CHULETARIO TEORÍA DE LA INTEGRAL Y LA MEDIDA

Álvaro Grande Blázquez

2025 ~ 2026

Índice

TEMA 1. INTRODUCCIÓN

1.1. LA INTEGRAL HASTA 1900. LA INTEGRAL DE RIEMANN

Definición 1.1 (Integral de Riemann)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y sea $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Sea $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \ldots$ y sean también $s_j = \sup_{I_j} f(x)$ y $\inf_{I_j} f(x)$. Definimos las **sumas superior e inferior**, respectivamente, como:

$$\mathcal{U}_f(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} s_j(x_j - x_{j-1}) \quad ; \quad \mathcal{L}_f(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} i_j(x_j - x_{j-1})$$

Decimos entonces que f es **integrable en el sentido de *Riemann*** si existen particiones que permitan aproximar las sumas anteriores de forma arbitraria.

Teorema 1.2

Toda función f continua definida en un intervalo cerrado es integrable en el sentido de *Riemman*. Lo mismo es cierto si f es acotada y tiene solo un número finito de discontinuidades.

Teorema 1.3 (de Lebesgue)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:

- f es integrable en el sentido de *Riemann*.
- El conjunto de discontinuidades de f, es decir,

$$\mathcal{D}_f = \{x \in [a, b] : f \text{ no es continua en x}\}$$

verifica la propiedad de que $\forall \varepsilon > 0$ podemos encontrar un cubrimiento numerable de $\mathcal{D}_f$ por intervalos abiertos:

$$\left\{(a_j, b_j)_{j \geq 1}\right\} \quad \text{tal que} \quad \sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j) < \varepsilon$$

Los conjuntos con esta propiedad se denominan de **medida cero**.

Teorema 1.4 (Teorema Fundamental del Cálculo)

Sea f continua y $F(x) = \int_0^x f(x)dy$. Entonces F es derivable y $F'(x) = f(x)\ \forall x$.

1.2. LA INTEGRAL SEGÚN LEBESGUE

Definición 1.5 (Medida de Lebesgue)

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se define su «medida» de Lebesgue como:

$$m(A) = \inf\left\{\sum_{k\geq 1} \mathrm{long}(I_k),\ \text{ con } \{I_k\} \text{ intervalos y } \bigcup_{k\geq 1} I_k \supset A\right\}$$

Lema 1.6

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tiene medida de Lebesgue cero si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \{I_k\} \text{ sucesión de intervalos con } \bigcup_{k\geq 1} I_k \supset A, \text{ tal que } \sum_{k\geq 1} \mathrm{long}(I_k) < \varepsilon$$

Definición 1.7

Una determinada propiedad $\mathcal{P}$ se dice que se cumple **en casi todo punto (c.t.p.)** si el conjunto de puntos donde NO se cumple $\mathcal{P}$ tiene medida cero.

Propiedad 1.8 (Propiedades de la medida de Lebesgue)

- $m(\emptyset) = 0$
- Si $A \subset B$ entonces $m(A) \leq m(B)$.
- Dada una familia numerable de subconjuntos, $\{A_k\}_k$, entonces

$$m\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right) \leq \sum_{k\geq 1} m(A_k)$$

- La unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero.

Lema 1.9

Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, entonces $m(I) = \text{long(I)}$.

Definición 1.10 (Medida exterior de Lebesgue)

La función sobre conjuntos definida anteriormente se denomina **medida exterior** para la medida de Lebesgue y se denota por m^*, es decir, $\forall A \subset \mathbb{R}$:

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{k\geq 1} \text{long}(I_k),\ \text{ con } \{I_k\} \text{ intervalos y } \bigcup_{k\geq 1} I_k \supset A\right\}$$

Según veremos posteriormente, existe una clase de subconjuntos, que denominaremos **medibles**, sobre los cuales m^* será numerablemente aditiva.

Definición 1.11

$A \subset [0,1]$ es **medible** si $m^*(A) + m^*(\mathcal{C}A) = 1$, con $\mathcal{C}A = [0,1] \setminus A$.

TEMA 2. TEORÍA GENERAL DE LA MEDIDA Y LOS TEOREMAS DE CONVERGENCIA

2.1. ESPACIOS DE MEDIDA

Definición 2.1 (Sigma álgebra)

Dado un conjunto X, se dice que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ es una **σ-álgebra** si verifica:

- $X \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ es cerrada por complementación; esto es que $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ es cerrada por uniones numerables, finitas o no; esto es que

$$A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$$

Lema 2.2

Si $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{D}}$ es una colección arbitraria de σ-álgebras, entonces $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{D}} \mathcal{A}_\alpha$ es una σ-algebra.

Definición 2.3 (Sigma álgebra de Borel)

En $\mathbb{R}$ se define la **σ-álgebra de *Borel*** ($\mathcal{B}_\mathbb{R}$) como aquella generada por los intervalos abiertos:

$$\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$$

Definición 2.4 (Medida)

Dada una σ-álgebra $\mathcal{A}$ en X. Se dice que $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es una **medida** (sobre $\mathcal{A}$) si:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Para toda familia numerable $\{A_j\}_{j \geq 1}$ de $\mathcal{A}$ cuyos elementos son disjuntos dos a dos:

$$\mu\left(\biguplus_{j \geq 1} A_j\right) = \sum_{j \geq 1} \mu(A_j)$$

Definición 2.5 (Espacio de medida)

Llamaremos **espacio de medida** a toda terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ compuesta por un conjunto X, una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$, y una medida μ definida sobre $\mathcal{A}$. Diremos que la medida μ sobre $\mathcal{A}$ es **finita** si $\mu(X) < \infty$ y que es **σ-finita** si podemos escribir $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$, con $X_n \in \mathcal{A}$ y $\mu(X_n) < \infty,\ \ n = 1, 2, 3, \ldots$.

