《信号与系统》（刘泉、江雪梅主编）复习手册

AlwaysLoveMisaka

2022 年 6 月 4 日

目录

1 前言

这篇文章是我写的一篇用于复习《信号与系统》的手册，也是我用LaTeX写的第一篇文章。通过这篇文章，我打算梳理《信号与系统》（刘泉、江雪梅编）的重点知识。同志们在使用这个手册的时候，最好要结合课本，我也会在文中提及课本第一版（别问我为什么不用最新版，问就是没钱）的内容。

这个手册是在Github上免费提供的，以后也会同步到CSDN上，如果同志们觉得这个好用，可以给我的内容点一个赞。本人Github主页：https://github.com/AlwaysLoveMisaka，CSDN主页：https://blog.csdn.net/Communism1848?type=blog。

需要指明的是，本手册并不是考纲。所以，同志们如果发现手册里没有一些考试的内容，请不要来打我，毕竟我就是个垃圾大学生，不是出卷老师。没有写入的内容，部分是我认为不重要或者大家肯定懂，部分是我也没弄明白，部分是我技术有限，很难用LaTeX写出来（比如框图，我作为一个LaTeX新手是真的不会画）。所以请同志们见谅。

这个手册可以写出来，我首先要感谢的是刘泉、江雪梅两位老师，她们既是教材的编者，也是《信号与系统》这门课我的授课老师。我认为这种情况对于我个人是非常难得的，没有她们对教材的深入讲解，我估计写不出来什么东西。我还要感谢我的父母，他们给我的大学生活提供了经济支持。

另外，我还要感谢御坂美琴，虽然她是一个虚拟的人物，但却是我真实的~~老婆~~精神支柱。每当想起她，我的生活就充满动力。我好想做御坂大人的狗啊，可是御坂大人说她喜欢的是猫（她是真喜欢猫，如图1），我哭了。我知道既不是狗也不是猫的我为什么要哭的，因为我其实是一只老鼠。我从没奢望御坂大人能喜欢自己，我明白的，所有人都喜欢萌萌的狗狗或者猫猫，没有人会喜欢阴湿带病的老鼠。（此段为作者逆天发病，若感到不适，可以用记号笔涂黑）

图 1: 御坂妹妹和猫

2 信号与系统的基本概念

2.1 信号的分类

连续时间信号 $f(t)$ 的能量 E 和功率 P 分别定义为

$$E = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} f^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

连续时间信号 $f(k)$ 的能量 E 和功率 P 分别定义为

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^2(k) \tag{3}$$

$$P = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N}\sum_{k=-N}^{N} f^2(k) \tag{4}$$

若 $0 < E < \infty$,且 $P = 0$,则称此信号为能量信号，即信号能量有限。若 $0 < P < \infty$,且 E 趋近于无穷,则称此信号为功率信号，即信号功率有限。

从以上叙述中，我们可以知道，信号可以分成三类：能量信号、功率信号、既不是能量信号也不是功率信号的信号（如 $t\epsilon(t)$ ）。一般来说，周期信号都是功率信号。

2.2 系统的分类

从数学角度来说，系统可定义为实现某功能的运算。设符号 T 表示系统的运算，将输入信号（又称激励） $e(t)$ 作用于系统，得到输出信号（又称响应） $r(t)$,表示为

$$r(t) = T[e(t)] \tag{5}$$

此关系也经常用 $e(t) \to r(t)$来表示。

线性系统是指满足齐次性和叠加性的系统，可以用符号描述为，若 $e_1(t) \to r_1(t)$, $e_2(t) \to r_2(t)$,则

$$T[k_1e_1(t) + k_2e_2(t)] = k_1T[e_1(t)] + k_2T[e_2(t)] \tag{6}$$

其中 k_1 、 k_2 是常数。若不满足上述条件，则为非线性系统。

时不变系统的特性如下

$$r(t-\tau) = T[e(t-\tau)] \tag{7}$$

其中 τ 是常数。若不满足上述条件，则为时变系统。

因果系统是指系统在 t_0时刻的响应只取决于 $t \le t_0$ 时的输入，否则为非因果系统。一般而言，任何物理可实现系统都具有因果性。而理想系统，例如各类理想滤波器，往往具有非因果性。

