedem Bildpunkt. Abhängig von n soll dann eine Farbe gewählt werden.

(3 Punkte)

¹<https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge>