CHULETARIO CÁLCULO NUMÉRICO II

Álvaro Grande Blázquez

2025 ~ 2026

Índice

TEMA 1. INTERPOLACIÓN POLINÓMICA DE LAGRANGE

1.1. EL PROBLEMA DE INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Definición 1.1 (Problema de Lagrange)

Dados un entero no negativo N, $N + 1$ puntos reales $x_0, x_1, ..., x_N$ distintos dos a dos y valores $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_N)$ de una función, el **problema de interpolación de Lagrange** se basa en encontrar un polinomio de grado N tal que:

$$p(x_0) = f(x_0), p(x_1) = f(x_1), ..., p(x_N) = f(x_N)$$

Los x_i se llaman abcisas o **nodos de la interpolación** y no tienen por qué estar ordenados.

Teorema 1.2

El problema de interpolación de Lagrange tiene solución única que se llama el **polinomio interpolador de Lagrange** de grado menor o igual que N de la función f en los puntos $x_0, x_1, ..., x_N$.

Corolario 1.3

Sean las condiciones anteriores, el polinomio de Lagrange también puede escribirse de la siguiente manera:

$$p(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + ... + f(x_N)l_N(x)$$

Donde $l_i(x_j) = 0$, $i \neq j$; $l_i(x_i) = 1$ y en particular:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_N)}{(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_N)}$$

1.2. LA FORMA DE NEWTON: DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Definición 1.4 (Polinomio interpolador en forma de Newton)

Hasta ahora hemos visto dos formas de construir el polinomio interpolador de Lagrange, por coeficientes indeterminados y la forma de Lagrange. Una tercera forma de realizar la construcción es la **forma de Newton**, a través de la cual nos queda el siguiente polinomio:

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_N(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{N-1})$$

Por tanto, escribimos $p(x)$ en la base

$$\mathcal{B} = \{1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{N-1})\}$$

Definición 1.5 (Diferencias divididas)

Dados un entero no negativo N, $N + 1$ puntos $x_0, \dots, x_N$ distintos dos a dos y una función definida en ellos, llamamos **diferencia dividida** de f en $x_0, \dots, x_N$ al coeficiente de x^N en el desarrollo de potencias de x del correspondiente polinomio interpolador de Lagrange. Esta diferencia dividida se representa como $f[x_0, x_1, \dots, x_N]$. Al entero N se le llama **orden** de la diferencia dividida. Así, el polinomio interpolador en forma de Newton se escribe:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots +$$

$$+ \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_N](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_N)$$

Teorema 1.6

Sean $x_0, x_1, \dots, x_N$, $N \geq 1$, $N + 1$ puntos distintos dos a dos donde está definida una función f. Entonces:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_N] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_N] - f[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]}{x_N - x_0}$$

Lema 1.7 (Tabla de diferencias divididas)

Usando reiteradamente el Teorema 1.6 podemos construir la siguiente tabla:

$$
\begin{array}{cccccc}
x_0 & f[x_0] & & & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_0, x_1] & & & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
x_N & f[x_N] & f[x_{N-1}, x_N] & f[x_{N-2}, x_{N-1}, x_N] & \ldots & f[x_0, x_1, \ldots, x_N]
\end{array}
$$

Observamos que una vez calculada la tabla, los elementos diagonales nos dan los coeficientes del polinomio interpolador escrito en la forma de Newton.

1.3. COMPARACIÓN ENTRE COEFICIENTES INDETERMINADOS, LAGRANGE Y NEWTON

Proposición 1.8

Hemos visto tres formas de construir el polinomio interpolador de Lagrange. Vamos a compararlas:

- **Coste de construcción**: máximo en coeficientes indeterminados; mínimo en Lagrange, intermedio en Newton.
- **Coste de evaluación**: mínimo en coeficientes indeterminados (Algoritmo de Horner), bajo en Newton y alto en Lagrange.
- **Coste de añadir nuevo nodo**: muy bajo en Newton, alto en coeficientes indeterminados y Lagrange.

En vista de lo anterior, la forma de Newton parece la más recomendable, aunque en algunos casos también se emplea la forma de Lagrange.

1.4. COTAS DE ERROR

Teorema 1.9 (Error de interpolación de Lagrange)

Supongamos que f es una función con $N \geq 1$ derivadas continuas en un intervalo [a, b] y tal que $f^{(N+1)}$ existe en (a, b). Sean $x_0, x_1, \ldots, x_N$, $N + 1$ nodos en $[a, b]$ distintos dos a dos y p el polinomio interpolador de Lagrange. Entonces dado $x \in [a, b]$ existe $\xi \in I$, $I = (\min(x_0, x_1, \ldots, x_n, x), \max(x_0, x_1, \ldots, x_n, x))$ para el cual:

$$f(x) - p(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_N)}{(N + 1)!} f^{(N+1)}(\xi)$$

Corolario 1.10

Si además de la hipótesis anterior suponemos $\left|f^{(N+1)}(t)\right| \leq K_{N+1}$, $\forall t \in (a, b)$, entonces:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{|x - x_0||x - x_1|\ldots|x - x_n|}{(N + 1)!} K_{N+1}$$

1.5. DIFERENCIAS DIVIDIDAS Y DERIVADAS

Teorema 1.11

Si p es el polinomio interpolador de Lagrange de grado N que interpola a f en los $N + 1$ nodos distintos dos a dos $x_0, x_1, \ldots, x_N$, entonces para cada x distinto de los nodos donde f esté definida se tiene:

$$f(x) - p(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_N, x](x - x_0)\ldots(x - x_N)$$

Corolario 1.12

Sea N un número no negativo y $x_0, x_1, \ldots, x_{N+1}$, $N + 2$ puntos distintos dos a dos en el intervalo $[a, b]$. Si f es una función con N derivadas continuas en $[a, b]$ y $f^{(N+1)}$ existe en (a, b), entonces existe $\xi \in I$, $I = (\min(x_0, \ldots, x_{N+1}), \max(x_0, \ldots, x_{N+1}))$ para el que:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{N+1}] = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N + 1)!}$$

1.6. CONVERGENCIA DE LOS POLINOMIOS DE INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Proposición 1.13 (Convergencia de los polinomios de interpolación de Lagrange)

Dada una función f definida en un intervalo $[a, b]$, elegimos un punto x_0^0 e interpolamos en él por una constante p_0; después elegimos dos puntos distintos entre sí x_0^1, x_1^1 e interpolamos por una recta p_1. Continuando con este proceso, ¿será cierto que $\lim_{N\to\infty} p_{N(x)} = f(x)$? La respuesta es, en general, **negativa**, con la conclusión de que incrementar el grado de los polinomios de interpolación en el problema de Lagrange no siempre es recomendable.

Fenómeno de Runge

En 1900, el matemático Runge demostró que si se interpola la función $1/(1+x^2)$, que posee derivadas continuas en todos los órdenes, en $N+1$ abcisas equiespaciadas en el intervalo $[-5, 5]$ y se denota por $p_N(x)$ su polinomio interpolador.

Entonces cuando $N \to \infty$, $p_N(x)$ no converge al valor de $f(x)$ si $|x| > 3.6$.

TEMA 2. INTERPOLACIÓN DE TAYLOR

2.1. EL PROBLEMA DE INTERPOLACIÓN DE TAYLOR

Definición 2.1 (Problema de interpolación de Taylor)

Dados un entero no negativo N, un punto x_0 de la recta y los valores $f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(N)}(x_0)$ de una función y sus N primeras derivadas en x_0. El **problema de interpolación de Taylor** se basa en encontrar un polinomio de grado menor o igual que N tal que $p(x_0) = f(x_0)$, $p'(x_0) = f'(x_0)$, $p^{(N)}(x_0) = f^{(N)}(x_0)$.

