РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшнго профессионального образования
ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Д. И. Иванов

АЛГЕБРА

(ЧАСТЬ I)

Учебно-методическое пособие
по дисциплине "Алгебра"
для студентов специальности
"Компьютерная безопасность"

Тюмень
2008

УДК 512.8

ББК

Д. И. Иванов. Алгебра (часть I): Учебно-методическое пособие по дисциплине "Алгебра" для студентов специальности "Компьютерная безопасность". Тюмень, 2008, 102 стр.

Данное пособие разработано в соответствии с государственным образовательным стандартом и учебным планом специальности "Компьютерная безопасность" (I семестр), содержит теоретическую часть и комплекс практических заданий.

Рекомендовано к печати Учебно-методической комиссией института математики и компьютерных наук. Одобрено Учебно-методической секцией Учёного совета Тюменского государственного университета.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР: **В. Н. Кутрунов**, д. ф.-м. н., профессор.

РЕЦЕНЗЕНТЫ: **А. Н. Дёгтев,** д. ф.-м. н., профессор кафедры алгебры и математической логики Тюменского государственного университета.

С. Д. Захаров, к. ф.-м. н., зав. каф. математики информатики и естественных наук Тюменского государственного института мировой экономики управления и права.

ВВЕДЕНИЕ.
ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ.

Совокупность некоторых объектов (элементов) называют *множеством*. Пишут $x \in A$ (x *принадлежит* A), если $x-$элемент множества; $x \notin Y$ означает, что x не принадлежит множеству Y. Два множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются *равными.* Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$. Если L некоторое свойство, то через $\{\, x : L(x)\}$ будем обозначать множество, элементами которого являются в точности все объекты, обладающие свойством L. Например, пусть A и B множества. Тогда по определению:

$A \cup B = \{\, x : x \in A \text{ или } x \in B\} -$ *объединение* A и B;

$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\} -$ *пересечение* A и B;

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\} -$ *разность* A и B.

Множество B называется *подмножеством* множества A $(B \subset A)$, если каждый элемент множества B является элементом множества A.

Упорядоченный набор из n элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется $n-$*кой* (или *кортежем*) и обозначается $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$. По определению $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ равна $\langle y_1, y_2, \ldots, y_m \rangle$, если $m = n$ и $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_m$. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n > 1$, непустые множества, то *декартовым произведением* их назовём множество

$$\{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n\},$$

которое обозначается через $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. В частности, $A \times A \times \ldots \times A$ (n раз) обозначается через A^n и называется *декартовой степенью* множества A.

Подмножество f множества $A^n \times B$ называют $n-$*местной функцией*, заданной на A со значениями во множестве B, если из того, что

$\langle\langle x_1,\dots,x_n\rangle, y\rangle \in f$ и $\langle\langle x_1,\dots,x_n\rangle, z\rangle \in f$, следует, что $y=z$ (*условие однозначности*). Вместо $\langle\langle x_1,\dots,x_n\rangle, y\rangle \in f$ пишут $f(x_1,\dots,x_n)=y$ и говорят, что значение f от $x_1,\dots,x_n$ *определено* (символически $f(x_1,\dots,x_n)\downarrow$) и равно y. Множество

$$Df = \{\langle x_1,\dots,x_n\rangle : f(x_1,\dots,x_n)\downarrow, x_1,\dots,x_n \in A\}$$

называется *областью определения* функции f, а

$$Rf = \{y : \text{существуют } x_1,\dots,x_n, \text{что } f(x_1,\dots,x_n)=y\}$$

называют *областью значений* f.

Если $Df = A^n$, то функцию f называют *всюду определённой* на A, в противном случае – *частичной.* Если f – одноместная всюду определённая на A функция со значениями в B, то f называют *отображением* A в B и пишут $f : A \to B$. Отображение A^n в A называют n-местной *операцией*, заданной на множестве A.

Пусть дано $f : A \to B$. Тогда отображение f называют *разнозначным* (*инъективным*), если $x_1 \neq x_2$ влечёт $f(x_1) \neq f(x_2)$, отображением A *на* B (*сюръективным*), если $Rf = B$, и *взаимнооднозначным* (*биективным*), если оно одновременно инъективно и сюръективно.

Если f – n-местная операция на A, $B \subseteq A$, причём $f(x_1,\dots,x_n) \in B$ для всех то B называют *замкнутым* относительно f.

ГЛАВА I.
МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ.
§1.1. Матрицы и операции над ними.

Прямоугольная таблица элементов некоторого множества K, состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей порядка* m *на* n ($m \times n$). Матрицы будем обозначать буквами $A, B, \ldots$, а их элементы, находящиеся на пересечении $i-$*ой* строки и $j-$*ого* столбца через a_{ij}, b_{ij} и т.д. Если $m=n$, то матрица называется *квадратной порядка* n. В общем виде матрица $m \times n$ записывается следующим образом:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Коротко матрицу обозначают так:

$$A=\left(a_{ij}\right) \quad \left(i=\overline{1..m};\, j=\overline{1..n}\right).$$

Две матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ и $B=\left(b_{ij}\right)$ считают равными, если равны элементы, стоящие на одинаковых местах, т. е. если $a_{ij}=b_{ij}$ при всех i и j (при этом число строк (столбцов) матриц A и B должно быть одинаковым).

Матрицы можно складывать, умножать на число и друг на друга. Рассмотрим эти операции.

1°. Суммой двух матриц $A=\left(a_{ij}\right)$ и $B=\left(b_{ij}\right)$ одного и того же порядка $m \times n$ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)$ порядка $m \times n$, где $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $\left(i=\overline{1..m};\, j=\overline{1..n}\right)$.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+5 & 1+6 & 4+2 \\ 1+3 & 3+4 & 2+1 \\ 3+5 & 4+1 & 5+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 7 & 6 \\ 4 & 7 & 3 \\ 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

2°. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число λ называется матрица, у которой каждый элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ:

$$\lambda A=\lambda(a_{ij})=(\lambda a_{ij})\left(i=\overline{1..m},\ j=\overline{1..n}\right).$$

Пример 2.

$$(-2)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot 1 & -2\cdot 2\\ -2\cdot 3 & -2\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ -6 & -8\end{pmatrix}.$$

3°. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$, имеющей m строк и k столбцов, на матрицу $B=(b_{ij})$, имеющую k строк и n столбцов, называется матрица $C=(c_{ij})$, имеющая m строк и n столбцов, у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов $i-ой$ строки матрицы A и $j-ого$ столбца матрицы B, т. е. $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}$ $\left(i=\overline{1..m},\ j=\overline{1..n}\right).$
При этом число k столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B. В противном случае произведение не определено.

Пример 3.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 0 & 1\cdot 2+2\cdot 4+3\cdot 1\\ 1\cdot 3+3\cdot 5+2\cdot 0 & 1\cdot 2+3\cdot 4+2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 13\\ 18 & 16\end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости следующих свойств операций над матрицами:

1. $0\cdot A=\theta$ – нулевая матрица (все элементы равны 0).
2. $\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A.$
3. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A.$
4. $A+(B+C)=(A+B)+C.$
5. $A+B=B+A.$
6. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B.$
7. $A+\theta=\theta+A=A.$

Свойства 4 и 5 называются соответственно *ассоциативностью и коммутативностью сложения* матриц.

8. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$.

9. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$..

10. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

11. $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$.

Свойство 9 носит название *ассоциативности умножения*, а свойства 10 и 11– *дистрибутивности умножения относительно сложения* матриц. Эти свойства можно доказать, рассмотрев общий элемент матриц в левой и правой части этого равенства.

12. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Т. е. умножение матриц некоммутативно, например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ называется *главной диагональю*. Матрица, у которой элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, а все остальные равны нулю, называется *единичной матрицей* и обозначается E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

13. $A \cdot E = E \cdot A = A$, для любой квадратной матрицы A.

Если $A-$ матрица порядка $m \times n$, а $B-$ матрица порядка $n \times m$, причём $a_{ij} = b_{ji}$, то B называют *транспонированной* матрицей по отношению к A и обозначают через A^T.

14. $(\alpha \cdot A + \beta \cdot B)^T = \alpha \cdot A^T + \beta \cdot B^T$.

15. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Доказательство свойств 14 и 15 заключается в рассмотрении ij*-ого* элемента в правой и левой частях этих равенств. □

Пусть $A-$ квадратная матрица порядка n. Она называется

– *симметрической,* если $A = A^T$;

– *кососимметрической,* если $A = -A^T$.

§1.2. Определители. Теорема Лапласа.

Перестановкой из n чисел называется всякое расположение чисел от 1 до n в каком либо порядке. В общем виде она записывается так

$$i_1, i_2, \ldots, i_n. \tag{1}$$

Говорят, что в перестановке (1) числа i_s и i_t образуют *инверсию*, если $s \le t$, но $i_s > i_t$. Перестановку называют *чётной* (*нечётной*), если количество всех её инверсий есть число чётное (соответственно нечётное). Оно обычно подсчитывается так: берём число i_1 и находим количество чисел, лежащих правее и меньших i_1, т.е. число инверсий, которое образует i_1 с остальными. Затем поступаем аналогично с числами $i_2, \ldots, i_{n-1}$. Сумма этих чисел и будет количеством всех её инверсий. Например, в перестановке 5, 3, 1, 4, 2 число инверсий равно 7 и поэтому она нечётная.

Если в перестановке поменять местами два элемента, то говорят, что в ней совершена *транспозиция*.

ЛЕММА (о транспозиции): *При совершении одной транспозиции чётность перестановки изменяется.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это почти очевидно, если в перестановке совершить транспозицию двух соседних элементов.

Предположим теперь, что совершена транспозиция в (1) элементов i_s и i_t, где $s < t$. Будем совершать транспозицию элемента i_t с i_{t-1}, затем с i_{t-2}, пока i_t не займёт место элемента i_s. При этом будет совершено $t-s$ транспозиций соседних элементов. Затем совершаем транспозицию элемента i_s с i_{s+1}, затем с i_{s+1}, пока i_s не займёт бывшее место элемента i_t. При этом будет совершено $t-s-1$ транспозиций, а всего $2(t-s)-1$ таких транспозиций. Это число нечётное, а поэтому чётность перестановки изменяется. □

Правильным произведением квадратной матрицы A порядка n называется произведение n её элементов, никакие два из которых не лежат в одной и той же строке и столбце. Оно имеет вид

$$a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}, \tag{2}$$

где $j_1, j_2, \ldots, j_n$ образуют перестановку из n чисел. Эта перестановка называется *соответствующей* правильному произведению (2). Нетрудно убедиться, что количество правильных произведений (2) совпадает с количеством различных перестановок из n чисел и равно $n!$ (факториал). Перейдём теперь к центральному понятию параграфа.

Определителем квадратной матрицы называется сумма всех её правильных произведений, причём каждое из них в этой сумме берётся со знаком «плюс», если соответствующая ему перестановка чётная, и со знаком «минус» – в противном случае.

Определитель матрицы A порядка n записывается так:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Непосредственно из определения следуют следующие свойства определителя.

Свойство 1. *Определитель не меняется при транспонировании.*

Из этого свойства вытекает, что утверждение, справедливое для строк, будет справедливым и для столбцов, и наоборот.

Свойство 2. *Если одна из строк определителя состоит из нулей, то он равен нулю.*

Свойство 3. *При перестановке двух строк определитель меняет знак.*

Свойство 4. *Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.*

Свойство 5. *Если все элементы некоторой строки определителя умножить на число* α, *то и определитель умножится на* α.

Свойство 6. *Определитель, содержащий пропорциональные строки, равен нулю.*

Свойство 7. *Если в определителе* i*-ая строка представима в виде*

$$a_{ij} = b_j + c_j,\ \ j = \overline{1..n},$$

то он равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме i*-ой, равны строкам исходного определителя, а* i*-ая строка в одном из них есть* $b_1, b_2, ..., b_n$, *а в другом –* $c_1, c_2, ..., c_n$.

Свойство 8. *Если в определителе одна из строк является линейной комбинацией двух других, то он равен нулю.*

Свойство 9. *Определитель не изменится, если к одной из его строк прибавить другую, умноженную на некоторое число.*

Вообще, определитель не изменится, если к одной из его строк прибавить линейную комбинацию других строк.

Если в матрице зафиксировать k различных строк и столбцов, то на их пересечении элементы составят матрицу порядка k, определитель которой называется *минором* $k-$*ого* порядка этой матрицы. Если же исходная матрица квадратная и в ней вычеркнуть k различных строк и столбцов с номерами $i_1, ..., i_k$ и $j_1, ..., j_k$, то определитель, составленный из элементов оставшихся $n-k$ строк и столбцов, умноженный на число

$(-1)^{i_1+...+i_k+j_1+...+j_k}$ называется алгебраическим дополнением исходного минора $k-ого$ порядка.

Доказательство следующей теоремы технически сложное и поэтому оно опускается.

ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА. *Зафиксируем в определителе* k *строк. Тогда сумма произведений всех миноров* $k-ого$ *порядка, лежащих в этих фиксированных строках, на их алгебраические дополнения равна исходному определителю.*□

Так как один элемент a_{ij} в квадратной матрице является минором первого порядка, то можно вычислить его алгебраическое дополнение, которое обозначается через A_{ij}. Из теоремы Лапласа при $k=1$ получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Сумма произведений всех элементов фиксированной строки определителя на их алгебраические дополнения равна определителю, т.е.* $|A| = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + ... + a_{in}\cdot A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij}$, *при любом фиксированном* i, $1 \le i \le n$. □

СЛЕДСТВИЕ 2. *Сумма произведений всех элементов фиксированной строки определителя на соответствующие алгебраические элементы другой строки равна нулю, т.е. при* $i \ne k$

$$a_{i1}\cdot A_{k1} + a_{i2}\cdot A_{k2} + ... + a_{in}\cdot A_{kn} = 0. \qquad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменим в исходном определителе $k-ую$ строку на $i-ую$. В полученном определителе две строки будут равными. Поэтому по свойству 4 он равен 0. Но, вычисляя его методом разложения по $k-ой$ строке и используя следствие 1, как раз и получим сумму (3). □

Разумеется, в теореме Лапласа и следствиях 1 и 2 слово «строки» можно заменить на слово «столбцы».

Матрица A называется *треугольной,* если все элементы над или под главной диагональю равны нулю. Непосредственно из определения определителя следует, что определитель треугольной матрицы равен произведению элементов его главной диагонали.

Наконец, полезно запомнить правила вычислений определителей второго и третьего порядка. Именно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

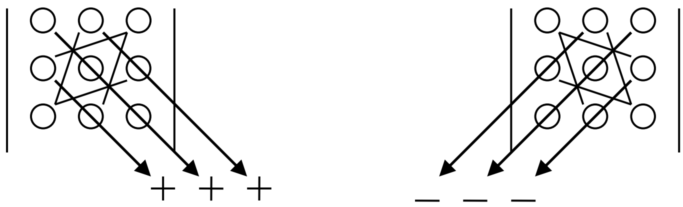
Пример 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 3\cdot 4 = -2\,.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства берутся со знаком ‹‹+››, а какие со знаком ‹‹-›› полезно использовать следующее правило треугольников:



Пример 5.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot(-2) + (-2)\cdot 1\cdot 4 + (-1)\cdot 2\cdot 0 - (-1)\cdot 3\cdot 4 - (-2)\cdot 2\cdot(-2) -$$

$$- 3\cdot 1\cdot 0 = -18 - 8 + 12 - 8 = -22.$$

Для вычисления определителей более высоких порядков пользуются следующим алгоритмом: с помощью свойства 9 определителей добиваются того, чтобы в одной строке (или в одном столбце) все элементы за исключением одного равнялись нулю, затем по следствию 1 из теоремы Лапласа расписывают определитель по этой строке (столбцу). Тем самым вычисление определителя $n-ого$ сводят к вычислению определителя $(n-1)-ого$ порядка. При необходимости процедуру повторяют.

Пример 6. Вычислить определитель

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

<u>Решение</u>. Домножив первую строку на (-2), (-1), (-2) и добавляя её соответственно ко второй, третьей и четвёртой строке, получим

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & -1 \end{vmatrix}.$$

Распишем определитель по первому столбцу:

$$D=(1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -4 & 7 & -7 \\ 0 & 6 & 0 \\ -6 & 7 & -1 \end{vmatrix}.$$

Расписывая полученный определитель третьего порядка по второй строке, получим

$$D=6\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} -4 & -7 \\ -6 & -1 \end{vmatrix}=-228.$$

§1.3. Теоремы о произведении определителей и обратной матрице. Правило Крамера.

