МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Тихоокеанский государственный университет»

Кафедра «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем»

Численное интегрирование

Лабораторная работа №5

по дисциплине «Вычислительная математика»

Выполнил студент Чекулаев В. Ю.

Факультет, группа ФКФН, ПО(аб)-81

Проверил Резак Е.В.

Хабаровск – 2020г.

Задание:

Вычислить $\int_a^b f(x)dx$ с заданной точностью ε.

Реализовать:

1. Метод прямоугольников
2. Метод трапеций
3. Метод Симпсона

Проанализировать эффективность методов для различных функций f(x).

Заданная точность вычисления интегралла обеспечивается методом двойного пересчета.

Теория

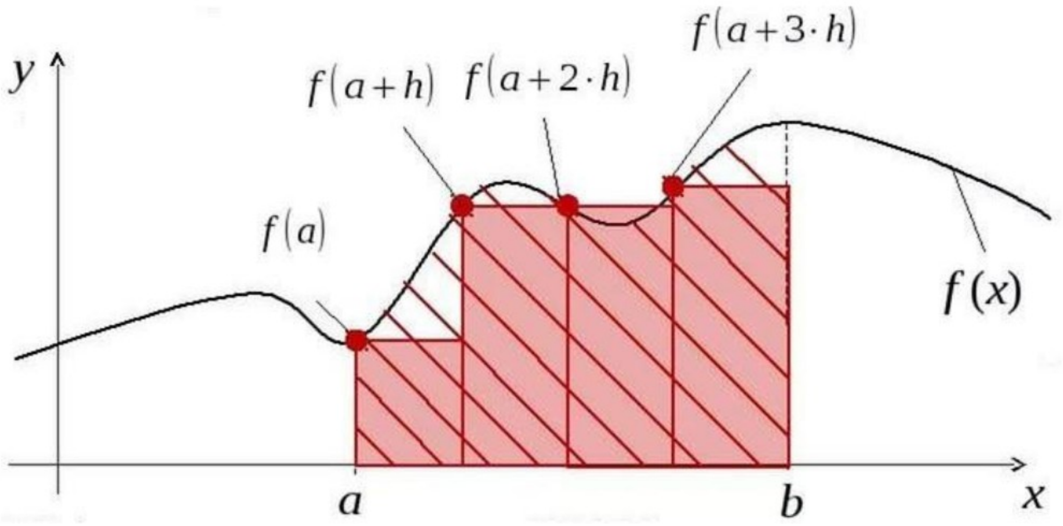
Введем на отрезке [a, b] равномерную сетку с шагом h:

$$\omega_h = \{x_i : x_i = a + ih, i = 0..N; h = \frac{b-a}{N}\}$$

Где N – количество точек разбиения.

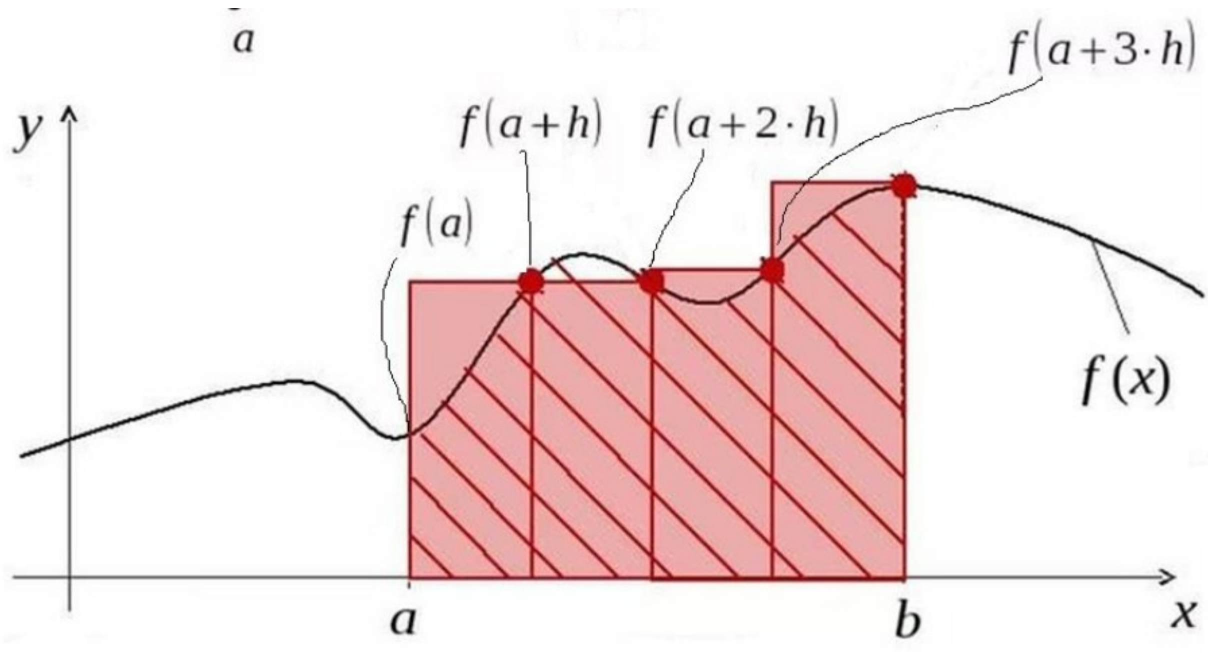
Метод левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} h * f(a+ih)$$