Teorema 2.2

El problema de interpolación de Taylor tiene solución única. Al polinomio solución se le llama polinomio de Taylor de grado N de f en x_0.

Lema 2.3 (Fórmula del polinomio de Taylor)

Construimos el polinomio de Taylor de grado N de f en x_0 de la siguiente manera:

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(N)}(x_0)}{N!}(x - x_0)^N$$

2.2. NOTACIONES DE LANDAU

Definición 2.4

- Escribimos $\boldsymbol{f = o(g)}$ cuando $x \to x_0$ si para x próximo a x_0 $x \neq x_0$, f y g están definidas, g no se anula y $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- Escribimos $\boldsymbol{f = O(g)}$ cuando $x \to x_0$ si existe una constante $K > 0$ tal que para x próximo a x_0, f y g están definidas y satisfacen $|f(x)| \leq K|g(x)|$.

Las notaciones de Landau también se usan cuando $x_0 = \pm\infty$. Si $f_1 - f_2 = o(g)$ cuando $x \to x_0$ también se escribe $f_1 = f_2 + o(g)$.

2.3. CARACTERIZACIÓN ANALÍTICA DEL POLINOMIO DE TAYLOR

Teorema 2.5

Para $N \geq 1$, sea f una función para la que se puede proponer el polinomio de Taylor, es decir, N veces derivable en x_0. Entonces el polinomio de Taylor verifica:

$$f(x) - p(x) = o\left((x - x_0)^N\right), \quad x \to x_0$$

Además, p es el único polinomio de grado N que verifica esta propiedad.

2.4. COTAS DE ERROR

Teorema 2.6 (Error en el polinomio de Taylor. Forma de Lagrange)

Sean x, x_0 dos números reales distintos y sea f una función con N derivadas continuas en el intervalo cerrado de extremos x y x_0 al que llamaremos $\overline{I}$. Supongamos además que existe $f^{(N+1)}$ en el intervalo abierto con los mismos extremos al que llamaremos I. Entonces, existe $\xi \in I$ tal que:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1}$$

Corolario 2.7

Si además de las hipótesis anteriores suponemos que $\left|f^{(N+1)}(t)\right| \leq K_{N+1}$, $t \in I$, entonces:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{|x - x_0|^{N+1} K_{N+1}}{(N+1)!}$$

Teorema 2.8 (Error en el polinomio de Taylor. Forma integral)

Sean x, x_0 dos números reales distintos y sea f con $N+1$ derivadas continuas en el intervalo $\overline{I}$ del Teorema 2.6. Entonces:

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{N!} \int_{x_0}^{x} (x-s)^N f^{(N+1)}(x)\, ds$$

2.5. CONVERGENCIA DE LA SUCESIÓN DE LOS POLINOMIOS DE TAYLOR

Proposición 2.9

Sean $p_0(x), p_1(x), ..., p_N(x)$ los polinomios de Taylor de grado N de f en x_0. Nos preguntamos si:

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} p_N(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Es decir, si $f(x)$ es la suma correspondiente a la serie de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Podemos hacer los siguientes comentarios al respecto:

- Se necesita una función f con derivadas de todos los órdenes en x_0.
- Puede que existan las derivadas pero que la serie no converja excepto en el punto x_0.
- Aunque existan todas las derivadas y la serie converja puede ocurrir que la suma de la serie solo coincida con la función en el punto x_0.

TEMA 3. INTERPOLACIÓN POLINÓMICA A TROZOS

3.1. INTERPOLACIÓN LINEAL A TROZOS

Definición 3.1

Dado un intervalo $[a, b]$ y una partición del mismo $\Delta := a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, denotamos por $\boldsymbol{M_0^1(\Delta)}$ el espacio formado por todas las funciones continuas en $[a, b]$ que restringidas en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, N$, son un polinomio de grado menor o igual que 1.

Definición 3.2

Si $s \in M_0^1(\Delta)$ decimos que s es una **función lineal a trozos** (en la partición Δ). En los $x_i \in \Delta$ las funciones $s \in M_0^1(\Delta)$ presentan saltos en la derivada.

3.2. FUNCIONES LINEALES A TROZOS COMO INTERPOLANTES

Definición 3.3 (Interpolante lineal a trozos)

Es obvio que dada una partición Δ y dados los valores de una función $f(x_0), \ldots, f(x_N)$ en los nodos de la misma, existe una única función lineal a trozos, $s \in M_0^1(\Delta)$, tal que:

$$s(x_0) = f(x_0),\ s(x_1) = f(x_1),\ \ldots,\ s(x_N) = f(x_N)$$

Llamaremos a esta función s **interpolante lineal a trozos** de f en la partición Δ.

Teorema 3.4 (Error de interpolación lineal a trozos)

Bajo las hipótesis anteriores y empleando el Corolario 1.10, podemos estimar el error de la interpolación lineal a trozos de la siguiente manera:

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 K_2, \quad x \in [a, b]$$

Donde $h = \max_i (x_i - x_{i-1})$ (es decir, $h =$ diámetro de la partición) y K_2 es una cota de la derivada segunda de f en $[a, b]$.

Corolario 3.5 (Convergencia de la interpolación lineal a trozos)

Siempre que f tenga derivada segunda acotada, si generamos una sucesión de particiones con diámetro h tendiendo a 0 (para lo cual tendremos que incluir cada vez más puntos) tenemos garantizada la convergencia uniforme de la sucesión de interpolantes lineales a trozos. Esta convergencia será además **cuadrática**.

3.3. COMPARACIÓN CON LA INTERPOLACIÓN POLINÓMICA DE LAGRANGE

Proposición 3.6

Dada una partición Δ y los valores de una función en los $N+1$ nodos, podemos buscar el interpolante de Lagrange de grado N, p, o aproximarla por una función lineal a trozos s. Entonces tenemos lo siguiente:

- **Coste de evaluación**: si N es grande, el coste de evaluar p es grande, mientras que el coste de evaluar s no crece con N.
- **Convergencia a f**: no está garantizada la convergencia de p a la función f mediante el aumento de N. Sin embargo, al refinar Δ logramos que s converja cuadráticamente a f, siempre que f tenga derivada segunda acotada.
- **Continuidad**: el polinomio p es indefinidamente derivable mientras que s es solo continuo, no derivable en los nodos de la partición.

3.4. FUNCIONES CUADRÁTICAS A TROZOS COMO INTERPOLANTES

Definición 3.7

Denotamos por $M_0^2(\Delta)$ el conjunto de las funciones continuas en $[a, b]$ que restringidas a cada intervalo de la partición $[x_{i-1}, x_i]$ coinciden con un polinomio de grado menor o igual que 2.

Definición 3.8

Si $q \in M_0^2(\Delta)$ decimos que q es una **función cuadrática a trozos** en la partición Δ. En los nodos $x_i \in \Delta$ las funciones $q \in M_0^2(\Delta)$ presentan saltos en las derivadas primera y segunda.

Teorema 3.9 (Error de interpolación cuadrática a trozos)

Bajo las hipótesis anteriores, podemos estimar el error de la interpolación cuadrática a trozos de la siguiente manera:

$$|f(x) - q(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} h^3 K_3, \quad x \in [a, b]$$

Donde h es el diámetro de la partición y K_3 es una cota de la derivada tercera de f en $[a, b]$.

Corolario 3.10 (Convergencia de la interpolación cuadrática a trozos)

Al igual que en el caso lineal a trozos, tenemos convergencia de los interpolantes al refinar la partición. Esta vez, la convergencia será **cúbica**.

