Stochastische Signale

1. Mengenalgebra

1.1. Mengen- und Boolsche Algebra

Kommutativ	$A \cap B = B \cap A$	$A \uplus B = B \uplus A$
Assoziativ	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
	$(A \uplus B) \uplus C = A \uplus (B \uplus C)$	
Distributiv	$A \cap (B \uplus C) = (A \cap B) \uplus (A \cap C)$	
	$A \uplus (B \cap C) = (A \uplus B) \cap (A \uplus C)$	
Indempotenz	$A \cap A = A$	$A \uplus A = A$
Absorbtion	$A \cap (A \uplus B) = A$	$A \uplus (A \cap B) = A$
Neutralität	$A \cap \Omega = A$	$A \uplus \emptyset = A$
Dominant	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \uplus \Omega = \Omega$
Komplement	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$A \uplus \overline{A} = \Omega$
	$\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{\Omega} = \emptyset$
De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \uplus \overline{B}$	$\overline{A \uplus B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

1.2. Kombinatorik

Mögliche Variationen/Kombinationen um k Elemente von maximal n Elementen zu wählen bzw. k Elemente auf n Felder zu verteilen:

	Mit Reihenfolge	Reihenfolge egal
Mit Wiederholung	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
Ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Permutation von n mit jeweils k gleichen Elementen: $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots}$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ $\quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{5}{2} = 10$

1.3. Grundbegriffe

Tupel	$(i, j) \neq (j, i)$ für $i \neq j$
Ungeordnetes Paar	$\{i, j\} = \{j, i\}$
Potenzmenge	$\mathbb{P}(\Omega)$ ist Menge aller Teilmengen von Ω

1.4. Integralgarten

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\int_0 .1em]1q+1x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\int_0 .1em]2\sqrt{ax^3}3$	$\sqrt{ax}$	$\int_0 .1em]a2\sqrt{ax}$
$x\ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{a}{x}$
$\frac{1}{a^2}e^{ax}(ax-1)$	$x \cdot e^{ax}$	$e^{ax}(ax+1)$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x \ln(a)$

$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{at+b}} = \frac{2\sqrt{at+b}}{a}$ $\qquad \int t^2 e^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{(ax-1)^2+1}{a^3} e^{at}$

$\int t e^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{at-1}{a^2} e^{at}$ $\qquad \int x e^{ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a} e^{ax^2}$

1.5. Binome, Trinome

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $\qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

2. Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathbb{F}, \mathrm{P})$

2.1. Definition

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ besteht aus

- Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$: Menge aller möglichen **Ergebnisse** ω_i
- Ereignisalgebra $\mathbb{F} = \{A_1, A_2, \ldots\}$: Menge von Ereignisen $A_i \subseteq \Omega$
- Wahrscheinlichkeitsmaß P

2.2. Ereignisalgebra $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{P}(\Omega)$

- $\Omega \in \mathbb{F}$
- $A_i \in \mathbb{F} \Rightarrow A_i^{\complement} \in \mathbb{F}$
- $\bigcup_{i \geq 1}^{k} A_i \in \mathbb{F}$

$|\mathbb{F}| = 2^{\text{Anzahl disjunkter Teilmengen}}$ (muss endlich sein)

2.2.1 σ-Algebra

Entwicklung $k \to \infty$. Unendlich viele Ergebnisse, aber jedes A_i besteht aus abzählbar vielen Ergebnissen. Besitzt mindestens 2 Ereignisse.

2.3. Wahrscheinlichkeitsmaß P

$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ $\qquad \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

2.3.1 Axiome von Kolmogorow

Nichtnegativität:	$\mathrm{P}(A) \geq 0 \Rightarrow \mathrm{P} : \mathbb{F} \mapsto [0, 1]$
Normiertheit:	$\mathrm{P}(\Omega) = 1$
Additivität:	$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$, wenn $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$

3. Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

3.1. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit für A falls B bereits eingetreten ist:

$\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

3.1.1 Totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Es muss gelten: $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$ für $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$

Totale Wahrscheinlichkeit:	$\mathrm{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}(A|B_i)\,\mathrm{P}(B_i)$
Satz von Bayes:	$\mathrm{P}(B_k|A) = \frac{\mathrm{P}(A|B_k)\,\mathrm{P}(B_k)}{\sum_{i \in I} \mathrm{P}(A|B_i)\,\mathrm{P}(B_i)}$

3.1.2 Multiplikationssatz

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B)\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A)$

Beliebig viele Ereignisse:

$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$

$= \mathrm{P}\left(A_{\pi(1)}\right) \mathrm{P}\left(A_{\pi(2)} | A_{\pi(1)}\right) \mathrm{P}\left(A_{\pi(3)} | A_{\pi(2)} \cap A_{\pi(1)}\right) \times$

$\cdots \times \mathrm{P}\left(A_{\pi(k)} | A_{\pi(k-1)} \cap \cdots \cap A_{\pi(1)}\right)$

3.2. Stochastische Unabhängigkeit

Ereignisse A und B sind unabhängig falls:

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$

Allgemein:

$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathrm{P}(A_i)$ mit Indexmenge I und $\emptyset \neq J \subseteq I$

4. Zufallsvariablen

4.1. Definition

$X : \Omega \mapsto \Omega'$ ist Zufallsvariable, wenn für jedes Ereignis $A' \in \mathbb{F}'$ im Bildraum ein Ereignis A im Urbildraum $\mathbb{F}$ existiert, sodass $\{\omega \in \Omega |\, X(\omega) \in A'\} \in \mathbb{F}$

(Zeichnung erstellen)

4.2. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Zufallsvariablen $X_1, \cdots, X_n$ sind stochastisch unabhängig, wenn für jedes $\vec{x} = [x_1, \cdots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\boxed{\mathrm{P}(\{X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n\}) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\{X_i \leq x_i\})}$$

Gleichbedeutend:

$$F_{X_1, \cdots, X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$$

$$p_{X_1, \cdots, X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i)$$

$$f_{X_1, \cdots, X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

4.3. Bedingte Zufallsvariablen

Bedingte Wahrscheinlichkeit für Zufallsvariablen:

$F_{X\,|\,A}(x|A) = \mathrm{P}\left(\{X \leq x\} | A\right)$

$F_{X\,|\,Y}(x|y) = \mathrm{P}\left(\{X \leq x\} | \{Y = y\}\right)$

$p_{X\,|\,Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$

$f_{X\,|\,Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

5. Funktionen von Zufallsvariablen

$X : \Omega \to \Omega' = \mathbb{R}$ und jetzt $g : \Omega' \to \Omega'' = \mathbb{R}$

$\mathrm{P}(A'') = \mathrm{P}(Y \in A'') = P(\{X \in \Omega' \,|\, g(X) \in A''\} = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, g(X(\omega)) \in A''\}$

5.1. Transformation von Zufallsvariablen

Berechnung von $f_Y(y)$ aus $f_X(x)$

$g(x)$ streng monoton & differenzierbar:

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \left[\left|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\right|_{x = g^{-1}(y)}\right]^{-1}$$

$g(x)$ nur differenzierbar:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{N} f_X(x_i) \left[\left|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\right|_{x = x_i}\right]^{-1}$$

mit $i \in \{1, \ldots, N\}$ sind Nullstellen von $y - g(x_i) = 0$

5.2. Summe unabhängiger Zufallsvariablen

$Z = X + Y$ mit X und Y unabhängig.

$\Rightarrow f_{Z = X+Y}(z) = (f_X * f_Y)(z)$

6. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

6.0.1 Definition

$\mathrm{P}_X(A') = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega |\, X(\omega) \in A'\}) = P(\{X \in A'\}) \quad \forall A' \in \mathbb{F}'$

6.0.2 Kumulative Verteilungsfunktion (KVF bzw. CDF)

$\boxed{F_X(x) = \mathrm{P}(\{X \leq x\})}$

Eigenschaften

- $F_X(x)$ ist monoton wachsend
- $F_X(x) \geq 0$
- $F_X(x)$ ist rechtsseitig stetig: $\forall h > 0 : \lim_{h \to 0} F_X(x + h) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ & $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

6.0.3 Verteilung diskreter Zufallsvariablen

Bezeichnung	Abk.	Zusammenhang
Zähldichte	pmf	$p_X(x) = \mathrm{P}(\{X = x\})$
Kumulative Verteilungsfkt.	cdf	$F_X(x) = \sum_{\xi \in \Omega' : \xi \leq x} p_X(\xi)$

6.0.4 Verteilung stetiger Zufallsvariablen

Bezeichnung	Abk.	Zusammenhang
Wahrscheinlichkeitsdichte	pdf	$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}$
Kumulative Verteilungsfkt.	cdf	$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

Berechnung von $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_x^{x+\epsilon} f_X(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \mathrm{P}\left(x \leq X \leq x + \epsilon\right)$$

Normiertheit $\quad \sum p(x) + \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{!}{=} 1$