Proposición 2.6 (Convergencia monótona de conjuntos)

Sea μ una medida sobre la σ-álgebra $\mathcal{A}$, se tienen los siguientes resultados:

- Si $A, B \in \mathcal{A}$, con $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. Además, si $\mu(A) < \infty$ se tiene que $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
- Si $A_n \in \mathcal{A}$ y $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n$, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$$

- Si $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \supset A_{n+1}$ $\forall n$ y $\mu(A_N) < \infty$ para algún N, entonces:

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$$

2.2. FUNCIONES MEDIBLES LEBESGUE

Definición 2.7

Diremos que $f : X \to \mathbb{R}$ es **$\mathcal{A}$-medible** si $\forall a \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$f^{-1}((a, \infty)) = \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$$

Lema 2.8

Dada $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-medible, la familia $\mathcal{A}_f = \{B \subset \mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ es una σ-álgebra en $\mathbb{R}$. En consecuencia, contiene a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ porque $(a, \infty) \in \mathcal{A}_f$ $\forall a$.

Proposición 2.9

- Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son medibles, entonces $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$ son medibles.
- El supremo y el ínfimo de una familia numerable de funciones medibles son medibles.
- El límite superior, el límite inferior y el límite de funciones medibles son todos medibles.
- Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son medibles, entonces su suma $f + g$ es también medible.
- Si $f : X \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{A}$ medible y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, la composición $g \circ f$ es $\mathcal{A}$-medible.

2.3. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES MEDIBLES POSITIVAS

Definición 2.10 (Función característica)

Dado un conjunto A, se define la **función característica (o indicatriz)** de A como:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Definición 2.11 (Función simple)

Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, se dice que $s : X \to \mathbb{R}$ es una **función simple** si se puede escribir como una combinación lineal de funciones características de conjuntos de $\mathcal{A}$. Es decir:

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}(x), \quad \text{con } c_j \in \mathbb{R},\ A_j \in \mathcal{A},\ j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Definición 2.12 (Integración de funciones simples)

Para una función simple $s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}(x)$, se define su integral como:

$$\int_X s(x) d\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j)$$

siempre que o bien $\mu(A_j) < \infty$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, o bien los c_j sean positivos, en cuyo caso no importa que los A_j sean de medida finita o no.

Definición 2.13 (Integración de funciones medibles)

Para una función medible f, con $f(x) \geq 0 \ \forall x$, se define su integral como sigue:

$$\int_X f(x) d\mu = \sup \left\{ \int_X s(x) d\mu : 0 \leq s(x) \leq f(x),\ s(x) \text{ simple} \right\}$$

Nota

- El supremo en esta definición podría valer ∞.
- f puede alcanzar valores infinitos siempre que el conjunto $f^{-1}(\infty)$ sea medible.

Proposición 2.14

- Sean u, v funciones simples, entonces $u + v$ es simple y $\int (u + v)\, d\mu = \int u d\mu + \int v d\mu$
- Sean f, g funciones medibles tal que $0 \leq g \leq f$, entonces $\int g\, d\mu \leq \int f\, d\mu$

Definición 2.15 (Función densidad)

Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y $s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}(x)$ es una función simple positiva, entonces la función $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ dada por:

$$\nu(A) = \int_A s(x) d\mu(x) = \int_X s(x) \chi_A(x) d\mu(x)$$

define una medida sobre $\mathcal{A}$. Escribiremos $d\mu = s d\mu$ y diremos que s es la **función densidad (o función derivada)** de ν con respecto a μ.

Teorema 2.16 (Teorema de la convergencia monótona)

Si $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente de funciones medibles positivas $(0 \leq f_1 \leq \ldots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \ldots)$ y sea $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Entonces se tiene:

$$\int_X \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) d\mu = \int_X f(x) d\mu = \lim_{n \to \infty} \left(\int_X f_n(x) d\mu \right)$$

Corolario 2.17 (Convergencia monótona para series)

Sea $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles y positivas. Entonces:

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X g_n(x) d\mu\right)$$

Lema 2.18

Sea f una función medible y positiva. Entonces existe una sucesión monótona creciente de funciones simples positivas $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \ldots$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x), \quad \forall x$$

Proposición 2.19 (Desigualdad de Chebyshev)

Si f es medible y $a > 0$, se tiene:

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_X |f(y)| d\mu(y)$$

Proposición 2.20

Si $f, g \geq 0$ son medibles, entonces:

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

Lema 2.21 (Fatou)

Dada una sucesión de funciones medibles y positivas $\{f_n\}$, se tiene:

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} (f_n(x))\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X f_n(x) d\mu\right)$$

Definición 2.22

Se dice que f es **integrable** si $\int f^+ d\mu < \infty$ y $\int f^- d\mu < \infty$ y escribimos:

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

Teorema 2.23 (Teorema de la Convergencia Dominada)