TEMA 4. INTERPOLACIÓN DE HERMITE

4.1. INTERPOLACIÓN DE HERMITE

Definición 4.1 (Problema de interpolación de Hermite)

Dados $x_0, ..., x_r$ nodos con $0 \leq r \leq N$, el **problema de interpolación de Hermite** se basa en encontrar un polinomio que reproduce a f y sus m_i primeras derivadas de forma que $\sum_{i=0}^{r}(1+m_i) = N+1$. Más concretamente, buscamos p de grado menor o igual que N satisfaciendo:

$$\begin{array}{llll} p(x_0) = f(x_0), & p'(x_0) = f'(x_0), & \cdots & p^{(m_0)}(x_0) = f^{(m_0)}(x_0), \\ p(x_1) = f(x_1), & p'(x_1) = f'(x_1), & \cdots & p^{(m_1)}(x_1) = f^{(m_1)}(x_1), \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p(x_r) = f(x_r), & p'(x_r) = f'(x_r), & \cdots & p^{(m_r)}(x_r) = f^{(m_r)}(x_r) \end{array}$$

Este problema es una generalización de la interpolación de Lagrange donde $r = N$ y $m_0 = m_1 = ... = m_r = 0$. También es una generalización de la interpolación de Taylor, donde $r = 0$ y $m_0 = N$.

Lema 4.2 (Construcción de polinomio interpolador de Hermite)

Sea la siguiente base:

$$\{1, (x-x_0), ..., (x-x_0)^{m_0}, (x-x_0)^{m_0+1}, (x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1), ...,$$
$$(x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)^{m_1}, ..., (x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)^{m_1+1}...(x-x_{r-1})^{m_{r-1}+1}, ...,$$
$$(x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)^{m_1+1}...(x-x_{r-1})^{m_{r-1}+1}(x-x_r)^{m_r}\}$$

El polinomio interpolador de Hermite se escribe:

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + ... + \frac{f^{(m_0)}(x_0)}{m_0!}(x-x_0)^{m_0} +$$
$$+ c_{m_0+1}(x-x_0)^{m_0+1} + c_{m_0+2}(x-x_0)^{(m_0+1)}(x-x_1)...$$

Teorema 4.3

El problema de interpolación de Hermite tiene solución única.

Teorema 4.4 (Error de interpolación de Hermite)

Sea f de clase $\mathcal{C}^N$ en un intervalo $[a, b]$ y de modo que existe $f^{(N+1)}$ en (a, b). Entonces para cada $x \in [a, b]$ existe $\xi \in I$, $I = (\min(x_0, x_1, ..., x_n, x), \max(x_0, x_1, ..., x_n, x))$ para el cual:

$$f(x) - p(x) = \frac{(x - x_0)^{m_0+1} ... (x - x_r)^{m_r+1}}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi)$$

Proposición 4.5 (Diferencias divididas en Hermite)

Podemos extender la idea de las diferencias divididas al caso en el que tengamos argumentos repetidos. Para ello, imponemos las siguientes normas:

- Las diferencias divididas no dependen del orden en que se escriban sus argumentos.
- Cuando todos los argumentos son iguales, la diferencia dividida i-ésima se define como:

$$f[x_0, x_0, ..., x_0] = \frac{f^i(x_0)}{i!}$$

- Si entre los argumentos hay dos con valores distintos, que según la primera norma, podemos suponer que son el primero y el último, se aplica la fórmula:

$$f[x_0, ..., x_i] = \frac{f[x_1, ..., x_i] - f[x_0, ..., x_{i-1}]}{x_i - x_0}$$

Lema 4.6

Dada una función de clase $\mathcal{C}^i$, su diferencia dividida i-ésima es una función continua de sus $i + 1$ variables. Por eso, se verifica por ejemplo que:

$$f[x_0, x_0] = \lim_{x_1 \to x_0} f[x_0, x_1] = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

4.2. INTERPOLANTES CÚBICOS DE HERMITE A TROZOS

Definición 4.7

Dade un intervalo $[a, b]$ y una partición del mismo $\Delta := a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, denotaremos por $\boldsymbol{M_1^3(\Delta)}$ el espacio de las funciones reales de clase $\mathcal{C}^1[a, b]$ que, restringidas a cada subintervalo de la partición (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \ldots, N$, son un polinomio de grado menor o igual que 3.

Teorema 4.8

Para el interpolante cúbico de hermite a trozos h de f tenemos:

$$|f(x) - h(x)| \leq \frac{1}{384} h^4 K_4, \quad x \in [a, b]$$

Donde h es el diámetro de la partición y K_4 es una cota de la derivada cuarta de f en el intervalo $[a, b]$.

Lema 4.9 (Construcción del interpolante cúbico de Hermite a trozos)

Sea la siguiente base:

$$\begin{aligned} \phi_i(x_j) &= \delta_{i,j}, \quad \phi_i'(x_j) = 0, \qquad 0 \leq i \leq N, \\ \theta_i(x_j) &= 0, \quad \theta_i'(x_j) = \delta_{i,j}, \qquad 0 \leq i \leq N \end{aligned}$$

El interpolante cúbico de Hermite a trozos se escribe:

$$h(x) = \sum_{i=0}^{N} (h(x_i)\phi_i(x) + h'(x_i)\theta_i(x))$$

4.3. SPLINES CÚBICOS

Definición 4.10 (Splines)

Definimos $\boldsymbol{M_2^3(\Delta)}$, llamados **splines**, como el espacio de funciones de clase $\mathcal{C}^2[a, b]$ y cúbicas a trozos.

Teorema 4.11

Dada f continua en $[a, b]$ y derivable en a y b, existe un único spline cúbico $h \in M_2^3(\Delta)$ tal que $h(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, ..., N$, $h'(a) = f'(a)$, $h'(b) = f'(b)$.

A este spline se le llama **interpolante completo de f**. Para calcular h se debe resolver primero el sistema siguiente (Lema 4.12) para encontrar los valores $h'(x_i)$ en los nodos interiores y después construir el spline en cada intervalo usando los valores del mismo y su derivada en los extremos del intervalo.

Lema 4.12 (Sistema de ecuaciones para obtención de valores del spline)

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{x_1-x_0} + \frac{2}{x_2-x_1} & \frac{1}{x_2-x_1} & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{x_2-x_1} & \frac{2}{x_2-x_1} + \frac{2}{x_3-x_2} & \frac{1}{x_3-x_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x_{N-1}-x_{N-2}} & \frac{2}{x_{N-1}-x_{N-2}} + \frac{2}{x_N-x_{N-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h'(x_1) \\ h'(x_2) \\ \vdots \\ h'(x_{N-1}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3(h(x_2)-h(x_1))}{(x_2-x_1)^2} + \frac{3(h(x_1)-h(x_0))}{(x_1-x_0)^2} - \frac{h'(x_0)}{x_1-x_0} \\ \frac{3(h(x_3)-h(x_2))}{(x_3-x_2)^2} + \frac{3(h(x_2)-h(x_1))}{(x_2-x_1)^2} \\ \vdots \\ \frac{3(h(x_N)-h(x_{N-1}))}{(x_N-x_{N-1})^2} + \frac{3(h(x_{N-1})-h(x_{N-2}))}{(x_{N-1}-x_{N-2})^2} - \frac{h'(x_N)}{x_N-x_{N-1}} \end{pmatrix}$$

Teorema 4.13

Para el spline completo h de f tenemos:

$$|f(x) - h(x)| \leq \frac{5}{384} h^4 K_4, \quad x \in [a, b]$$

Donde h es el diámetro de la partición y K_4 es una cota de la derivada cuarta de f en el intervalo $[a, b]$.