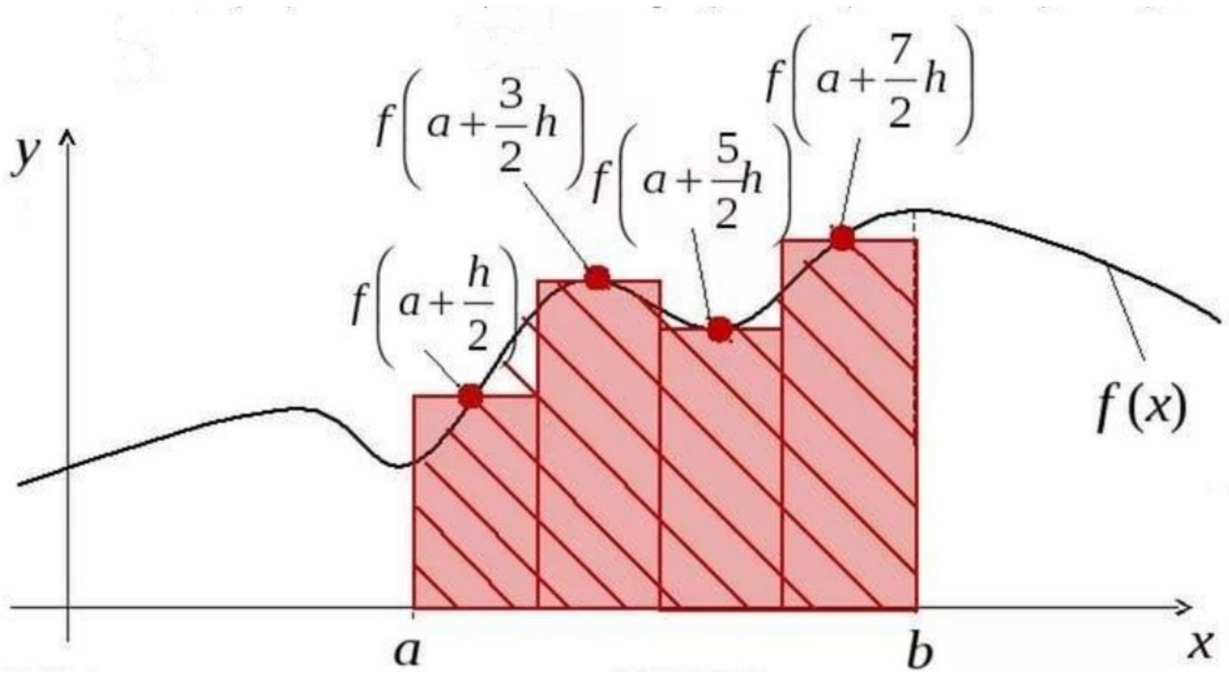
Метод правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1} h*f(a+ih)$$



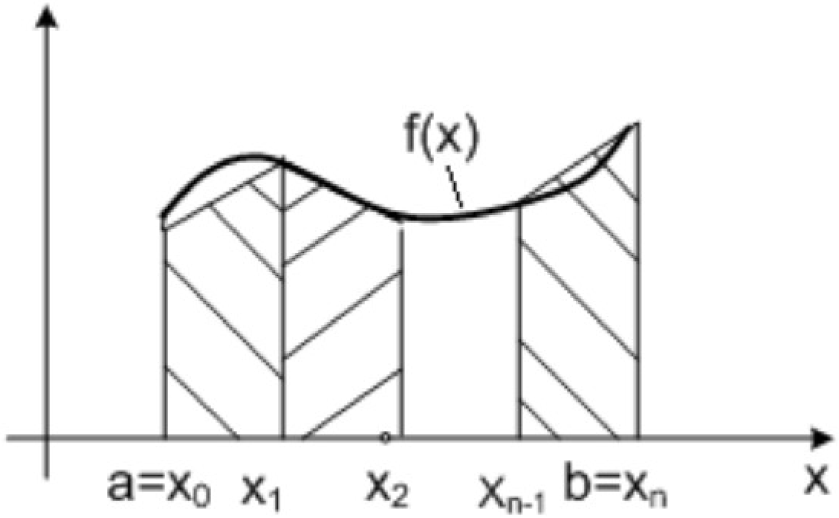
Метод средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} h*f(a+(i+0.5)h)$$