ТЕОРЕМА (о произведении определителей). *Определитель произведения двух квадратных матриц* A *и* B *одного и того же порядка равен произведению их определителей, т.е.* $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательный определитель порядка $2n$

$$|D|=\left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & A & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & B & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} A & \theta \\ \hline -E & B \end{array}\right|$$

Используя теорему Лапласа, вычислим $|D|$, разлагая его по первым n строкам. Так как в них лишь один минор $|A|$ может быть не равен 0, а его алгебраическое дополнение есть $(-1)^{1+2+...+n+1+2+...+n}\cdot|B|$, то $|D|=|A||B|$. Используя свойство 9 определителей, добьемся, что все элементы b_{ij} обратились в 0. Для этого $i-ый$ столбец $|D|$ умножим на b_{ij} и прибавим к $n+j-ому$ столбцу $|D|$, и так для каждых $1\le i\le n$ и $1\le j\le n$. Получим

$$|D|=\left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & A & \cdots & \cdots & C & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ \hline -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline -E & \theta \end{array}\right|$$

Вычислим $|D|$, разлагая его по последним n столбцам. Получим $|D|=|C|(-1)^s(-1)^n$, где $s=1+2+...+n+(n+1)+...+2n=\frac{(2n+1)2n}{2}=2n^2+n$.

Тогда $(-1)^s(-1)^n=(-1)^{s+n}=(-1)^{2n^2+2n}=1$ и $|D|=|C|$. Но нетрудно проверить, что $C=AB$. □

Пусть A и B – матрицы порядка n. Матрица B называется *обратной* для матрицы A, если $AB=BA=E$. Матрица A называется *невырожденной*, если $|A|\neq 0$.

ЛЕММА (к теореме об обратной матрице).

(*а*) *если* A *имеет обратную матрицу* B, *то* A *- невырожденная;*

(*б*) *если обратная матрица для* A *существует, то она единственна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

(а) Имеем $AB=E$. По теореме о произведении определителей получаем $|A||B|=|AB|=|E|=1$. Значит $|A|\neq 0$.

(б) Пусть C также обратная матрица для A. Используя ассоциативность умножения матриц, имеем $B=BE=B(AC)=(BA)C=EC=C$. □

Оказывается утверждение (а) можно обратить.

ТЕОРЕМА (об обратной матрице). *Если матрица* A *- невырожденная матрица, то она имеет обратную матрицу* A^{-1}, *где*

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} \ldots \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} \ldots \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} \ldots A_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n} \ldots A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Иными словами, $ij-$*ый элемент* A^{-1} *равен алгебраическому дополнению* $ji-$*го элемента* A, *деленному на* $|A|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем $ij-$*ый* элемент произведения матрицы A на указанную матрицу A^{-1} (4). Он равен

$$\frac{1}{|A|}\cdot\left(a_{i1}A_{j1}+a_{12}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}\right).$$

Но по следствиям 1 и 2 из теоремы Лапласа сумма в скобках равна $|A|$, если $i = j$, и равна 0, если $i \neq j$. Следовательно $AA^{-1} = E$. Аналогично, используя замечание после следствия 2, доказывается, что $A^{-1}A = E$. □

Пример 7.

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Её определитель $|A| = 5$, поэтому обратная матрица A^{-1} существует. Найдём алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Тогда $A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Линейным уравнением от n неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ называется уравнением вида

$$a_1 x + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b.$$

Поэтому *системой линейных уравнений* (*СЛУ*) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \tag{5}$$

Эта СЛУ состоит из m уравнений от n неизвестных. Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *основной*, а если к ней приписать столбец из $b_1,\ldots,b_m$ - свободных членов СЛУ (5), то полученную матрицу называют *расширенной.* СЛУ (5) можно записать и в матричном виде

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

СЛУ (5) называется *крамеровской*, если число уравнений в ней равно числу неизвестных $(m = n)$ и основная матрица ее невырожденная.

ПРАВИЛО КРАМЕРА. *Крамеровская СЛУ имеет единственное решение* $(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})$*, которое находится по формулам*

$$\overline{x_1} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \overline{x_2} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \overline{x_n} = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где $\Delta -$ *определитель основной матрицы СЛУ, а* Δ_i *получается из* Δ *в результате замены в* Δ $i-$*го столбца на столбец из свободных членов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $|A| \neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1}. Домножая обе части равенства (6) слева на A^{-1}, получим

$$E \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

Вспоминая, чему равна матрица A^{-1} и находя произведение в правой части (7) получаем

$$\overline{x_i} = \frac{b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \ldots + b_n A_{ni}}{|A|} \tag{8}$$

Но по следствию 1 из теоремы Лапласа числитель (7) есть Δ_i, если вычислить Δ_i, разлагая Δ_i по $i-му$ столбцу. □

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \\ x + 3y + z = 2. \end{cases}$$

<u>Решение</u>. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1;$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

т. о. $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1}{1} = -1; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{1} = 0.$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ I.

Вычислить выражения:

1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

2. $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $(-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & 22 & -29 \\ -9 & 27 & -32 \\ -13 & 17 & -26 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$

10. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$

11. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

13. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1-\lambda^n & -n\lambda^{n-1} \\ 0 & 1-\lambda^n \end{pmatrix}$

Вычислить определители:

14. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ 15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ 16. $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} \dfrac{1+t^2}{1-t^2} & \dfrac{2t}{1-t^2} \\ \dfrac{2t}{1-t^2} & \dfrac{1+t^2}{1-t^2} \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 24. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 25. $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$ 27. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ 28. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 30. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 32. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

35. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

36. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

37. $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$

38. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

39. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

40. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

41. $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$

42. $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$

43. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

44. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$

45. $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{vmatrix}$ 46. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \cdots & -n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -n & \cdots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

47. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ 48. $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}$

49. $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ & a & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$

Доказать, что система имеет единственное решение, и найти его методом Крамера:

50. $\begin{cases} x-2y+4z=3 \\ 2x-4y+3z=1 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$ 51. $\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$

52. $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x-y-z=1 \\ x+3y+4z=6 \end{cases}$ 53. $\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=1 \end{cases}$

54. $\begin{cases} x+y+z=a \\ x-y+z=b \\ x+y-z=c \end{cases}$ 55. $\begin{cases} x-y+z=a \\ x+y-z=b \\ -x+y+z=c \end{cases}$

56. $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -3x+y+2z=0 \\ x+4y+3z=2 \end{cases}$ 57. $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-3y+2z=2 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$

58. Определить, при каких значениях a и b система

$$\begin{cases} 3x-2y+\ \ z=b \\ 5x-8y+9z=3 \\ 2x+\ \ y+az=-1 \end{cases}$$

1) имеет единственное решение;

2) не имеет решений;

3) имеет бесконечно много решений.

Найти обратные матрицы для следующих матриц:

59. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

60. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

61. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

62. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

63. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

64. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

65. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

66. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

67. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

68. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

69. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

70. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Решить матричные уравнения:

71. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

72. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

73. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

74. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

75. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$

76. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$

77. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

ГЛАВА II. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§2.1. Арифметическое линейное пространство R^n.

Рассмотрим множество R^n всех $n-ок$ (строк из n элементов) действительных чисел $(\alpha_1,...,\alpha_n)$. Введем на этом множестве умножение числа на $n-ку$ и сложение $n-ок$ так:

$$\beta(\alpha_1,...,\alpha_n)=(\beta\alpha_1,...,\beta\alpha_n),$$
$$(\alpha_1,...,\alpha_n)+(\beta_1,...,\beta_n)=(\alpha_1+\beta_1,...,\alpha_n+\beta_n).$$

Ниже $n-ки$ будем называть *векторами*, и обозначать латинскими буквами $a,b,...,$ возможно с нижними индексами. Исключение составит нулевой вектор $\theta=(0,...,0)$. Числа из R будем обозначать греческими буквами $\alpha,\beta,...$

Множество R^n, вместе со сложением векторов и умножение числа на вектор образуют *арифметическое линейное пространство* или n- *мерным векторным пространством.*

Непосредственно из определения следуют такие свойства сложения векторов в R^n:

1. $(a+b)+c=a+(b+c)-$ *ассоциативность,*
2. $a+\theta=\theta+a=a$ $(\theta$ *- нейтральный элемент*$)$,
3. $a+(-a)=(-a)+a=\theta$ $($*вектор* $-a=(-1)a$ *является противоположным для* $a)$,
4. $a+b=b+a-$ *коммутативность,*

для всех $a,b,c\in R^n$.

Умножение числа на вектор обладает следующими свойствами:

5. $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b;$
6. $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a;$
7. $(\alpha\beta)a=\alpha(\beta a);$
8. $1\cdot a=a,$

для всех $a,b\in R^n$ *и* $\alpha,\beta\in R.$

Из этих свойств следует, что в сумме нескольких векторов не обязательно расставлять скобки (свойство 1) и она не зависит от порядка следования слагаемых (свойство 4). В сумме векторов можно приводить подобные члены, т.е. $\alpha a + \beta a = (\alpha + \beta)a$, а также в равенстве двух сумм переносить вектор из одной части в другую с противоположным знаком.

Справедливы также следующие два утверждения:

(1) $0a = \theta$.

Действительно,

$0a = (0+0)a = 0a + 0a \Rightarrow 0a - 0a = 0a \Rightarrow \theta = 0a$ *для любого* $a \in R^n$.

(2) $\alpha\theta = \theta$.

Действительно,

$\alpha\theta = \alpha(\theta + \theta) = \alpha\theta + \alpha\theta \Rightarrow \alpha\theta - \alpha\theta = \alpha\theta \Rightarrow \theta = \alpha\theta$ *для любого* $\alpha \in R$.

Вектор вида $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_m a_m$ называется *линейной комбинацией векторов* $a_1, \dots, a_m$ (с коэффициентами $\alpha_1,...,\alpha_m$). Говорят, что система векторов $a_1, \dots, a_m$ является *линейно независимой*, если для любых чисел $\alpha_1,...,\alpha_m$ равенство $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n = \theta$ влечет, что $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. В противном случае система векторов $a_1, \dots, a_m$ называться *линейно зависимой*. Равносильно, система векторов $a_1, \dots, a_m$ линейно зависима, если найдутся числа $\alpha_1,...,\alpha_m$, не все из которых равны 0, но $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_m a_m = \theta$. Равенство $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_m a_m = \theta$ можно выразить словами: линейная комбинация векторов $a_1, \dots, a_m$ с коэффициентами $\alpha_1,...,\alpha_m$ равна нулевому вектору.

ЛЕММА 1 (о линейно зависимых системах). *Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из них линейно выражается через предыдущие* (*тем более, через оставшиеся*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_m a_m = \theta$, но не все числа $\alpha_1,...,\alpha_m$ равны 0, а i $(1 \le i \le m)$- наибольший из индексов таких, что $\alpha_i \ne 0$.

Тогда $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_i a_i = \theta$, откуда

$$a_i = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\right) a_1 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right) a_i$$

Обратно, пусть $a_i = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{i-1} a_{i-1}$.

Тогда $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_i a_i + (-1) a_i + 0 a_{i+1} + \ldots + 0 a_m = \theta$ и видно, что в этой линейной комбинации векторов $a_1, \ldots, a_m$, которая равна нулевому вектору, коэффициент при a_i не равен нулю. □

Система векторов $a_1, \ldots, a_m$ называется *системой порождающих* (или *образующих*) линейного пространства L_n, если любой вектор из L_n равен подходящей их линейной комбинации.

ЛЕММА 2 (о порождающих). *Если система порождающих линейно зависима, то из неё можно удалить подходящий вектор такой, что оставшаяся система векторов также будет системой порождающих.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если система порождающих $a_1, \ldots, a_m$ линейно зависима, то по лемме 1 в ней найдётся некоторый вектор a_i, который выражается через $a_1, \ldots, a_{i-1}$:

$$a_i = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{i-1} a_{i-1} \tag{1}$$

Так как для всякого $a \in R^n$ найдутся числа $\beta_1, \ldots, \beta_m$ такие, что

$$a = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_i a_i + \ldots + \beta_m a_m . \tag{2}$$

Подставляя в равенство (2) вместо a_i его выражение из (1), раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, убедимся в справедливости утверждения леммы. □

Линейно независимая система порождающих называется *базисом* R^n.

Нетрудно понять, что следующая система векторов будет базисом в R^3:

$$e_1 = (1, 0, 0); \quad e_2 = (0, 1, 0); \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Действительно, она линейно независима, т. к. никакой вектор в ней не может быть выражен через предыдущие. С другой стороны, вектор $a \in R^3$ имеет вид $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и тогда

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3.$$

Аналогично, для любого $n \geq 1$ в R^n существует базис из n векторов, называемых единичными:

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

ТЕОРЕМА (о базисах). *Любые два базиса линейного пространства состоят из одного итого же числа векторов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны два базиса линейного пространства $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_m$, причем $m < n$. Рассмотрим систему

$$a_n, b_1, \ldots, b_m.$$

Она линейно зависима по лемме 1, т.к. a_n выражается через $b_1, \ldots, b_m$, но разумеется также является системой порождающих. По лемме 2 из нее можно вычеркнуть некоторый вектор, выражающийся через предыдущие, получив систему порождающих

$$a_n, b_1^/, \ldots, b_{m-1}^/. \qquad (3)$$

Рассмотрим систему порождающих

$$a_{n-1}, a_n, b_1^/, \ldots, b_{m-1}^/, \qquad (4)$$

которая линейно зависима, т.к. a_{n-1} выражается через систему (3). По лемме 2 из нее можно вычеркнуть некоторый вектор, линейно выражающийся через предыдущие, получив систему порождающих

$$a_{n-1}, a_n, b_1^{//}, \ldots, b_{m-2}^{//},$$

При этом вектор a_n (и a_{n-1}) не будет вычеркнут, т.к. в системе $a_1, \ldots, a_n$ никакой вектор не выражается через предыдущие. Затем, рассматриваем систему порождающих

$$a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, b_1^{//}, \ldots, b_{m-2}^{//},$$

и продолжаем аналогичную процедуру. Т.к. $m<n$, то в конце концов получим систему порождающих

$$a_{n-m+1},\ldots,a_n, \tag{5}$$

причем $n-m+1\geq 2$. Следовательно, вектор a_1 линейно выражается через систему векторов (5), что противоречит линейной независимости $a_1,\ldots,a_n$. □

СЛЕДСТВИЕ 1. *В пространстве* R^n *любые два базиса состоят из* n *векторов.* □

СЛЕДСТВИЕ 2. *Любая линейно независимая система векторов дополняема до базиса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**.** Припишем к линейно независимой системе векторов $a_1,\ldots,a_m$ справа векторы $b_1,\ldots b_n$, составляющие базис, получив систему $a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots b_n$. Теперь начнем из этой системы вычёркивать, пока это возможно, векторы, линейно выражающиеся через предыдущие. По лемме 1 векторы вида a_i вычеркнуты быть не могут, а по лемме 2 оставшаяся система будет и системой порождающих. □

СЛЕДСТВИЕ 3. *Каждая система порождающих содержит базис.* Доказательство аналогично предыдущему. □

СЛЕДСТВИЕ 4. *В* $n-$*мерном линейном пространстве любые* $n+1$ *векторов образуют линейно зависимую систему.*

Доказательство следует из следствия 1 и теоремы о базисах. □

Линейно независимая система векторов называется *максимальной*, если при добавлении к ней еще одного вектора она становится линейно зависимой. Поэтому базис можно определить как максимальную линейно независимую систему векторов.

§2.2. Ранг матриц.

Наивысший порядок минора матрицы, неравного нулю, называется *минорным рангом* матрицы.

Будем смотреть на столбцы, впрочем, как и на строки, матрицы $m \times n$ как на векторы пространства R^m (соответственно, R^n). Говорят, что подмножество векторов L линейного пространства является его *подпространством*, если для всех $a, b \in L$ и числа α выполнены два условия:

(а) $a,b \in L \Rightarrow a+b \in L$;

(б) $a \in L \Rightarrow \alpha \cdot a \in L$.

