Aufgabe 6

Für den bivariaten Zufallsvektor X gelte

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2(\mu, \Sigma) \text{ mit } \mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Welche Werte kann c annehmen? Welche Werte kann der Korrelationskoeffizient $\rho(X_1, X_2)$ annehmen? Begründen Sie ihre Antwort.

(b) Bestimmen Sie die Verteilung von $V = X_1 - X_2$.

(c) Es gelte $-1 \leq c \leq 1$. Es sei $U = X_1 + kX_2$ mit $k \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von k sind U und V stochastisch unabhängig?

Lösung

Teilaufgabe a

Die Kovarianz zweier Zufallsvariablen X und Y ist definiert als

$$Cov(X,Y) := E((X-EX)(Y-EY))$$

Für die Kovarianz zweier Zufallsvariablen gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|Cov(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}$$

und daher $|c| \leq \sqrt{1 \cdot 4} = 2$

Der Korrelationskoeffizient ist definiert als

$$\rho(X,Y) := \frac{Cov(X,Y)}{V(X)V(Y)}$$

Es gilt $\rho(X,Y) \in [-1,1]$ aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Teilaufgabe b

Teilaufgabe c