6.1. Mehrdimensionale Verteilungen

6.1.1 Mehrdimensionale Zufallsvariable:

$\vec{X} = [X_1, \cdots, X_n]^T$ mit X_i Zufallsvariable

6.1.2 Gemeinsame kumulative Verteilungsfunktion:

$F_{X_1, \cdots, X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \boxed{F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \mathrm{P}(\{\vec{X} \leq \vec{x}\})} =$

$\mathrm{P}(\{X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n\})$

6.1.3 Diskrete Zufallsvariablen:

$p_{X_1, \cdots, X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \mathrm{P}(\{\vec{X} \leq \vec{x}\})$ (joint probability mass function)

6.1.4 Stetige Zufallsvariablen:

$$F_{X_1, \cdots, X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1, \cdots, X_n}(\xi_1, \cdots, \xi_n)\,\mathrm{d}\xi_n \cdots \mathrm{d}\xi_1$$

$f_{X_1, \cdots, X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\vec{X}}(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$ $\qquad f_{X,Y} = f_{Y,X}$

(joint probability density function)

6.1.5 Marginalisierung

Prinzip: Lasse alle vernachlässigbaren ZV gegen unendlich gehen.

$F_{X_1, \cdots, X_m}(x_1, \cdots, x_m) = F_{X_1, \cdots, X_n}(x_1, \cdots, x_m, \infty, \cdots, \infty)$

Randverteilung: Spezialfall der Marginalisierung um aus der mehrdimensionalen KVF die KVF für eine ZV zu erhalten.

$F_{X_1}(x_1) = F_{X_1, \cdots, X_n}(x_1, \infty, \cdots, \infty)$

Randverteilung der Zähldichte (PMF) (für diskrete ZV)

$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2, \cdots, x_n} p_{X_1, \cdots, X_n}(x_1, \cdots, x_n)$

Randverteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte (WDF) (für stetige ZV)

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, \cdots, X_n}(x_1, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_2$$

7. Stochastische Standardmodelle

7.1. Gleichverteilung

7.1.1 Diskret

$p_X(x) = \frac{1}{|\Omega|}, \quad x \in \{1, \dots, |\Omega|\}$

Beispiele: Wurf einer fairen Münze, Lottozahlen

7.1.2 Stetig $(a, b : -\infty < a < b < \infty)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a,b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$\mathrm{E}[X] = \frac{a+b}{2}$ (Erwartungswert) $\quad \mathrm{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$ (Varianz) $\quad \varphi_X(s) = \frac{e^{j\omega b} - e^{j\omega a}}{j\omega(b-a)}$ (Charakt. Funktion)

Beispiele: Winkel beim Flaschendrehen, Phase einer empf. Sinusschwingung

7.2. Bernoulliverteilung $(0 \le p \le 1)$

Zähldichte 2 Ereignisse: Erfolg und Misserfolg:

$$p_X(k) = \begin{cases} p, & k = 1 \\ 1-p & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_X(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1-p & 0 \le k < 1 \\ 1 & k \ge 1 \end{cases}$$

$\mathrm{E}[X] = p$ (Erwartungswert) $\quad \mathrm{Var}[X] = p(1-p)$ (Varianz) $\quad G_X(z) = pz + 1 - p$ (Wahrscheinlichkeitserz. Funktion)

Beispiele: Einmaliger Wurf einer (unfairen) Münze

7.3. Binomialverteilung

Folgen von Bernoulli-Experimenten

Zähldichte

$$p_X(k) = B_{n,p}(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & k \in \{0, \dots, n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathrm{E}[X] = np$ (Erwartungswert) $\quad \mathrm{Var}[X] = np(1-p)$ (Varianz) $\quad \varphi_X(s) = (1 - p + pe^{s})^n$ (Charakt. Funktion)

Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_X(z) = (pz + 1 - p)^n$

Beispiele: Anzahl der Übertragungsfehler in einem Datenblock endlicher Länge, Wiederholtes Werfen einer Münze

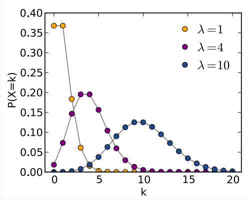
7.4. Poisson-Verteilung $(\lambda \ge 0, k \in \mathbb{N}_0)$

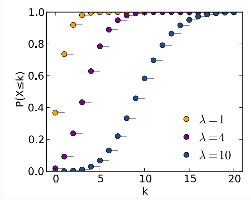
Asymptotischer Grenzfall der Binomialverteilung

$n \to \infty, p \to 0, np \to \lambda \quad p_X(k) = \lim_{n \to \infty} B_{n, \frac{\lambda}{n}}(k)$

