علیرضا رشیدی - 4011406123 - تمارین فصل 2

1) $3\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - 2x\right) = 2\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$3\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - 6x = 2\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$-6x = -\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$x = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

---

2) a) $\underset{2\times3}{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}} \underset{3\times2}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}} = \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} -4+0+6 & 2+0+-9 \\ 8+0+-2 & -4+6+3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\underset{2\times2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{2\times2}{\begin{bmatrix} -2+2 & 0+2 \\ -6+4 & 0+4 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\underset{3\times3}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{3\times1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \underset{3\times1}{\begin{bmatrix} 2+0+2 \\ 0-2-3 \\ 0+0+1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

---

3) a) $[1, 2, 3]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

7)
$$\underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}} \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 0 & u_z & -u_y \\ -u_z & 0 & u_x \\ u_y & -u_x & 0 \end{bmatrix}} = \underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \,,\; u_z v_x - u_x v_z \,,\; u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix}} = u \times v$$

---

10) a)
$$\begin{bmatrix} 21 & -4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{determinant}} (21 \times 7) - (-4 \times 10) = 147 + 40 = 187$$

b)
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{determinant}} 2 \times \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 2(3 \times 7) = 42$$

---

11) a) for 2×2 matrix
$$\longrightarrow A = \begin{bmatrix} 21 & -4 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -10 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{187} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{187} & \frac{4}{187} \\ -\frac{10}{187} & \frac{21}{187} \end{bmatrix}$$

b) for 3×3 matrix
$$\longrightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det B} \times B^*$$

$$B^* = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{42} \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

1) اگر T را خطی در نظر بگیریم خواهیم داشت $\Rightarrow \begin{cases} ① \; T(u+v) = T(u) + T(v) \\ ② \; T(ku) = kT(u) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=(u_x, u_y, u_z) \\ v=(v_x, v_y, v_z) \end{cases} \overset{①}{\Rightarrow} \quad T(u+v) = T(u_x+v_x, \; u_y+v_y, \; u_z+v_z)$$

$$= (u_x+v_x+u_y+v_y, \; u_x+v_x-۳, \; u_z+v_z)$$

$$= (u_x+u_y, \; u_x-۳, \; u_z) + (v_x+v_y, \; v_x, \; v_z)$$

$$= T(u) + (v_x+v_y, \; v_x, \; v_z)$$

$$= T(u) + (v_x+v_y, \; v_x-3+3, \; v_z)$$

$$= T(u) + (v_x+v_y, \; v_x-3, \; v_z) + (0,3,0)$$

$$= T(u) + T(v) + (0,3,0)$$

$$\Rightarrow T(u+v) \neq T(u) + T(v) \Rightarrow T \text{ is NOT a linear transformation}$$

---

5) $(x,y,z) = \left(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right)$, $c = \cos\theta = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt3}{2}$, $s = \sin\theta = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow R_x = \begin{bmatrix} c+(1-c)x^2 & (1-c)xy+sz & (1-c)xz-sy \\ (1-c)xy-sz & c+(1-c)y^2 & (1-c)yz+sx \\ (1-c)xz+sy & (1-c)yz+sx & c+(1-c)z^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R_x = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt3}{2}+\left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)\frac13 & \left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)\frac13+\frac12\frac{1}{\sqrt3} & \left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)\frac13-\frac12\frac{1}{\sqrt3} \\ \left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)\frac13-\frac12\frac{1}{\sqrt3} & \frac{\sqrt3}{2}+\left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)\frac13 & \left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)\frac13+\frac12\frac{1}{\sqrt3} \\ \left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)\frac13+\frac12\frac{1}{\sqrt3} & \left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)\frac13-\frac12\frac{1}{\sqrt3} & \frac{\sqrt3}{2}+\left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)\frac13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt3+2}{6} & \frac13 & \frac{1-\sqrt3}{3} \\ \frac{1-\sqrt3}{3} & \frac{2\sqrt3+2}{6} & \frac13 \\ \frac13 & \frac{1-\sqrt3}{3} & \frac{2\sqrt3+2}{6} \end{bmatrix}$$

7)

$$S=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \quad , \quad T=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\4&0&-9&1\end{bmatrix}$$

ماتریس مورد نظر $\leftarrow M = ST = \begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&1&0\\4&0&-9&1\end{bmatrix}$

---

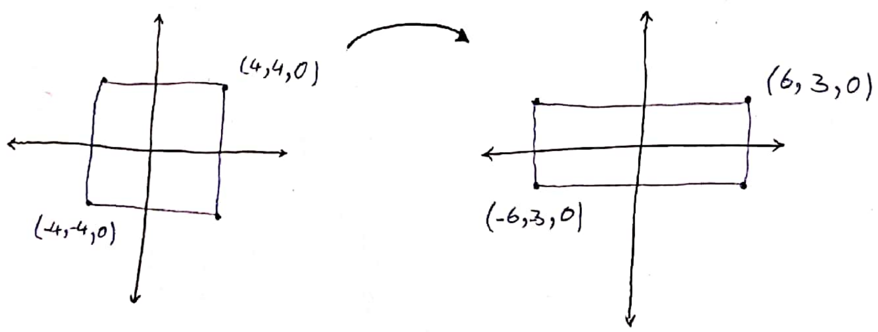
9)

ماتریس مقیاس مورد نظر $\leftarrow S=\begin{bmatrix}1{,}5&0&0\\0&0{,}75&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

