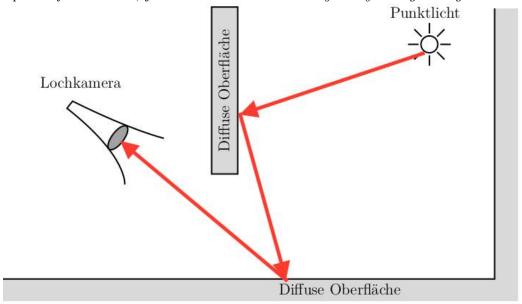
Aufgabe 1: Raytracing

Teilaufgabe 1a

Zeichnen Sie in der folgenden Szene mit Liniensegmenten einen möglichst einfachen Lichtpfad von der Kamera zur Punktlichtquelle ein, der zwar in der geometrischen Optik auftreten kann, jedoch nicht mit Whitted-Style Raytracing erzeugt werden kann!



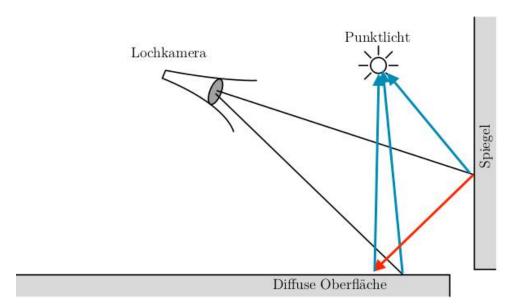
Teilaufgabe 1b

Begründen Sie kurz, warum der Pfad nicht mit Whitted-Style Raytracing erzeugt werden kann!

Whitted-Style sendet nur von Kamera Strahlen aus und verfolgt Schatten-, Transmission und Reflektionsstrahlen als Sekundärstrahlen. Da aber von der Kamera aus verfolgt wird, kann (in diesem Fall) kein Strahl die Rückseite (aus Sicht der Kamera) der diffusen Fläche treffen \Rightarrow die indirekte Beleuchtung die durch diffuses Abstrahlen von der Rückseite der diffusen Fläche erfolgt, kann mit Whitted-Style Raytracing nicht verfolgt werden.

Teilaufgabe 1c

In der folgenden Abbildung sind zwei Primärstrahlen gegeben. Führen Sie mit diesen zeichnerisch Whitted-Style Raytracing durch! Kennzeichnen Sie Reflexionsstrahlen mit $_{,,}R$ ", Transmissionsstrahlen mit $_{,,}T$ " und Schattenstrahlen mit $_{,,}S$ "!



Teilaufgabe 1d

- 1. Ray generation: Erzeuge Sichtstrahlen durch jeden Pixel.
- 2. Ray intersection: Schnittberechnung; also: Finde Objekt welches den Strahl schneidet und am nahesten zur Kamera ist.
- 3. Shading: Schattierung / Beleuchtungsberechnung.

Aufgabe 2: Farben

Teilaufgabe 2a

Wie nennt man die Funktionen, mit denen man Tristimulus-Werte zu einem gegebenen Spektrum berechnen kann?

Color Matching Funktionen

Teilaufgabe 2b

- Es gibt eine lineare Abbildung zwischen den Farbräumen XYZ und xyY.
- \rightarrow Falsch, da bei der Umrechnung durch X+Y+Z dividiert wird $(x=\frac{X}{X+Y+Z},$ $y=\frac{y}{X+Y+Z})$

- Es gibt eine lineare Abbildung zwischen den Farbräumen RGB und XYZ.
- \rightarrow Korrekt, der Farbraum wurden konstruiert, um eine möglichst einfache Umrechnung zu ermöglichen.
- Die subjektiv empfundene Stärke von Sinneseindrücken ist proportional zur Intensität des physikalischen Reizes.
- → Falsch, es besteht ein logarithmischer Zusammenhang.

Teilaufgabe 2c

Welche Information beinhalten die x- und y-Komponenten einer Farbdarstellung im CIE-xyY-Farbraum zusammengenommen?

Sie beschreiben die Farbe (Chromatizität) unabhängig von der Intensität.

Teilaufgabe 2d

Ein RGB-Eingabebild wird in den CIE-xyY-Farbraum transformiert. Um Speicher zu sparen werden die x- und y-Komponenten in geringerer Auflösung gespeichert, während die Auflösung der Y-Komponente beibehalten wird.

Warum ist dieses Vorgehen im Hinblick auf einen menschlichen Betrachter deutlich besser, als die Auflösung der RGB-Komponenten zu reduzieren?