ZD/PMF: $p_X[k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

KVF/CDF: $F_X[k] =$ zu kompliziert





$\mathrm{E}[X] = \lambda$ (Erwartungswert) $\quad \mathrm{Var}[X] = \lambda$ (Varianz) $\quad \varphi_X(s) = \exp(\lambda(e^{s} - 1))$ (Charakt. Funktion)

Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$

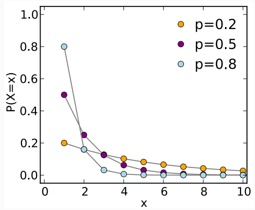
Beispiele: Zahl der Phänomene in einem Zeitintervall, Google-Anfragen in einer Stunde, Schadensmeldungen an Versicherungen in einem Monat

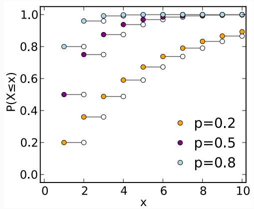
7.5. Geometrische Verteilung $(k \in \mathbb{N})$

Wahrscheinlichkeit von k Versuchen bis Erfolg

ZD/PMF: $p_X[k] = (1-p)^{k-1} p$

KVF/CDF: $F_X[k] = 1 - (1-p)^k$





$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{p}$ (Erwartungswert) $\quad \mathrm{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$ (Varianz) $\quad \varphi_X(s) = \frac{pe^{1s}}{1-(1-p)e^{1s}}$ (Charakt. Funktion)

Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_X(z) = \frac{pz}{1 - z + pz}$

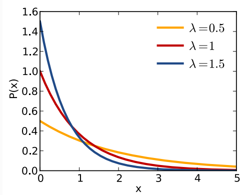
Beispiele: diskrete Dauer bis ein technisches Gerät zum ersten Mal ausfällt, Anzahl der Würfe bis man eine "6"würfelt

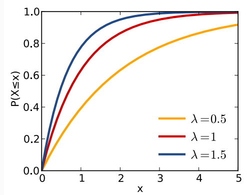
7.6. Exponentialverteilung

Wie geometrische Verteilung für stetige Zufallsvariablen ("Lebensdauer"), Gedächtnislos

WDF/PDF: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \ge 0$

KVF/CDF: $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x \ge 0$



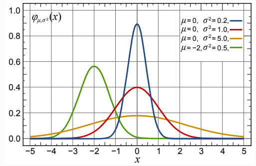


$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ (Erwartungswert) $\quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ (Varianz) $\quad \varphi_X(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega}$ (Charakt. Funktion)

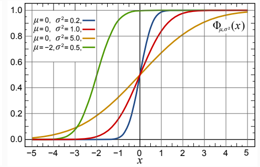
Beispiele: Lebensdauer von el. Bauteilen, Zeitdauer zwischen zwei Anrufen in einem Call-Center

7.7. Normalverteilung

WDF/PDF:



KVF/CDF:



Parameter $\mu \in \mathbb{R} \; \sigma > 0$

WDF $\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}}$

$\mathrm{E}(X) = \mu$ (Erwartungswert) $\quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ (Varianz) $\quad \varphi_X(\omega) = e^{j\omega\mu - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$ (Charakt. Funktion)

Beispiele: Rauschen, Ort eines Teilchens relativ zu seiner Anfangsposition bei brownscher Molekularbewegung, abgefahrene Sachen, die man nicht genauer bestimmen will oder kann

7.8. Multivariante Normalverteilung

Verbund -WDF:

$$f_{X_1..X_n}(x_1..x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{\det \underline{C}}} e^{\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \underline{C}^{-1}(x-\mu)\right)}$$

8. Erwartungswert

8.1. Definition

gibt den mittleren Wert einer Zufallsvariablen an

8.2. diskrete (reelle) Zufallsvariablen

$$\boxed{E[X] = \sum_{x \in \Omega'} x P(\{X = x\}) = \sum_{x \in \Omega'} x p_x(x)}$$

für $X : \Omega \to \Omega' \subset \mathbb{R}$

Für Funktionen von Zufallsvariablen:

$E[g(X)] = \sum_{x \in \Omega'} g(x) p_X(x)$

mit $X : \Omega \to \Omega' \subset \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

8.3. stetige Zufallsvariablen

$\boxed{\mathrm{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x) \, \mathrm{d}x}$ für $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Für Funktionen von Zufallsvariablen:

$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) \, \mathrm{d}x$

mit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

8.4. Eigenschaften des Erwartungswerts

Linearität:	$E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y]$
Monotonie:	$X \le Y \Rightarrow E[X] \le E[Y]$

Beweis mit der Definition und der Linearität des Integrals bzw. der Summe.