TEMA 5. POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

5.1. POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

Definición 5.1 (Norma infinito)

Dada una función $v(x)$ acotada definida en $[a, b]$ definimos su **norma infinito** como:

$$\|v\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |v(x)|$$

Teorema 5.2

Para cada entero $n \geq 0$ existe un único polinomio T_n, llamado ***n*-ésimo polinomio de Chebyshev**, tal que para cada θ real se cumple que:

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

El polinomio T_n tiene grado exactamente n. Si $n \geq 1$, el coeficiente de x^n es 2^{n-1}. Además, para $n \geq 2$ se verifica:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

Teorema 5.3

Los n ceros de T_n son los puntos $\eta_k^n = \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2n}\right)$, para $k = 1, ..., n$. Se verifica que:

$$-1 \leq T_n(x) \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1$$

Los valores extremos 1 y −1 se alcanzan en los puntos $\xi_k^n = \cos\left((2k)\frac{\pi}{2n}\right)$, para $k = 0, ..., n$ y en ellos $T_n(\xi_k^n) = (-1)^k$.

Teorema 5.4

El n-ésimo polinomio de Chebyshev $T_n(x)$ tiene norma infinito en $[-1, 1]$ no mayor que cualquier otro polinomio de grado n con su mismo coeficiente director.

Teorema 5.5

El polinomio $T_n(x)/2^{n-1}$ tiene norma infinito en $[-1, 1]$ no mayor que cualquier otro polinomio de grado n y coeficiente director 1.

Teorema 5.6

La norma $\|W\|_\infty$ con $W(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_N)$ es mínima en $[-1, 1]$ si $x_0, ..., x_N$ se escogen como los $N + 1$ ceros del polinomio de Chebyshev T_{N+1}.

5.2. ACONDICIONAMIENTO DE LAS DIVERSAS REPRESENTACIONES DE UN POLINOMIO

Lema 5.7

Muchas veces se emplean los polinomios de Chebyshev como base para representar polinomios de grado $\leq n$ como combinación lineal $a_0 T_0 + ... + a_n T_n$.

Definición 5.8 (Acondicionamiento de una base)

Sea $\mathcal{B}$ una base. Se dice que $\mathcal{B}$ está **bien condicionada** cuando pequeños errores relativos en los coeficientes conducen a pequeños errores relativos en los valores. Por el contrario, $\mathcal{B}$ se dice **mal condicionada** cuando pequeños errores relativos en los coeficientes conducen a errores relativos mucho mayores en los valores del polinomio.

Proposición 5.9

- La base de monomios es muy mal acondicionada si se trabaja en un intervalo $[a, b]$ cuya longitud sea pequeña comparada con la magnitud de a o b. En esas situaciones es mejor trabajar con una base de potencias escaladas $\left[\frac{x-a}{b-a}\right]^k$.
- Para polinomios de grado alto, la base de anterior es también mal acondicionada.
- La base de polinomios de Chebyshev presenta buen acondicionamiento.
- La base de polinomios de Lagrange basados en los ceros del polinomio de Chebyshev es (casi) la mejor acondicionada posible.

TEMA 6. POLINOMIOS ORTOGONALES

6.1. APROXIMACIÓN EN UN ESPACIO CON UN PRODUCTO INTERNO

Definición 6.1 (Función peso)

Dado un intervalo de la recta real (a, b), acotado o no, una **función peso** w en (a, b) es una función real definida en (a, b), continua, positiva excepto quizás en un conjunto finito de puntos (en los que es nula) y tal que para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$ las integrales:

$$\int_a^b x^n w(x)\ dx$$

existen.

Definición 6.2 (Norma de una función peso)

Sean w una función peso, f una función y p su interpolante de grado menor o igual que n. Definimos $\|f - p\|_w$, la **norma w** como:

$$\|f - p\|_w = \left(\int_a^b |f(x) - p(x)|^2\ w(x)\ dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

En particular, buscamos que las desviaciones $f(x) - p(x)$ correspondientes a los x en los que w es mayor contribuyan más que las correspondientes a los x en los que w es pequeño.

Proposición 6.3

Sea X un espacio vectorial normado con norma $\|\cdot\|_X$, S un subconjunto de X no vacío y compacto y $f \in X$. Entonces f tiene al menos una mejor aproximación por elementos de S en la norma $\|\cdot\|_X$.

Proposición 6.4

Sea X un espacio vectorial normado con norma $\|\cdot\|_X$, S un subespacio vectorial de dimensión finita y $f \in X$. Entonces f tiene al menor una mejor aproximación por elementos de S en la norma $\|\cdot\|_X$.

Teorema 6.5

Sea X un espacio vectorial normado con norma $\|\cdot\|_X$ cuya norma deriva de un producto interno $(\cdot,\cdot)_X$ y sea S un subespacio vectorial de X. Si existe p^* aproximación óptima a f por elementos de X, entonces es única y satisface:

$$(f - p^*, p)_X = 0, \quad \forall p \in S \qquad (*)$$

Recíprocamente, si un elemento $p^* \in S$ satisface $(*)$, entonces es la mejor aproximación.

Lema 6.6

Observamos que si el subespacio S es de dimensión finita, la Proposición 6.4 garantiza la existencia de la mejor aproximación y el Teorema 6.5 la unicidad y caracterización de la misma con la propiedad $(*)$. La mejor aproximación es en este caso la **proyección ortogonal** sobre el subespacio S.

6.2. POLINOMIOS ORTOGONALES

Definición 6.7 (Sucesión de polinomios ortogonales)

Dada una función peso w en (a, b), en lo sucesivo consideramos el espacio vectorial $X = L^2_w(a, b)$ con norma $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_w$. Una **sucesión de polinomios ortogonales** $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión en la que Q_n es un polinomio de grado exactamente n y además $(Q_n, Q_m)_w = 0$ si $n \neq m$; $n, m = 0, 1, \ldots$.

Lema 6.8

Notemos que, fijada w, si $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ son dos sucesiones de polinomios ortogonales, entonces $Q_n = \alpha_n R_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ donde α_n es un número real no nulo.

Teorema 6.9 (Construcción de sucesiones de polinomios ortogonales)

Si $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales, entonces existen constantes c_n, a_n, b_n tales que se cumple la **relación de recurrencia de tres términos**:

$$Q_{n(x)} = (c_n x - a_n)Q_{n-1}(x) - b_n Q_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Recíprocamente, definiendo lo siguiente, se genera la sucesión de polinomios ortogonales mónicos:

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= 1, \\ Q_{q(x)} &= x - a_1, \\ a_n &= \frac{(xQ_{n-1}, Q_{n-1})_w}{(Q_{n-1}, Q_{n-1})_w}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \\ b_n &= \frac{(xQ_{n-1}, Q_{n-2})_w}{(Q_{n-2}, Q_{n-2})_w}, \quad n = 2, 3, \ldots, \\ Q_n &= (x - a_n)Q_{n-1} - b_n Q_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots, \end{aligned}$$

Corolario 6.10

Empleando el teorema anterior (Teorema 6.9) y el Teorema 6.5 no es complicado llegar a que la mejor aproximación $p^* \in \mathbb{P}^n$ a $f \in L^2_w(a, b)$ se puede escribir como:

$$p^* = \sum_{i=0}^{n} \frac{(f, Q_i)_w}{(Q_i, Q_i)_w} Q_i$$

Teorema 6.11

Si $\{Q_n\}$ es una sucesión de polinomios ortogonales y $f \in L^2_w(a, b) \cap C(a, b)$ es ortogonal a $Q_0, \ldots, Q_{n-1}$, entonces f es idénticamente nula o hay n puntos r_i en (a, b) en los que f cambia de signo (es decir, hay un entorno de r_i en el que $f > 0$ para $x < r_i$ y $f < 0$ para $x > r_i$, o bien $f < 0$ para $x < r_i$ y $f > 0$ para $x > r_i$)

Corolario 6.12

El polinomio Q_n tiene n raíces reales y simples en el intervalo (a, b).