En $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, si la sucesión de funciones medibles $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a una función $f(x)$ y además $|f_n(x)| \leq F(x)$ $\forall n$, $\forall x$ con F medible, positiva y tal que $\int_X F(x) \, d\mu < \infty$, entonces $f(x)$ es integrable y se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| \, d\mu = 0$$

En particular,

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) d\mu = \int_X f(x) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n(x) \, d\mu\right)$$

Corolario 2.24

Si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ son medibles y $\sum_{k=1}^{\infty} (\int |f_k(x)| \, d\mu) < \infty$, entonces la serie $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge en *c.t.p.* y

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_X f_k(x) \, d\mu\right)$$

Lema 2.25

$$\int_X |f(x)| \, d\mu(x) = \int_0^{\infty} \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) \, dt$$

Definición 2.26

Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se define la clase de funciones «integrables» como:

$$L^1(d\mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{C} \text{ tal que } f \text{ es medible y } \int_X |f| d\mu < \infty \right\}$$

TEMA 3. ESPACIOS DE MEDIDA

3.1. MEDIDAS COMPLETAS

Definición 3.1 (Espacio de medida)

Un **espacio de medida** es una terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ donde X es un conjunto, $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra y μ es una medida. Un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se denomina **de Probabilidad** si se cumple $\mu(X) = 1$.

Definición 3.2 (Medida completa)

Una medida μ sobre una σ-álgebra $\mathcal{A}$ se dice que es una **medida completa** si $\mathcal{A}$ contiene a todos los subconjuntos de conjuntos (de $\mathcal{A}$) con medida cero, es decir:

Si $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) = 0$, entonces $\forall E \subset A$ se tiene que $E \in \mathcal{A}$ y obviamente que $\mu(E) = 0$.

Teorema 3.3

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, definimos:

- $\overline{\mathcal{A}} = \{E \subset X : \forall A, B \in \mathcal{A} \text{ con } A \subset E \subset B \text{ y } \mu(B \setminus A) = 0\}$
- Si $E \in \overline{\mathcal{A}}$ con $A \subset E \subset B$ y $\mu(B \setminus A) = 0,\ \overline{\mu}(E) = \mu(A)$

Entonces:

- $\overline{\mathcal{A}}$ es una σ-álgebra (la más pequeña) que contiene a $\mathcal{A}$.
- $\overline{\mu}$ es una medida completa que extiende a μ.

Proposición 3.4

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ con μ completa, entonces:

- Si $f = g$ en *c.t.p.* y f es medible, entonces g es medible.
- Si las f_n son medibles $\forall n$ y $f_n \to f$ para *c.t.p.*, entonces f es medible.

3.2. MEDIDAS EXTERIORES

Definición 3.5 (Medida exterior)

Se dice que $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ es **medida exterior** si cumple:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- Si $A \subset B, \quad \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

Definición 3.6 (Premedida)

Dada una álgebra $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{P}(X)$, se dice que $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \to [0, \infty]$ es una **pre-medida** si verifica:

- $\mu_0(\emptyset) = 0$
- Si $B_i \in \mathcal{B}_0$ son disjuntos y $\biguplus_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}_0$, entonces $\mu_0\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i)$

Definición 3.7 (Conjuntos medibles para una medida exterior)

Dada una medida exterior μ^* sobre X, se dice que $A \subset X$ es **μ^*-medible** (o medible con respecto a μ^*) si:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad \forall E \subset X$$

Denotamos $\mathcal{A}^* = \{A \subset X : A \text{ es } \mu^*\text{-medible}\}$

3.3. TEOREMAS DE CARATHÉODORY

Teorema 3.8 (Teorema de Carathéodory I)

Si μ^* es una medida exterior sobre X y definimos $\mathcal{A}^*$ como antes. Entonces $\mathcal{A}^*$ es una σ-álgebra y $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ (restricción de μ^* a $\mathcal{A}^*$) es una medida completa.

Teorema 3.9 (Teorema de Carathéodory II)

Sea μ_0 una pre-medida sobre B_0 y definamos una medida exterior μ^* y la clase $\mathcal{A}^*$ de los μ-medibles como antes. Entonces:

- $\mathcal{A}^*$ es una σ-álgebra que contiene a B_0
- $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ es una medida completa que extiende a μ_0

Definición 3.10 (Medida de Lebesgue)

Sea el álgebra $\mathcal{B}_0$ generada por los intervalos de la forma $(a, b]$, con $(a < b : a, b \in \mathbb{R})$. Es decir, $\mathcal{B}_0$ está formada por las uniones finitas de esos intervalos y sus complementarios.

Definimos $\mu_0((a, b]) = b - a$ y extendemos la definición de $\mathcal{B}_0$ de manera obvia. Entonces:

- μ^* es la medida exterior de Lebesgue
- $\mathcal{A}^*$ es la σ-álgebra de los conjuntos medibles de Lebesgue
- $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ es la medida de Lebesgue ($\mu(I) = \text{long}(I)$, $\forall I$ intervalo)

Definición 3.11 (Medidas de Lebesgue-Stieltjes)

Con más generalidad, si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente y continua por la derecha podemos definir $\mu_0 = \mu_F$ sobre el álgebra $\mathcal{B}_0$ anterior, $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ y μ_F es una pre-medida.

Nota

La medida dada por la extensión de Carathéodory se denota por $\mu = dF$. En particular, si $F(x) = x$ estamos en el caso de la medida de Lebesgue, que se denota por dx.