Falls X und Y stochastisch unabhängig: $\mathrm{E}[X\,Y] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]$

Achtung: Umkehrung nicht möglich.

Stoch. Unabhängig $\Rightarrow$ Unkorreliertheit

Spezialfall für $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$:

$\mathrm{E}[X] = \int_0^\infty \mathrm{P}(X > t) \, \mathrm{d}t$ (stetig)

$\mathrm{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X > k)$ (diskret)

9. Varianz und Kovarianz

9.1. Varianz

ist ein Maß für die Stärke der Abweichung vom Erwartungswert

$$\boxed{\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2}$$

9.1.1 Standard Abweichung

$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$

9.2. Kovarianz

$$\boxed{\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])] = \mathrm{Cov}[Y, X]}$$

andere Darstellungen:
$\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{E}[X\,Y] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] = \mathrm{Cov}[Y, X]$

9.3. Spezialfälle

Kovarianz mit sich selbst:
$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Cov}[X, X]$

aus den Definitionsgleichungen:
$\mathrm{Cov}[\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta] = \alpha\gamma\,\mathrm{Cov}[X, Y]$
$\mathrm{Cov}[X + U, Y + W] = \mathrm{Cov}[X, Y] + \mathrm{Cov}[X, W] + \mathrm{Cov}[U, Y] + \mathrm{Cov}[U, W]$

wegen der Linearität des Erwartungswerts:
$\mathrm{Var}[\alpha X + \beta] = \alpha^2\,\mathrm{Var}[X]$
für die Summe von Zufallsvariablen:
$\mathrm{Var}[\sum\limits_{i=1}^{n} X_i] = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i] + \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j \neq i} \mathrm{Cov}[X_i, X_j]$

9.4. Unkorreliertheit

wenn gilt:

$$\boxed{\mathrm{Cov}[X, Y] = 0 \Leftrightarrow \mathrm{E}[X\,Y] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}$$

Stoch. Unabhängig $\Rightarrow$ Unkorreliertheit

wenn ZV normalverteilt (sonst nicht!):
Unkorreliertheit $\Rightarrow$ stoch. Unabhängigkeit

bei paarweisen unkorrellierten Zufallsvariablen:
$\mathrm{Var}[\sum\limits_{i=1}^{n} X_i] = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i]$

9.5. Orthogonalität

$$\boxed{\mathrm{E}[X\,Y] = 0}$$

9.6. Korrelationskoeffizient

$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}\sqrt{\mathrm{Var}[Y]}} = \frac{c_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$ mit $\rho_{X,Y} \in [-1, 1]$

9.7. Komplexe Zufallsvariablen

$Z = X + \imath Y \qquad W = U + \imath Y$
$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[X + \imath Y] = \mathrm{E}[X] + \imath\,\mathrm{E}[Y]$
$\mathrm{Var}[Z] = \mathrm{E}[(Z - \mathrm{E}[Z])^2] = \mathrm{E}[Z^2] - \mathrm{E}[Z]^2$
$\mathrm{Cov}[Z, W] = \mathrm{E}[Z\,W^*] - \mathrm{E}[Z]\,\mathrm{E}[W]^* = \mathrm{Cov}[W, Z]^*$

10. Erzeugende und charakter. Funktionen

10.1. Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

für $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$

$$\boxed{G_X(z) = \mathrm{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) z^k, \quad |z| \le 1}$$

Anwendungen

$$\mathrm{P}(\{X = n\}) = \frac{1}{n!}[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} G_X(z)]_{z=0}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\mathrm{E}[X] = [\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} G_X(z)]_{z=1}$$

$$\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X] = [\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} G_X(z)]_{z=1}$$

$$\mathrm{Var}[X] = [\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} G_X(z)]_{z=1} - \mathrm{E}[X]^2 + \mathrm{E}[X]$$

Für $X_i : \Omega \to \mathbb{N}_0, i \in \{1, \dots, n\}$ stochastisch unabhängige, diskrete, nichtnegative ZV und $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$G_Z(z) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(z)$$

10.2. Momenterzeugende Funktion

Mit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle ZV:

$$\boxed{M_X(s) = \mathrm{E}[e^{s\,X}], \quad s \in \mathbb{D} = \{s \in \mathbb{R}\}\mathrm{E}[e^{s\,X} < \infty]}$$

Potenzreihenentwicklung (mit $s \in]-a, a[$):
$M_X(s) = \mathrm{E}[e^{s\,X}] = \mathrm{E}\left[\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} X^k\right] = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!}\,\mathrm{E}\left[X^k\right]$
Erwartungswert: $\mathrm{E}[X^n] = \left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} M_X(s)\right]_{s=0}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$
Summe von ZV: $M_Z(s) = \prod\limits_{i=1}^{n} M_{X_i}(s)$