6.3. ALGUNOS POLINOMIOS ORTOGONALES DE INTERÉS

Lema 6.13

- **Polinomios de Chebyshev**.

Se definen por $T_{n(\cos(\theta))} = \cos(n\theta)$. Son ortogonales en $(-1, 1)$ para la función peso:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

La mejor aproxumación a $f \in L^2_w(a, b)$ por polinomios de grado menor o igual que n se puede escribir como:

$$p^*(x) = \sum_{j=0}^{n} a_n T_{j(x)}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad a_j = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) T_{j(x)} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- **Polinomios de Legendre**.

Son ortogonales en $(-1, 1)$ para $w(x) = 1$ y se definen por:

$$P_{n(x)} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- **Polinomios de Laguerre**.

Son ortogonales en $(0, \infty)$ para el peso e^{-x} y se definen por:

$$L_{n(x)} = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- **Polinomios de Hermite**.

Son ortogonales en $(-\infty, \infty)$ para el peso $\exp(-x^2)$ y se definen por:

$$H_{n(x)} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

TEMA 7. CONVERGENCIA DE LAS MEJORES APROXIMACIONES

7.1. CONVERGENCIA DE LAS MEJORES APROXIMACIONES POLINÓMICAS EN $\mathcal{C}[a, b]$

Teorema 7.1 (Teorema de Weierstrass)

Si f es una función real continua en un intervalo compacto $[a, b]$, dado $\varepsilon > 0$ existe un polinomio P tal que $|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$ para cada x en $[a, b]$.

Definición 7.2 (Polinomios de Bernstein)

Para $n = 1, 2, \ldots$ se define el n-ésimo polinomio de Bernstein B_n (relativo a f) mediante la fórmula:

$$B_{n(x)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} f(k/n)$$

7.2. CONVERGENCIA DE LOS DESARROLLOS ORTOGONALES

Lema 7.3

Supongamos que X es uno de los espacios $L^2_w(a, b)$ considerados en la Sección 6 y que $S_n = \mathbb{P}^n$. Si tomamos una sucesión de polinomios ortogonales $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $L^2_w(a, b)$, la mejor aproximación p_n a $f \in L^2_w$ por polinomios de $\mathbb{P}^n$ se representa explícitamente como:

$$p_n = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{(f_i, Q_i)_w}{(Q_i, Q_i)_w} Q_i \right)$$

Por tanto, la cuestión de si $p_n \to f$ en $L^2_w(a, b)$ se reduce a examinar si:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{(f_i, Q_i)_w}{(Q_i, Q_i)_w} Q_i \right)$$

donde la suma de la serie se entiende en el sentido de la norma de $L^2_w(a, b)$.

Definición 7.4

Cuando lo anterior es cierto, se dice que se ha **desarrollado** f en serie de polinomios ortogonales.

Teorema 7.5

Si $f \in \mathcal{C}([-1,1])$, entonces su desarrollo de Chebyshev converge a f en la norma de L^2_w:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Teorema 7.6

Si $f \in \mathcal{C}^2([-1,1])$, su desarrollo en serie de Chebyshev converge uniformemente hacia f.

TEMA 8. CUADRATURA NUMÉRICA

8.1. INTRODUCCIÓN

Definición 8.1 (Cuadratura)

Sea f una función integrable en un intervalo acotado (a, b). El cálculo aproximado de su integral, $\int_a^b f(x)dx$, se denomina **cuadratura**.

8.2. REGLAS DE CUADRATURA

Definición 8.2 (Reglas de cuadratura)

Las **reglas de cuadratura** suelen estar formadas por una combinación lineal de valores nodales de la función f:

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_{N+1}(f) = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_N f(x_N)$$

Fijados N y los valores de α_i y x_i, $i = 0, \ldots, N$ la expresión anterior nos da una aproximación al valor exacto de la integral. Los x_i se llaman abcisas o **nodos** de la regla de cuadratura, suponemos que son distintos dos a dos. Los nodos suelen pertenecer al intervalo $[a, b]$ pero no es imprescindible. Los α_i se llaman **pesos** de la regla de cuadratura.

Lema 8.3 (Algunas reglas de cuadratura sencillas)

- Regla del rectángulo → $I^R(f) = (b-a)f(a)$
- Regla del punto medio → $I^{PM}(f) = (b-a)f(c), \ \ c = \frac{a+b}{2}$
- Regla de los trapecios → $I^T(f) = \frac{b-a}{2}f(a) + \frac{b-a}{2}f(b)$
- Regla de Simpson → $I^S(f) = \frac{b-a}{6}f(a) + \frac{4(b-a)}{6}f(c) + \frac{b-a}{6}f(b), \ \ c = \frac{a+b}{2}$

Definición 8.4 (Grado de exactitud de las reglas de cuadratura)

Una regla de cuadratura tiene **grado de exactitud** $M \geq 0$ si calcula exactamente la integral de cada polinomio de grado menor o igual que M pero no calcula exactamente la integral de todos los polinomios de grado $M + 1$. Es decir, $I(f) = I_{N+1}(f)$, para todo f polinomio de grado hasta M.

Lema 8.5 (Grados de exactitud de algunas reglas de cuadratura)

- Regla del rectángulo $\rightarrow$ grado de exactitud = **0**
- Regla del punto medio $\rightarrow$ grado de exactitud = **1**
- Regla del trapecio $\rightarrow$ grado de exactitud = **1**
- Regla del Simpson $\rightarrow$ grado de exactitud = **3**

8.3. OBTENCIÓN DE REGLAS DE CUADRATURA

Proposición 8.6 (Método interpolatorio)

Consiste en sustituir el integrando f por el polinomio interpolador de Lagrange de grado N, p, que coincide con f en los nodos x_i, $i = 0, \dots, N$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_{N+1}(f) = \int_a^b p(x)dx = f(x_0)\int_a^b l_0(x)dx + \dots + f(x_N)\int_a^b l_N(x)dx$$

Luego:

$$I_N(f) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i f(x_i) \text{ donde } \alpha_i = \int_a^b l_i(x)dx$$

La regla obtenida por este procedimiento se llama **regla interpolatoria**.

Teorema 8.7

Dados $N \geq 0$ y $N + 1$ nodos x_i distintos dos a dos, la correspondiente regla de cuadratura interpolatoria tiene grado de precisión al menos N.

Proposición 8.8 (Método de coeficientes indeterminados)

Este método se basa en observar que la regla de cuadratura tiene grado de precisión N si y solo si $I_{N+1}(f) = I(f)$ para $f(x) = 1, x, \ldots, x^N$. Imponiendo estas condiciones obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 + \alpha - 1 + \ldots \alpha_N &= (b - a), \\
\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_N x_N &= \frac{b^2 - a^2}{2}, \\
&\vdots \\
\alpha_0 x_0^N + \alpha_1 x_1^N + \ldots \alpha_N x_N^N &= \frac{b^{N+1} - a^{N+1}}{N+1}
\end{aligned}$$

Observemos que el anterior es un sistema de $N + 1$ ecuaciones con $N + 1$ incógnitas, los α_i, que tiene por matriz la matriz de Vandermonde, que sabemos tiene determinante distinto de cero si y solo si los nodos son distintos dos a dos. Por tanto, existe una única solución que nos da la regla de cuadratura con grado de precisión al menos N.