Die Kontrastsentitivität für Chrominanz (Farbe) ist vor allem im hochfrequenten Bereich deutlich geringer als für Luminanz, daher kann man den Chrominanz-Anteil (xy-Werte) in geringerer Auflösung speichern (was dem Weglassen hoher Frequenzen entspricht), ohne dass mit den Augen ein großer Unterschied erkennbar ist.

Aufgabe 3: Homogene Koordinaten

Beim Raytracing soll ein in Weltkoordinaten definierter Strahl mit einem Objekt in dessen lokalen Koordinatensystem geschnitten werden. Die affine Transformation von lokalen in Weltkoordinaten ist durch die homogene Transformationsmatrix $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ gegeben.

Teilaufgabe 3a

Mit welcher Matrix kann der Strahl von Weltkoordinaten in lokale Koordinaten transformiert werden?

Mit der Matrix M^{-1} , da diese die inverse Transformation von Punkten aus lokalen in Weltkoordinaten darstellt.

Teilaufgabe 3b

Der Strahl $\mathbf{R}(t) = \mathbf{E} + t\mathbf{d}, (\mathbf{E}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3)$ soll mit der Matrix aus der Teilaufgabe a) in das lokale Koordinatensystem transformiert werden. Geben Sie dazu den transformierten Punkt \mathbf{E}' und die transformierte Richtung \mathbf{d}' an!

Zur Vereinfachung geht man zu erweiterten Koordinaten $\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ 0 \end{pmatrix}$ über (1 für Punkte, 0 für Richtungen, da diese Differenzen zweier Punkte darstellen).

Damit erhält man
$$\binom{\mathbf{E}'}{1} = M^{-1} \binom{\mathbf{E}}{1}$$
 und $\binom{\mathbf{d}'}{0} = M^{-1} \binom{\mathbf{d}}{0}$

Teilaufgabe 3c

Gegeben sei nun

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie für diese Werte die Matrix aus Aufgabe a)!

Invertiere die Matrix:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\longrightarrow \cdots \longrightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Allgemein gilt für eine Matrix der Form
$$M=\begin{pmatrix}A&t\\0&1\end{pmatrix}$$
: $M^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&-A^{-1}t\\0&1\end{pmatrix}$

Aufgabe 4: Transformationen

Teilaufgabe 4a

Gegeben sei folgendes Liniensegment $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1)$ im Clip-Space:

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} -1\\1\\5\\10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0.5\\-0.5\\15\\5 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 4a (i)

Wie lauten die Normalized Device Coordinates der Punkte \mathbf{p}_0 und \mathbf{p}_0 ?

$$\mathbf{p}_{0}^{NDC} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{p}_{1}^{NDC} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ 3 \end{pmatrix}$$
 (1)

Siehe OpenGL (Teil 1), Folie 24.

Teilaufgabe 4a (ii)

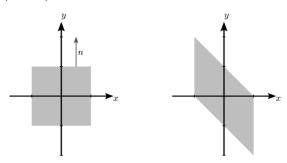
Warum sollte man dieses Liniensegment vor der Normalisierungstransformation (Dehomogenisierung) clippen?

Man sollte vor der Normalisierungstransformation clippen, weil vor der Dehomogenisierung x=w gilt. Nach dem Dehomogenisieren müssen Tiefenwerte betrachtet werden um problematische Fälle zu erkennen (w=0 möglich, dann Division durch 0?)

Siehe Foliensatz 06, Folie 39–41.

Teilaufgabe 4b

Die folgende Abbildung zeigt ein Quadrat in 2D vor (links) und nach einer Scherung (rechts).



i) Geben Sie die Transformationsmatrix $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ an, die die Scherung beschreibt! Die Scherung hat zur Folge, dass beim Erhöhen der x-Koordinate um eine Einheit die y-Koordinate um eine Einheit verringert wird. Damit hat die Matrix die Form

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Wie berechnet man allgemein die Matrix $N \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, die zur Transformation der Normalen verwendet werden muss? Bestimmen Sie diese Matrix!

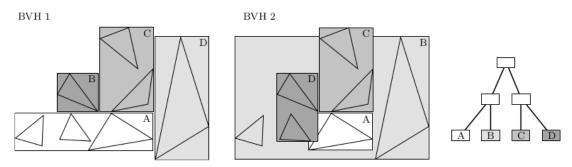
$$N = (M^{-1})^{\top} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iii) Berechnen Sie mithilfe von N die transformierte Normale \mathbf{n}' zur in der Abbildung eingezeichneten Normalen $\mathbf{n}!$

$$\mathbf{n}' = \frac{N\mathbf{n}}{||N\mathbf{n}||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: Beschleunigungsstrukturen und Hüllkörper

Teilaufgabe 5a



Welche der beiden Hierarchien kann von einem Raytracer effizienter durchlaufen werden? Begründen Sie dies in Stichpunkten!