10.3. Charakteristische Funktion

$\boxed{\varphi_X(\omega) = E\left[e^{\imath\omega\,X}\right], \quad \omega \in \mathbb{R}} \qquad \varphi_X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\imath\omega x} f_X(x)\,\mathrm{d}x$

$f_X(-x)\,\Delta\,\varphi(\omega)$
Erwartungswert

$$\mathrm{E}[X^n] = \frac{1}{\imath^n}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}\varphi_X(\omega)\right]_{\omega=0}$$

Summe von ZV:

$$\varphi_Z(\omega) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(\omega)$$

10.4. Der zentrale Grenzwertsatz

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Z_n \le z) = \Phi(z)}$$

11. Reelle Zufallsfolgen

Eine reelle Zufallsfolge ist ganz einfach eine Folge reeller Zufallsvariablen.

11.1. Ensemble und Pfad

11.1.1 Ensemble

$\mathsf{S}_n : \Omega_n \times \Omega_{n-1} \times \cdots \times \Omega_1 \to \mathbb{R}$
$(\omega_n, \omega_{n-1}, \dots, \omega_1) \mapsto s_n(\omega_n, \omega_{n-1}, \dots, \omega_1), \quad n \in \mathbb{N}$
Erklärung: Jede Realisierung von S_n wird erzeugt durch die Menge (das Ensemble) aufeinanderfolgender Realisierungen X_k mit $k \in \{1, \dots, n\}$.

11.1.2 Pfad

$\vec{\mathsf{S}}_n = (\mathsf{S}_n, \mathsf{S}_{n-1}, \dots, \mathsf{S}_1) : \Omega^{(n)} \to \mathbb{R}^n$
$\vec{\omega}_n \mapsto \vec{s}_n(\vec{\omega}_n) = (s_n(\vec{\omega}_n), s_{n-1}(\vec{\omega}_n), \dots, s_1(\vec{\omega}_n)), \quad n \in \mathbb{N}$
Erklärung: Die Abfolge der Realisierungen von S_1 bis S_n (also der Pfad von S) und somit auch jedes einzelne S_k kann als Ergebnis des Ereignisses $\vec{\omega}_n$ angesehen werden.

11.2. Verteilungen und Momente

Erwartungswert	$\mu_X(n) = E[X_n]$
Varianzfolge	$\sigma_X^2(n) = Var[X_n] = E[X_n^2] - E[X_n]^2$
Autokorrelation	$r_X(k, l) = E[X_k\,X_l]$
Autokovarianzf.	$c_X(k, l) = Cov[X_k, X_l] = r_X(k, l) - \mu_X(k)\mu_X(l)$

11.3. Random Walk

$n \in \mathbb{N}$ Schritte mit 2 möglichen Bewegungsrichtungen $X \in \{+\delta, -\delta\}$

$\boxed{\mathsf{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i}$
$\mathrm{P}(\{X_i = +\delta\}) = p$
$\mathrm{P}(\{X_i = -\delta\}) = 1 - p$
symmetrisch $\Leftrightarrow p = \frac{1}{2}, \ \mu_{\mathsf{S}}(n) = 0$

$\mu_{\mathsf{S}}(n) = n(2p - 1)\delta$	$E[X_i] = (2p - 1)\delta$
$\sigma_{\mathsf{S}}^2(n) = 4np(1 - p)\delta^2$	$Var[X_i] = 4p(1 - p)\delta^2$

11.4. Stationarität

Eine Zufallsfolge ist *stationär*, wenn um ein beliebiges k ($k \in \mathbb{N}$) zueinander verschobene Zufallsvektoren die selbe Verteilung besitzen.
Im *weiteren Sinne stationär (W.S.S.)*, wenn:

$\mu_X(i) = \mu_X(i + k) \qquad \wedge \qquad r_X(i_1, i_2) = r_X(i_1 + k, i_2 + k)$

stationär $\Rightarrow$ WSS (aber nicht anders herum!)

11.5. Markow-Ungleichung

$$\boxed{\mathrm{P}(\{|X| \ge a\}) \le \frac{\mathrm{E}[X]}{a}}$$

11.6. Tschebyschow-Ungleichung

$$\boxed{\mathrm{P}(\{|X - \mathrm{E}[X]| \ge a\}) \le \frac{\mathrm{Var}[X]}{a^2}}$$

Gesetz der großen Zahlen: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathrm{E}[X_i]) \to 0$

Hinweis: Kapitel 12 (Makrowetten und bedingte Unabhängigkeit) war im WiSe 12/13 nicht prüfungsrelevant und wird deshalb hier nicht behandelt.