الان هم نقطه مینیمم و هم نقطه ماکسیمم را در این ماتریس ضرب می کنیم

$$\underset{1\times3}{[-4\ ,\ -4\ ,\ 0]}\underset{3\times3}{\begin{bmatrix}1{,}5&0&0\\0&0{,}75&0\\0&0&1\end{bmatrix}}=\underset{1\times3}{[-6\ ,\ -3\ ,\ 0]}$$

$$\underset{1\times3}{[4\ ,\ 4\ ,\ 0]}\underset{3\times3}{\begin{bmatrix}1{,}5&0&0\\0&0{,}75&0\\0&0&1\end{bmatrix}}=\underset{1\times3}{[6\ ,\ 3\ ,\ 0]}$$



---

15)

$$\underset{1\times4}{[x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ 1]}\underset{4\times4}{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\b_x&b_y&b_z&1\end{bmatrix}}=\underset{1\times4}{[x+b_x\ ,\ y+b_y\ ,\ z+b_z\ ,\ 1]}$$

نقاط را منتقل می کند

$$\underset{1\times4}{[x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ 0]}\underset{4\times4}{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\b_x&b_y&b_z&1\end{bmatrix}}=\underset{1\times4}{[x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ 0]}$$

بردارها را منتقل نمی کند
فقط
انتقال برای بردارها معنی ندارد زیرا یک بردار جهت و اندازه را مستقل از مکان توصیف می کند

19)

a) $\frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3 = \frac{1}{3}(0,0,0) + \frac{1}{3}(0,1,0) + \frac{1}{3}(2,0,0) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$

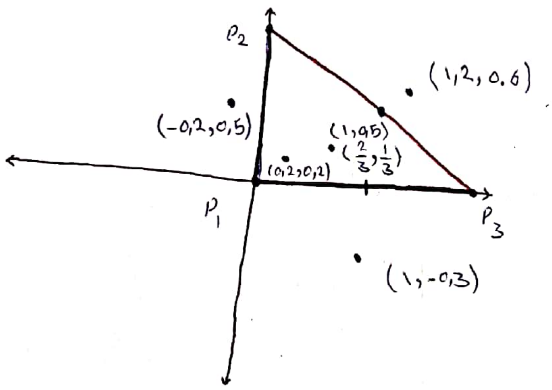
b) $0{,}7P_1 + 0.2P_2 + 0.1P_3 = 0{,}7(0,0,0) + 0{,}2(0,1,0) + 0{,}1(2,0,0) = (0{,}2\ ,\ 0{,}2\ ,\ 0)$

c) $0P_1 + 0{,}5P_2 + 0{,}5P_3 = 0{,}5(0,1,0) + 0{,}5(2,0,0) = (1{,}2\ ,\ 0{,}6\ ,\ 0)$

d) $-0{,}2P_1 + 0{,}6P_2 + 0{,}6P_3 = -0{,}2(0,0,0) + 0{,}6(0,1,0) + 0{,}6(2,0,0) = (1{,}2\ ,\ 0{,}6\ ,\ 0)$

e) $0{,}6P_1 + 0{,}5P_2 - 0{,}1P_3 = 0{,}6(0,0,0) + 0{,}5(0,1,0) - 0{,}1(2,0,0) = (-0{,}2\ ,\ 0{,}5\ ,\ 0)$

f) $0{,}8P_1 - 0{,}3P_2 + 0{,}5P_3 = 0{,}8(0,0,0) - 0{,}3(0,1,0) + 0{,}5(2,0,0) = (1\ ,\ -0{,}3\ ,\ 0)$



نقاط در قسمت (a) ← در مرکز است.

$P_2 = 0P_1 + 1P_2 + 0P_3$ ← مختصات باری‌سنتریک برای P_2 ⇐ (0,1,0)

$(1,0,0) = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_3$ ← مختصات باری‌سنتریک ⇐ $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$

برای مختصات باری‌سنتریک منفی، نقاط خارج از مثلث قرار دارند

---

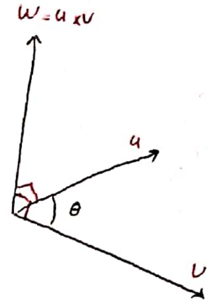
27) ابتدا این خط در امتداد محور z با طول 1 منتقل قرار می‌دهیم. برای اینکه طول آن 2 شود، ابتدا آن را 2 واحد در محور z مقیاس در نظر می‌گیریم

به منظور چرخاندن پاره‌خط به طوری که موازی با (1,1,1) باشد باید با زاویه‌ی θ در صفحه‌ای که بردارهای $\left\{ \begin{matrix} (0,0,1) \\ (1,1,1) \end{matrix} \right\}$ را در بر می‌گیرد

بچرخانیم. محور چرخش به این صورت به دست می‌آید ⇐ $u \times v = (0,0,1) \times (1,1,1) = (-1,1,0)$

زاویه‌ای که باید بچرخانیم با زاویه‌ی بین بردارهای (0,0,1) و (1,1,1) به دست می‌آید ⇐ $\theta = \cos^{-1}\frac{u \cdot v}{|u||v|} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = 54{,}73^\circ$

در پایان باید انتقال رو به رو را اعمال کنیم: $T(3,1,2)$



*: برای اینکه u را بچرخانیم تا هم‌جهت v باشد باید u را با زاویه‌ی θ

حول محور $w = u \times v$ بچرخانیم