BVH 1 (keine Überlappungen der Hüllkörper)

Teilaufgabe 5b

#	Aussage	Wahr	Falsch	Kommentar
1	Ein kD-Baum kann für N Primitive den Aufwand für Strahlschnitte von $O(N)$ auf $O(\log(N))$ reduzieren.	Ø		average case
2	Die Surface Area Heuristic sorgt dafür, dass beiden Kindknoten gleich viele Primitive zugeteilt werden.		Ø	minimale Kosten
3	Für die Suche der Trennebene (Split Plane) mit Objektmittel (Object Median) ist immer eine vollständige Sortierung der Primitive notwendig.		Ø	Sortiert werden die Objektmittelpunkte
4	Teilen eines Knotens am Objektmittel (Object Median) führt stets zu den effizientesten Hüllkörperhierarchien.		Ø	SAH
5	Die Surface Area Heuristic macht die Annahme, dass Strahlen stets außerhalb des zu unterteilen- den Hüllkörpers starten.	Ø		
6	Es gibt Szenen, in denen ein kD-Baum keinen Vorteil bringt.	Ø		Identische Dreiecke

Teilaufgabe 5c

#	Aussage	AABB	OBB	Kugel
1	Der Hüllkörper kann einen beliebig orientierten Würfel opti-		Ø	
	mal, also ohne freien Raum umschliessen.			
2	Es gibt orthonormale Transformationen des eingeschlosse-	abla		
	nen Objektes, die das Volumen des optimalen Hüllkörpers			
	verändern.			
3	Es gibt affine Transformationen des eingeschlossenen Objek-	Ø		abla
	tes, die das Volumen des Hüllkörpers verändern. ¹			
4	Gegegeben sind zwei Objektmengen und zu jeder Men-	Ø		
	ge ihr optimaler Hüllkörper. Der Aufwand, den optimalen			
	Hüllkörper für alle Objekte zu bestimmen, ist unabhängig			
	von der Anzahl der Objekte.			

Aufgabe 6: Texturen

Teilaufgabe 6a

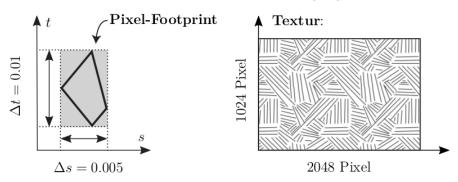
#	Aussage	Wahr	Falsch	Kommentar
I1	Das Filtern von Texturen wird üblicherweise bei		Ø	Nur Magnification
	der Minification und der Magnification ange-			
	wandt, um Aliasing-Artefakte zu vermeiden.			
I2	Das Filtern von Texturen benötigt bei Verfahren	Ø		
	ohne Vorfilterung mehr Zugriffe auf den Textur-			
TT-1	speicher als einfaches Auslesen.	,		
II1	Mipmapping bekämpft das Aliasing-Problem bei	Ø		
	der Unterabtastung von Texturen.			
II2	Mipmapping berücksichtigt anisotrope Foot-		Ø	Vorfilterung ist isotrop ²
	prints.			
III1	Bei Einsatz von Summed-Area-Tables kann man			
	mit nur vier Texturzugriffen die Summe über			
	eine kreisförmige Fläche berechnen.			
III2	Bei Einsatz von Summed-Area-Tables benötigt	\square		
	man im Allgemeinen mehr Bits zur Re-			
	präsentation der enthaltenen Werte als bei			
	gewöhnlichen Texturen mit dem gleichen Werte-			
	bereich.			

 ¹Skalierung. Allerdings gibt es nur für AABBs affine Transformationen, welche $\frac{V_{\text{Hüllk\"{o}rper}} - V_{\text{Objekt}}}{V_{\text{Hüllk\"{o}rper}}}$ verändert.

 $^{^2}$ Schwer zu sagen, was der Aufgabensteller hier mit berücksichtigt meint. Mip-Maps mit Speicherbedarf $\frac{4}{3}$ sind grundsätzlich isotrop, aber in der Praxis kann durch Kombination von Abtastungen verschiedener Mip-Map Stufen anisotrope Filterung erreicht werden. (Vgl. Foliensatz 04, Seite 58/60)

Teilaufgabe 6b

Eine Textur wird mit einem trilinearen Filter abgetastet. Die folgende Abbildung zeigt den Pixel-Footprint im (s,t)-Texturraum $(s,t \in [0,1])$ und rechts daneben die Textur:



Welche Mipmap-Stufen werden für die trilineare Interpolation verwendet, wenn die Textur eine Auflösung von 2048 \times 1024 hat? (Mipmap-Stufe 0 hat die größte Auflösung). Begründen Sie Ihre Antwort!