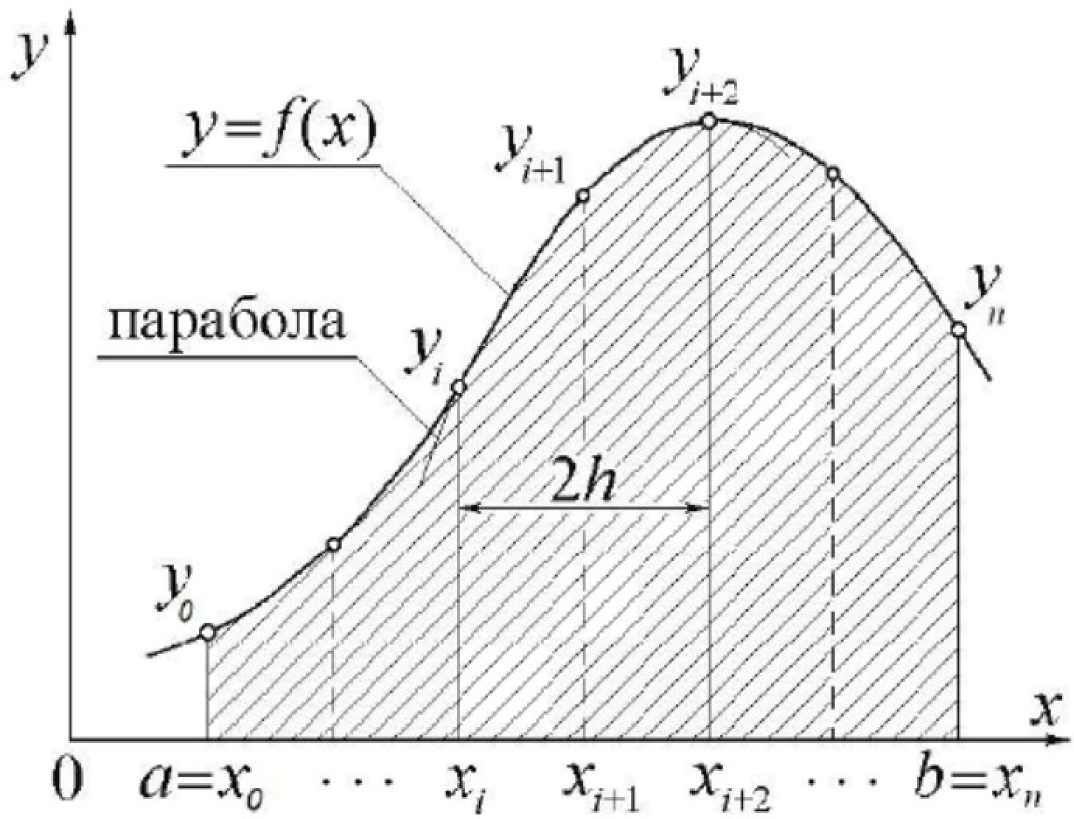
Метод трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{1}{2}f(x_0)+\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)+\frac{1}{2}f(x_N)\right)$$



Метод Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0+4\sum_{i=1}^{N/2} y_{2i-1}+2\sum_{i=1}^{N/2} y_{2i}+y_N\right)$$



Метод двойного пересчета (правило Рунге)

Приближенное значение интеграла вычисляют дважды: вначале с шагом h, а затем с шагом h/2. Полученные значения интегралов могут быть применены для оценки погрешности последнего, более точного значения по формуле:

$$R \leq \frac{|S_h - S_{h/2}|}{2^k - 1}$$

где k = 2 для методов трапеций и средних прямоугольников;

k = 4 для метода Симпсона.

Метод двойного просчета может быть использован для автоматического выбора шага интегрирования при заданной допустимой погрешности.

Основные функции программы

Функция метода левых прямоугольников для линейной функции

```
double tempLeftRectLine(double a, double b, double h){  // функция расчета по методу
    int N = (b-a)/h;
    double result = 0;
    for(int i = 0; i < N-1; i++){
        result += h*(lineF(a+i*h));  // заменяя функцию lineF на другие функции производится расчет интегралов для других функций
    }
    return result;
}

void MainWindow::leftRectLine(double e, double a, double b){  // функция двойного пересчета
    double h = (b-a);
    QString method = "Метод левых прямоугольников";

    while(e <= (abs(tempLeftRectLine(a,b,h)-tempLeftRectLine(a,b,h/2))/(pow(2, 1)-1))){
        h /= 2;
    }

    setInfoL(h, tempLeftRectLine(a,b,h), e, method); // функция вывода информации на экран
}
```

