Aufgabe 6

Für den bivariaten Zufallsvektor X gelte

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2(\mu, \Sigma) \text{ mit } \mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Welche Werte kann c annehmen? Welche Werte kann der Korrelationskoeffizient $\rho(X_1, X_2)$ annehmen? Begründen Sie ihre Antwort.

(b) Bestimmen Sie die Verteilung von $V = X_1 - X_2$.

(c) Es gelte $-1 \leq c \leq 1$. Es sei $U = X_1 + kX_2$ mit $k \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von k sind U und V stochastisch unabhängig?

Lösung

Teilaufgabe a

Die Kovarianz zweier Zufallsvariablen X und Y ist definiert als

$$Cov(X,Y) := E((X - EX)(Y - EY))$$

Für die Kovarianz zweier Zufallsvariablen gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|Cov(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}$$

und daher $|c| \leq \sqrt{1 \cdot 4} = 2$. Also $c \in [-2, 2]$.

Der Korrelationskoeffizient ist definiert als

$$\rho(X,Y) := \frac{Cov(X,Y)}{V(X)V(Y)}$$

Es gilt $\rho(X,Y) \in [-1, 1]$ aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Teilaufgabe b

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $V = AX$ und daher

$$A \Sigma A^T = 5 - c$$

und damit

$$V \sim \mathcal{N}(0, 5 - c)$$

Teilaufgabe c

Unabhängige Zufallsvariablen sind immer unkorreliert. Es muss also $Cov(U,V) = 0$ gelten, damit U und V unabhängig sein können.

$$\begin{aligned}
Cov(U,V) &= E((U - EU)(V - EV)) && (1)\\
&= E((X_1 + kX_1 - 1 - k)(X_1 - X_2)) && (2)\\
&= E(X_1^2 + kX_1^2 - X_1 - kX_1 - X_1X_2 - kX_1X_2 + X_2 + kX_2) && (3)\\
&= (k+1)E(X_1^2) - (k+1)E(X_1) - (k+1)E(X_1X_2) + (k+1)E(X_2) && (4)\\
&= (k+1)E(X_1^2) - (k+1) - (k+1)E(X_1X_2) + (k+1) && (5)\\
&= (k+1)E(X_1^2) - (k+1)E(X_1X_2) && (6)\\
&= (k+1) - (k+1)E(X_1X_2) && (7)\\
&= (k+1)(1 - E(X_1X_2)) && (8)
\end{aligned}$$

$E(X_1^2) = 1$, da $X_1^2 \sim \chi_1^2$

Für $k = -1$ sind U und V also unkorreliert, aber sicher nicht unabhängig, da sie identisch sind.

Die Dichte der multivariaten Normalverteilung lautet

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

in diesem Fall also

$$f_{X_1,X_2}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2(4-c^2))}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\frac{-4}{c^2-4} & \frac{c}{c^2-4}\\ \frac{c}{c^2-4} & \frac{1}{c^2-4}\end{pmatrix}(\mathbf{x}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})\right)$$

daher gilt

$$E(X_1X_2) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xy f_{X_1,X_2}(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{9}$$

TODO