Aufgabe 6

Für den bivariaten Zufallsvektor X gelte

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2(\mu, \Sigma) \text{ mit } \mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Welche Werte kann c annehmen? Welche Werte kann der Korrelationskoeffizient $\rho(X_1, X_2)$ annehmen? Begründen Sie ihre Antwort.

(b) Bestimmen Sie die Verteilung von $V = X_1 - X_2$.

(c) Es gelte $-1 \leq c \leq 1$. Es sei $U = X_1 + kX_2$ mit $k \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von k sind U und V stochastisch unabhängig?

Lösung

Teilaufgabe a

Die Kovarianz zweier Zufallsvariablen X und Y ist definiert als

$$Cov(X,Y) := E((X-EX)(Y-EY))$$

Kovarianz-Matrizen sind positiv semidefinit, d.h.

$$|\Sigma| = 1 - c^2 \geq 0$$

$|c| \leq 1$. Also $c \in [-1,1]$.

Der Korrelationskoeffizient ist definiert als

$$\rho(X,Y) := \frac{Cov(X,Y)}{V(X)V(Y)}$$

Es gilt $\rho(X,Y) \in [-1,1]$ aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|Cov(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}$$

Teilaufgabe b

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $V = AX$ und daher

$$A\Sigma A^T = 5 - c$$

und damit

$$V \sim \mathcal{N}(0, 5-c)$$

Teilaufgabe c

Es gilt:

$$U = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & k \end{pmatrix}}_{=:B} X \sim \mathcal{N}(k+1, B\Sigma B^T) \stackrel{D}{=} \mathcal{N}(k+1, c+2k+k^2c)$$

und nach (b)

$$V = AX \sim \mathcal{N}(0, 5-c)$$

Sowie

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=:C} X \sim N_2(\begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \end{pmatrix}, C^T\Sigma C)$$

Es gilt nun

$$
\begin{aligned}
C^T\Sigma C &= \begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & -1 \end{pmatrix} && (1)\\
&= \begin{pmatrix} 1+kc & c+k \\ 1-c & c-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & -1 \end{pmatrix} && (2)\\
&= \begin{pmatrix} 1+kc+kc+k^2 & 1+kc-c-k \\ 1-c+kc-k & 1-c-c+1 \end{pmatrix} && (3)\\
&= \begin{pmatrix} 1+2kc+k^2 & 1+kc-c-k \\ 1-c+kc-k & 2(1-c) \end{pmatrix} && (4)
\end{aligned}
$$

Wähle nun k so, dass die Covarianz gleich 0 ist:

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} 1+kc-c-k && (5)\\
\Leftrightarrow k-kc &\overset{!}{=} 1-c && (6)
\end{aligned}
$$

Fall 1: $c=1$. Dann spielt k keine Rolle. Fall 2: $c \neq 1$. Dann gilt

$$
k \overset{!}{=} \frac{1-c}{1-c} = 1 \qquad (7)
$$