Функция метода правых прямоугольников для линейной функции

```
double tempRightRectLine(double a, double b, double h){  // функция расчета по методу
    int N = (b-a)/h;
    double result = 0;
    for(int i = 1; i < N; i++){
        result += h*(lineF(a+i*h));  // заменяя функцию lineF на другие функции производится расчет интегралов для других функций
    }
    return result;
}

void MainWindow::rightRectLine(double e, double a, double b){  // функция двойного пересчета
    double h = (b-a);
    QString method = "Метод правых прямоугольников";

    while(e <= (abs(tempRightRectLine(a,b,h)-tempRightRectLine(a,b,h/2))/(pow(2, 1)-1))){
        h /= 2;
    }

    setInfoL(h, tempRightRectLine(a,b,h), e, method);  // функция вывода информации на экран
}
```

Функция метода средних прямоугольников для линейной функции

```
double tempMidRectLine(double a, double b, double h){  // функция расчета по методу
    int N = (b-a)/h;
    double result = 0;
    for(int i = 0; i < N-1; i++){
        result += h*(lineF(a+(i+0.5)*h));   // заменяя функцию lineF на другие функции производится расчет интегралов для других функций
    }
    return result;
}
void MainWindow::midRectLine(double e, double a, double b){  // функция двойного пересчета
    double h = (b-a);
    QString method = "Метод средних прямоугольников";

    while(e <= (abs(tempMidRectLine(a,b,h)-tempMidRectLine(a,b,h/2))/(pow(2, 2)-1))){
        h /= 2;
    }
    setInfoL(h, tempMidRectLine(a,b,h), e, method);  // функция вывода информации на экран
}
```

Функция метода трапеций для линейной функции

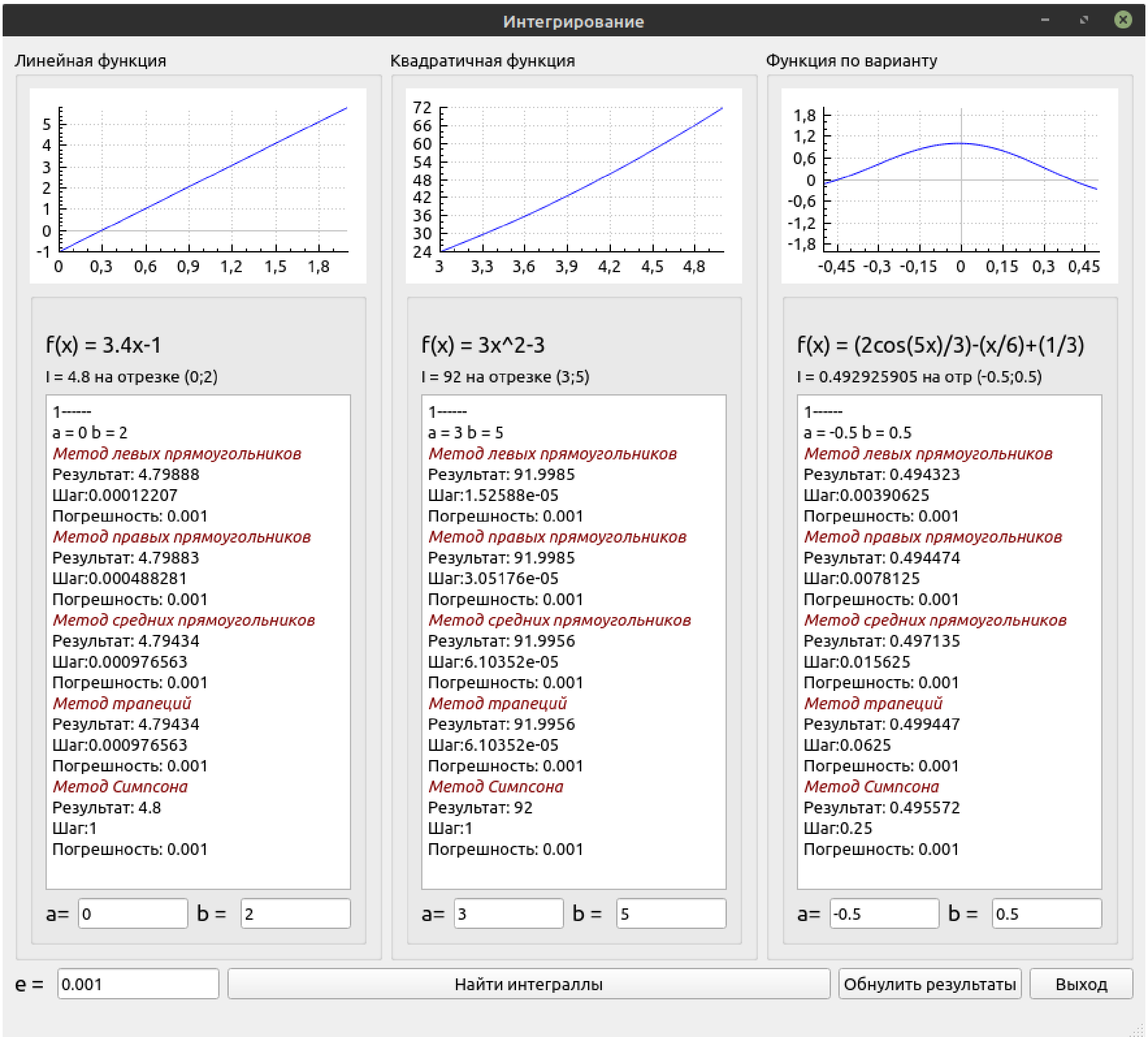
```
double tempTrapLine(double a, double b, double h){  // функция расчета по методу
    int N = (b-a)/h;
    double result = 0;
    for(int i = 1; i < N-1; i++){
        result += lineF(a+i*h);  // заменяя функцию lineF на другие функции производится расчет интегралов для других функций
    }
    result += lineF(a)/2+lineF(b)/2;
    result *= h;

    return result;
}

void MainWindow::trapLine(double e, double a, double b){  // функция двойного пересчета
    double h = (b-a);
    QString method = "Метод трапеций";

    while(e <= (abs(tempTrapLine(a,b,h)-tempTrapLine(a,b,h/2))/(pow(2, 2)-1))){
        h /= 2;
    }

    setInfoL(h, tempTrapLine(a,b,h), e, method);  // функция вывода информации на экран
}
```