13. Reelle Zufallsprozesse

13.1. Verteilungen und Momente

Zeitlich, Kontinuierlich veränderliche Zufallsvariable X_t

Erwartungswertfunktion:
$\mu_X(t) = \mathrm{E}\,X_t$
Autokorrelationsfunktion:
$r_X(s, t) = \mathrm{E}[X_s\,X_t]$
Autokovarianzfunktion:
$c_X(s, t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = r_X(s, t) - \mu_X(s)\mu_X(t)$

Hinweis: Bei Integration über r_X immer darauf achten, dass $s - t > 0$. Bei Bedarf Integral aufteilen und Grenzen anpassen.

13.2. Stationarität

Ein Zufallsprozess ist *stationär*, wenn um ein beliebiges s ($s \in \mathbb{R}$) zueinander verschobene Zufallsvektoren die selbe Verteilung besitzen.
Im *weiteren Sinne stationär (W.S.S.)*, wenn:

$\mu_X(t) = \mu_X(t + s) \qquad \wedge \qquad r_X(t_1, t_2) = r_X(t_1 + s, t_2 + s)$

Daraus folgt mit $s = t + \tau$
$r_X(s, t) = \mathrm{E}[X_s\,X_t] = \mathrm{E}[X_{t+\tau}\,X_t] = r_X(s - t) = r_X(\tau)$
Im *weiteren Sinne zyklisch stationär*, wenn:

$\mu_X(t) = \mu_X(t + T) \qquad \wedge \qquad r_X(t_1, t_2) = r_X(t_1 + T, t_2 + T)$

stationär $\Rightarrow$ WSS $\Rightarrow$ im weiteren Sinne zyklisch stationär (aber nicht anders herum!)

13.3. Mehrere Zufallsvariablen auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum

Kreuzkorrelationsfunktion:
$r_{X,Y}(s, t) = \mathrm{E}[X_s\,Y_t] = r_{Y,X}(t, s)$
Kreuzkovarianzfunktion:
$c_{X,Y}(s, t) = r_{X,Y}(s, t) - \mu_X(s)\mu_Y(t) = c_{Y,X}(t, s)$

13.3.1 Gemeinsame Stationarität

Zwei Zufallsprozesse auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum sind *gemeinsam stationär*, wenn die einzelnen ZPs jeweils selbst stationär sind und ihre gemeinsamen Verteilungen verschiebungsinvariant sind.

13.3.2 Gemeinsam im weiteren Sinne stationär

Voraussetzung: X_t und Y_t sind gemeinsam WSS wenn,

X_t und Y_t einzelnd WSS und
$r_{X,Y}(t_1, t_2) = r_{X,Y}(t_1 + s, t_2 + s)$
gemeinsam stationär $\Rightarrow$ gemeinsam WSS (aber nicht umgekehrt!)

Daraus folgt mit $s = t + \tau$
$r_X(s, t) = \mathrm{E}[X_{t+\tau}\,X_t] = r_X(\tau) = r_X(-\tau) \qquad r_X(\tau) \le r_X(0)$
$r_{X,Y}(s, t) = r_{X,Y}(\tau) = \mathrm{E}[X_{t+\tau}\,Y_t] = \mathrm{E}[Y_t\,X_{t+\tau}] = r_{Y,X}(-\tau)$

13.3.3 Stochastische Unkorreliertheit

$c_{X,Y}(s, t) = 0 \Leftrightarrow r_{X,Y}(s, t) = \mu(s)\mu(t), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$

13.3.4 Orthogonalität

$r_{X,Y}(s, t) = 0, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$

13.4. Wiener-Prozess

$\mathsf{S}_t = \sum_{i=1}^{n} X_i \, u(t - iT), \; T > 0 \Rightarrow$ mit n $\to \infty$ und T $\to 0$: W_t

$f_{W_t}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma^2 t}\right)$

Eigenschaften

- $\mathsf{P}(\{W_0 = 0\}) = 1$
- hat unabhängige Inkremente $\to r_{xy}(s,t) = 0$
- $W_t - W_s \sim N(0, \sigma^2(t-s)), \forall 0 \le s \le t$
- $W_t(\omega)$ ist eine stetige Musterfunktion mit Wahrscheinlichkeit 1