Importante

Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y μ no es completa, entonces hay dos formas de completarla:

- Por el Teorema 3.3, se obtiene $\left(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu}\right)$
- Por el Teorema 3.9 (Carathéodory), se obtiene $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*|_{\mathcal{A}^*})$, tomando a μ^* la medida exterior inducida por μ que, al ser medida, también es pre-medida.

Lema 3.12

Si μ es σ-finita entonces las dos extensiones coinciden, es decir, $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^*$.

3.4. MEDIDAS DE BOREL

Definición 3.13 (Medida de Borel)

Se dice que μ es una **medida de Borel** en $\mathbb{R}$ si está definida sobre la σ-álgebra de los conjuntos de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Lema 3.14

Toda pre-medida μ_F definida como antes sobre $\mathcal{B}_0$ se puede extender (de forma única) a una medida de Borel.

Lema 3.15

Si m es medida de Lebesgue y denotamos por $\mathcal{L}$ los conjuntos medibles de Lebesgue, entonces $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (contenidos estrictos).

Proposición 3.16

Si μ es una medida de Borel finita sobre conjuntos acotados, entonces μ proviene de cierta pre-medida μ_F sobre $\mathcal{B}_0$.

3.5. MEDIDAS REGULARES

Definición 3.17 (Medida regular)

Dado $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, se dice que μ es **regular** (en $\mathbb{R}$) si verifica:

- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{A}$
- Regularidad exterior, esto es: $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U,\, U \text{ abierto}\}$
- Regularidad interior, esto es: $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\, K \text{ compacto}\}$

Proposición 3.18

- La medida de Lebesgue, m, es regular.
- Cualquier medida de Lebesgue-Stieltjes es regular.

Teorema 3.19 (Invarianza por traslaciones y dilataciones)

Dado $E \subset \mathbb{R}$, definimos para $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$; $x_0 + E = \{x_0 + y : y \in E\}$ y $r \cdot E = \{r \cdot y : y \in E\}$. Entonces si $E \in \mathcal{L}$ se tiene:

- $x_0 + E \in \mathcal{A},\ \ r \cdot E \in \mathcal{A}$
- $m(x_0 + E) = m(E),\ \ m(r \cdot E) = r \cdot m(E)$

Teorema 3.20

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable Riemann. Entonces f es medible Lebesgue y por tanto integrable Lebesgue y además:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f(x)\, dm$$

TEMA 4. MEDIDAS PRODUCTO Y EL TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE

4.1. LA MEDIDA DE LEBESGUE EN $\mathbb{R}^n$ COMO MODELO

Definición 4.1 (Rectángulo)

Dados intervalos $J_1, J_2, ..., J_n$ de $\mathbb{R}$ (finitos o no), al producto cartesiano $R = J_1 \times J_2 \times ... \times J_n$ lo denominaremos **rectángulo** en $\mathbb{R}^n$.

Definición 4.2 (Volumen)

Si $|J_1|_1, ..., |J_n|_1 \neq 0$, se define el **volumen** n-dimensional del rectángulo R como:

$$|R_n| = |J_1|_1 \cdot |J_2|_1 \cdot ... \cdot |J_n|_1$$

donde $|\cdot|_1$ denota la longitud en $\mathbb{R}$. Si se tuviera $|J_k|_1 = 0$ para algún k, entonces se define $|R|_n = 0$ incluso si alguna de las otras coordenadas fuera infinita.

Lema 4.3

- La intersección de dos rectángulos es un rectángulo.
- La unión finita de rectángulos se puede escribir como unión disjunta y finita de rectángulos.
- La clase $\mathcal{B}_0 = \{\text{Uniones finitas de rectángulos}\}$ es una álgebra.

Definición 4.4 (Volumen de un elemento)

Definimos el **volumen de un elemento** $B \in \mathcal{B}_0$ escribiendo B como la unión disjunta de rectángulos, $B = \biguplus_{j=1}^{m} R_j$ y poniendo $|B| = \sum_{j=1}^{m} |R_j|$.

Lema 4.5

$|\cdot|$ es una premedida en $\mathcal{B}_0$.

Definición 4.6 (Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$)

La extensión de Carathéodory de la terna $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_0, |\cdot|_n)$ nos da un espacio de medida completa $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, m_n)$ con $m_n(R) = |R| \ \ \forall R$ rectángulo. Por ser $|\cdot|_n$ σ-finita, esta extensión es única sobre la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{B}_0$ que, como veremos, coincide con la clase de los Borel en $\mathbb{R}^n$. La clase $\mathcal{L}_n$ es la σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y $m_n = m = dx$ la medida de Lebesgue.

4.2. PROPIEDADES DE LA σ-ÁLGEBRA Y DE LA MEDIDA DE LEBESGUE EN $\mathbb{R}^n$

Propiedad 4.7 (Propiedades de la σ-álgebra y de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$)

- $\mathcal{L}_n$ contiene a los abiertos de $\mathbb{R}^n$ y por tanto a la σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}_n$. (Ver Lema 4.10)
- $\forall A \in \mathcal{L}_n, \ m(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|R_i| : R_i \text{ rectángulos}, \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \supset A\right\}$
- La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es regular, es decir:

$$m(A) = \inf\{m(U) : A \subset U, U \text{ abierto}\}$$
$$m(A) = \sup\{m(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\}$$

- La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es invariante por traslaciones.