Teorema 8.9

Dados $N \geq 0$ y $N + 1$ nodos distintos dos a dos existe una única regla de cuadratura de grado de precisión al menos N. Los pesos de la regla se pueden calcular resolviendo el sistema anterior.

Proposición 8.10 (Método del desarrollo de Taylor)

En general, para aplicar el método del desarrollo de Taylor seguiremos los siguientes pasos:

1. Escoger un punto para hacer el desarrollo de Taylor. Puede ser uno de los nodos o cualquier punto que conduzca a simplificar los cálculos, en ocasiones $\frac{a+b}{2}$.

2. Desarrollar los valores $f(x_i)$ en desarrollos de Taylor en torno al punto del apartado anterior.

3. Desarrollar el integrando f en torno al mismo punto.

4. Imponer que coincidan el mayor número de términos posibles en ambos desarrollos.

Proposición 8.11 (Error en las fórmulas de cuadratura)

Se pueden probar las siguientes cotas de error para las fórmulas más conocidas:

- Regla del rectángulo $\rightarrow$ Si $f \in \mathcal{C}^1[a,b]$ entonces existe $\eta \in [a,b]$ tal que

$$E^R(f) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$$

- Regla del punto medio $\rightarrow$ Si $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$ entonces existe $\eta \in [a,b]$ tal que

$$E^{PM}(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f'''(\eta)$$

- Regla de los trapecios $\rightarrow$ Si $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$ entonces existe $\eta \in [a,b]$ tal que

$$E^T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$$

- Regla de Simpson $\rightarrow$ Si $f \in \mathcal{C}^4[a,b]$ entonces existe $\eta \in [a,b]$ tal que

$$E^S(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$$

Lema 8.12

Sean α y g funciones reales en $[a,b]$ con $\alpha \geq 0$ y g continua. Supongamos que $A = \int_a^b \alpha(x)dx \neq 0$ y que existe $\int_a^b g(x)\alpha(x)dx$ entonces existe $\eta \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b g(x)\alpha(x)dx = g(\eta)\int_a^b \alpha(x)dx$$

8.4. REGLAS DE CUADRATURA COMPUESTAS

Definición 8.13 (Reglas de cuadratura compuestas)

Sea $\Delta := a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, podemos escribir:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)dx$$

Lema 8.14 (Algunas reglas de cuadratura compuestas)

- Regla del rectángulo:

$$I^{RC}(f) = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (x_N - x_{N-1})f(x_{N-1})$$

- Regla del punto medio:

$$I^{PMC}(f) = (x_1 - x_0)f\left(x_{1/2}\right) + (x_2 - x_1)f\left(x_{3/2}\right) + \ldots + (x_N - x_{N-1})f\left(x_{N-1/2}\right)$$

- Regla del trapecio:

$$\begin{aligned} I^{TC}(f) = \frac{x_1 - x_0}{2}f(x_0) + \frac{x_1 - x_0}{2}f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{2}f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{2}f(x_2) + \ldots \\ \ldots + \frac{x_N - x_{N-1}}{2}f(x_{N-1}) + \frac{x_N - x_{N-1}}{2}f(x_N) = \\ = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i - x_{i-1}}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i))] \end{aligned}$$

- Regla de Simpson:

$$\begin{aligned} I^{SC}(f) = \frac{x_1 - x_0}{6}f(x_0) + \frac{4(x_1 - x_0)}{6}f\left(x_{1/2}\right) + \frac{x_1 - x_0}{6}f(x_1) + \ldots \\ \ldots + \frac{x_N - x_{N-1}}{6}f(x_{N-1}) + \frac{4(x_N - x_{N-1})}{6}f\left(x_{N-1/2}\right) + \frac{x_N - x_{N-1}}{6}f(x_N) = \\ = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i - x_{i-1}}{6}\left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_i)\right] \end{aligned}$$

Lema 8.15

Sea g una función continua en $[a, b]$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, N$, no todos nulos, y $\eta_i \in [a, b]$, $i = 1, \ldots, N$. Entonces existe $\eta \in [a, b]$ tal que:

$$\alpha_1 g(\eta_1) + \alpha_2 g(\eta_2) + \ldots + \alpha_{N(\eta_N)} = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_N) g(\eta)$$

Proposición 8.16 (Error en las fórmulas de cuadratura compuestas)

Empleando el Lema 8.15 obtenemos las siguientes cotas de error para las reglas compuestas. Sean $h = \max_{1 \leq i \leq N}(x_i - x_{i-1})$ y K_i una cota para $f^{(i)}$ en $[a, b]$:

- Regla del rectángulo compuesta $\rightarrow$ Si $f \in \mathcal{C}^1[a, b]$ entonces existe $\eta \in [a, b]$ tal que

$$|E^{RC}(f)| = \left|\frac{1}{2}\left[(x_1 - x_0)^2 + \ldots + (x_N - x_{N-1}^2)\right] f'(\eta)\right| \leq \frac{1}{2} h(b-a) K_1$$

- Regla del punto medio compuesta $\rightarrow$ Si $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$ entonces existe $\eta \in [a, b]$ tal que

$$|E^{PMC}(f)| = \left|\frac{1}{24}\left[(x_1 - x_0)^3 + \ldots + (x_N - x_{N-1})^3\right] f''(\eta)\right| \leq \frac{1}{24} h^2 (b-a) K_2$$

- Regla de los trapecios compuesta $\rightarrow$ Si $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$ entonces existe $\eta \in [a, b]$ tal que

$$|E^{TC}(f)| = \left|-\frac{1}{12}\left[(x_1 - x_0)^3 + \ldots (x_N - x_{N-1})^3\right] f''(\eta)\right| \leq \frac{1}{12} h^2 (b-a) K_2$$

- Regla de Simpson compuesta $\rightarrow$ Si $f \in \mathcal{C}^4[a, b]$ entonces existe $\eta \in [a, b]$ tal que

$$|E^{SC}| \leq \frac{1}{2880} h^4 (b-a) K_4$$

ⓘ Relación con la interpolación polinómica a trozos

- La regla de los trapecios compuesta se obtiene sustituyendo f por su interpolante lineal a trozos en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_N$.
- La regla de Simpson compuesta se obtiene sustituyendo f por su interpolante cuadrático a trozos en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_N$ y los puntos medios.

8.5. CUADRATURA GAUSSIANA

Definición 8.17 (Producto interno de dos funciones)

- Dado un intervalo (a,b) y una función (que llamamos función peso) $w(x)$ definida en (a,b) con $w(x)$ positiva excepto tal vez en un número finito de puntos donde es nula. Definimos el producto interno de dos funciones de cuadrado integrable respecto al peso $w(x)$ como:

$$(f,g)_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

- Al espacio de funciones de cuadrado integrable respecto al peso $w(x)$ lo denotaremos por $L^2_w(a,b)$. Las funciones peso en (a,b) se definen de modo que exista $\int_a^b x^n w(x)dx,\ \forall n$.

- Dada una función peso en (a,b) existe una familia de polinomios ortogonales en (a,b) respecto a esa función peso:

$$\{q_0, q_1, \dots, q_n, \dots\}$$

que verifican:

  - El polinomio q_n tiene grado exactamente n.
  - $(q_n, q_m)_w = 0$ si $n \neq m$.
  - Los polinomios ortogonales son únicos (salvo una constante) y se pueden generar por recurrencia.