Их можно объединить в одно: для любых $a,b \in L$ и чисел α, β вектор $\alpha \cdot a + \beta \cdot b \in L$. В этом случае нетрудно проверить выполнение всех свойств 1-8 сложения и умножения числа на вектор из § 2.1. Поэтому подпространства в свою очередь являются пространствами, т.к. условия 1-8 фактически являются аксиомами «быть пространством» для множества элементов L, в котором заданы операции сложения и умножения числа на элемент из L.

Универсальным способом получения подпространств является следующий: надо взять произвольное множество A векторов из пространства и тогда, как не трудно проверить, множество L всевозможных линейных комбинаций векторов из A образует подпространство исходного линейного пространства, о котором говорят, что оно порождено векторами A. По теореме о базисах любая максимальная линейная независимая система векторов из A содержит одно и то же число векторов. Поэтому корректно следующее определение: число столбцов, образующих в матрице максимальную линейно независимую систему, называется *рангом матрицы по столбцам.* Аналогично определяется и *ранг матрицы по строкам*.

ТЕОРЕМА (о ранге матриц). *Ранг матрицы по столбцам равен ее минорному рангу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в матрице любые $r+1$ столбцов линейно зависимы, то, по свойству 8 определителя, любой минор $(r+1)-\textit{ого}$ порядка равен нулю. Поэтому минорный ранг не больше ранга по столбцам.

Обратно, пусть минорный ранг матрицы A порядка $m \times n$ равен r. Так как при расстановке строк и столбцов матрицы ее ранг не меняется, то можно считать, что минор M $r-\textit{ого}$ порядка, не равный 0, находится на пересечении первых r столбцов и строк. Рассмотрим *«окаймляющий»* его минор.

$$D = \left| \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ \cdots & M & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ \hline a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{array} \right|$$

Здесь $j > r$. Если $i \le r$, то D содержит две равные строки и, по свойству 4 определителей, равен 0. Если же $i > r$, то $D-$ минор $(r+1)-\textit{ого}$ порядка и равен 0 по предположению. Вычислим D методом разложения по последней строке:

$$a_{ij}A_1 + \ldots + a_{ir}A_r + a_{ij}M = 0 \tag{6}$$

Заметим, что $A_1,\ldots,A_r$, M не зависят от i. Из равенства (6) получаем:

$$a_{ij} = \left(-\frac{A_1}{M}\right) \cdot a_{i1} + \ldots + \left(-\frac{A_r}{M}\right) \cdot a_{ir}$$

Это равенство справедливо при любом i. Поэтому $j-\textit{ый}$ столбец исходной матрицы равен линейной комбинации ее первых r столбцов, взятых с коэффициентами:

$$-\frac{A_1}{M}, \quad -\frac{A_2}{M}, \ldots, \quad -\frac{A_r}{M}$$

Итак, первые r столбцов образуют максимальную линейную независимую систему столбцов. Значит ранг по столбцам не выше минорного ранга, что заканчивает доказательство теоремы. □

Так как при транспонировании матрицы ее минорный ранг не меняется, то получаем:

СЛЕДСТВИЕ 5. *Ранг матрицы по строкам равен ее рангу по столбцам.* □

СЛЕДСТВИЕ 6. *Квадратная матрица является невырожденной тогда и только тогда, когда ее строки* (*столбцы*) *образуют линейно независимую систему строк* (*столбцов*). □

Доказательство теоремы о ранге дает и метод вычисления ранга матрицы. Именно, найдя минор $r-ого$ порядка, не равный 0, надо перебрать все его окаймляющие (в теореме надо брать i, $j>r$), и, если все они равны 0, то ранг матрицы равен r.

Она дает также и способ нахождения максимальной линейно независимой системы строк (столбцов) матрицы. Именно, это будут те строки (столбцы), в которых лежит минор наивысшего порядка, не равный нулю.

Пример 1. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Минор второго порядка, стоящий в левом верхнем углу этой матрицы отличен от нуля.

$$d=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2.$$

Минор третьего порядка

$$d^{/}=\begin{vmatrix}3&4&3\\1&2&2\\2&3&3\end{vmatrix}=1,$$

окаймляющий d, отличен от нуля, однако оба минора четвёртого порядка, окаймляющие $d^{/}$, равны нулю:

$$\begin{vmatrix}3&4&3&-1\\1&2&2&-2\\2&3&3&3\\2&2&1&1\end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix}3&4&3&0\\1&2&2&1\\2&3&3&-1\\2&2&1&-1\end{vmatrix}=0,$$

т. е. ранг матрицы A равен трём.

Назовём *элементарными* следующие преобразования матриц:

– перестановка строк (столбцов);
– домножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
– добавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на некоторое число;
– вычёркивание нулевой строки (столбца).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.* □

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Система из k векторов*

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_k,\ldots,\alpha_n)$;
$(0\ ,\beta_2,\beta_3,\ldots,\beta_k,\ldots,\beta_n)$;
$(0\ ,0\ ,\gamma_3\ ,\ldots,\gamma_k,\ldots,\gamma_n)$;
……………………………
$(0\ ,0\ ,0\ ,\ldots,\omega_k,\ldots,\omega_n)$

линейно независима. □

В заключении укажем ещё один алгоритм нахождения ранга матриц, основанный на утв. 1, 2: с помощью элементарных преобразований приведём матрицу к ступенчатому виду; количество её строк и будет рангом матрицы.

Пример 2. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Домножим первую строку матрицы на (-2), (-3), (-1) и прибавим, соответственно, ко второй, третьей и четвёртой строкам, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -5 & -8 \\ 0 & -6 & -5 & -8 \\ 0 & -6 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Теперь домножим вторую строку матрицы на (-1) и прибавим к третьей и четвёртой строкам. Вычеркнув нулевую строку, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ступенчатого вида, у которой три строки. Т. е. ранг матрицы равен трём.

§2.3. Системы линейных уравнений.

Общий вид СЛУ задается системой:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (*)$$

Набор чисел $(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$ такой, который при подстановке вместо $x_1, \ldots, x_n$, каждое из уравнений системы обращает в тождество, называется ее *частным решением*. Найти *общее решение* СЛУ, значит указать метод, позволяющий получить все частные ее решения. СЛУ называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно частное решение, и *несовместной*– иначе.

Классической является следующая

ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА – КАПЕЛЛИ. *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть СЛУ (*) имеет частное решение $\overline{x_1},...,\overline{x_n}$. Видно, что столбец из свободных членов СЛУ является линейной комбинацией столбцов ее основной матрицы. Поэтому ранг основной матрицы равен рангу расширенной.

Обратно, пусть ранг основной матрицы СЛУ равен рангу расширенной. С точностью до перестановки уравнений и переименования неизвестных можно считать, что минор наивысшего порядка r находится на пересечении первых r строк и столбцов основной матрицы. Следовательно, существуют такие числа $\overline{x_1},...,\overline{x_r}$, что столбец из свободных членов равен линейной комбинации первых r столбцов основной матрицы. Полагая $\overline{x}_{r+1}=...=\overline{x}_n=0$, видно, что $n-ка$ $(\overline{x_1},...,\overline{x_n})$ является решением СЛУ (*). □

Две СЛУ от одного и того же числа неизвестных называются *равносильными*, если они обе не совместны, либо множества их частных решений равны. Нетрудно показать, что полученная СЛУ равносильна исходной, если

- из СЛУ вычеркнуть уравнение вида $0=0$;
- обе части какого-то уравнения СЛУ умножить на число, отличное от нуля;
- прибавить к одному из уравнений другое, умноженное на некоторое число.

Изложим один метод решения СЛУ (*), называемый методом последовательного исключения переменных (или методом Гаусса). Будем считать, что $a_{11} \neq 0$ (этого можно всегда добиться с помощью перестановок строк). Попытаемся теперь, умножая первое уравнение на подходящие числа и прибавляя его к последующим, уничтожить в них слагаемые, содержащие x_1. Для этого, умножаем первое уравнение на $\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ и прибавляем ко второму, и так далее, пока не умножим первое уравнение на $\left(-\dfrac{a_{m1}}{a_{11}}\right)$ и не прибавим к последнему. Получим равносильную СЛУ вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

Полагаем, что $a'_{22} \neq 0$(этого можно добиться, переставляя строки или переименовывая переменные). Затем временно «забываем» про первое уравнение и продолжаем такую процедуру с оставшимися. Если в результате этой процедуры возникнет уравнение вида $0 = a$ и $a \neq 0$, то система несовместна, если же одно из уравнений окажется вида $0 = 0$, то это уравнение можно опустить. В результата придем к ступенчатой СЛУ, которая имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2r}x_r + a'_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{rr}x_r + a'_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r. \end{cases}$$

Эта часть метода Гаусса часто носит название «прямого хода». Заметим, что число r является рангом основной матрицы СЛУ и он равен рангу расширенной. Теперь для нахождения общего решения СЛУ (*) воспользуемся «обратным ходом». Для этого из последнего уравнения системы выразим x_r через $x_{r+1},\ldots,x_n$. Зная это выражение из предпоследнего уравнения можно выразить x_{r-1} также через $x_{r+1},...,x_n$, и так далее. Наконец получим систему

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + d_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + d_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = c_r + d_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + d_{rn}x_n. \end{cases}$$

Она равносильна исходной и называется *общим решением* СЛУ (*). Теперь подставляя вместо неизвестных произвольные значения $\overline{x_{r+1}},...,\overline{x_n}$ и вычисляя $\overline{x_1}, \overline{x_2},...,\overline{x_r}$ можно получить все частные решения ($\overline{x_1}, \overline{x_2},...,\overline{x_n}$) СЛУ (*).

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 48. \end{cases}$$

Решение. Подвергнем преобразованиям расширенную матрицу этой системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 20 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 13 & 48 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 20 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 20 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и равен двум. Приходим, следовательно, к системе уравнений, равносильной исходной

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = -12 \end{cases},$$

в которой одна переменная является независимой. В качестве независимой переменной возьмём x_3, и выразим через неё остальные, получим:

$$\begin{cases} x_1 = 12 - \dfrac{11}{3}x_3 \\ x_2 = 4 - \dfrac{2}{3}x_3 \end{cases}.$$

Полагая, например, $x_3 = 3$, получим одно из частных решений системы:
$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3.$

Если все свободные члены СЛУ $b_1,...,b_m$ равны 0, то СЛУ называется *системой линейных однородных уравнений* (СЛОУ). СЛОУ всегда имеет тривиальное (нулевое) решение $x_1 = ... = x_n = 0$. Несложно проверить истинность следующих утверждений:

- сумма двух частных решений СЛОУ также является ее частным решением;
- если число умножить на частное решение СЛОУ, то получится также ее частное решение.

В частности, если СЛОУ зависит от n неизвестных, то множество всех частных решений ее образует подпространство в пространстве R^n. Базис этого подпространства называется *фундаментальной системой решений* СЛОУ.

ТЕОРЕМА (о СЛОУ). *Фундаментальная система решений СЛОУ состоит из* $n - r$ *некоторых ее частных решений, где* $n -$ *число неизвестных СЛОУ, а* $r -$ *ранг ее основной матрицы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим СЛОУ (*), считая, что $b_1 = ... = b_m = 0$. Найдем ее общее решение, которое будет иметь вид

$$\begin{cases} x_1 = d_{1r+1}x_{r+1} + d_{1r+2}x_{r+2} + \ldots + d_{1n}x_n \\ x_2 = d_{2r+1}x_{r+1} + d_{2r+2}x_{r+2} + \ldots + d_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = d_{rr+1}x_{r+1} + d_{rr+2}x_{r+2} + \ldots + d_{rn}x_n. \end{cases}$$

Далее свободным неизвестным $x_{r+1},...,x_n$ будем приписывать последовательно 1, а всем остальным 0. Получим $n - r$ частных решений, которые сведем в следующую таблицу

x_1	x_2	$\dots$	x_r	x_{r+1}	x_{r+2}	$\dots$	x_n
d_{1r+1}	d_{2r+1}	$\dots$	d_{rr+1}	1	0	$\dots$	0
d_{1r+2}	d_{2r+2}	$\dots$	d_{rr+2}	0	1	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
d_{1n}	d_{2n}	$\dots$	d_{rn}	0	0	$\dots$	1

Покажем, что векторы $e_1 = (d_{1r+1}, d_{2r+1}, \dots, d_{rr+1}, 1, 0, \dots, 0)$;

$$e_2 = (d_{1r+2}, d_{2r+2}, \dots, d_{rr+2}, 0, 1, \dots, 0);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$e_{n-r} = (d_{1n}, d_{2n}, \dots, d_{rn}, 0, 0, \dots, 1)$$

образуют фундаментальную систему СЛОУ (*).

Минор, стоящий на пересечении всех ее решений и последних их $n-r$ столбцов не равен 0. Значит, решения линейно независимы. Пусть теперь $(\alpha_1,...,\alpha_r, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2},...,\alpha_n) = e$ какое-то ее частное решение. Докажем, что вектор e линейно выражается через векторы $e_1, e_2, \dots, e_{n-r}$. Рассмотрим линейную комбинацию $\alpha_{r+1}e_1 + \alpha_{r+2}e_2 + \dots + \alpha_n e_{n-r} = e^/$, вектор $e^/$ тоже является решением СЛОУ. Имеем, $e^/ = (\beta_1,...,\beta_r, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2},...,\alpha_n)$. Но $\alpha_1,...,\alpha_r$ и $\beta_1, \dots, \beta_r$ однозначно определяются в общем решении через значения $\alpha_{r+1},...,\alpha_n$, придаваемых свободным неизвестным. Поэтому $\alpha_1 = \beta_1,...,\alpha_r = \beta_r$. Таким образом, векторы $e_1, e_2, \dots, e_{n-r}$ являются и системой порождающих подпространства решений СЛОУ, т.е. ее базисом. □

СЛЕДСТВИЕ. *СЛОУ имеет тривиальное решение в том и только в том случае, когда ранг ее основной матрицы равен числу неизвестных.* □

Таблица, приведенная выше, позволяет практически находить фундаментальную систему решений СЛОУ, чем должно заканчиваться ее решение.

Пример 4. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Это система однородных уравнений, причём число уравнений меньше числа неизвестных; она будет иметь множество решений. Так как все свободные члены равны нулю, то будем подвергать преобразованиям лишь матрицу из коэффициентов системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & 5 & -11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -11 \end{pmatrix}.$$

Мы пришли к системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ \qquad x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0. \end{cases}$$

В качестве независимых выберем две переменные, например x_3, x_4. Выразим остальные переменные через независимые. Получим

$$\begin{cases} x_1 = -8x_3 + 19x_4 \\ x_2 = -5x_3 + 11x_4. \end{cases}$$

Тогда фундаментальная система будет иметь следующий вид:

x_1	x_2	x_3	x_4
-8	-5	1	0
19	11	0	1

Любое частное решение системы может быть представлено в виде линейной комбинации фундаментальных решений, т. е. общее решение системы

$$\bar{x} = \alpha(-8, -5, 1, 0) + \beta(19, 11, 0, 1);\ \alpha, \beta \in R.$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ II.

Найти ранг следующих матриц методом окаймления миноров:

78. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 6 & -3 & 8 & -1 & 11 \end{pmatrix}$

79. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

80. $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 & 3 & 2 \\ -3 & -7 & 1 & 0 & -5 \\ -5 & 1 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Вычислить ранг следующих матриц при помощи элементарных преобразований:

81. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -5 \\ -3 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ -1 & 10 & 3 & 3 & -9 \end{pmatrix}$

82. $\begin{pmatrix} 10 & 2 & 4 & 8 & -16 & -6 \\ 3 & -3 & 9 & 7 & -8 & -4 \\ 2 & 4 & -7 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & -8 & -3 \end{pmatrix}$

83. $\begin{pmatrix} 23 & -22 & 1 & -21 \\ -14 & 11 & -3 & 8 \\ 11 & -9 & 2 & -7 \\ -7 & 13 & 6 & 19 \end{pmatrix}$

84. $\begin{pmatrix} 25 & 32 & 20 & 48 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \end{pmatrix}$

85. $\begin{pmatrix} -38 & 36 & 72 & 19 & 24 \\ -80 & 73 & 147 & 40 & 49 \\ -118 & 98 & 219 & 59 & 73 \\ -72 & 71 & 141 & 36 & 47 \end{pmatrix}$

86. $\begin{pmatrix} 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \end{pmatrix}$

Определить ранг матриц при различных значениях λ:

87. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

88. $\begin{pmatrix} -2 & -20 & 12 & -2 \\ 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \end{pmatrix}$

Исследовать совместность и найти общее и одно частное решение системы уравнений:

89. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 9x_3 + x_4 - 3x_5 = 28 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 27 \end{cases}$

90. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$

91. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$

92. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$

93. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$

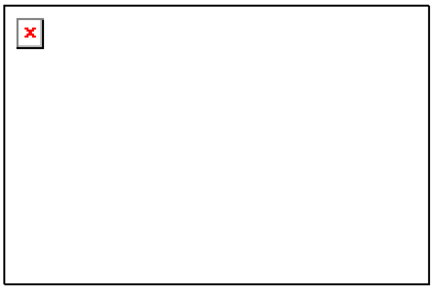
94. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$

95. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$

96. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$

97. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$

98. $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 = \ 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 = 15 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18 \end{cases}$

99. 

Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значений параметра ‖ :

101. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$

100. 4

Найти общее решение и фундаментальную систему решений для систем уравнений:

102. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}$ 103. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0 \\ 2x_1-4x_2+12x_3+8x_4=0 \end{cases}$

104. $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0 \\ 4x_1+7x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+9x_2+6x_3=0 \end{cases}$

105. $\begin{cases} x_1-x_3=0 \\ x_2-x_4=0 \\ -x_1+x_3-x_5=0 \\ -x_2+x_4-x_6=0 \\ -x_3+x_5=0 \\ -x_4+x_6=0 \end{cases}$

106. $\begin{cases} x_1-x_3+x_5=0 \\ x_2-x_4+x_6=0 \\ x_1-x_2+x_5-x_6=0 \\ x_2-x_3+x_6=0 \\ x_1-x_4+x_5=0 \\ x_1-x_2-x_3+x_4+x_5-x_6=0 \end{cases}$

107. $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5=0 \\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5=0 \\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5=0 \end{cases}$

108. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0 \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0 \end{cases}$

109. Какие из строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & 13 \\ 4 & -2 & -7 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

ГЛАВА 3.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

§3.1. Матрицы линейных операторов.

Пусть дано множество L; его элементы будут обозначаться малыми латинскими буквами: $a, b, c, \ldots$ Пусть, далее, в множестве L определены *операция сложения,* ставящая в соответствие всякой паре элементов a, b из L однозначно определенный элемент $a+b$ из L, называемый их *суммой,* и *операция умножения на действительное число,* причем *произведение* $\alpha \cdot a$ *элемента* a на число α, однозначно определено и принадлежит к L.

Элементы множества L будут называться *векторами,* а само $L-$ *действительным линейным* (или *векторным,* или *аффинным*) *пространством,* если указанные операции обладают свойствами $1-8$ из §2.1. Так, арифметическое $n-$ мерное векторное пространство является примером линейного пространства.

Два линейных пространства L и $L^{/}$ называются *изоморфными,* если существует биективное отображение $f : L \to L^{/}$, ставящее в соответствие каждому вектору x пространства L вектор $f(x)$ пространства $L^{/}$, такое что:

$$f(a+b) = f(a) + f(b);$$
$$f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a).$$

Пусть $e_1,\ldots,e_n-$ базис L и $x \in L$. Так как $e_1,\ldots,e_n-$ система порождающих, то найдутся числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ такие, что $x = \alpha_1 e_1 + .. + \alpha_n e_n$. Если также $x = \beta_1 e_1 + .. + \beta_n e_n$, то имеем $x - x = \theta = (\alpha_1 - \beta_1)e_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)e_n$. Но $e_1,\ldots,e_n$ линейно независимая система, откуда $\alpha_1 - \beta_1 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0$. Значит $\alpha_1 = \beta_1,\ldots,\alpha_n = \beta_n$. Итак, представление вектора x в виде линейной комбинации базисных векторов возможно и единственно. Набор $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ называется *координатами* вектора *x* в базисе $e_1,...,e_n$.

Отображение $\varphi: L \to L$ называется *линейным оператором*, если выполнены условия: для всех $x, y \in L$ и числа α:

(а) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

(б) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$,

которые можно заменить одним: для всех $x, y \in L$ и чисел α, β, верно $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$. Отсюда следует равенство

$$\varphi(\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n) = \alpha_1\varphi(a_1) + ... + \alpha_n\varphi(a_n),$$

широко используемое в дальнейшем.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА (о существовании и единственности φ). *Пусть* $e_1, \ldots, e_n$ *– базис* L *и* $a_1, \ldots, a_n$ *– произвольные векторы из* L. *Тогда существует единственный линейный оператор* φ *такой, что* $\varphi(e_1) = a_1, ..., \varphi(e_n) = a_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$, то зададим $\varphi: L \to L$ так: $\varphi(x) = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n$. Проверим, что φ – линейный оператор. Если $y = \beta_1 e_1 + ... + \beta_n e_n$ и γ, δ – произвольные числа, то

$$\varphi(\gamma x + \delta y) = \varphi((\gamma\alpha_1 e_1 + ... + \gamma\alpha_n e_n) + (\delta\beta_1 e_1 + ... + \delta\beta_n e_n)) =$$
$$= \varphi((\gamma\alpha_1 + \delta\beta_1)e_1 + ... + (\gamma\alpha_n + \delta\beta_n)e_n) = (\gamma\alpha_1 + \delta\beta_1)a_1 + ... + (\gamma\alpha_n + \delta\beta_n)a_n =$$
$$= (\gamma(\alpha_1 a_1) + ... + \gamma(\alpha_n a_n) + (\delta(\beta_1 a_1) + ... + \delta(\beta_n a_n)) = \gamma\varphi(x) + \delta\varphi(y).$$

Предположим, что ψ также линейный оператор L, причем $\psi(e_1) = a_1, ..., \psi(e_n) = a_n$.

Имеем $\psi(\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n) = \alpha_1\psi(e_1) + .. + \alpha_n\psi(e_n) = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n$. Итак $\varphi(x) = \psi(x)$ для любого $x \in L$. Значит $\varphi = \psi$. □

Доказанная теорема показывает, что линейный оператор однозначно определяется в данном базисе $e_1, \ldots, e_n$ своими значениями $\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)$. Приходим к определению: *матрицей линейного оператора* φ *в базисе*

$e_1,\dots,e_n$ называется такая матрица $A_\varphi=(a_{ij})$ $(i=\overline{1..n};\, j=\overline{1..n})$, у которой $i-ый$ столбец есть координаты вектора $\varphi(e_i)$ в базисе $e_1,\dots,e_n$. Т. е.,

$$(\varphi(e_1)\quad \varphi(e_2)\quad \dots\quad \varphi(e_n))=(e_1\quad e_2\quad \dots\quad e_n)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}.$$

Обозначим через $[x]$ столбец из координат вектора x в базисе $e_1,\dots,e_n$, т.е. $[x]=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$. В частности, $[\varphi(x)]-$столбец из координат вектора $\varphi(x)$ в этом же базисе.

Имеет место следующее равенство

$$[\varphi(x)]=A_\varphi\cdot[x]. \qquad (1)$$

Действительно,

$$\varphi(x)=\varphi(\alpha_1e_1+...+\alpha_ne_n)=\alpha_1\varphi(e_1)+...+\alpha_n\varphi(e_n)=\alpha_1(\alpha_{11}e_1+...+\alpha_{n1}e_n)+...+$$
$$+\alpha_n(\alpha_{1n}e_1+...+\alpha_{nn}e_n)=(\alpha_{11}\alpha_1+...+\alpha_{1n}\alpha_n)e_1+...+(\alpha_{n1}\alpha_1+...+\alpha_{nn}\alpha_n)e_n$$

Но в последней сумме коэффициенты при $e_1,\dots,e_n$ как раз есть координаты вектора $\varphi(x)$ в базисе $e_1,\dots,e_n$. Из правила умножения матрицы A_φ на столбец $[x]$ получаем искомое равенство (1). □

Пусть $e_1^/,...,e_n^/$ – другой базис *L*. *Матрицей перехода от одного базиса* $e_1,...,e_n$ *к другому* $e_1^/,...,e_n^/$ называется такая матрица $T=(\tau_{ij})$ $(i=\overline{1..n};\, j=\overline{1..n})$, у которой *i-ый* столбец есть координаты вектора $e_i^/$ в базисе $e_1,...,e_n$, т. е.

$$\left(e_1^/\quad e_2^/\quad \dots\quad e_n^/\right)=(e_1\quad e_2\quad \dots\quad e_n)\begin{pmatrix}\tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n}\\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn}\end{pmatrix}.$$

Фактически матрица T есть матрица линейного оператора, переводящего векторы $e_1,...,e_n$ в $e_1^/,...,e_n^/$.

Пусть $[y]=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$ – столбец из координат вектора x в базисе $e_1^/,...,e_n^/$

Тогда имеет место следующее равенство

$$[x]=T\cdot[y] \tag{2}$$

Действительно, имеем

$$x=\alpha_1 e_1+...+\alpha_n e_n=\beta_1 e_1^/+...+\beta_n e_n^/$$

Но $e_i^/=\tau_{1i}e_1+...+\tau_{ni}e_n$, откуда

$$\begin{aligned}x&=\beta_1(\tau_{11}e_1+...+\tau_{n1}e_n)+...+\beta_n(\tau_{1n}e_1+...+\tau_{nn}e_n)=\\&=(\tau_{11}\beta_1+...+\tau_{1n}\beta_n)e_1+...+(\tau_{n1}\beta_1+...+\tau_{nn}\beta_n)e_n.\end{aligned}$$

Но в последней сумме коэффициенты при $e_1,...,e_n$ как раз и есть координаты вектора x в базисе $e_1,...,e_n$. Из правила умножения матрицы T на столбец $[y]$ получаем (2).

По следствию 2 из теоремы о ранге матриц T – невырожденная матрица, т.к. её столбцы, будучи координатами базисных векторов линейно независимы. Поэтому T имеет обратную матрицу T^{-1}. Умножая обе части равенства (2) слева на T^{-1}, получаем

$$[y]=T^{-1}\cdot[x].$$

Пример 1.

Векторы $e_1^/=(1,1,1)$; $e_2^/=(1,1,2)$; $e_3^/=(1,2,3)$; $x=(6,9,14)$ заданы своими координатами в некотором базисе e_1,e_2,e_3. Показать, что векторы $e_1^/,e_2^/,e_3^/$ сами образуют базис, и найти координаты вектора x в этом базисе.

Решение. Составим матрицу перехода от базиса e_1,e_2,e_3 к системе векторов $e_1^/,e_2^/,e_3^/$:

$$T=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix},$$

она невырожденная, значит векторы $e_1^/, e_2^/, e_3^/$ линейно независимы и могут образовывать базис трёхмерного пространства. Тогда

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

Найдём координаты вектора x в базисе $e_1^/, e_2^/, e_3^/$:

$$\begin{pmatrix}x_1^/\\x_2^/\\x_3^/\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\9\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Следующая теорема устанавливает связь между матрицами одного и того же линейного оператора, заданными в разных базисах.

ТЕОРЕМА (о связи матриц линейного оператора). *Пусть A и B – матрицы линейного оператора φ в базисах $e_1,...,e_n$ и $e_1^/,...,e_n^/$ соответственно и T – матрица перехода о первого базиса ко второму. Тогда $B=T^{-1}\cdot A\cdot T$ (матрицы A и B называются подобными).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x\in L$, то обозначим через $[x]_1$ и $[x]_2$ столбцы из координат вектора x в первом и во втором базисах, а через $[\varphi(x)]_1$ и $[\varphi(x)]_2$ – координаты образа этого вектора в первом и во втором базисах.. Из равенства (2) имеем

$$T\cdot[\varphi(x)]_2=[\varphi(x)]_1.$$

Из равенства (1) получаем

$$[\varphi(x)]_1=A\cdot[x]_1 \text{ и } [\varphi(x)]_2=B\cdot[x]_2.$$

Из этих трех равенств заключаем, что

$$T \cdot B \cdot [x]_2 = A \cdot [x]_1.$$

Но $[x]_1 = T \cdot [x]_2$, откуда

$$T \cdot B \cdot [x]_2 = A \cdot T \cdot [x]_2.$$

Домножая обе части этого равенства на T^{-1} слева, получаем равенство

$$B \cdot [x]_2 = T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot [x]_2,$$

Которое имеет место при любом векторе $x \in L$. Это означает равенство матриц B и $T^{-1}AT$. □

В доказательстве теоремы молчаливо использовался тот факт, что если для любого вектора x выполнено $A \cdot [x] = B \cdot [x]$, то $A = B$. Предлагается его доказать читателю.

Пример 2. Линейный оператор φ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти его матрицу B в базисе

$$e_1^{/} = (1, 1, -1);$$
$$e_2^{/} = (1, -2, 1);$$
$$e_3^{/} = (0, -1, 1).$$

Решение. Составим матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису $e_1^{/}, e_2^{/}, e_3^{/}$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём обратную матрицу для T:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -4 & -3 & -1 \\ 10 & 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -6 & 1 & 2 \\ 16 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

§3.2. Ранг и дефект линейного оператора.

Для доказательства основной теоремы этого параграфа потребуется понятие прямой суммы подпространств.

Пусть L_1 и L_2 – два подпространства линейного пространства L. Их *суммой* $L_1 + L_2$ называется множество всех векторов $a+b$, где $a \in L_1$ и $b \in L_2$, т.е. $L_1 + L_2 = \{a + b : a \in L_1, b \in L_2\}$

Легко проверить, что $L_1 + L_2$ также будет подпространством L.

Сумма $L_1 + L_2$ называется *прямой*, если из того, что $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$, где $a_1, a_2 \in L_1$ и $b_1, b_2 \in L_2$ следует, что $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Определим также и пересечение двух подпространств $L_1 \cap L_2$, которое также будет подпространством L. Именно

$$L_1 \cap L_2 = \{x : x \in L_1 \text{ и } x \in L_2\}$$

ТЕОРЕМА (о прямых суммах подпространств). *Сумма подпространств L_1 и L_2 будет прямой тогда и только тогда, когда $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L_1 + L_2$ – прямая сумма подпространств L_1 и L_2, но есть вектор $a \neq \theta$ такой, что $a \in L_1 \cap L_2$. Тогда, так как $L_1 \cap L_2$ – также является подпространством, то $(-a) \in L_1 \cap L_2$, и получается, что нулевой вектор можно представить двумя различными способами

$\theta+\theta=a+(-a)$. Таким образом, приходим к противоречию определения прямой суммы.

Обратно, пусть $L_1 \cap L_2=\{\theta\}$, но сумма L_1+L_2 не прямая. Значит найдется $a_1, a_2 \in L_1$ и $b_1, b_2 \in L_2$ такие, что $a_1+b_1=a_2+b_2$, но $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$. Так как $a_1-a_2 \in L_1$ и $b_2-b_1 \in L_2$, то $L_1 \cap L_2$ содержит ненулевой вектор $a_1-a_2=b_2-b_1$. Опять приходим к противоречию. □

ТЕОРЕМА (о размерности суммы двух подпространств). *Размерность суммы двух подпространств пространства* L *равна сумме их размерностей минус размерность их пересечения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L_1 и L_2 – подпространства, r и s их размерности, а $t-$ размерность их пересечения. Рассмотрим некоторый базис $L_1 \cap L_2$, скажем $c_1,...,c_t$, и дополним его до базисов $c_1,...,c_t, a_{t+1},...,a_r$ и $c_1,...,c_t, b_{t+1},...,b_s$ пространств L_1 и L_2.

Докажем, что система

$$c_1,...,c_t, a_{t+1},...,a_r, b_{t+1},...,b_s, \tag{3}$$

состоящая из $r+s-t$ векторов является базисом подпространства L_1+L_2, тем самым будет доказана и теорема.