Definición 4.8 (Cubos diádicos)

Para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea Δ_k el conjunto de cubos de $\mathbb{R}^n$ de lado 2^{-k} y esquinas en el conjunto:

$$2^{-k}\mathbb{Z}^n = \left\{2^{-k}(v_1, ..., v_n) : v_j \in \mathbb{Z}\right\}$$

Llamamos Δ a la unión de todos los Δ_k.

Propiedad 4.9 (Propiedades de los cubos diádicos)

- Para cada entero K, Δ_k forma una partición de $\mathbb{R}^n$.
- Todos los cubos de Δ_k tienen el mismo lado, de longitud 2^{-k}.
- Sean R, Q dos cubos en Δ. Si $\mathring{Q} \cap \mathring{R} = \emptyset$, entonces o bien $Q \subset R$ o bien $R \subset Q$.
- Cada $Q \in \Delta_k$ se puede escribir como unión de 2^n cubos de Δ_{k+1} con interiores disjuntos.

Lema 4.10

Todo abierto es unión numerable casi disjunta de cubos de $\mathbb{R}^n$, es decir, dado U abierto, $\exists\{Q_j\}$ cubos con interiores disjuntos tales que $U = \bigcup_i Q_i$. Eligiendo cubos de la forma $Q = J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n$ con $J_k = (a_k, a_k + h]$, la unión es, de hecho, disjunta.

Teorema 4.11

- Si $A \in \mathcal{L}_n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ entonces $x_0 + A \in \mathcal{L}_n$ y $m(x_0 + A) = m(A)$
- Sea f medible $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si $f \geq 0$ o $f \in L^1(\mathbb{R}^n, dm)$ se tiene $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\int f(x_0 + x)dm = \int f(x)dm$$

Teorema 4.12

- Si $A \in \mathcal{L}_n$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces $c \cdot A \in \mathcal{L}_n$ y $m(c \cdot A) = |c|^n \cdot m(A)$
- Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible. Si $f \geq 0$ o $f \in L^1(\mathbb{R}^n, dm)$ se tiene $\forall c \neq 0$:

$$\int f(c \cdot x)dm(x) = \frac{1}{|c|^n} \int f(x)dm(x)$$

4.3. TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE (I)

Teorema 4.13 (Fórmula del cambio de variable para aplicaciones lineales)

Sea T una aplicación $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal y regular ($\det(T) \neq 0$, i.e. la matriz que define a T pertenece a $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$). Entonces:

- Si $A \in \mathcal{L}_n$, $T(A) \in \mathcal{L}_n$, y $m(T(A)) = |\det(T)| m(A)$
- Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible. Si $f \geq 0$ o $f \in L^1(\mathbb{R}^n, dm)$ se tiene:

$$\int f(x)dm = |\det(T)| \int f(T(x))dm$$

Corolario 4.14 (Invarianza por rotaciones)

Si T es una rotación (de forma que $|\det(T)| = 1$) se tiene:

$$m(T(A)) = m(A), \quad \forall A \in \mathcal{L}_n$$

Corolario 4.15

Si D es un conjunto medible y f, T son como en el Teorema 4.13, entonces se tiene:

$$\int_{T(D)} f(y)dm = |\det(T)| \int_D f(T(x))dm$$

4.4. MEDIDAS INDUCIDAS

Definición 4.16 (Aplicación medible)

Dados dos espacios X e Y dotados de ciertas σ-álgebras $\mathcal{A}_X$ y $\mathcal{A}_Y$ respectivamente, se dice que $\varphi : X \to Y$ es **medible** (con respecto a $\mathcal{A}_X$ y $\mathcal{A}_Y$) si:

$$\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{A}_X \ \forall B \in \mathcal{A}_Y$$

Definición 4.17 (Medida inducida)

Si μ es una medida sobre la σ-álgebra $\mathcal{A}_X$ entonces φ **induce una medida** sobre $\mathcal{A}_Y$ de la siguiente forma:

$$\mu_\varphi(B) = \mu(\varphi^{-1}(B))$$

Teorema 4.18

Sean $\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y, \mu, \mu_\varphi$ como la Definición 4.17. Si $f : Y \to \mathbb{R}$ es medible y $f \geq 0$ o $f \in L^1\left(d\mu_\varphi\right)$ entonces:

$$\int_Y f(y) d\mu_\varphi(y) = \int_X f(\varphi(x)) d\mu(x)$$

4.5. TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE (II)

Definición 4.19 (Jacobiano)

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo regular, es decir $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, es inyectivo y su inversa $\varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Si $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ son sus funciones coordenadas, entonces su diferencial en el punto x, $D_\varphi(x)$ es una aplicación lineal dada por la matriz jacobiana:

$$A_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Se denomina **jacobiano** de φ en x al determinante de esta matriz:

$$J(x) = \det(A_x) = \det\left(D_\varphi(x)\right)$$

Teorema 4.20 (Teorema del cambio de variable)

Sea $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo regular C^1 sobre el abierto Ω y sea $f : \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}$ medible (Lebesgue). Si $f \geq 0$ o $f \in L^1(dx)$. Entonces:

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)dy = \int_{\Omega} (f \circ \varphi(x)) \cdot |J(x)| \, dx$$