Lema 8.18

La regla gaussiana se obtiene tomando $x_0, x_1, \dots, x_N$ los ceros del polinomio de Legendre de grado $N+1$ en el intervalo (a,b), que sabemos tiene $N+1$ raíces reales y distintas.

Teorema 8.19

Una regla de cuadratura gaussiana puede tener a lo sumo grado de precisión $2N+1$. Este grado se alcanza cuando los nodos x_i son las raíces del polinomio de grado $N+1$ ortogonal a los de grado N en $[a,b]$ respecto al peso 1.

Teorema 8.20

Los coeficientes α_j, $j = 0, ..., N$ de la regla gaussiana de $N + 1$ nodos son todos positivos.

8.6. ERROR EN LA REGLA DE CUADRATURA GAUSSIANA

Teorema 8.21 (Error en la regla de cuadratura gaussiana)

Si $f \in \mathcal{C}^{2N+2}[a, b]$, entonces el error en la regla de cuadratura gaussiana de grado $2N + 1$ verifica:

$$E_{N+1}(f) = \frac{f^{(2N+2)(\eta)}}{(2N + 2)!} \int_a^b (x - x_0)^2 ...(x - x_N)^2 dx, \quad \eta \in [a, b]$$

Definición 8.22 (Cuadratura de Lobatto)

Se define la **regla de cuadratura de Lobatto** como:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_{N-1} f(x_{N-1}) + \alpha_N f(b)$$

en la que, a diferencia de la regla anterior, hemos fijado los nodos a y b y dejamos libres los nodos $x_1, ..., x_{N-1}$ y los pesos $\alpha_i, i = 0, ..., N$. Como tenemos $2N$ parámetros libres esperamos tener una regla de cuadratura de grado $2N - 1$.

Con esto, comprobamos que los nodos $x_1, ..., x_{N-1}$ son los $N - 1$ ceros de la derivada del polinomio de grado N, p_N, ortogonal en $[a, b]$ respecto al peso 1 (y por tanto el trasladado a $[a, b]$ del polinomio de Legendre L_N).

Teorema 8.23

Sean $x_1, ..., x_{N-1}$ los ceros del polinomio ortogonal q_{N-1} de grado $N - 1$ respecto al peso $w(x) = (x - a)(b - x)$, entonces $x_1, ..., x_{N-1}$ son los ceros de p'_N donde p_N es el polinomio ortogonal de grado N respecto al peso 1.

Definición 8.24 (Cuadratura de Radau)

De forma análoga a la cuadratura de Lobatto se puede probar que existe una única regla de cuadratura, la **regla de cuadratura de Radau**, con grado de precisión $2N$ de la forma:

$$\alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(x_1) + \ldots + a_N f(x_N)$$

En este caso, a diferencia de la cuadratura de Lobatto, fijamos solo el nodo a y nos quedan libres los nodos $x_1, \ldots, x_N$ y los $N + 1$ pesos, lo que nos da $2N + 1$ parámetros libres que nos permiten determinar una única regla con grado de exactitud $2N$.

TEMA 9. PROBLEMAS DE VALORES INICIALES PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

9.1. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES

Lema 9.1

En este apartado vamos a tratar de encontrar numéricamente las soluciones (raíces) de ecuaciones

$$f(x) = 0$$

donde f es una función dada, real de variable real. A estas soluciones se les llama también ceros de f. Si f es un polinomio lineal o cuadrático la solución es muy sencilla.

Proposición 9.2 (Método de la bisección)

Supongamos que f es continua en un intervalo $[a, b]$ y f toma valores de sino contrario en a y b, $(f(a) > 0 \;\text{ ó }\; f(a) < 0 \;\text{ y }\; f(b) > 0)$. En estas condiciones el teorema de Bolzano garantiza que f se anula en algún punto del intervalo. Llamemos $I_0 = [a, b]$ y $c = \frac{a+b}{2}$ el punto medio del intervalo. Si $f(c) = 0$ ta hemos terminado. En caso contrario, en uno de los dos intervalos $[a, c]$ ó $[c, b]$ f tiene signo contrario en los extremos. Definimos I_1 el intervalo donde f cambia de signo en los extremos. Ahora estamos en la situación del comienzo con la diferencia de que la longitud del intervalo I_1 es la mitad de la longitud del intervalo I_0. Podemos iterar el procedimiento de forma que, o bien encontramos un 0 de la función f, o bien garantizamos que el 0 está en un intervalo I_n de longitud $\frac{b-a}{2^n}$.

Lema 9.3 (Características del método de la bisección)

- Funciona siempre.
- Da cotas superior e inferior para la raíz buscada.
- Es más lento que otros métodos, que por otra parte, son más inseguros.

Proposición 9.4 (Método de la secante)

Sean x_0 y x_1 dos aproximaciones a la raíz α que buscamos. Sea $p_1(x)$ la recta que interpola a f en x_0 y x_1. En lugar de resolver $f(x) = 0$ vamos a resolver $p_1(x) = 0$. Si llamamos x_2 a la raíz de p_1 (que verifica $p_1(x_2) = 0$) esperamos que sea una mejor aproximación a α que x_0 y x_1. Ahora iteramos el procedimiento partiendo de x_1 y x_2 y llamando x_3 al cero de la recta que interpola a f en x_1 y x_2. En general, interpolando en x_n y x_{n+1} obtenemos la recta

$$y = f(x_n) + f[x_n, x_{n+1}](x - x_n)$$

Proposición 9.5 (Iteración de punto fijo)

Proposición 9.6 (Método de Newton)

9.2. INTRODUCCIÓN

9.3. MÉTODOS DE UN PASO

Definición 9.7 (Método de un paso)

Dado que $y(x_0) = y_0$, supongamos que hemos calculado y_n hasta un cierto valor de n, $0 \leq n \leq N - 1$, $N \geq 1$. Entonces, en general, un **método de un paso** puede escribirse de la forma:

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h), \qquad n = 0, 1, ..., N - 1, \qquad y_0 = y(x_0)$$

donde $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$ es una función continua respecto de sus variables.

Lema 9.8 (Algunos ejemplos de métodos de un paso)

- Método de Euler: En cada subintervalo $[x_n, x_{n+1}]$, sustituimos la curva solución por su recta tangente.

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

- Regla del punto medio:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)$$

- Regla del trapecio:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$

Importante

En líneas generales, la idea detrás del método de Euler es, en cada subintervalo $[x_n, x_{n+1}]$, sustituir la curva solución por su recta tangente.

Definición 9.9 (Error global y error de truncación)

Para determinar la precisión de un método de un paso:

- Definimos el **error global** e_n como:

$$e_n = y(x_n) - y_n$$

- Definimos el **error de truncación** T_n como:

$$T_n = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - \Phi(x_n, y(x_n); h)$$

Teorema 9.10

Dado el método de un paso, supongamos que además de continua respecto de sus argumentos, la función Φ satisface una condición de Lipschitz respecto de su segundo argumento en $D = [x_0, X] \times \mathbb{R}^d$, es decir, existe L_Φ tal que, para $0 \leq h \leq h_0$ y para (x, u) (x, v) en D se tiene que:

$$\|\Phi(x, u; h) - \Phi(x, v; h)\| \leq L_\Phi \|u - v\|$$

Entonces el error se puede acotar por:

$$\|e_n\| \leq \frac{T}{L_\Phi}\left(e^{L_\Phi (x_n - x_0)} - 1\right); \qquad n = 0, 1, ..., N, \qquad T = \max_{0 \leq n \leq N-1} \|T_n\|$$

Corolario 9.11 (Cota de error del método de Euler)

Sea $M_2 = \max_{\xi \in [x_0, X_M]} \|y''(\xi)\|$. Teniendo en cuenta que en el método de Euler $\Phi(x_n, y_n; h) \equiv f(x_n, y_n)$ y por tanto $L_\Phi = L$ con L la constante de Lipschitz de f, entonces usando el Teorema 9.10 tenemos que:

$$\|e_n\| \leq \frac{1}{2} M_2 \left[e^{L(x_n - x_0)} - 1\right] h \qquad n = 0, 1, ..., N$$

Definición 9.12 (Consistencia)

Un método numérico se dice que es **consistente** si el error de truncación T_n tiende a cero cuando $h \to 0$. Con la Definición 9.9 es fácil ver que un método de un paso es consistente si

$$\Phi(x, y; 0) \equiv f(x, y)$$

Esta condición se toma a veces como la definición de consistencia. En lo que sigue asumiremos que se verifica siempre.