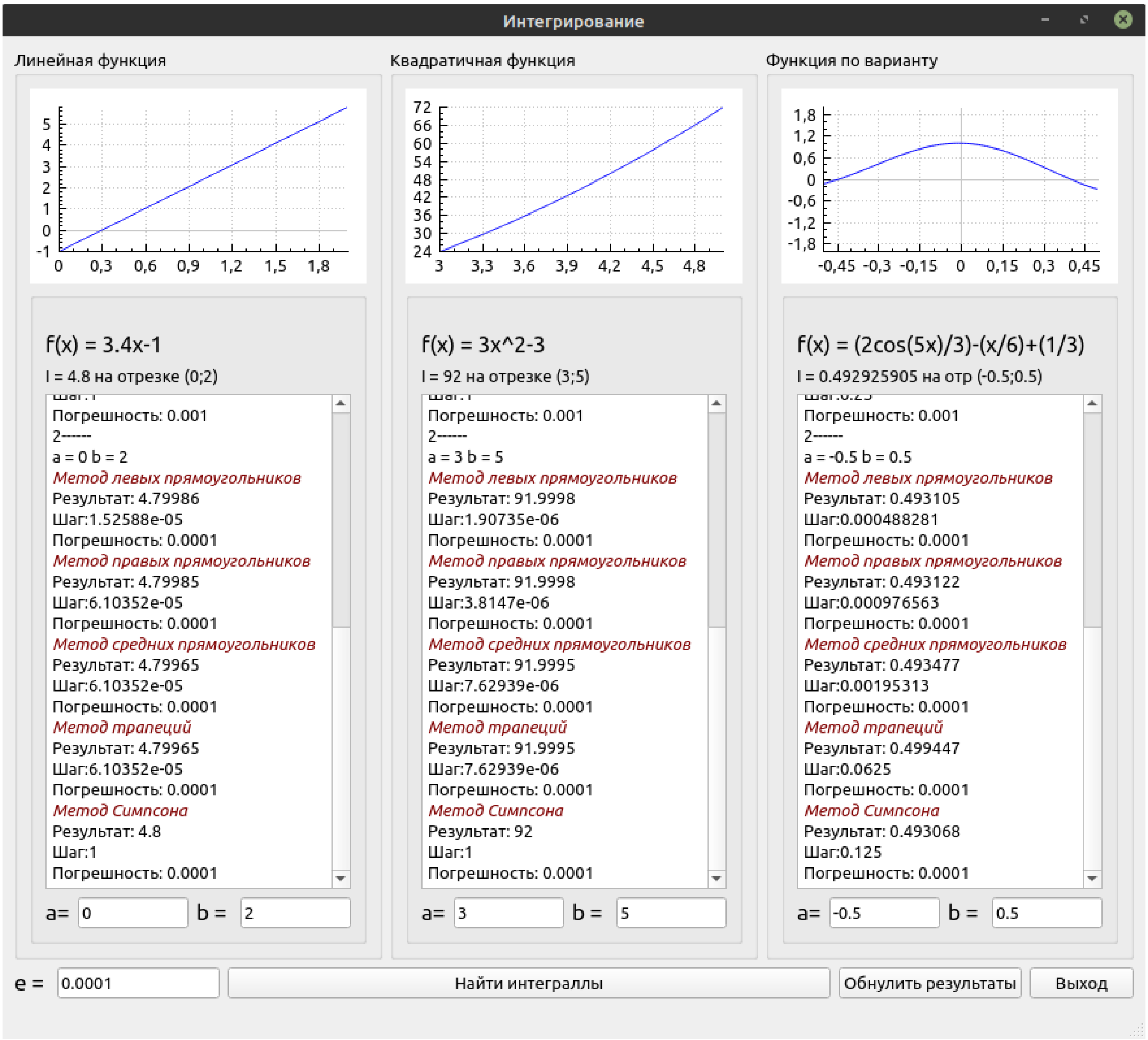
Функция метода Симпсона для линейной функции