Ясно, что любой вектор $x \in L_1$ и $y \in L_2$, а значит и вектор $x+y \in L_1+L_2$ линейно выражается через векторы системы (3), т.к. содержит базисы L_1 и L_2. Осталось проверить, что система (3) линейно независима. Предположим, что

$$\gamma_1 c_1+...+\gamma_t c_t+\alpha_{t+1} a_{t+1}+...+\alpha_r a_r+\beta_{t+1} b_{t+1}+...+\beta_s b_s=\theta \tag{4}$$

Пусть $b=\beta_{t+1} b_{t+1}+...+\beta_s b_s$. Понятно, что $b \in L_2$. Но

$$b=-\gamma_1 c_1-...-\gamma_t c_t-\alpha_{t+1} a_{t+1}-...-\alpha_r a_r. \tag{5}$$

Правая часть этого равенства есть вектор из L_1, т.е. $b \in L_1$. Окончательно, $b \in L_1 \cap L_2$. Значит в выражении (5) отсутствуют члены с $a_{t+1},...,a_r$, т.е. $\alpha_{t+1}=...=\alpha_r=0$. Отсюда и из (4) заключаем, что

$$\gamma_1 c_1+...+\gamma_t c_t+\beta_{t+1} b_{t+1}+...+\beta_s b_s=\theta.$$

Так как система $c_1,...,c_t,b_{t+1},...,b_s$ является базисом L_2, то она линейно независима и поэтому $\gamma_1 = ... = \gamma_t = \beta_{t+1} = ... = \beta_s = 0$. □

Если сумма $L_1 + L_2$ прямая, то размерность $L_1 \cap L_2$ по теореме о прямых суммах равна 0, и поэтому получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Размерность прямой суммы двух подпространств равна сумме их размерностей.* □

Пусть φ – линейный оператор L и

$$R = \{\varphi(x) : x \in L\},$$
$$K = \{x : \varphi(x) = \theta\}.$$

Нетрудно проверить, что R и K подпространства L, называемые *областью значений* и *ядром* линейного оператора φ. Размерность R называется *рангом*, а размерность K – *дефектом* φ.

ТЕОРЕМА (о ранге и дефекте). *Сумма ранга и дефекта линейного оператора φ равна размерности пространства L.*

ДОКАЗАТНЛЬСТВО. Пусть r и d – ранг и дефект φ. Выберем в R базис $b_1,...,b_r$ и обозначим через $a_1,...,a_r$ векторы такие, что $\varphi(a_1) = b_1,...,\varphi(a_r) = b_r$.

Они линейно независимы, т.к. из равенства $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_r a_r = \theta$ следует, что $\varphi(\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n) = \alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n = \varphi(\theta) = \theta$, а поскольку $b_1,...,b_r$ линейно независимы, то $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

Обозначим через A подпространство, порожденное векторами $a_1,...,a_r$. Они образуют базис A и поэтому размерность подпространства A равна r. По предыдущему следствию достаточно теперь доказать, что L является прямой суммой A и K. покажем, что $A \cap K = \{\theta\}$. Любой вектор $a \in A$ имеет вид $a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_r a_r$. Если $a \in K$, то $\varphi(a) = 0$, т.е. $\varphi(\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_r a_r) = \alpha_1 b_1 + ... + \alpha_r b_r = \theta$. Но векторы $b_1,...,b_r$ линейно независимы и поэтому $\alpha_1 = ... = \alpha_r = 0$, откуда $a = 0$.

Покажем теперь, что $L = A + K$. Возьмем вектор $x \in L$. Но $\varphi(x) \in R$ и поэтому $\varphi(x) = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_r b_r$. Пусть $y = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_r a_r$ и $x - y = c$. Так как $\varphi(y) = \varphi(x)$, то $\varphi(c) = \varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) = \theta$. Следовательно $c \in K$. Имеем $x = y + c$, где $y \in A$ и $c \in K$, что и требовалось доказать. □

§3.3. Характеристические корни и собственные значения.

Пусть $A = (\alpha_{ij})-$ квадратная матрица порядка n с действительными элементами. Пусть, с другой стороны, $\lambda-$ некоторое неизвестное. Тогда матрица ($A - \lambda E$), где $E-$ единичная матрица порядка n, называется *характеристической матрицей* матрицы A. Так как в матрице (λE) по главной диагонали стоит λ, все же остальные элементы равны нулю, то

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы ($A - \lambda E$) будет многочленом от λ, притом степени n. В самом деле, произведение элементов, стоящих на главной диагонали, будет многочленом от λ, со старшим членом $(-1)^n \lambda^n$, все же остальные члены определителя не содержат по меньшей мере двух из числа элементов, стоящих на главной диагонали, и поэтому их степень относительно λ, не превосходит $n-2$. Коэффициенты этого многочлена можно было бы легко найти. Так, коэффициент при λ^{n-1} равен $(-1)^{n-1}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{nn})$, а свободный член совпадает с определителем матрицы A.

Многочлен $n-ой$ степени $|A-\lambda E|$ называется *характеристическим многочленом* матрицы A, а его корни, которые могут быть как действительными, так и комплексными, называются *характеристическими корнями* этой матрицы.

ТЕОРЕМА (о характеристических многочленах). *Подобные матрицы обладают одинаковыми характеристическими многочленами и, следовательно, одинаковыми характеристическими корнями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, в самом деле, $B=Q^{-1}\cdot A\cdot Q$. Тогда, учитывая, что матрица (λE) перестановочна с матрицей Q, а $\left|Q^{-1}\right|=|Q|^{-1}$ получаем:

$$|B-\lambda E|=\left|Q^{-1}AQ-\lambda E\right|=\left|Q^{-1}(A-\lambda E)Q\right|=|Q|^{-1}|A-\lambda E||Q|=|A-\lambda E|,$$

что и требовалось доказать. □

Из этого результата вытекает, ввиду доказанной в §3.1 теоремы о связи матриц линейного оператора в разных базисах:

СЛЕДСТВИЕ. *Линейный оператор φ может задаваться в разных базисах различными матрицами, однако все эта матрицы имеют один и тот же набор характеристических корней.* □

Эти корни можно называть поэтому *характеристическими корнями самого оператора* φ. Весь набор этих характеристических корней, причем каждый корень берется с той кратностью, какую он имеет в характеристическом многочлене, называется *спектром линейного оператора* φ.

Укажем одно из применений характеристических корней. Пусть в линейном пространстве L задан линейный оператор φ. Если вектор b, отличный от нуля, переводится оператором φ в вектор, пропорциональный самому b,

$$\varphi(b)=\lambda_0 b, \tag{6}$$

где λ_0 – некоторое действительное число, то вектор b называется *собственным вектором* оператора φ, а число λ_0 –*собственным значением* этого оператора, причем говорят, что собственный вектор b *относится*, к собственному значению λ_0.

Заметим, что так как $b \neq \theta$, то число λ_0, удовлетворяющее условию (6), определяется для вектора b однозначно. Подчеркнем, далее, что нулевой вектор не считается собственным вектором оператора φ, хотя он удовлетворяет условию (6), притом для любого λ_0.

ТЕОРЕМА (о собственных значениях). *Действительные характеристические корни линейного оператора φ, если они существуют, и только они служат собственными значениями этого оператора.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, в самом деле, оператор φ имеет в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ матрицу $A = (\alpha_{ij})$ и пусть вектор

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$$

является собственным вектором оператора φ,

$$\varphi(b) = \lambda_0 b. \tag{7}$$

Как доказано в §3.1,

$$[\varphi(b)] = A \cdot [b]. \tag{8}$$

Равенства (7) и (8) приводят к системе равенств

$$\begin{cases} \beta_1 \alpha_{11} + \beta_2 \alpha_{12} + \ldots + \beta_n \alpha_{1n} = \lambda_0 \beta_1 \\ \beta_1 \alpha_{21} + \beta_2 \alpha_{22} + \ldots + \beta_n \alpha_{2n} = \lambda_0 \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_1 \alpha_{n1} + \beta_2 \alpha_{n2} + \ldots + \beta_n \alpha_{nn} = \lambda_0 b_n. \end{cases} \tag{9}$$

Так как $b \neq \theta$, то не все числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ равны нулю. Таким образом, ввиду (9), система линейных однородных уравнений

$$
\begin{cases}
(\alpha_{11}-\lambda_0)x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n=0 \\
\alpha_{21}x_1+(\alpha_{22}-\lambda_0)x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n=0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\ldots+(\alpha_{nn}-\lambda_0)x_n=0.
\end{cases}
\tag{10}
$$

обладает ненулевым решением, а поэтому ее определитель равен нулю,

$$
\begin{vmatrix}
\alpha_{11}-\lambda_0 & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda_0 & \ldots & \alpha_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}-\lambda_0
\end{vmatrix}=0,
\tag{11}
$$

или $|A-\lambda_0 E|=0,$ т. е, собственное значение λ_0 на самом деле оказалось характеристическим корнем матрицы A и, следовательно, линейного оператора φ, притом, понятно, действительным.

Обратно, пусть λ_0 будет любым действительным характеристическим корнем оператора φ и, следовательно, матрицы A. Тогда имеет место равенство (11). Отсюда следует, что система линейных однородных уравнений (10) обладает ненулевым решением, притом даже действительным, так как все коэффициенты этой системы действительны. Если это решение обозначим через

$$
(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n),
\tag{12}
$$

то имеют место равенства (9). Обозначим через b вектор пространства L, имеющий в базисе $e_1,e_2,\ldots,e_n$ строку координат (12); ясно, что $b\neq 0$. Тогда справедливо равенство (8), а из (9) и (8) следует (7). Вектор b оказался, таким образом, собственным вектором оператора φ, относящимся к собственному значению λ_0. Теорема доказана. □

В заключении отметим, что совокупность собственных векторов линейного оператора φ, относящихся к собственному значению λ_0, совпадает с совокупностью ненулевых действительных решений системы линейных однородных уравнений (10). Отсюда следует, что совокупность собственных векторов линейного оператора φ, относящихся к собственному значению λ_0, будет, после добавления к ней нулевого вектора, линейным подпространством пространства L.

Пример 3. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение: Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение

$-\lambda^3 + \lambda^2 = 0$,

корни которого $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$ являются собственными значениями линейного оператора φ.

Найдём собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_{1,2} = 0$. Для этого решим систему (10), считая $\lambda_0 = 0$.

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

После преобразования получим:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3}x_3 \\ x_2 = \dfrac{2}{3}x_3. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений имеет вид:

x_1	x_2	x_3
1	2	3

Собственный вектор $\bar{x}_{\lambda=0} = \alpha(1, 2, 3); \alpha \neq 0.$

Аналогично, для $\lambda_3 = 1$, получим систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$$

фундаментальным решением которой будет:

x_1	x_2	x_3
1	1	1

и $\overline{x}_{\lambda=1} = \beta(1,1,1)$; $\beta \neq 0$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 1$.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ III.

Векторы e_1', e_2', e_3' и x заданы своими координатами в базисе e_1, e_2, e_3. Показать, что векторы e_1', e_2', e_3' сами образуют базис, и найти координаты вектора x в этом базисе:

110. $e_1' = (1,1,1), e_2' = (1,1,2), e_3' = (1,2,3); \quad x = (6,9,14).$

111. $e_1' = (2,1,-3), e_2' = (3,2,-5), e_3' = (1,-1,1); \quad x = (6,2,-7).$

112. $e_1' = (1,1,2), e_2' = (2,-1,0), e_3' = (-1,1,1); \quad x = (6,-1,3).$

113. $e_1' = (1,1,3), e_2' = \left(\frac{3}{2}, -1, 0\right), e_3' = (-1,1,1); \quad x = (1,2,4).$

114. $e_1' = (1,1,4), e_2' = \left(\frac{4}{3}, -1, 0\right), e_3' = (-1,1,1); \quad x = (1,3,6).$

115. $e_1' = (1,2,-1,-2), e_2' = (2,3,0,-1), e_3' = (1,2,1,4), e_4' = (1,3,-1,0);$ $x = (6,9,14).$

Доказать, что системы векторов e_1, e_2, e_3 и e_1', e_2', e_3' образуют базис и найти матрицу перехода от одного базиса к другому:

116. $e_1 = (1,2,1), e_2 = (2,3,3), e_3 = (3,7,1);$
$e_1' = (3,1,4), e_2' = (5,2,1), e_3' = (1,1,-6).$

117. $e_1 = (1,1,1,1), e_2 = (1,2,1,1), e_3 = (1,1,2,1), e_4 = (1,3,2,3);$
$e_1' = (1,0,3,3), e_2' = (-2,-3,-5,-4), e_3' = (2,2,5,4), e_4' = (-2,-3,-4,-4).$

Линейный оператор φ в базисе $e_1, e_2, \ldots$ имеет матрицу A, найти матрицу этого линейного оператора в базисе $e_1', e_2', \ldots$:

118. $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix};$

$e_1' = (3,1,4), e_2' = (5,2,1), e_3' = (1,1,-6).$

119. $A=\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix};$

$e_1{}' = (1, -2, 1), e_2{}' = (3, -1, 2), e_3{}' = (2, 1, 2).$

120. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

а) $e_1{}' = (1, 0, 0, 0), e_2{}' = (0, 1, 0, 0), e_3{}' = (0, 0, 0, 1), e_4{}' = (0, 0, 1, 0);$

б) $e_1{}' = (1, 0, 0, 0), e_2{}' = (1, 1, 0, 0), e_3{}' = (1, 1, 1, 0), e_4{}' = (1, 1, 1, 1).$

Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

121. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$

122. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

123. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

124. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

125. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$

126. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$

127. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$

128. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$

129. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

130. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

131. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

132. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

ГЛАВА 4.
ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ.
§4.1. Группы, кольца, поля.

Будем говорить, что в множестве A определён *закон композиции*, если задано отображение ρ упорядоченных пар элементов из A в множество A (бинарная операция на множестве A). При этом элемент c из A, сопоставленный с помощью отображения ρ в соответствие элементам a, b из A, называется *композицией* этих элементов.

Композиция c элементов a и b обозначается символом $a\,\rho\,b$:

$$c = a\,\rho\,b.$$

Для композиции элементов a, b множества A используются и другие формы записи. Наиболее употребительными являются *аддитивная* форма записи $c = a + b$ и *мультипликативная* форма записи $c = a \cdot b$ (или $c = ab$). В случае аддитивной записи композиции соответствующий закон называют *сложением*, а при мультипликативной форме – *умножением*.

Множество G элементов $a, b, c, \ldots$, в котором определён закон композиции, называемый сложением и ставящий в соответствие каждой паре элементов a, b множества G определённый элемент $c = a + b$ этого множества, называется *аддитивной группой* (обозначается $\langle G, + \rangle$), если этот закон удовлетворяет следующим требованиям:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность).
2. Существует элемент e множества G такой, что для любого элемента a этого множества $a + e = a$ (существование *нейтрального* (*нулевого*) элемента).
3. Для любого элемента a множества G существует *противоположный* элемент $-a$ такой, что $a + (-a) = e$.

В случае мультипликативной формы записи получим определение *мультипликативной группы* (обозначается $\langle G, \cdot \rangle$), нейтральный элемент которой называется *единичным*, а противоположный – *обратным* (a^{-1}).

Если закон композиции, действующий в группе G, удовлетворяет следующему требованию:

4. $a + b = b + a$ (коммутативность),

то группа G называется *коммутативной* или *абелевой*.

Отметим некоторые свойства групп (будем использовать аддитивную форму записи композиции).

ТЕОРЕМА 1. *Если* $a + (-a) = e$, *то* $(-a) + a = e$.

Доказательство. Пусть x – противоположный элемент для элемента $(-a)$: $(-a) + x = e$. Тогда $a = a + e = a + ((-a) + x) = (a + (-a)) + x = e + x$, т. е. $a = e + x$. Следовательно, $(-a) + a = (-a) + (e + x) = ((-a) + e) + x = (-a) + x = e$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого элемента* a *группы справедливо соотношение* $e + a = a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 $(-a) + a = e$ и, кроме того, $a + (-a) = e$. Поэтому $e + a = (a + (-a)) + a = a + ((-a) + a) = a + e = a$, т. е. $e + a = a$. □

ТЕОРЕМА 3. *Если* $a + x = e$ *и* $a + y = e$, *то* $x = y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $a + y = e$, то y – противоположный элемент для a, и поэтому, согласно теореме 1, $y + a = e$. Имеем далее $y = y + e = y + (a + x) = (y + a) + x = e + x = x$. □

Из доказанных теорем вытекают следующие важные следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Противоположным элементом для элемента* $(-a)$ *служит элемент* a. *Или, иначе, элемент* $(-a)$ *является как правым, так и левым противоположным элементом для элемента* a (*т. е.* $a + (-a) = e$ *и* $(-a) + a = e$).

