Метод прогонки.

$$u''(x) + 3u(x) = 2(3 - 4\pi^2)\sin(2\pi x)$$

$$0 < x < 1$$
$$u(0) = u(1) = 0 \ ; \ N = 4$$

Заменим $u''(x)$ второй разностной производной:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + 3y_i = 2(3 - 4\pi^2)\cdot\sin(2\pi x_i) \quad (\cdot h^2)$$

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + 3h^2 y_i = 2h^2(3 - 4\pi^2)\cdot\sin(2\pi\cdot x_i)$$

$$y_{i-1} + (3h^2 - 2)\cdot y_i + y_{i+1} = 2h^2(3 - 4\pi^2)\cdot\sin(2\pi\cdot x_i)$$

$$h = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$\begin{cases} y_0 - 1{,}8125\cdot y_1 + y_2 = -4{,}56 \\ y_1 - 1{,}8125\cdot y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 - 1{,}8125\cdot y_3 + y_4 = 4{,}56 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -1{,}8125\cdot y_1 + y_2 = -4{,}56 \\ y_1 - 1{,}8125\cdot y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 - 1{,}8125 = 4{,}56 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -\beta_1 & \gamma_1 & 0 \\ \alpha_2 & -\beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & \alpha_3 & -\beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}8125 & 1 & 0 \\ 1 & 1{,}8125 & 1 \\ 0 & 0 & 1{,}8125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}56 \\ 0 \\ 4{,}56 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \frac{\gamma_1}{\beta_1} = \frac{1}{1{,}8125} = 0{,}5517$$

$$Q_1 = \frac{\delta_1}{\beta_1} = \frac{4,56}{1,8125} = 2,516$$

$$P_2 = \frac{\gamma_2}{\beta_2 - \alpha_2 \cdot P_1} = \frac{1}{1,8125 - 1 \cdot 0,5517} = 0,79314$$

$$Q_2 = \frac{\alpha_2 Q_1 - \delta_2}{\beta_2 - \alpha_2 \cdot P_1} = \frac{1 \cdot 2,516 - 0}{1,8125 - 1 \cdot 0,5517} = 1,995$$

$$y_3 = Q_3 = \frac{\alpha_3 \cdot Q_2 - \delta_3}{\beta_3 - \alpha_3 \cdot P_2} = \frac{1 \cdot 1,995 - 4,56}{1,8125 - 1 \cdot 0,79314} = \frac{-2,56}{1,01936} =$$

$$= -2,51$$

$$y_2 = P_2 \cdot y_3 + Q_2 = 0,79314 \cdot (-2,51) + 1,995 = 0,0042$$

$$y_1 = P_1 \cdot y_2 + Q_1 = 0,5517 \cdot 0,0042 + 2,516 = 2,518$$

$$U(x) = 2 \cdot \sin(2\pi x) - \text{точное решение}$$

$$U(0,25) = 2 \cdot \sin(2\pi \cdot 0,25) = 2 \quad (y_1 = 2,518)$$

$$U(0,5) = 2 \cdot \sin(2\pi \cdot 0,5) = 0 \quad (y_2 = 0,0042)$$

$$U(0,75) = 2 \cdot \sin(2\pi \cdot 0,75) = -2 \quad (y_3 = -2,51)$$

В данном случае погрешность складывается из погрешности метода второй разностной производной а метода прогонки, т.к. не выполнено достаточное условие корректности и устойчивости прогонки (диагональное преобладание:

$$|\beta_i| \geq |\alpha_i| + |\gamma_i|.$$

Лист

2