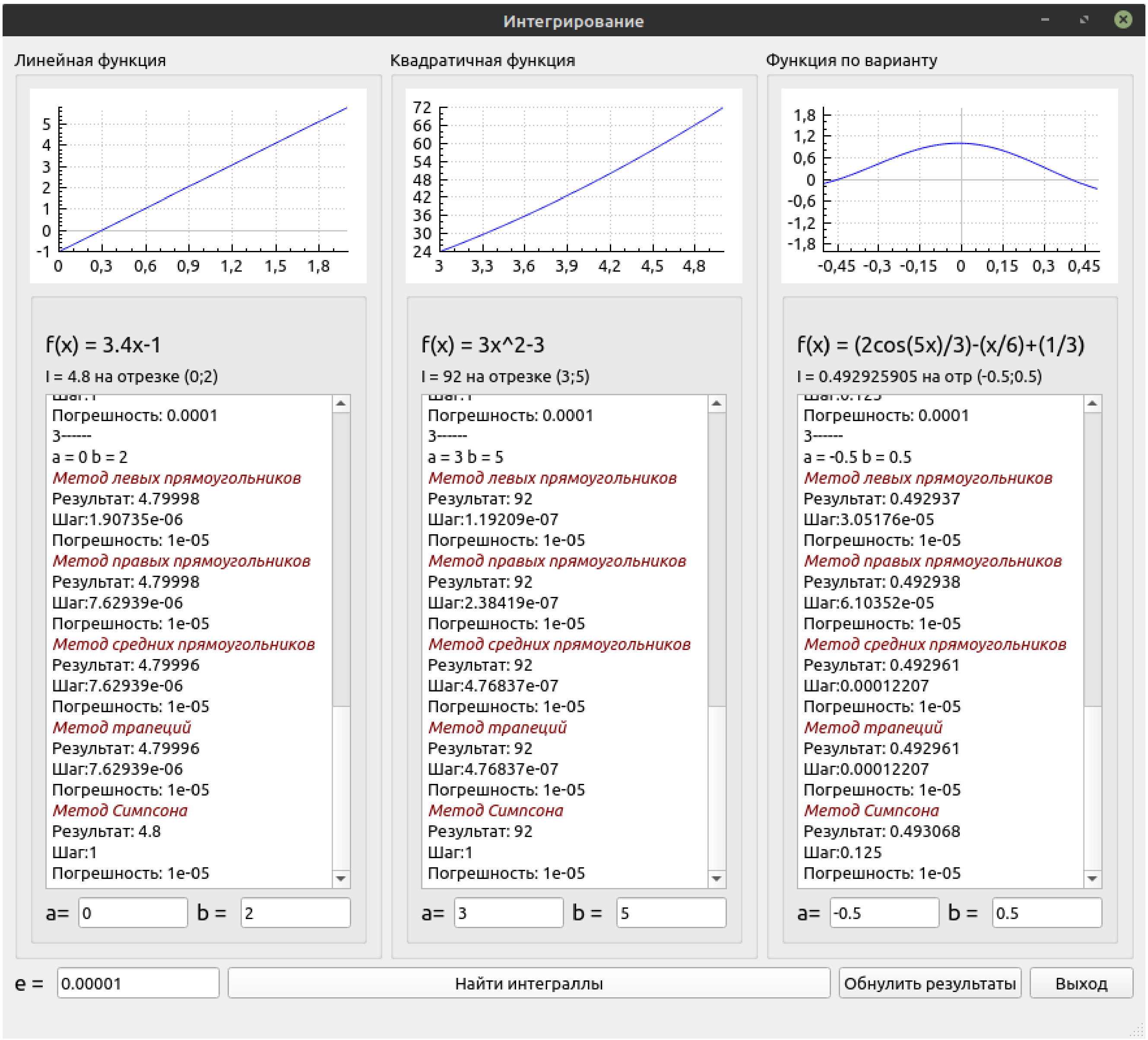
```
double tempPolyLine(double a, double b, double h){  // функция расчета по методу
    int N = (b-a)/h;
    double result = 0;
    double ch=0, nch=0;
    for(int i = 1; i <= N-1; i+=2){
        nch += lineF(a+i*h);  // заменяя функцию lineF на другие функции производится расчет интегралов для других функций
    }
    for(int i = 2; i <= N-2; i+=2){
        ch += lineF(a+i*h);
    }
    result = (h/3)*(lineF(a) + 4*nch + 2*ch + lineF(b));

    return result;
}
```