СЛЕДСТВИЕ 2. *В любой группе уравнения* $a + x = b$ *и* $y + a = b$ *однозначно разрешимы. Решениями этих уравнений служат соответственно элементы* $x = (-a) + b$ *и* $y = b + (-a)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. *В группе имеется единственный нейтральный элемент* (*нуль группы*) (*если* $a + e = a$ *и* $a + e^{*} = a$, *то* $e = e^{*}$).

Пример 1. Множество Z целых чисел образует абелеву группу относительно сложения. Действительно, сложение целых чисел ассоциативно и коммутативно, нейтральным элементом является целое число 0, а обратным для a служит целое число $-a$.

Пример 2. Множество положительных вещественных чисел R_{+} образует абелеву группу относительно умножения. Очевидно, умножение ассоциативно и коммутативно. Нейтральный элемент $1 \in R_{+}$, а обратным элементом для числа $a > 0$ служит вещественное число ${}^{1}\!/_{a}$.

Пример 3. Взаимно однозначное отображение f множества $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ на себя называется *подстановкой* из n элементов, При этом всякий элемент i множества N переходит в элемент $f(i)$, обратная подстановка f^{-1} переводит $f(i)$ в i. Подстановка $f(i) = i$ для любого i множества N называется *тождественной подстановкой.* Во множестве подстановок S_n естественным образом определяется закон композиции: если f_1 и f_2 – подстановки, то последовательное проведение $f_1 \circ f_2$ этих подстановок представляет собой некоторую подстановку. Легко видеть, что композиция ассоциативна. Если множество S_n содержит тождественную подстановку, обратную подстановку для каждой своей подстановки f и вместе с любыми двумя подстановками f_1 и f_2 их композицию $f_1 \circ f_2$, то, очевидно, S_n представляет собой группу.

Множество K элементов $a, b, c, \dots$, в котором определены законы композиции, называемые сложением и умножением, называется *кольцом* (обозначается $\langle K,+,\cdot\rangle$), если эти законы удовлетворяют следующим требованиям:

1. $\langle K,+\rangle$ – коммутативная группа.
2. $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ (ассоциативность).
3. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ и $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Если умножение коммутативно, то кольцо называется *коммутативным*; если в кольце имеется единичный элемент, то оно называется *кольцом с единицей*. Элементы $a,b\in K$ называются делителями нуля – нейтрального элемента относительно $+$, если $a\neq 0$ и $b\neq 0$, но $a\cdot b=0$.

Пример 4. Множество целых чисел Z относительно сложения и умножения является коммутативным кольцом с единицей. Роль единичного элемента играет целое число 1.

Пример 5. Множество квадратных матриц $n-ого$ порядка относительно сложения и умножения образует кольцо с единицей. Коммутативность сложения, ассоциативность сложения и умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения для матриц были отмечены в §1.1. Нейтральным элементом по сложению является нулевая квадратная матрица порядка n, нейтральным элементом по умножению – единичная матрица порядка n.

Коммутативное кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент является обратимым, т.е. для любого $a\neq 0$ существует a^{-1}, такой, что $aa^{-1}=e$, называется *полем*.

ТЕОРЕМА 4. *Для любого элемента поля* a*:* $a0=0$*, где* $0-$ *нейтральный элемент по сложению.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $a0=a(0+0)=a0+a0$. Таким образом, $a0$ является нейтральным элементом по сложению, т. е. $a0=0$.

ТЕОРЕМА 5. *В поле нет ненулевых делителей нуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $ab=0$ и $a\neq 0$, то существует обратный элемент a^{-1}, обратный к a. Тогда $a^{-1}ab=a^{-1}0=0$. Но $a^{-1}ab=eb=b$. Отсюда $b=0$. □

Пример 6. Множество рациональных чисел Q с операциями сложения и умножения образует поле. Действительно, для всякого ненулевого рационального a/b, существует так же рациональный обратный элемент b/a.

§4.2. Поле комплексных чисел.

На протяжении изучения предмета математики неоднократно происходит обогащение понятия числа. На первом этапе школьник, изучающий математику, сталкивается с натуральными числами N. С введением отрицательных чисел, появляется возможность рассмотрения системы целых чисел Z, состоящей из натуральных чисел, противоположных натуральным и нуля. Следующая, более широкая система рациональных чисел Q, состоящая из всех целых чисел и всех дробных, как положительных, так и отрицательных. Дальнейшее расширение понятия числа происходит тогда, когда в рассмотрение вводятся иррациональные числа. Система, состоящая из всех рациональных и всех иррациональных чисел, называется системой действительных (или вещественных) чисел R. Комплексные числа вводятся в связи со следующей задачей: нужно расширить систему действительных чисел до такой системы, в которой каждое квадратное уравнение (в частности уравнение $x^2+1=0$) обладало бы корнем.

В качестве материала для построения новой системы чисел возьмём точки плоскости $C=\{(x,y):x,y\in R\}$, каждая из которых однозначно определяется упорядоченной парой действительных чисел. Введём операции сложения и умножения для таких элементов следующим образом:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d);$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, cd + bc).$$

Покажем, что множество C с введёнными операциями сложения и умножения образует поле. Очевидно, сложение и умножение являются коммутативными операциями, а сложение, кроме того, ассоциативно. Нейтральным элементом по сложению является пара $(0, 0)$, по умножению – $(1, 0)$. Для пары (a, b) противоположна пара $(-a, -b)$. В качестве упражнения читателю предлагается доказать ассоциативность умножения и дистрибутивность умножения относительно сложения. Осталось показать, что для каждого ненулевого элемента существует обратный. Для этого решим уравнение $(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$ относительно x и y. Оно сводится к решению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Данная система совместна для $(a, b) \neq (0, 0)$ и имеет единственное решение $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$; $y = \dfrac{-b}{a^2 + b^2}$, т. е. $(a, b)^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2} \right)$.

Итак, система $\langle C, +, \cdot \rangle$ является полем и называется *системой комплексных чисел*.

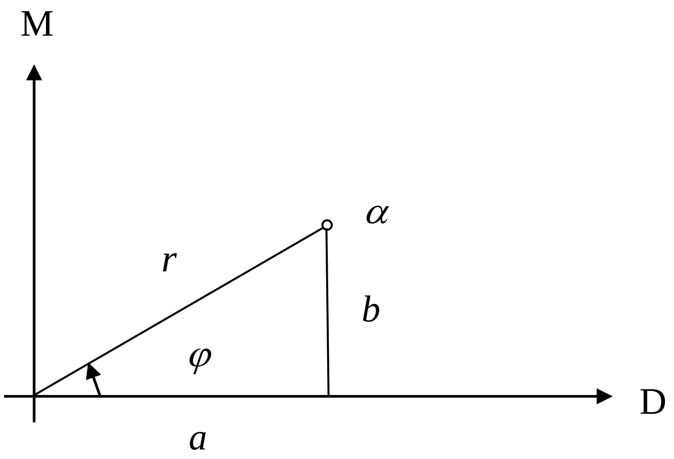
Покажем теперь, что система комплексных чисел является расширением системы действительных чисел. Для этой цели рассмотрим точки, лежащие на оси абсцисс, т. е. точки вида $(a, 0)$. Для них справедливо

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$
$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0),$$

т. е. они складываются и перемножаются так же, как соответствующие действительные числа. Это позволяет нам в дальнейшем не различать точку $(a, 0)$ и действительное число a.

Вернёмся к уравнению $x^2+1=0$. Во множестве комплексных чисел его решением будет, например, точка $(0,1)$. Действительно, $(0,1)(0,1)+(1,0)=(0,0)$. Условимся обозначать эту точку буквой i, так что $i^2=-1$. Будем называть комплексное число i *мнимой единицей*. Имеем, $bi=(b,0)\cdot(0,1)=(0,b)$. Таким образом, $(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+bi$. Следовательно, любое комплексное число можно представить в виде $a+bi$, где a называется *действительной частью* комплексного числа, а bi – *мнимой частью*. Плоскость, точки которой отождествлены с комплексными числами, будем называть *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс этой плоскости называется *действительной осью*, а ось ординат – *мнимой осью*.

Положение точки $a+bi$ на плоскости однозначно задаётся парой действительных чисел a и b. Однако, её положение также вполне определяется с помощью полярных координат, т. е. расстоянием r от точки до начала координат и углом φ между положительным направлением оси абсцисс и направлением из начала координат на эту точку. Число r называется *абсолютной величиной* или *модулем* комплексного числа, а число φ – *аргументом*. Очевидно, что абсолютная величина неотрицательна, а аргумент определён с точностью до слагаемых, кратных 2π.



Между декартовыми и полярными координатами существует следующая связь, справедливая при любом расположении точек на плоскости:

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi.$$

Для произвольного комплексного числа α имеем:

$$\alpha = a + bi = r\cos\varphi + r\sin\varphi\, i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

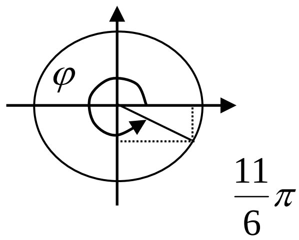
Эта запись числа α называется его тригонометрической формой. Абсолютная величина r находится по формуле $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Аргумент φ может быть найден из системы уравнений:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

Пример 7. Найти тригонометрическую форму числа $\sqrt{3} - i$.

<u>Решение</u>. Здесь $a = \sqrt{3}$, $b = -1$. Тогда $r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$.

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$



Решая систему, получаем $\varphi = \dfrac{11}{6}\pi$. Таким образом

$$\sqrt{3} - 1 = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right).$$

Пусть комплексные числа α и β заданы в тригонометрической форме: $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\beta = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$. Перемножим эти числа:

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]\cdot[r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')] = \\ &= rr'(\cos\varphi\cos\varphi' + i\cos\varphi\sin\varphi' + i\sin\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi') = \\ &= rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]. \end{aligned}$$

Таким образом, модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей. Аналогичное правило имеет место и для частного. Если $\beta \neq 0$, то:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' - i\sin\varphi')}{r'\left(\cos^2\varphi' + \sin^2\varphi'\right)} =$$

$$= \frac{r}{r'}(\cos\varphi\cos\varphi' + i\sin\varphi\cos\varphi' - i\cos\varphi\sin\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi') =$$

$$\frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi').]$$

Следовательно, модуль частного двух комплексных чисел равен модулю делимого, делённому на модуль делителя, а аргумент частного получается вычитанием аргумента делителя из аргумента делимого.

Следствием из формулы умножения комплексных чисел является *формула Муавра*:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Пусть, теперь, нужно извлечь корень $n - ой$ степени из числа $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Предположим, что это сделать можно и что в результате получается число $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, т. е.

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Тогда $\rho = \sqrt[n]{r}$ – однозначно определённое положительное значение корня $n -$ой степени из неотрицательного действительного числа r. А аргументы φ и $n\theta$ могут отличаться на слагаемое, кратное 2π, т. е. $n\theta = \varphi + 2k\pi$, где $k -$ целое число. Откуда $\theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$. Таким образом, окончательно имеем:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right).$$

Давая k различные значения, мы не всегда будем получать различные значения искомого корня. Действительно, при

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$$

получим n значений корня, которые все будут различными, так как увеличение k на единицу влечёт за собой увеличение аргумента на $\frac{2\pi}{n}$. Для произвольного k имеем $k = qn + r,\ 0 \le r \le n-1$, следовательно

$$\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi + 2(qn + r)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2r\pi}{n} + 2q\pi,$$

т. е. значение аргумента при этом k отличается от значения аргумента при $k = r$ на число, кратное 2π. Следовательно, значение корня при произвольном k такое же, как при значении k, равном r, где $0 \le r \le n-1$.

Таким образом, извлечение корня $n-$ой степени из комплексного числа α всегда возможно и даёт n различных значений. Все значения корня $n-$ой степени расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|\alpha|}$ с центром в нуле и делят эту окружность на n равных частей.

Пример 8. Вычислить $(1+i)^4$.

<u>Решение</u>. $(1+i)^4 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4.$

Пример 9. Вычислить $\xi = \sqrt{-i}$.

<u>Решение</u>. Найдём тригонометрическую форму числа $-i$:

$$-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}.$$

Тогда $\xi = \sqrt{\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2}$.

При $k = 0$ имеем: $\xi_0 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

При $k = 1$: $\xi_1 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 10. Вычислить $\xi = \sqrt[3]{8}$.

<u>Решение</u>. В тригонометрической форме $8 = 8\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$.

$$\xi = \sqrt[3]{8(\cos 0 + i\sin 0)} = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right).$$

$k = 0$: $\xi_0 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2$;

$k = 1$: $\xi_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + i$;

$k = 2$: $\xi_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} - i$.

§4.3. Поля вычетов.

Пусть F_n – множество всех остатков от деления целых чисел на натуральное число n, т. е. $F_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. *Суммой* (*произведением*) двух элементов будем считать остаток от деления этой суммы (произведения) на число n. Рассмотрим полученную структуру $\langle F_n, +, \cdot \rangle$.

ТЕОРЕМА 6. *Если* n – *составное, то* F_n – *не является полем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n – составное, т. е. $n = n_1 n_2$, где $n_1 < n$ и $n_2 < n$. Тогда по модулю n получаем $n_1 n_2 = 0$, но $n_1 \neq 0$ и $n_2 \neq 0$. Так как в поле такого быть не может (теорема 5), то при составном n остатки с операциями по модулю n не образуют поля. □

Покажем теперь, что в случае простого n, F_n – является полем. Вначале заметим следующее. Пусть x и y — два целых числа, r_1, r_2 – остатки от деления их на n, т. е. $x = k_1 n + r_1$ и $y = k_2 n + r_2$. Тогда $x + y = (k_1 + k_2)n + (r_1 + r_2)$ и $xy = (k_1 k_2 n + k_1 r_2 + k_2 r_1)n + r_1 r_2$, откуда получаем, что числа $x + y$ и $r_1 + r_2$, а также числа xy и $r_1 r_2$ дают при делении на n одинаковые остатки. Другими словами, мы получим одинаковый результат, если сначала возьмем остатки от деления x и y на n и потом сложим (или умножим) их по модулю n, или, если мы сначала сложим (или умножим) x и y, как обычные натуральные числа, а затем возьмем остаток от деления полученного числа на n. Таким образом, при вычислении некоторого выражения с операциями по модулю n можно не брать остаток от деления на n после каждой операции, а произвести вычисления сначала как с обычными натуральными числами и обычными операциями и только в конце взять остаток от деления полученного числа на n. Это позволяет утверждать, что операции сложения и умножения ассоциативны и коммутативны, а также справедлива дистрибутивность умножения относительно сложения.

Нейтральным элементом по сложению является 0, а единичным элементом по умножению – 1. Остается показать, что при $n-$ простом у каждого остатка a, отличного от 0, есть обратный, т. е. что найдется остаток x такой, что $ax=1$ по модулю n. Итак, пусть $0<a<n$. Рассмотрим числа

$$a \cdot 0, a \cdot 1, \ldots, a \cdot (n-1) \text{ (умножение обычное).}$$

Разность любых двух из этих чисел $ak-al=a(k-l)$ не делится на n, так как $n-$ простое, а $a<n$ и $0<|k-l|<n$. Таким образом, все эти n чисел дают разные и, следовательно, всевозможные остатки при делении на n. Значит, одно из этих чисел дает при делении на n остаток 1, т. е. $ax=1$ по модулю n для некоторого остатка x.

Таким образом, при $n-$ простом все свойства поля выполняются.

В качестве примера приведём таблицы сложения и умножения элементов поля вычетов по модулю 5.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

По этим таблицам также можно получить разность и частное любых двух элементов.

§4.4. Кольца многочленов.

Пусть $P-$ произвольное поле. Через $P[x]$ обозначим множество многочленов от x с коэффициентами из P. Многочлен имеет вид:

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n.$$

Если коэффициент a_n отличен от нулевого элемента поля P, то его называют *старшим коэффициентом* $f(x)$, а число $n-$ *степенью многочлена*. Сами ненулевые элементы поля P будут являться многочленами нулевой степени, а нулевой элемент – многочленом неопределённой степени.