Texturgröße:

$$0.005 \cdot 2048 = 10.24 \tag{2}$$

$$0.01 \cdot 1024 = 10.24 \tag{3}$$

$$\Rightarrow 10.24 \cdot 10.24 = 104.8576 \tag{4}$$

Stufen:

- 1. 1024×512
- $2. 512 \times 256$
- 3. 256×128
- $4. \ 128 \times 64$
- 5. 64×32
- 6. 32×16
- 7. $16 \times 8 = 128$
- 8. $8 \times 4 = 32$

Es werden also die Stufen 7 und 8 verwendet.

Aufgabe 7: Beleuchtung

Teilaufgabe 7a

$$\mathbf{P} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \lambda_3 \mathbf{P}_3$$
, wobei $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0$

Teilaufgabe 7b

- Berechne $I_i = k_d I_L(\mathbf{n}_i \cdot \text{normalize}(\mathbf{L} \mathbf{P}_i))$ für i = 1, 2, 3
- Interpoliere $I = \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \lambda_3 I_3$
- Bemerkung: normalize(\mathbf{x}) = $\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}$

Teilaufgabe 7c

- Interpoliere $\mathbf{n} = \text{normalize}(\lambda_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2 + \lambda_3 \mathbf{n}_3)$
- Berechne $I = k_d I_L(\mathbf{n} \cdot \text{normalize}(\mathbf{L} \mathbf{P}))$

Teilaufgabe 7d

In den Eckpunkten. Allgemein gilt im *i*-ten Eckpunkt: $\lambda_i = 1$ sowie $\lambda_j = 0 \ (\forall j \neq i)$. Somit sind die Berechnungen in diesen Punkten äquivalent, wie man leicht aus den obigen Formeln entnehmen kann.

Teilaufgabe 7e

Im rechten Fall wird mehr Licht zum Betrachter reflektiert, da hier der Winkel flacher ist.

Teilaufgabe 7f

Fresnel-Effekt

Aufgabe 8: Partikeleffekte und OpenGL-Blending

Teilaufgabe 8a

Zunächst werden nur Feuerpartikel gerendert. Konfigurieren Sie OpenGL so, dass die Feuerpartikel Licht in Richtung des Betrachters emittieren!

```
glBlendEquation(GL_FUNC_ADD /*(6)*/);
glBlendFunc(sfactor = GL_ONE /*(1)*/, dfactor = GL_ONE /*(1)*/);
```

Teilaufgabe 8b

Warum ist der Tiefentest aktiviert? Warum ist Schreiben in den Tiefenpuffer deaktiviert?

- Tiefentest ist aktiviert, weil Feuer durch opake Objekte verdeckt sein könnte.
- Schreiben in den Tiefenpuffer ist deaktiviert, da sonst nur die obersten Partikel gezeichnet würden.

Teilaufgabe 8c

Statt Feuerpartikel werden nun Rauchpartikel gerendert, die Licht absorbieren. Die Partikel sind hierzu bereits von hinten nach vorne sortiert. Ändern Sie das Blending entsprechend!

```
glBlendFunc(sfactor = GL_SRC_ALPHA /*(2)*/,

dfactor = GL_ONE_MINUS_SRC_ALPHA /*(3)*/);
```

Teilaufgabe 8d

Ihnen fällt auf, dass sich Rauch und Feuer nicht korrekt zusammenfügen, wenn Sie erst Feuerpartikel wie in Aufgabe a) und dann Rauchpartikel wie in Aufgabe c) rendern. Welche Schritte müssen Sie vornehmen, um das Problem zu beheben?