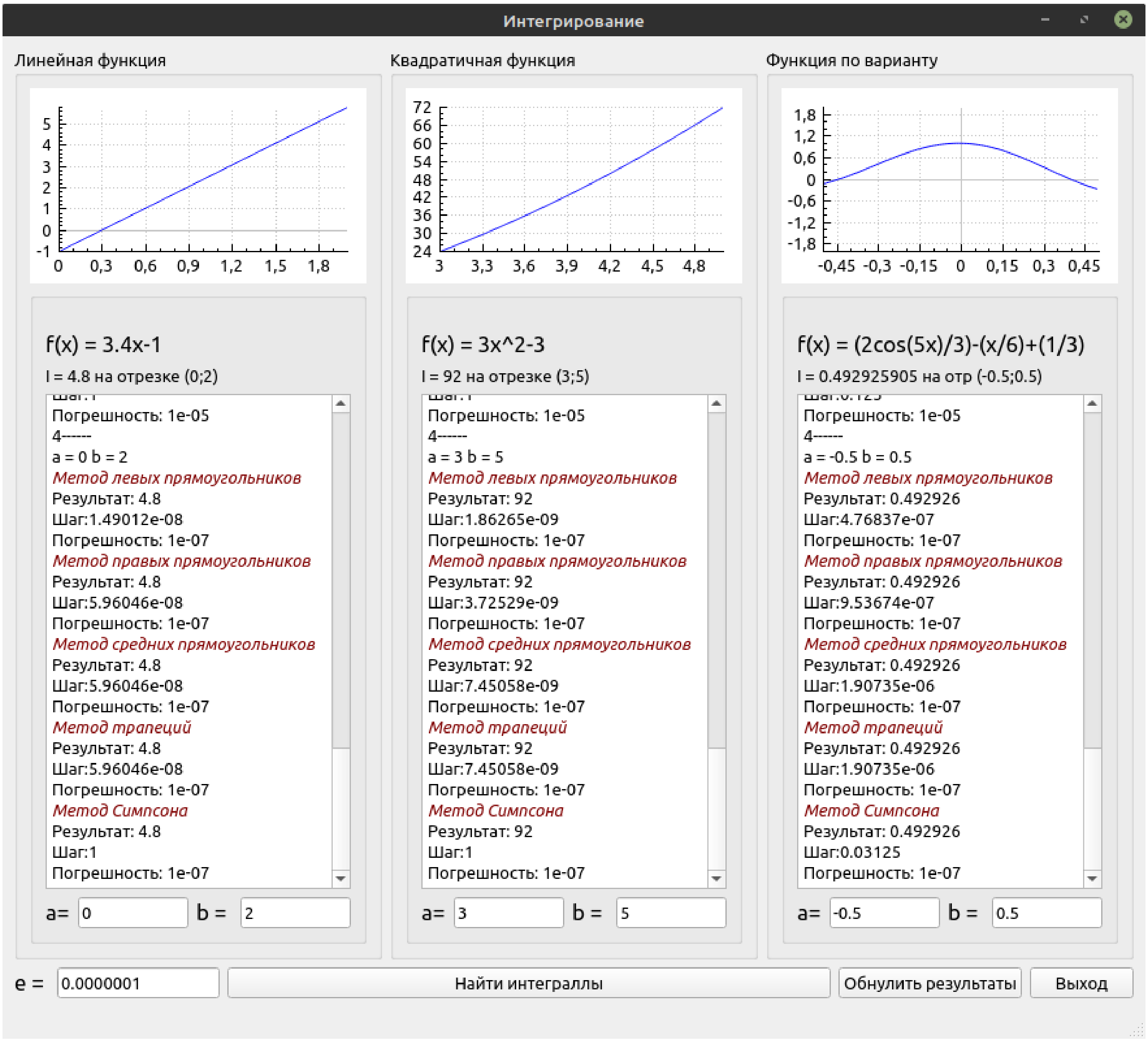
```
void MainWindow::polyLine(double e, double a, double b){ // функция двойного пересчета
    int n = 2;
    QString method = "Метод Симпсона";

    while(e <= (abs(tempPolyLine(a,b,(b-a)/n)-tempPolyLine(a,b,((b-a)/n)/2))/(pow(2, 4)-1))){
        n *= 2;
    }

    setInfoL((b-a)/n, tempPolyLine(a,b,(b-a)/n), e, method);  // функция вывода информации на экран
}
```