Если все коэффициенты многочлена – комплексные числа, то $C[x]$ называют множеством многочленов над полем комплексных чисел. Определим во множестве $C[x]$ операции сложения и умножения следующим образом. Для произвольных многочленов $f(x)$ и $g(x)$, таких что:

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n,\quad a_n\neq 0,$$

$$g(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_{s-1}x^{s-1}+a_sx^s,\quad b_s\neq 0,$$

и $n\geq s$, их *суммой* назовём многочлен

$$f(x)+g(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n,$$

коэффициенты которого получаются сложением коэффициентов многочленов $f(x)$ и $g(x)$, стоящих при одинаковых степенях неизвестного, т. е. $c_i=a_i+b_i$, $i=0,1,\ldots,n,$ причём при $n>s$ коэффициенты $b_{s+1},b_{s+2},\ldots,b_n$ следует считать равными нулю. Степень суммы будет равна n, если n больше s, но при $n=s$ она может случайно оказаться меньше n, а именно в случае $b_n=-a_n$.

Произведением многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется многочлен

$$f(x)\cdot g(x)=d_0+d_1x+\ldots+d_{n+s-1}x^{n+s-1}+d_{n+s}x^{n+s},$$

коэффициенты которого определяются следующим образом:

$$d_i=\sum_{k+l=i}a_kb_l,\quad i=0,1,\ldots,n+s-1,n+s,$$

т. е. коэффициент d_i есть результат перемножения таких коэффициентов многочленов $f(x)$ и $g(x)$, сумма индексов которых равна i, и сложения всех таких произведений; в частности, $d_0=a_0b_0, d_1=a_0b_1+a_1b_0,\ldots,d_{n+s}=a_nb_s$. Из последнего равенства вытекает неравенство $d_{n+s}\neq 0$ и поэтому степень произведения, двух многочленов равна сумме степеней этих многочленов. Отсюда следует, что произведение многочленов, отличных от нуля, никогда не будет равным нулю.

Какими свойствами обладают введенные нами операции для многочленов? Коммутативность и ассоциативность сложения немедленно вытекают из справедливости этих свойств для сложения чисел, так как складываются коэффициенты при каждой степени неизвестного отдельно. Вычитание оказывается выполнимым: роль *нуля* играет число нуль, включенное нами в число многочленов, а противоположным для записанного выше многочлена $f(x)$ будет многочлен

$$-f(x)=-a_0-a_1x-\ldots-a_{n-1}x^{n-1}-a_nx^n$$

Коммутативность умножения вытекает из коммутативности умножения чисел и того факта, что в определении произведения многочленов коэффициенты обоих множителей $f(x)$ и $g(x)$ используются совершенно равноправным образом. Ассоциативность умножения доказывается следующим образом: если, помимо многочленов $f(x)$ и $g(x)$, дан еще многочлен

$$h(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_{t-1}x^{t-1}+c_tx^t,\quad c_t\neq 0,$$

то коэффициентом при $x^i,\quad i=0,1,\ldots,n+s+t$ в произведении $[f(x)g(x)]h(x)$ будет служить число

$$\sum_{j+m=i}\left(\sum_{k+l=j} a_k b_l\right)c_m = \sum_{k+l+m=i} a_k b_l c_m \,,$$

а в произведении $f(x)[g(x)h(x)]$ – равное ему число

$$\sum_{k+j=i} a_k\left(\sum_{l+m=j} b_l c_m\right) = \sum_{k+l+m=i} a_k b_l c_m \,.$$

Наконец, справедливость закона дистрибутивности вытекает из равенства

$$\sum_{k+l=i}(a_k + b_k)c_l = \sum_{k+l=i} a_k c_l + \sum_{k+l=i} b_k c_l \,,$$

так как левая часть этого равенства является коэффициентом при x^i в многочлене $[f(x)+g(x)]h(x)$, а правая часть – коэффициентом при той же степени неизвестного в многочлене $f(x)h(x)+g(x)h(x)$.

Заметим, что роль единицы при умножении многочленов играет число 1, рассматриваемое как многочлен нулевой степени. С другой стороны, многочлен $f(x)$ тогда и только тогда обладает обратным многочленом $f^{-1}(x)$,

$$f(x)f^{-1}(x)=1 \qquad (1),$$

если $f(x)$ является многочленом нулевой степени. Действительно, если $f(x)$ является отличным от нуля числом a, то обратным многочленом служит для него число a^{-1}. Если же $f(x)$ имеет степень $n \geq 1$, то степень левой части равенства (1), если бы многочлен $f^{-1}(x)$ существовал, была бы не меньше n, в то время как справа стоит многочлен нулевой степени. Отсюда вытекает, что для умножения многочленов обратная операция – деление – не существует.

Следовательно, множество $C[x]$ с введёнными таким образом операциями сложения и умножения образует коммутативное кольцо с единицей, но не поле. Это же утверждение будет справедливо для многочленов над произвольным полем.

ТЕОРЕМА 7. *Для любых двух многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *можно найти такие многочлены* $q(x)$ *и* $r(x)$*, что*

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x), \tag{2}$$

причем степень $r(x)$ *меньше степени* $g(x)$ *или же* $r(x)=0$*. Многочлены* $q(x)$ *и* $r(x)$*, удовлетворяющие этому условию, определяются однозначно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сперва вторую половину теоремы. Пусть существуют еще многочлены $\bar{q}(x)$ и $\bar{r}(x)$, также удовлетворяющие равенству

$$f(x)=g(x)\bar{q}(x)+\bar{r}(x), \tag{3}$$

причем степень $\bar{r}(x)$ снова меньше степени $g(x)$ (или же $\bar{r}(x)=0$). Приравнивая друг другу правые части равенств (2) и (3), получим:

$$g(x)\left[q(x)-\bar{q}(x)\right]=\bar{r}(x)-r(x) \quad .$$

Степень правой части этого равенства меньше степени $g(x)$, степень же левой части была бы при $q(x)-\bar{q}(x)\neq 0$ больше или равна степени $g(x)$. Поэтому должно быть $q(x)-\bar{q}(x)=0$, т. е. $q(x)=\bar{q}(x)$, а тогда и $r(x)=\bar{r}(x)$.

Переходим к доказательству первой половины теоремы. Пусть многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют соответственно степени n и s.

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n, \quad a_n\neq 0,$$

$$g(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_{s-1}x^{s-1}+a_sx^s, \quad b_s\neq 0.$$

Если $n<s$, то можно положить $q(x)=0$, $r(x)=f(x)$. Если же $n\geq s$, то воспользуемся индукцией по степени n. Пусть утверждение справедливо для степеней, меньших n. Положив

$$h(x)=f(x)-a_nb_s{}^{-1}x^{n-s}g(x),$$

получим многочлен, степень которого меньше n. По предположению индукции, существуют многочлены $q'(x)$ и $r(x)$ такие, что $h(x)=q'(x)g(x)+r(x)$, где степень $r(x)$ строго меньше степени $g(x)$. Тогда

$$f(x)=\left(q'(x)+a_n b_s{}^{-1}x^{n-s}\right)g(x)+r(x)=q(x)g(x)+r(x). \ \square$$

Как и в случае чисел, $q(x)$ и $r(x)$ называют соответственно *частным* и *остатком* от деления $f(x)$ на $g(x)$. Если $r(x)=0$, то говорят, что $g(x)$ делит $f(x)$ или $f(x)$ делится на $g(x)$ (без остатка). В этом случае многочлен $g(x)$ называется *делителем* многочлена $f(x)$.

Очевидно, что многочлен $g(x)$ тогда и только тогда будет делителем многочлена $f(x)$, если существует многочлен $\psi(x)$, удовлетворяющих равенству

$$f(x)=g(x)\psi(x).$$

Действительно, если $g(x)$ является делителем для $f(x)$, то в качестве $\psi(x)$ следует взять частное от деления $f(x)$ на $g(x)$. Обратно, пусть такой многочлен $\psi(x)$ существует. Из единственности многочленов $q(x)$ и $r(x)$, удовлетворяющих равенству

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$$

и условию, что степень $r(x)$ меньше степени $g(x)$, в нашем случае следует, что частное от деления $f(x)$ на $g(x)$ равно $\psi(x)$, а остаток равен нулю.

Укажем некоторые основные свойства делимости многочленов, которые найдут в дальнейшем многочисленные применения.

Свойство 1. *Если $f(x)$ делится на $g(x)$, а $g(x)$ делится на $h(x)$, то $f(x)$ будет делиться на $h(x)$.*

В самом деле, по условию $f(x)=g(x)\varphi(x)$ и $g(x)=h(x)\psi(x)$, а поэтому $f(x)=h(x)[\psi(x)\varphi(x)]$.

Свойство 2. *Если $f(x)$ и $g(x)$ делятся на $\varphi(x)$, то их сумма и разность также делятся на $\varphi(x)$.*

Действительно, из равенств $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ и $g(x)=\varphi(x)\chi(x)$ вытекает $f(x)\pm g(x)=\varphi(x)[\psi(x)\pm\chi(x)]$.

Свойство 3. *Если* $f(x)$ *делится на* $\varphi(x)$*, то произведение* $f(x)$ *на любой многочлен* $g(x)$ *также будет делиться на* $\varphi(x)$.

Действительно, если $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, то $f(x)g(x)=\varphi(x)[\psi(x)g(x)]$.

Из свойств 2 и 3 вытекает:

Свойство 4. *Если каждый из многочленов* $f_1(x), f_2(x),\ldots, f_k(x)$ *делится на* $\varphi(x)$*, то на* $\varphi(x)$ *будет делиться и многочлен*

$$f_1(x)g_1(x)+f_2(x)g_2(x)+\ldots+f_k(x)g_k(x),$$

где $g_1(x), g_2(x),\ldots, g_k(x)-$ *произвольные многочлены.*

Свойство 5. *Всякий многочлен* $f(x)$ *делится на любой многочлен нулевой степени.*

Действительно, если $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$, а $c-$ произвольное число, не равное нулю, т. е. произвольный многочлен нулевой степени, то

$$f(x)=c\left(\frac{a_0}{c}+\frac{a_1}{c}x+\ldots+\frac{a_{n-1}}{c}x^{n-1}+\frac{a_n}{c}x^n\right).$$

Свойство 6. *Если* $f(x)$ *делится на* $\varphi(x)$*, то* $f(x)$ *делится и на* $c\varphi(x)$*, где* $c-$ *произвольное число, отличное от нуля.*

В самом деле, из равенства $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$ следует равенство $f(x)=[c\varphi(x)]\cdot\left[c^{-1}\psi(x)\right]$.

Свойство 7. *Многочлены* $cf(x)$, $c\neq 0$, *и только они будут делителями многочлена* $f(x)$*, имеющими такую же степень, что и* $f(x)$.

Действительно, $f(x)=c^{-1}[cf(x)]$, т. е. $f(x)$ делится на $cf(x)$. Если, с другой стороны, $f(x)$ делится на $\varphi(x)$, причем степени $f(x)$ и $\varphi(x)$

совпадают, то степень частного от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$ должна быть равной нулю, т. е. $f(x)=d\varphi(x)$, $d\neq 0$, откуда $\varphi(x)=d^{-1}f(x)$.

Отсюда вытекает следующее свойство:

Свойство 8. *Тогда и только тогда многочлены* $f(x)$, $g(x)$ *одновременно делятся друг на друга, когда* $g(x)=cf(x), c\neq 0$.

Наконец, из свойств 8 и 1 вытекает:

Свойство 9. *Всякий делитель одного из двух многочленов* $f(x)$, $cf(x)$, *где* $c\neq 0$, *будет делителем и для другого многочлена.*

Пусть даны произвольные многочлены $f(x)$ и $g(x)$. Многочлен $\varphi(x)$ будет называться *общим делителем* для $f(x)$ и $g(x)$, если он служит делителем для каждого из этих многочленов. Свойство 5 показывает, что к числу общих делителей многочленов $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат все многочлены нулевой степени. Если других общих делителей эти два многочлена не имеют, то они называются *взаимно простыми.*

Наибольшим общим делителем отличных от нуля многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется такой многочлен $d(x)$, который является их общим делителем и, вместе с тем, сам делится на любой другой общий делитель, этих многочленов. Обозначается наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ символом $(f(x), g(x))$.

Это определение оставляет открытым вопрос, существует ли наибольший общий делитель для любых многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Положительный ответ на этот вопрос, а так же метод для практического разыскания наибольшего общего делителя даёт *алгоритм последовательного деления* или *алгоритм Евклида*, который состоит в следующем. Пусть даны многочлены $f(x)$ и $g(x)$. Делим $f(x)$ на $g(x)$ и получаем некоторый остаток $r_1(x)$. Делим затем $g(x)$ на $r_1(x)$ и получаем остаток $r_2(x)$, делим $r_1(x)$ на $r_2(x)$ и т. д. Так как степени остатков все время понижаются, то в этой цепочке последовательных делений мы должны дойти до такого места, на котором деление совершится нацело и поэтому процесс остановится.

ТЕОРЕМА 8. *Тот остаток* $r_k(x)$, *на который нацело делится предыдущий остаток* $r_{k-1}(x)$, *и будет наибольшим общим делителем многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства запишем изложенное в предыдущем абзаце в виде следующей цепочки равенств:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x), \\ g(x)=r_1(x)q_2(x)+r_2(x), \\ r_1(x)=r_2(x)q_3(x)+r_3(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{k-3}(x)=r_{k-2}(x)q_{k-1}(x)+r_{k-1}(x), \\ r_{k-2}(x)=r_{k-1}(x)q_k(x)+r_k(x), \\ r_{k-1}(x)=r_k(x)q_{k+1}(x). \end{array}\right\} \tag{4}$$

Последнее равенство показывает, что $r_k(x)$ служит делителем для $r_{k-1}(x)$. Отсюда следует, что оба слагаемых правой части предпоследнего равенства делятся на $r_k(x)$, а поэтому $r_k(x)$ будет делителем и для $r_{k-2}(x)$. Далее, таким же путем, поднимаясь вверх, получим, что $r_k(x)$ является делителем и для $r_{k-3}(x),\ldots,r_2(x), r_1(x)$. Отсюда, ввиду второго равенства, будет следовать, что $r_k(x)$ служит делителем для $g(x)$, а поэтому, на основании первого равенства, – и для $f(x)$. Таким образом, $r_k(x)$ является общим делителем для $f(x)$ и $g(x)$.

Возьмем теперь произвольный общий делитель $\varphi(x)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Так как левая часть и первое слагаемое правой части первого из равенств (4) делятся на $\varphi(x)$, то $r_1(x)$ также будет делиться на $\varphi(x)$. Переходя ко второму и следующему равенствам, мы таким же способом получим, что на $\varphi(x)$ делятся многочлены $r_2(x), r_3(x),\ldots$ Наконец, если уже будет доказано, что $r_{k-2}(x)$ и $r_{k-1}(x)$ делятся на $\varphi(x)$, то из предпоследнего равенства мы получим, что $r_k(x)$ делится на $\varphi(x)$. Таким образом, $r_k(x)$ на самом деле будет наибольшим общим делителем для $f(x)$ и $g(x)$. □

Мы доказали, следовательно, что любые два многочлена обладают наибольшим общим делителем, и получили способ для его вычисления. Этот способ показывает, что *если многочлены* $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют оба рациональные или действительные коэффициенты, то и коэффициенты их наибольшего общего делителя также будут рациональными или, соответственно, действительными.*

Если $d(x)$ есть наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то, как показывают свойства 8 и 9, в качестве наибольшего общего делителя этих многочленов можно было бы выбрать также многочлен $cd(x)$, где c – произвольное число, отличное от нуля. Иными словами, *наибольший общий делитель двух многочленов определен лишь с точностью до множителя нулевой степени.* Ввиду этого можно условиться, что старший коэффициент наибольшего общего делителя двух многочленов будет всегда считаться равным единице. Используя это условие, можно сказать, что *два многочлена тогда и только тогда взаимно просты, когда их наибольший общий делитель равен единице.*

Пример 11. Найти наибольший общий делитель многочленов:

$$f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3; \quad g(x)=3x^3+10x^2+2x-3.$$

<u>Решение</u>. Применяя алгоритм Евклида к многочленам с целыми коэффициентами, мы можем, чтобы избежать дробных коэффициентов, умножить делимое или сократить делитель на любое не равное нулю число, причём, не только начиная какое-либо из последовательных делений, но и в процессе самого этого деления. Это будет приводить, понятно, к искажению частного, но интересующие нас остатки будут приобретать лишь некоторый

множитель нулевой степени, что, как мы знаем, при разыскании наибольшего общего делителя допускается.