Den	Renderablauf verändern:			
	Zuerst die Rauchpartikel zeichnen, dann die Feuerpartikel.			
	glDepthFunc(GL_GREATER): Zeichenreihenfolge umkehren.			
	Rauchpartikel front-to-back sortieren.			
abla	Feuerpartikel und Rauchpartikel zusammen sortieren und zeichnen.			
Opei	nGL Blending-Konfigurationen:			
	glBlendFunc(GL_SRC_ALPHA, GL_ONE_MINUS_SRC_ALPHA)			
	glBlendFunc(GL_FUNC_ADD, GL_ONE)			
	glBlendFunc(GL_ONE_MINUS_DST_ALPHA, GL_SRC_ALPHA)			
	glBlendFunc(GL_ONE, GL_ONE_MINUS_SRC_ALPHA)			
Den	Fragment-Shader verändern:			
	Alpha-Ausgabewert von Feuerpartikeln auf (1 - Texel-Alpha) setzen.			
	Alpha-Ausgabewert von Feuerpartikeln auf 1 setzen.			
\square	Alpha-Ausgabewert von Feuerpartikeln auf 0 setzen.			
	Ausgabewerte unverändert beibehalten.			
Verte	ex-Attribute hinzufügen:			
	zur feingranularen Anpassung der OpenGL Blending-Konfiguration,			
	zur Unterscheidung von Feuer- und Rauchpartikeln,			
	zur Einstellung der Zeichenebene.			

Aufgabe 9: OpenGL

#	Aussage	Wahr	Falsch	Kommentar
1	Die Dehomogenisierung wird in der OpenGL- Pipeline nach dem Fragment-Shader durch- geführt.		Ø	Dehomogenisierung wird vor Rasterisierung ausgeführt
2	Die Pipeline-Stufe "Primitive Assembly" ist programmierbar.		Ø	Kap. 7, Teil 1, Folie 12
3	Clipping am Sichtvolumen wird von der OpenGL- Pipeline vor dem Fragment-Shader durchgeführt.	Ø		3
4	Shader-Programme können den Zustand des OpenGL-Zustandsautomaten (State Machine) verändern.		Ø	
5	Die Beleuchtungsberechnung muss im Fragment- Shader immer in Kamera-Koordinaten durch- geführt werden.		Ø	
6	Texturen können ausschließlich im Fragment- Shader gelesen werden.		Ø	4

Aufgabe 10: Reflexionen in OpenGL

 $^{^4}$ www.opengl.org/wiki/Rendering_Pipeline_Overview

⁴Texturen können auch in anderen Shadern gelesen werden, z.B. im Geometry Shader die Textur sample: www.opengl.org/wiki/Geometry_Shader_Examples

Aufgabe 11: GLSL-Hatching

Teilaufgabe 11a

$$\left(1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}y_2$$

oder

$$y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Teilaufgabe 11b

```
shader.frag
uniform sampler2D dunkel; // dunkle Textur
2 uniform sampler2D mittel; // mittlere Textur
3 uniform sampler2D hell; // helle Textur
4 in vec2 tex_coord; // Texturkoordinate
6 vec4 get_hatched_color(float h) // Helligkeit h liegt in [0, 1].
7 {
      vec4 t_d = texture(dunkel, tex_coord);
      vec4 t_m = texture(mittel, tex_coord);
      vec4 t_h = texture(hell, tex_coord);
10
11
      float weight_d = clamp(1. - 4. * (h - .25), 0., 1.);
12
      float weight_m = clamp(1 - 4. * abs(h - .5), 0., 1.);
13
      float weight_h = clamp(4. * (h - .5), 0., 1.);
14
      return weight_d * t_d + weight_m * t_m + weight_h * t_h;
16
17 }
```

Aufgabe 12: Bézierkurven

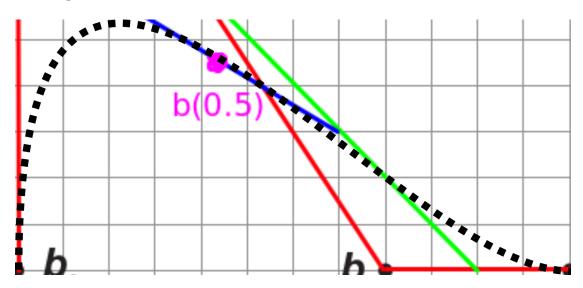
Teilaufgabe 12a

Was versteht man unter affiner Invarianz bei Bézierkurven?

Sei $F(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n$ eine Bézierkurve und $\varphi(x) = Ax + t$ eine affine Funktion. Dann gilt:

$$\varphi(F(u)) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n \varphi(\mathbf{b}_i)$$

Teilaufgabe 12b



Teilaufgabe 12c

Geben Sie an, ob es sich bei den folgenden Kurven mit gegebenem Kontrollpolygon um Bézierkurven handelt! Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort, falls es sich nicht um eine Bézierkurve handelt!

- 1. Nein, da die Kurve nicht symmetrisch ist. Insbesondere müsste sie durch die Mitte des zweiten und dritten Kontrollpunktes gehen.
- 2. Ja
- 3. Nein, da die Kurve nicht innerhalb der konvexen Hülle der Kontrollpunkte ist.