Teorema 9.13

Supongamos que la función $\Phi(\cdot,\cdot;\cdot)$ es continua en $D \times [0, h_0]$, ($D = [x_0, X] \times \mathbb{R}^d$ y satisface la condición de consistencia y la condición de Lipschitz

$$\|\Phi(x,u;h) - \Phi(x,v;h)\| \leq L_\Phi \|u - v\| \qquad \text{en } D \times [0, h_0]$$

Entonces las aproximaciones $\{y_n\}$ obtenidas de la Definición 9.7 usando los puntos $x_n = x_0 + nh$, $n = 1, 2, \ldots, N$ con valores decrecientes de h convergen a la solución del problema de valores iniciales , es decir

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y(x) \;\text{ si }\; x_n \to x \in [x_0, X_M] \;\text{ cuando }\; h \to 0 \;\text{ y }\; n \to \infty$$

Definición 9.14 (Orden de consistencia)

Se dice que un método de un paso tiene **orden de consistencia** p si p es el mayor entero positivo para el que se cumple que para cualquier solución $(x, y(x))$ en D del problema de valores iniciales, existen constantes K y h_0 tal que

$$\|T_n\| \leq Kh^p, \qquad \text{para } 0 < h \leq h_0$$

9.4. ANÁLISIS DE ERROR DE UN MÉTODO IMPLÍCITO DE UN PASO

Definición 9.15 (Métodos implícitos)

Un método de un paso es un **método implícito** si, en cada paso, determinar el nuevo valor y_{n+1} requiere la solución de un sistema, en general no lineal.

Importante

La diferencia principal entre el método de Euler y la regla del trapecio es que el segundo es implícito, el valor de y_{n+1} aparece a la izquierda y a la derecha en la definición del método. Calcular y_{n+1} a partir de y_n requiere la solución de un sistema que será en general no lineal. Esta complicación adicional se traduce en un aumento del coste computacional.

TEMA 10. MÉTODOS RUNGE-KUTTA

10.1. INTRODUCCIÓN

El método de Euler solo tiene orden uno pero es muy simple y fácil de implementar. Además es barate (su coste computacional es pequeño) dado que para obtener y_{n+1} a partir de y_n solo se requiere una evaluación de f en (x_n, y_n). El objetivo de los métodos Runge-Kutta que vamos a estudiar en esta lección es alcanzar una mayor precisión a costa de incrementar el coste computacional del método, dado que tendremos que evaluar f en puntos intermedios entre $(x_n, y(x_n))$ y $(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$.

10.2. MÉTODOS RUNGE-KUTTA

Definición 10.1 (Métodos de Runge-Kutta)

Consideramos por ejemplo la familia de métodos:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(ak_1 + bk_2) \\ k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1) \end{aligned}$$

donde a, b, α y β son parámetros a determinar. Por simplicidad, suponemos que f es una función escalar.

El método anterior se puede escribir en la forma general que vimos para los métodos de un paso:

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h), \quad n = 0, 1, ..., N-1, \quad y_0 = y(x_0) \\ \Phi(x_n, y_n; h) = af(x_n, y_n) + bf(x_n + \alpha h, y_n + \beta h f(x_n, y_n)) \end{aligned}$$

La condición de consistencia $\Phi(x, y; 0) \equiv f(x, y)$ nos indica que esta familia de métodos es consistente si y solo si $a + b = 1$. El resto de parámetros se pueden buscar tratando de maximizar el orden de precisión del método.

Lema 10.2

El error de truncación del método queda:

$$T_n = h^2\left(\left(\frac{1}{6}-\frac{\alpha}{4}\right)(f_{xx}+f_{yy}f^2)+\left(\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)f_{xy}+\frac{1}{6}(f_xf_y+f_y^2f)\right)+O(h^3)$$

10.3. ALGUNOS EJEMPLOS DE MÉTODOS RUNGE-KUTTA

Lema 10.3 (Método de Euler modificado)

En este caso tomamos $\alpha = \frac{1}{2}$ para obtener:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n+\frac{1}{2}h, y_n+\frac{1}{2}hf(x_n,y_n)\right)$$

Lema 10.4 (Método de Euler mejorado)

Tomando $\alpha = 1$ obtenemos:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n+\frac{1}{2}h, y_n+\frac{1}{2}hf(x_n,y_n)\right)$$

Corolario 10.5

Para estos dos métodos es fácil comprobar que el error de truncación es:

- Euler modificado $\to T_n = \frac{1}{6}h^2\left[f_y(f_x+f_yf)+\frac{1}{4}(f_{xx}+2f_{xy}f+f_{yy}f^2)\right]+O(h^3)$
- Euler mejorado $\to T_n = \frac{1}{6}h^2\left[f_y(f_x+f_yf)-\frac{1}{2}(f_{xx}+2f_{xy}f+f_{yy}f^2)\right]+O(h^3)$

Lema 10.6 (Método Runge-Kutta clásico)

Uno de los métodos más usados se conoce como **método de Runge-Kutta clásico** de orden cuatro:

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),\\
k_1 &= f(x_n, y_n),\\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right),\\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right),\\
k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3)
\end{aligned}
$$

Lema 10.7 (Método de Heun)

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3),\\
k_1 &= f(x_n, y_n),\\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}k_1\right),\\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{2}{3}h_n, y_n + \frac{2}{3}h_n k_2\right),
\end{aligned}
$$

Lema 10.8 (Regla de los 3/8)

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h_n}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4),\\
k_1 &= f(x_n, y_n),\\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}k_1\right),\\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{h}{3}(3k_2 - k_1)\right),\\
k_4 &= f(x_n + h_n, y_n + h(k_1 - k_2 + k_3)).
\end{aligned}
$$

Definición 10.9 (Métodos Runge-Kutta explícitos de s etapas)

Se definen los **métodos Runge-Kutta explícitos de s etapas** como aquellos de la forma:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n(b_1 k_1 + \dots + b_s k_s), \\ k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h_n, y_n + h_n a_{21} k_1), \\ k_3 &= f(x_n + c_3 h_n, y_n + h_n(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)), \\ &\vdots \\ k_s &= f\left(x_n + c_s h_n, y_n + h_n\left(a_{s1} k_1 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1}\right)\right) \end{aligned}$$

Así por ejemplo, el método de Euler mejorado es de $s = 2$ etapas, el de Heun de tres etapas y el método de Runge-Kutta clásico y la regla de los $\frac{3}{8}$ son de cuatro etapas. El método de Euler es de una etapa.

Lema 10.10

Salvo alguna excepción de poca importancia práctica, todos los métodos Runge-Kutta satisfacen que:

$$\sum_j a_{ij} = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

Supondremos que esta propiedad se cumple en todos los casos.