Lema 4.21

Si Q es un cubo de Ω entonces:

$$m(\varphi(Q)) \leq \int_Q |J(x)| \, dx$$

4.6. EJEMPLOS DEL TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE

POR COMPLETAR

TEMA 5. TEOREMA DE FUBINI

5.1. MEDIDAS PRODUCTO EN GENERAL

Definición 5.1 (Rectángulo medible)

Dados $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$, definimos el **rectángulo medible**:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A,\, y \in B\}$$

Lema 5.2

- La intersección de rectángulos es un rectángulo.
- La unión de un número finito de rectángulos medibles se puede escribir como la unión disjunta y finita de rectángulos medibles.
- La familia $\Pi_0 = \left\{ \bigcup_{j=1}^{N} (A_j \times B_j) : A_j \in \mathcal{A},\, B_j \in \mathcal{B} \right\}$ es una álgebra.

Definición 5.3

Definimos, para un rectángulo medible $R = A \times B$; $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$:

$$\pi_0(R) = \pi_0(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

si tanto $\mu(A)$ como $\nu(B)$ no son 0 y $\pi_0(R) = 0$ en caso contrario. Dado un elemento $U \in \Pi_0$, lo escribimos como unión disjunta de rectángulos $U = \biguplus_{j=1}^{N} (A_j \times B_j)$, con $A_j \in \mathcal{A}$, $B_j \in \mathcal{B}$ y definimos:

$$\pi_0(U) = \sum_{j=1}^{N} \pi_0(A_j \times B_j) = \sum_{j=1}^{N} \mu(A_j)\nu(B_j)$$

Lema 5.4

π_0 está bien definida y es una premedida en Π_0.

Definición 5.5

La mínima σ-álgebra que contiene Π_0 se denota por $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Definición 5.6 (Espacio de medida producto)

El Teorema de Carathéodory (Teorema 3.9) nos permite extender $(X \times Y, \Pi_0, \pi_0)$ a un espacio de medida completo $\left(X \times Y, \Pi_0^*, \pi_0^* \mid_{\Pi_0^*}\right)$.

Nota

Algunos libros escriben $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ para denotar la σ-álgebra producto, pero esto es solo por convenio. También se suele escribir $d\mu \times d\nu$ en vez de $d\mu \otimes d\nu$, o también $d(\mu \times \nu)$.

5.2. EL TEOREMA DE FUBINI

Definición 5.7

- Dado $E \subset X \times Y$ y fijado $x \in X$ se define la ***x*-sección de *E*** como:

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$$

- De la misma forma, fijado $y \in Y$ se define la **y-sección de *E*** como:

$$E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$$

- Para una función $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ se define la **x-sección de *f***, fijado $x \in X$, como:

$$\begin{aligned} f_x &: Y \to \mathbb{R} \\ y &\to f_x(y) = f(x, y) \end{aligned}$$

- Análogamente, se define la **y-sección de *f***, fijado $y \in Y$, como:

$$\begin{aligned} f^y &: X \to \mathbb{R} \\ x &\to f^y(x) = f(x, y) \end{aligned}$$

Teorema 5.8 (Teorema de Fubini)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ dos espacios de medida σ-finitos.

- Si $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es medible y positiva, entonces las funciones

$$x \to g(x) = \int_Y f_x d\mu, \qquad y \to h(y) = \int_X f^y d\mu$$

son medibles y además se tiene:

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

- Si $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ es integrable, es decir, $f \in L^1(d(\mu \times \nu))$, entonces:
  - $f_x \in L^1(d\nu)$ c.t.p. $x \in X$
  - $f^y \in L^1(d\mu)$ c.t.p. $y \in Y$
  - las funciones $g(x)$ y $h(y)$ se pueden definir en c.t.p. $x \in X$, c.t.p. $y \in Y$
  - $g(x)$ y $h(x)$ son integrables, es decir, $g(x) \in L^1(d\mu)$ y $h(x) \in L^1(d\nu)$

  Además se cumple:

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

Proposición 5.9

Sean $X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ dos espacios de medida σ-finitos y si $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, entonces las funciones:

$$x \to \nu(E_x) \qquad\qquad y \to \mu(E^y)$$

son medibles en X e Y respectivamente y además se tiene:

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x)d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)d\nu(y)$$

5.3. CLASES MONÓTONAS

Definición 5.10 (Clase monótona)

Se dice que $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ es una **clase monótona** si es cerrada por uniones crecientes y por intersecciones decrecientes, esto es:

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_m \subset \dots \in \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup_{m \geq 1} E_m \in \mathcal{C}$$

$$E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_m \supset \dots \in \mathcal{C} \Rightarrow \bigcap_{m \geq 1} E_m \in \mathcal{C}$$

Lema 5.11

Si Π_0 es una álgebra y $\mathcal{C}$ es una clase monótona con $\Pi_0 \subset \mathcal{C}$, entonces la mínima σ-álgebra que contiene a Π_0, $\sigma(\Pi_0)$, está contenida en $\mathcal{C}$.