Результаты работы программы




Интегрирование
Линейная функция
Квадратичная функция
Функция по варианту
5
4
3
2
1
0
-1
0
0,3
0,6
0,9
1,2
1,5
1,8
72
66
60
54
48
42
36
30
24
3
3,3
3,6
3,9
4,2
4,5
4,8
1,8
1,2
0,6
0
-0,6
-1,2
-1,8
-0,45
-0,3
-0,15
0
0,15
0,3
0,45
f(x) = 3.4x-1
I = 4.8 на отрезке (0;2)
Погрешность: 0.001
2------
a = 0 b = 2
Метод левых прямоугольников
Результат: 4.79986
Шаг:1.52588e-05
Погрешность: 0.0001
Метод правых прямоугольников
Результат: 4.79985
Шаг:6.10352e-05
Погрешность: 0.0001
Метод средних прямоугольников
Результат: 4.79965
Шаг:6.10352e-05
Погрешность: 0.0001
Метод трапеций
Результат: 4.79965
Шаг:6.10352e-05
Погрешность: 0.0001
Метод Симпсона
Результат: 4.8
Шаг:1
Погрешность: 0.0001
a= 0
b = 2
f(x) = 3x^2-3
I = 92 на отрезке (3;5)
Погрешность: 0.001
2------
a = 3 b = 5
Метод левых прямоугольников
Результат: 91.9998
Шаг:1.90735e-06
Погрешность: 0.0001
Метод правых прямоугольников
Результат: 91.9998
Шаг:3.8147e-06
Погрешность: 0.0001
Метод средних прямоугольников
Результат: 91.9995
Шаг:7.62939e-06
Погрешность: 0.0001
Метод трапеций
Результат: 91.9995
Шаг:7.62939e-06
Погрешность: 0.0001
Метод Симпсона
Результат: 92
Шаг:1
Погрешность: 0.0001
a= 3
b = 5
f(x) = (2cos(5x)/3)-(x/6)+(1/3)
I = 0.492925905 на отр (-0.5;0.5)
Погрешность: 0.001
2------
a = -0.5 b = 0.5
Метод левых прямоугольников
Результат: 0.493105
Шаг:0.000488281
Погрешность: 0.0001
Метод правых прямоугольников
Результат: 0.493122
Шаг:0.000976563
Погрешность: 0.0001
Метод средних прямоугольников
Результат: 0.493477
Шаг:0.00195313
Погрешность: 0.0001
Метод трапеций
Результат: 0.499447
Шаг:0.0625
Погрешность: 0.0001
Метод Симпсона
Результат: 0.493068
Шаг:0.125
Погрешность: 0.0001
a= -0.5
b = 0.5
e = 0.0001
Найти интегралы
Обнулить результаты
Выход


Интегрирование
Линейная функция
Квадратичная функция
Функция по варианту
f(x) = 3.4x-1
I = 4.8 на отрезке (0;2)
Погрешность: 0.0001
3------
a = 0 b = 2
Метод левых прямоугольников
Результат: 4.79998
Шаг:1.90735e-06
Погрешность: 1e-05
Метод правых прямоугольников
Результат: 4.79998
Шаг:7.62939e-06
Погрешность: 1e-05
Метод средних прямоугольников
Результат: 4.79996
Шаг:7.62939e-06
Погрешность: 1e-05
Метод трапеций
Результат: 4.79996
Шаг:7.62939e-06
Погрешность: 1e-05
Метод Симпсона
Результат: 4.8
Шаг:1
Погрешность: 1e-05
a= 0 b = 2
f(x) = 3x^2-3
I = 92 на отрезке (3;5)
Погрешность: 0.0001
3------
a = 3 b = 5
Метод левых прямоугольников
Результат: 92
Шаг:1.19209e-07
Погрешность: 1e-05
Метод правых прямоугольников
Результат: 92
Шаг:2.38419e-07
Погрешность: 1e-05
Метод средних прямоугольников
Результат: 92
Шаг:4.76837e-07
Погрешность: 1e-05
Метод трапеций
Результат: 92
Шаг:4.76837e-07
Погрешность: 1e-05
Метод Симпсона
Результат: 92
Шаг:1
Погрешность: 1e-05
a= 3 b = 5
f(x) = (2cos(5x)/3)-(x/6)+(1/3)
I = 0.492925905 на отр (-0.5;0.5)
Погрешность: 0.0001
3------
a = -0.5 b = 0.5
Метод левых прямоугольников
Результат: 0.492937
Шаг:3.05176e-05
Погрешность: 1e-05
Метод правых прямоугольников
Результат: 0.492938
Шаг:6.10352e-05
Погрешность: 1e-05
Метод средних прямоугольников
Результат: 0.492961
Шаг:0.00012207
Погрешность: 1e-05
Метод трапеций
Результат: 0.492961
Шаг:0.00012207
Погрешность: 1e-05
Метод Симпсона
Результат: 0.493068
Шаг:0.125
Погрешность: 1e-05
a= -0.5 b = 0.5
e = 0.00001
Найти интегралы
Обнулить результаты
Выход



Вывод

В ходе данной лабораторной работы были изучены методы численного интегрирования функций. На основе теоретических данных была написана программа по результатам работы которой можно сделать вывод, что метод Симпсона является наиболее эффективным, т. к. при заданной точности вычислений количество разбиений для этого метода меньше, чем для других.