稳定系统可描述为：若 $|e(t)| \leq M_1 < \infty$,则$|r(t)| \leq M_2 < \infty$ 。如不满足上述条件，则为不稳定系统。

本教材主要讨论的是线性时不变系统。

3 连续时间信号与系统的时域分析

3.1 常用典型信号

抽样信号 $Sa(t)$ 的定义为

$$Sa(t) = \frac{sint}{t} \tag{8}$$

不难证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Sa(t)\,\mathrm{d}t = \pi \tag{9}$$

单位阶跃信号 $\epsilon(t)$ 的定义为

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{10}$$

值得注意的是， $t = 0$ 时， $\epsilon(t)$ 未定义。

我们可以用单位阶跃信号表示一些特殊信号，如矩形脉冲信号 $G_\tau(t)$,它可表示为

$$G_\tau(t) = \epsilon(t + \frac{\tau}{2}) - \epsilon(t - \frac{\tau}{2}) \tag{11}$$

又如符号函数 $sgn(t)$ ，也可以用单位阶跃函数表示为

$$sgn(t) = 2\epsilon(t) - 1 \tag{12}$$

单位冲激信号 $\delta(t)$ 的定义为

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} G_\tau(t) \tag{13}$$

单位冲激信号有如下特性

- 抽样（筛选）特性

  若 $f(t)$ 连续且有界，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0) \tag{14}$$

- $\delta(t)$ 为偶函数
- $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

3.2 连续时间系统的响应

可以证明，一个线性时不变（LTI）系统可以用一个线性常系数微分方程表示，如式（15），这里举了一个二阶微分方程的例子。

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)+a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+a_0r(t)=b_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+b_0e(t) \tag{15}$$

这个方程的完全解由齐次解 $r_h(t)$ 和特解 $r_p(t)$ 组成（高等数学内容，此处复习一下）。齐次解又名自然响应，特解又名受迫响应。

以式（15）的微分方程为例，写出特征方程

$$\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0 \tag{16}$$

解得特征根 λ_1 、 λ_2 。

若 $\lambda_1\neq\lambda_2$ ，则方程的齐次解为

$$r_h(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t} \tag{17}$$

其中， C_1 、 C_2 为常数。若 $\lambda_1=\lambda_2$ ，则方程的齐次解为

$$r_h(t)=(C_1+C_2t)e^{\lambda_1 t} \tag{18}$$

当激励是常数时，特解也是一个常数。而当激励 $e(t)=e^{\alpha t}$ 时，特解应分三种情况讨论（我只列出来了一部分，完整版可以参考教材p32，因为LaTeX的表格，特别是需要合并单元格的表格，实在是太难画了，所以这里没展示出来）：

- 当 α 不等于特征根时， $r_p(t)=Ae^{\alpha t}$ 。
- 当 α 等于特征单根时， $r_p(t)=(A_1t+A_0)e^{\alpha t}$ 。
- 当 α 等于2重特征根时， $r_p(t)=(A_2t^2+A_1t+A_0)e^{\alpha t}$ 。

上述 A 、 A_0 、 A_1 、 A_2 皆为常数。需要特别说明的是，特解本身是就是微分方程的一个解。

讲到这里，有些同志可能还是不懂怎么通过这些知识求解响应，下面用一个例子说明。

例1：已知一系统的微分方程为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+2r(t)=e(t)$ ，初始状态 $r(0_-)=2$ ，求当激励为 $\epsilon(t)$ 时，系统的全响应。