TEMA 6. MEDIDAS Y DERIVADAS

6.1. DERIVACIÓN DENTRO DEL SIGNO INTEGRAL

Teorema 6.1

Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$. Supongamos que $f^t \in L^1(d\mu)$ para todo t y definamos:

$$F(t) = \int_X f^t(x) d\mu(x) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$$

- Si f_x es continua en t_0 para todo x y existe $g \in L^1(d\mu)$ tal que $|f^t(x)| \leq g(x)$ para todo x y para todo t, entonces F es continua en t_0.
- Si existe $\frac{\partial f}{\partial t}$ para todo t y existe $g \in L^1(d\mu)$ tal que $\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| \leq g(x)$ para todo t y para todo x, entonces existe $F'(t)$ y se tiene:

$$F'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_X f(x, t) d\mu(x)\right) = \int_X \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} d\mu(x)$$

6.2. EL TEOREMA DE RADON-NIKODYM-LEBESGUE

Definición 6.2 (Medida con signo)

Dada una σ-álgebra $\mathcal{M}$, decimos que la función $\nu : \mathcal{M} \to [-\infty, \infty]$ es una **medida con signo** si verifica:

1. $\nu(\emptyset) = 0$
2. $\nu(A) < \infty \;\text{ o }\; \nu(A) > -\infty \;\text{ para todo } A \in \mathcal{M}$
3. $\nu(\biguplus A_j) = \sum_j \nu(A_j) \;\text{ para toda colección disjunta } \{A_j\} \subset \mathcal{M}$

Definición 6.3

Sea ν una medida con signo $\mathcal{M}$. Se dice que $A \in \mathcal{M}$ es un conjunto:

$$\begin{cases} \text{positivo} & \text{si } \nu(A \cap E) \geq 0 \text{ para todo } E \in \mathcal{M} \\ \text{nulo} & \text{si } \nu(A \cap E) = 0 \text{ para todo } E \in \mathcal{M} \\ \text{negativo} & \text{si } \nu(A \cap E) \leq 0 \text{ para todo } E \in \mathcal{M} \end{cases}$$

Teorema 6.4 (Teorema de descomposición de Hahn y Jordan)

- **Hahn**. Si ν es una medida con signo sobre la σ-álgebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$, existen conjuntos $P, N \in \mathcal{M}$ con $X = P \cup N$ y $P \cap N = \emptyset$ tales que P es un conjunto positivo para ν y N es negativo para ν.

- **Jordan**. Si definimos $\nu^+(A) = \nu(A \cap P)$, $v^-(A) = -\nu(A \cap N)$, entonces v^+ y v^- son medidas positivas y $v = v^+ - v^-$.

Definición 6.5 (Variación positiva, negativa y total)

Llamamos a v^+ y v^- **variación positiva y negativa** (respectivamente) de ν. Si definimos la medida $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$, es decir, $|\nu|(A) = \nu^+(A) + \nu^-(A)$ para todo $A \in \mathcal{M}$, entonces $|\nu|$ se denomina la **variación total** de ν.

Definición 6.6 (Medidas mutuamente singulares)

Dos medidas λ y μ se dicen que son **mutuamente singulares** (escribiremos $\lambda \perp \mu$ para denotarlo) si existe una descomposición $X = E \cup F$, $E \cap F = \emptyset$ tal que E es un conjunto nulo para μ y F es nulo para λ. Informalmente, diremos que λ «vive» en E y que μ «vive» en F.

Definición 6.7 (Medidas absolutamente continuas)

Dada μ medida (positiva) y ν meduda con signo definidas sobre la misma σ-álgebra $\mathcal{M}$, se dice que ν es **absolutamente continua** con respecto a μ ($\nu \ll \mu$) si dado $A \in \mathcal{M}$ con $\mu(A) = 0$, se tiene $\nu(A) = 0$.

Proposición 6.8

Si μ y ν son medidas en $\mathcal{M}$, $\nu \ll \mu$ y ν es finita, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) < \delta \Rightarrow \nu(E) < \varepsilon$.

Corolario 6.9

Sean μ una medida (positiva) y ν una medida con signo finita definidas sobre la misma σ-álgebra $\mathcal{M}$. Entonces $\nu \ll \mu$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) < \delta \Rightarrow |\nu(A)| \leq |\nu|(A) < \varepsilon$.

Lema 6.10

Si ν y μ son medidas finitas en $\mathcal{M}$, entonces o bien $v \perp \mu$, o bien existen $\varepsilon > 0$ y $E \in \mathcal{M}$ tales que $\mu(E) > 0$ y $\nu(A) \geq \varepsilon\mu(A)$ para todo $A \subset E$ (es decir, E es un conjunto positivo para $d\nu - \varepsilon d\mu$).

Teorema 6.11 (Teorema de Radon-Nikodym-Lebesgue)

Sea μ una medida σ-finita y ν una medida con signo, finita y ambas definidas sobre una σ--álgebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonce ν se puede descomponer como $\nu = \lambda + \rho$, λ y ρ son medidas finitas con signo $\lambda \perp \mu$ y $\rho \ll \mu$. Además, existe $f_0 \in L^1(d\mu)$ tal que $d\rho = f_0 d\mu$, de forma que $d\nu = d\lambda + f_0 d\mu$.

Definición 6.12 (Derivada de Radon-Nikodym)

La función anterior f_0 se denomina **derivada de Radon-Nikodym** de ν respecto a μ y se denota $f_0 = \frac{d\nu}{d\mu}$. La descomposición $\nu = \lambda + \rho$ se conoce como descomposición de Lebesgue de ν respecto de μ.

Corolario 6.13

En las hipótesis del Teorema de Radon-Nikodym-Lebesgue (Teorema 6.11), si $\nu \ll \mu$, entonces $\lambda \equiv 0$.