Erwartungswertfunktion.	$\mu_W(t) = 0$
Autokorrelationsfunktion	$r_W(s,t) = \sigma^2 min\{s,t\}$
Autokovarianzfunktion	$c_W(s,t) = \sigma^2 min\{s,t\}$

13.5. Poisson-Prozess ($N_t :\in \mathbb{R}_+$)

$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} u(t - T_i), \quad T = \sum_{j=1}^{i} X_j$

$f_{T_i}(t) = \frac{\lambda^i}{(i-1)!} t^{i-1} e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0$

$\mathsf{P}(\{N_t = n\}) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-(\lambda t)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}_+$

Eigenschaften

- ist ein Zählprozess
- hat unabhängige Inkremente
- $N_t - N_s$ ist Poisson-verteilt mit Parameter $(\lambda(t-s)$ für alle $0 \le s \le t$
- hat eine Rate λ
- Zeitintervalle zwischen den Inkremetierungen sind unabhängig und identisch exponentialverteilt mit Parameter λ

Erwartungswertfunktion.	$\mu_N(t) = \lambda t$
Autokorrelationsfunktion	$r_N(s,t) = \lambda \min\{s,t\} + \lambda^2 st$
Autokovarianzfunktion	$c_N(s,t) = \lambda \min\{s,t\}$

14. Zufallsprozesse(ZP) und lineare Systeme

14.1. Allgemeines

V_t	Eingang
$h(s,t)$	Impulsantwort

Falls Zufallsprozesse *WSS*:

Erwartungswert: $\mu_{\mathsf{W}} = \mu_{\mathsf{V}} \int_{\infty}^{\infty} h(t) \, \mathrm{d}t$

Kreuzkorrelationsfkt: $r_{\mathsf{W,V}}(\tau) = \mathsf{E}[\mathsf{W}_s \mathsf{V}_t] = (h * r_{\mathsf{V}})(\tau)$

Autokorrelationsfkt: $r_{\mathsf{W}} = \mathsf{E}[\mathsf{W}_s \mathsf{W}_t] = (\tilde{h} * h * r_{\mathsf{V}})(\tau), \quad \tilde{h}(\tau) = h(-\tau)$

14.2. Leistungsdichtespektrum (LDS)

Nicht WSS $\Rightarrow$ Kein LDS

$\boxed{S_{\mathsf{V}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{\mathsf{V}}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \, \mathrm{d}\tau}$

$r_{\mathsf{V}}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \; S_{\mathsf{V}}(f)$

$r_{\mathsf{V,W}}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \; S_{\mathsf{V,W}}(f)$

Auf Frequenz bezogene Signalleistung für infitisimales Frequenzband.

$$\underbrace{S_{\mathsf{W}}(f)}_{S_{\mathsf{WW}}(f)} = \underbrace{H(f) S_{\mathsf{VW}}(f)}_{H^*(f) S_{\mathsf{WV}}(f)} = \underbrace{H(f) H^*(f)}_{|H(f)|^2} \underbrace{S_{\mathsf{VV}}(f)}_{S_{\mathsf{V}}(f)}$$

$$X \;—\; \boxed{H_1(f)} \cdots\cdots \boxed{H_n(f)} \;—\; Y$$

$$A \;—\; \boxed{G_1(f)} \cdots\cdots \boxed{G_m(f)} \;—\; B$$

$S_{\mathsf{Y,X}}(f) = (\prod_{i=1}^{n} H_i(f)) S_{\mathsf{X}}(f) \qquad S_{\mathsf{X,Y}}(f) = (\prod_{i=1}^{n} H_i^*(f)) S_{\mathsf{X}}(f)$

$S_{\mathsf{Y,B}}(f) = (\prod_{i=1}^{n} H_i(f))(\prod_{j=1}^{m} G_j(f))^* S_{\mathsf{X,A}}(f)$

$$S_{\mathsf{X}}(f) = S^*_{\mathsf{X}}(f) \quad \& \quad S_{\mathsf{X,Y}}(f) = S^*_{\mathsf{Y,X}}(f), \quad \forall f \in \mathbb{R}$$

$$S_{\mathsf{X}}(f) = S_{\mathsf{X}}(-f), \quad \forall f \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathsf{X}}(f) \, \mathrm{d}f = r_{\mathsf{X}}(0) = \mathsf{Var}[X] + \mathsf{E}[X]^2 = \sigma_X^2 + \mu_X^2$$

$$S_{\mathsf{X}}(f) \ge 0, \quad \forall f \in \mathbb{R}$$

P.S. Stochastik ♡ dich.

von von Emanuel Regnath, Martin Zellner, Alexander Preißner und Hendrik Böttcher – Mail: info@latex4ei.de