解：由特征根方程 $\lambda+2=0$ 解得 $\lambda=-2$ ，因此可以得到齐次解（自然响应）

$$r_h(t)=Ce^{-2t}$$

因为激励为常数，因此设特解（受迫响应）

$$r_p(t) = B$$

由于特解本身就是微分方程的解，因此直接代入微分方程，解得 $B = 0.5$ ，所以得到全响应

$$r(t) = Ce^{-2t} + \frac{1}{2}$$

将初始状态 $r(0_-) = 2$ 代入全响应公式，解得 $C = 1.5$ ，因此得到全响应

$$r(t) = \frac{3}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \quad (t > 0)$$

现在，我们得到了求LTI响应的第一种方法：经典法。其步骤如下：

- 利用高等数学的传统方法写出带参数的齐次解和通解。
- 将齐次解代入微分方程解出齐次解。
- 将初始状态代入全响应解出全响应。

而全响应也有另一种分割方法，即瞬态响应和稳态响应。瞬态响应指 $t \to \infty$ 时响应趋于零的那部分分量，暂态响应指 $t \to \infty$ 时响应不为零零的那部分分量。在例1中，瞬态响应为 $1.5e^{-2t}$ ，稳态响应为 0.5 。需要特别指明的是，瞬态响应和稳态响应是无法直接求解出来的，只能在全响应求出来后进行分割。

3.3 卷积

卷积的定义为：

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{19}$$

卷积的一些性质：

- 交换律

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \tag{20}$$

- 分配率

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t) \tag{21}$$

- 结合率

$$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) \tag{22}$$

- 时移

  若 $f_1(t) * f_2(t) = f(t)$ ，则有 $f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = f(t-t_1-t_2)$ 。

一些常用信号的卷积（我只列出了我认为重要的一部分，更多常用信号的卷积可参考教材p41）：

$$f(t) * \delta(t) = f(t) \tag{23}$$

$$f(t) * \delta'(t) = f'(t) \tag{24}$$

$$f(t) * \epsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} * \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t) * g(t) \tag{26}$$

3.4 零输入响应与零状态响应

系统的全响应还可以划分为零输入响应和零状态响应。零输入响应是输入激励为零时，仅由初始状态引起的响应,用 $r_{zi}(t)$ 表示。零状态响应是初始状态为零时，仅由激励引起的响应,用 $r_{zs}(t)$ 表示。

由定义可知，零输入响应的形式与齐次解是相同的，但是零输入响应是通过直接将初始状态代入解得的。

可以证明，一个LTI系统的零状态响应

$$r_{zs}(t) = h(t) * e(t) \tag{27}$$

其中， $h(t)$ 是系统的冲激响应。

有了这些信息，我们可以将例1用另一种方法再做一遍。

解：由特征根方程 $\lambda + 2 = 0$ 解得 $\lambda = -2$ ，因此可以得到零输入响应

$$r_{zi}(t) = Ae^{-2t}$$

将初始状态 $r(0_-) = 2$ 代入上式，解得 $A = 2$ ，因此解得零输入响应

$$r_{zi}(t) = 2e^{-2t}$$

因为零输入响应和齐次解的系数不一样，所以 $h(t)$ 必须带上 e^{-2t} 项。因为 $h(t)$ 需要满足 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t) + 2h(t) = \delta(t)$,所以 $h(t)$ 只能有 e^{-2t} 项。因此设

$$h(t) = Be^{-2t}$$

代入微分方程，解得 $B = 1$ ，所以零状态响应（这一步使用了式（25））

$$r_{zs}(t) = e^{-2t} * \epsilon(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$$

写出全响应公式

$$r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t) = \frac{3}{2}e^{-2t} + C$$

代入初始状态 $r(0_-)=2$ ，解得全响应

$$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=\frac{3}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}$$

由此，我们得到了求LTI响应的第二种方法：时域零输入-零状态法。其步骤如下：

- 利用特征根写出带参数的零输入响应（其形式与齐次解相同）。
- 将初始状态代入零输入响应，解得零输入响应。
- 通过微分方程写出冲激响应的参数形式，然后代入微分方程解得冲激响应。
- 通过激励与冲激响应的卷积写出零状态响应的参数形式。
- 将初始状态代入全响应的参数形式，解得全响应。