ANEXO A. DEMOSTRACIONES RELEVANTES

Teorema A.1. (Teorema de Borel-Cantelli)

Sean $\{A_n\}$ conjuntos medibles en un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Entonces cada elemento de x pertenece a un número finito de A_n para $c.t.x.$. Dicho de otra manera, el conjunto de puntos x que pertenecen a infinitos A_n, es decir, $\limsup A_n$, mide 0.

Demostración. Por la definición de límite superior tenemos:

$$\mu(\limsup A_n) = \mu\left(\lim_{n\to\infty}\left(\bigcap_{n}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j}_{\substack{\searrow G_n \\ G_1 \supset G_2 \supset \dots}}\right)\right) \underbrace{=}_{\substack{T.C.M. \\ (\mu(G_n)<\infty)}} \lim_{n\to\infty}\left(\mu\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right)\right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=n}^{\infty} \mu(A_j)\right) = 0 \quad \text{(Criterio de Cauchy)}$$

$\square$

Lema A.2. (Lema de Fatou)

Dada una sucesión de funciones medibles y positivas, $\{f_n\}$, se tiene:

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty}(f_n(x))\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\left(\int_X f_n(x) d\mu\right)$$

Demostración. Es una consecuencia del *Teorema de la Convergencia Monótona.* Sea $g_n(x) = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \dots\}$. Entonces $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots$ y $\lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{k\to\infty} f_k$ por definición del límite inferior. Además $g_n \leq f_n \forall n$. Por tanto:

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty}(f_n(x))\right) d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n(x) d\mu \underbrace{=}_{T.C.M.} \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\left(\int_X f_n(x) d\mu\right)$$

$\square$

Teorema A.3. (Teorema de la convergencia monótona para conjuntos)

1. Si $A_n \in \mathcal{A}$ y $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n$, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$$

2. Si $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \supset A_{n+1}$ $\forall n$ y $\mu(A_N) < \infty$ para algún N, entonces:

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$$

Demostración.

1. Definimos $B_1 := A_1$ y $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ para $n \geq 2$. Por construcción, los B_n son disjuntos y además:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \biguplus_{j=1}^{\infty} B_j$$

   Por la aditividad de la medida sobre una unión disjunta numerable:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$$

   Ahora, para cada n la unión finita de los primeros B_j es:

$$\bigcup_{j=1}^{n} B_j = A_n \quad \Rightarrow \quad \mu(A_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)$$

   Al tomar $n \to \infty$ las sumas parciales convergen a $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$. Por tanto:

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

2. Trabajaremos en la cola a partir de N. Para $k \geq 0$ definimos $C_k := A_N \setminus A_{N+k}$. Como $A_{N+k} \subset A_{N+k-1}$ los conjuntos C_k satisfacen $C_k \subset C_{k+1}$ y además:

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k = A_N \setminus \bigcap_{j=N}^{\infty} A_j$$

Aplicando la parte (1) a la sucesión creciente C_k obtenemos:

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(C_k)$$

Pero para cada k tenemos que: $\mu(C_k) = \mu(A_N) - \mu(A_{N+k})$, porque C_k y A_{N+k} son disjuntos y su unión es A_N, y $\mu(A_N) < \infty$ garantiza que restas como esta son válidas. Entonces:

$$\mu\left(A_N \setminus \bigcap_{j=N}^{\infty} A_j\right) = \lim_{k\to\infty} (\mu(A_N) - \mu(A_{N+k})) = \mu(A_N) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_{N+k})$$

Reordenando obtenemos: $\mu\left(\bigcap_{j=N}^{\infty} A_j\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_{N+k})$. Como los A_n son decrecientes, $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ existe y coincide con el límite de la subsucesión $\mu(A_{N+k})$. Finalmente:

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=N}^{\infty} A_j \qquad \Rightarrow \qquad \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$$

□

Teorema A.4. (Teorema de la Convergencia Dominada)

En $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, si la sucesión de funciones medibles $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a una función $f(x)$ y además $|f_n(x)| \leq F(x)$ $\forall n$, $\forall x$ con F medible, positiva y tal que $\int_X F(x)\, d\mu < \infty$, entonces $f(x)$ es integrable y se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|\, d\mu = 0 \qquad (1)$$

En particular,

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) d\mu = \int_X f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n(x)\, d\mu\right) \qquad (2)$$

Demostración. El que f sea integrable es inmediato porque $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ implica $|f(x)| \leq F(x)$, $\forall x$ también y F es integrable (finita). Veamos también que (1) $\Rightarrow$ (2):

$$\left|\int_X f_n(x)d\mu - \int_X f(x)d\mu\right| = \left|\int_X (f_n(x) - f(x))d\mu\right| \leq \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow (2)$$

Luego solo necesitamos probar (1). Veamos que es una consecuencia del lema de Fatou: Sean $h_n = 2F(x) - |f_n(x) - f(x)|$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Entonces $h_n \geq 0$ y $\liminf_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} h_n = 2F(x)$. Por Fatou deducimos:

$$\int_X 2F(x)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n d\mu = \liminf_{n\to\infty}\left(\int_X 2F(x)d\mu - \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu\right) =$$
$$= \int_X 2F(x)d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu$$

Despejando queda:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu \leq 0$$

y, por tanto, lo anterior debe ser igual a 0. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu = 0$$

□