Делим $f(x)$ на $g(x)$, предварительно умножив $f(x)$ на 3:

$$\begin{array}{r|l} 3x^4+9x^3-3x^2-12x-9 & 3x^3+10x^2+2x-3 \\ \cline{2-2} \underline{3x^4+10x^3+2x^2-3x} & \qquad x+1 \\ -x^3-5x^2-9x-9 & \end{array}$$

(умножаем на −3)

$$\begin{array}{r} 3x^3+15x^2+27x+27 \\ \underline{3x^3+10x^2+2x-3} \\ 5x^2+25x+30 \end{array}$$

Степень остатка стала меньше степени делителя, таким образом, после сокращения на 5 получим первый остаток $r_1(x)=x^2+5x+6$. Делим на него многочлен $g(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3+10x^2+2x-3 & x^2+5x+6 \\ \cline{2-2} \underline{3x^3+15x^2+18x} & \quad 3x-5 \\ -5x^2-16x-3 & \\ \underline{-5x^2-25x-30} & \\ 9x+27 & \end{array}$$

Вторым остатком, после сокращения на 9, будет $r_2(x)=x+3$. Очевидно, что $r_1(x)=r_2(x)(x+2)$, т. е. последним остатком, отличным от нуля будет $r_2(x)=x+3$. Он и будет искомым наибольшим делителем:

$$(f(x),g(x))=x+3.$$

Используем алгоритм Евклида для доказательства следующей теоремы:

ТЕОРЕМА 9. *Если* $d(x)$ *есть наибольший общий делитель многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$, *то можно найти такие многочлены* $u(x)$ *и* $v(x)$, *что*

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x). \qquad (3)$$

Можно считать при этом, если степени многочленов $f(x)$ *и* $g(x)$ *больше нуля, что степень* $u(x)$ *меньше степени* $g(x)$, *а степень* $v(x)$ *меньше степени* $f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся равенствами (4). Если мы учтем, что $r_k(x)=d(x)$, и положим $u_1(x)=1, v_1(x)=-q_k(x)$, то предпоследнее из равенств (4) даст:

$$d(x)=r_{k-2}(x)u_1(x)+r_{k-1}(x)v_1(x).$$

Подставляя сюда выражение $r_{k-1}(x)$ через $r_{k-3}(x)$ и $r_{k-2}(x)$ из предшествующего равенства (4), мы получим;

$$d(x)=r_{k-3}(x)u_2(x)+r_{k-2}(x)v_2(x),$$

где, очевидно, $u_2(x)=v_1(x), v_2(x)=u_1(x)-v_1(x)q_{k-1}(x)$. Продолжая подниматься вверх по равенствам (4), мы придем, наконец, к доказываемому равенству (5).

Дли доказательства второго утверждения теоремы предположим, что многочлены $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие равенству (5), уже найдены, но, например, степень $u(x)$ больше или равна степени $g(x)$. Делим $u(x)$ на $g(x)$:

$$u(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

где степень $r(x)$ меньше степени $g(x)$, и подставляем это выражение в (5). Получим равенство

$$f(x)r(x)+g(x)[v(x)+f(x)q(x)]=d(x).$$

Степень множителя, стоящего при $f(x)$, уже меньше степени $g(x)$. Степень многочлена, стоящего в квадратных скобках, будет в свою очередь меньше степени $f(x)$, так как в противном случае степень второго слагаемого левой части была бы не меньше степени произведения $g(x)f(x)$, а так как степень первого слагаемого меньше степени этого произведения, то вся левая часть имела бы степень, большую или равную степени $g(x)f(x)$, тогда как многочлен $d(x)$ заведомо имеет, при наших предположениях, меньшую степень. □

Одновременно мы получаем, что если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют рациональные или действительные коэффициенты, то и многочлены $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие равенству (5), можно подобрать так, что их коэффициенты будут рациональными или, соответственно, действительными.

Пример 12. Найти многочлены $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие равенству (3) при $f(x)=x^3-x^2+3x-10, \quad g(x)=x^3+6x^2-9x-14.$

Решение. Применим к этим многочленам алгоритм Евклида, причём теперь при выполнении делений уже нельзя допускать искажения частных, так как эти частные используются при разыскании многочленов $u(x)$ и $v(x)$. Получим такую систему равенств:

$$f(x)=g(x)+\left(-7x^2+12x+4\right);$$
$$g(x)=\left(-7x^2+12x+4\right)\left(-\frac{1}{7}x-\frac{54}{49}\right)+\frac{235}{49}(x-2);$$
$$-7x^2+12x+4=(x-2)(-7x-2).$$

Отсюда следует, что $(f(x),g(x))=x-2$ и что

$$u(x)=\frac{7}{235}x+\frac{54}{235}, \quad v(x)=-\frac{7}{235}x-\frac{5}{235}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. *Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ тогда и только тогда взаимно просты, если можно найти многочлены $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие равенству*

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1.$$

Опираясь на этот результат, можно доказать несколько простых, но важных утверждений о взаимно простых многочленах:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Если многочлен* $f(x)$ *взаимно прост с каждым из многочленов* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$, *то он взаимно прост и с их произведением*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, по предыдущему следствию, существуют такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$, что

$$f(x)u(x)+\varphi(x)v(x)=1.$$

Умножая это равенство на $\psi(x)$, получаем:

$$f(x)[u(x)\psi(x)]+[\varphi(x)\psi(x)]v(x)=\psi(x),$$

откуда следует, что всякий общий делитель $f(x)$ и $\varphi(x)\psi(x)$ был бы делителем и для $\psi(x)$, однако по условию $(f(x),\psi(x))=1$. □

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если произведение многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *делится на* $\varphi(x)$, *но* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *взаимно просты, то* $g(x)$ *делится на* $\varphi(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим равенство $f(x)u(x)+\varphi(x)v(x)=1$ на $g(x)$, получим:

$$[f(x)g(x)]u(x)+\varphi(x)[v(x)g(x)]=g(x).$$

Оба слагаемых левой части этого равенства делятся на $\varphi(x)$; на него делится, следовательно, и $g(x)$. □

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Если многочлен* $f(x)$ *делится на каждый из многочленов* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$, *которые между собой взаимно просты, то* $f(x)$ *делится и на их произведение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $f(x)=\varphi(x)\overline{\varphi}(x)$, так что произведение, стоящее справа, делится на $\psi(x)$. Поэтому, по утверждению 2, $\overline{\varphi}(x)$ делится на $\psi(x)$, $\overline{\varphi}(x)=\psi(x)\overline{\psi}(x)$, откуда $f(x)=[\varphi(x)\psi(x)]\overline{\psi}(x)$. □

Определение наибольшего общего делителя может быть распространено на случай любой конечной системы многочленов:

наибольшим общим делителем многочленов $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_s(x)$ называется такой общий делитель этих многочленов, который делится на любой другой общий делитель этих многочленов. Существование наибольшего общего делителя для любой конечной системы многочленов вытекает из следующей теоремы, дающей также способ его вычисления.

ТЕОРЕМА 10. *Наибольший общий делитель многочленов* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_s(x)$ *равен наибольшему общему делителю многочлена* $f_s(x)$ *и наибольшего общего делителя многочленов* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{s-1}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, при $s = 2$ теорема очевидна. Пусть она справедлива для случая $s-1$, т. е., в частности, уже доказано существование наибольшего общего делителя $d(x)$ многочленов $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{s-1}(x)$. Обозначим через $\overline{d}(x)$ наибольший общий делитель многочленов $d(x)$ и $f_s(x)$. Он будет, очевидно, общим делителем для всех заданных многочленов. С другой стороны, всякий другой общий делитель этих многочленов будет делителем также и для $d(x)$, а поэтому и для $\overline{d}(x)$.

В частности, система многочленов $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_s(x)$ называется *взаимно простой*, если общими делителями этих многочленов являются лишь многочлены нулевой степени, т. е. если их наибольший общий делитель равен 1. □

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ IV.

Вычислить выражения:

133. $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$; 134. $(2+i)(3+7i)-(1+2i)(5+3i)$;

135. $(4+i)(5+3i)-(3+i)(3-i)$;

136. $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$; 137. $\dfrac{(5+i)(3+5i)}{2i}$; 138. $\dfrac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$;

139. $\dfrac{(2+i)(4+i)}{1+i}$; 140. $\dfrac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$;

141. $(2+i)^3+(2-i)^3$; 142. $(3+i)^3-(3-i)^3$;

143. $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; 144. $\left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

145. Вычислить i^{77}, i^{98}, i^{-57}, i^{n}, *где n - целое число.*

Решить уравнения:

146. $z^2=i$; 147. $z^2=3-4i$; 148. $z^2=5-12i$;

149. $z^2-(1+i)z+6+3i=0$; 150. $z^2-5z+4+10i=0$;

151. $z^2+(2i-7)z+13-i=0$.

Найти тригонометрическую форму комплексных чисел:

152. 5; 153. i; 154. -2; 155. $-3i$;

156. $1+i$; 157. $1-i$; 158. $1+i\sqrt{3}$; 159. $-1+i\sqrt{3}$;

160. $-1-i\sqrt{3}$; 161. $1-i\sqrt{3}$; 162. $\sqrt{3}+i$; 163. $-\sqrt{3}+i$;

164. $-\sqrt{3}-i$; 165. $\sqrt{3}-i$; 166. $2+\sqrt{3}+i$;

167. $1-\left(2+\sqrt{3}\right)i$.

Вычислить выражения:

168. $(1+i)^{1000}$; 169. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{150}$; 170. $\left(\sqrt{3}+i\right)^{30}$;

171. $\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)^{24}$; 172. $\left(2-\sqrt{3}+i\right)^{12}$; 173. $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}$;

174. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$;

175. $\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

Решить уравнения:

176. $|z|+z=8+4i$;

177. $|z|-z=8+12i$.

При $n\in Z$ вычислить выражения:

178. $(1+i)^n$;

179. $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$;

180. Доказать, что если комплексное число z является одним из корней степени n из вещественного числа a, то и сопряжённое число $\overline{z}$ является одним из корней степени n из a.

Вычислить:

181. $\sqrt[6]{i}$;

182. $\sqrt[10]{512\left(1-i\sqrt{3}\right)}$;

183. $\sqrt[8]{2\sqrt{2}(1-i)}$;

184. $\sqrt[3]{1}$;

185. $\sqrt[4]{1}$;

186. $\sqrt[6]{1}$;

187. $\sqrt[3]{i}$;

188. $\sqrt[4]{-4}$;

189. $\sqrt[6]{64}$;

190. $\sqrt[8]{16}$;

191. $\sqrt[6]{-27}$;

192. $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i-8}$;

193. $\sqrt[4]{-72\left(1-i\sqrt{3}\right)}$;

194. $\sqrt[3]{1+i}$;

195. $\sqrt[3]{2-2i}$;

196. $\sqrt[4]{-\dfrac{18}{1+i\sqrt{3}}}$;

197. $\sqrt[4]{\dfrac{7-2i}{1+i\sqrt{2}}+\dfrac{4+14i}{\sqrt{2}+2i}-(8-2i)}$;

198. $\sqrt[3]{\dfrac{1-5i}{1+i}-5\dfrac{1+2i}{2-i}+2}$;

199. $\sqrt[4]{\dfrac{-2+2\sqrt{3}i}{2+i\sqrt{5}}-5\dfrac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{5}+5i}}$.

Решить уравнения:

200. $(z+1)^n+(z-1)^n=0$;

201. $(z+1)^n-(z-1)^n=0$;

202. $(z+i)^n+(z-i)^n=0$.

203. Найти произведение всех корней степени n из единицы.

Используя алгоритм Евклида, Разделить многочлен $f(x)$ с остатком на многочлен $g(x)$:

204. $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6,\quad g(x)=x^2-3x+1;$

205. $f(x)=x^3-3x^2-x-1,\quad g(x)=3x^2-2x+1.$

Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$:

206. $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1,\quad g(x)=x^3+x^2-x-1;$

207. $f(x)=x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5,\quad g(x)=x^5+x^2-x+1;$

208. $f(x)=x^5+3x^2-2x+2,\quad g(x)=x^6+x^5+x^4-3x^2+2x-6;$

209. $f(x)=x^4+3^3-4x+5,\quad g(x)=2x^3-x^2-2x+2;$

210. $f(x)=x^5+x^4-x^3-2x-1,\quad g(x)=3x^4+2x^3+x^2+2x-2;$

211. $f(x)=x^6-7x^4+8x^3-7x+7,\quad g(x)=3x^5-7x^3+3x^2-7;$

212. $f(x)=x^5-2x^4+x^3+7x^2-12x+10,$
$g(x)=3x^4-64x^3+5x^2+2x-2;$

213. $f(x)=x^5+3x^4-12x^3-52x^2-52x-12,$
$g(x)=x^4+3x^3-6x^2-22x-12;$

214. $f(x)=x^5+x^4-x^3-3x^2-3x-1,\quad g(x)=x^4-2x^3-x^2-2x+1;$

215. $f(x)=x^4-4x^3+1,\quad g(x)=x^3-3x^2+1;$

216. $f(x)=x^4-10x^2+1,\quad g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1.$

Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ и его линейное выражение через $f(x)$ и $g(x)$:

217. $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2,\quad g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2;$

218. $f(x)=3x^3-2x^2+x+2,\quad g(x)=x^2-x+1.$

ОТВЕТЫ.

1. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -2 & -10 & 10 \\ -6 & -20 & 0 \\ -4 & -18 & 14 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & -10 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$. 10. $\begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} Cos\, n\alpha & -Sin\, n\alpha \\ Sin\, n\alpha & Cos\, n\alpha \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 13. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. 1. 15. -2. 16. 0. 17. 0.
18. $4ab$. 19 . $Sin(\alpha-\beta)$. 20. 0. 21. 0.
22. 1. 23. 40. 24. -10. 25. 180.
26. 87. 27. 0. 28. 10. 29. -8.
30. -3. 31. -9. 32. 18. 33. 18.
34. 17. 35. -6. 36. -10. 37. 100.
38. 150. 39. 52. 40. 5. 41. 10.
42. 1. 43. $n!$

44. $n\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

45. 0.

46. $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot(n+1)^{n-1}$. 47. $(-1)^{n-1}\cdot(n-1)$.

48. $(2n-1)(n-1)^{n-1}$. 49. $[a+(n-1)\cdot b]\cdot(a-b)^{n-1}$.

50. $x=-1,\quad y=0,\quad z=1.$ 51. $x=2,\quad y=-1,\quad z=-3.$

52. $x=1,\quad y=-1,\quad z=2.$ 53. $x=2,\quad y=3,\quad z=4.$

54. $x=\dfrac{b+c}{2},\quad y=\dfrac{a-b}{2},\quad z=\dfrac{a-c}{2}.$

55. $x=\dfrac{a+b}{2},\quad y=\dfrac{b+c}{2},\quad z=\dfrac{a+c}{2}.$

56. $x=\frac{1}{6}, \quad y=\frac{13}{30}, \quad z=\frac{1}{30}.$

57. $x=1, \quad y=2, \quad z=3.$–

58. 1) $a \neq 3$; 2) $a=-3, b \neq \frac{1}{3}$; 3) $a=-3, b=\frac{1}{3}$.

59. $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

60. $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$

61. $\begin{pmatrix} Cos\,x & Sin\,x \\ -Sin\,x & Cos\,x \end{pmatrix}.$

62. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$

63. $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

64. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$

65. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

66. $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$

67. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$

68. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$

69. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

70. $\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$.

71. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. 72. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. 73. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

74. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 75. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 76. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

77. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

78. 2. 79. 3. 80. 3.
81. 2. 82. 2. 83. 2.
84. 3. 85. 3. 86. 2.

87. При $\lambda = 0$ ранг матрицы равен 2, при $\lambda \neq 0$ ранг равен 3.

88. При $\lambda = 3$ ранг матрицы равен 2, при $\lambda \neq 3$ ранг равен 3.

89. Общее решение, например:
$x_1 = 85 - 33x_3 - 5x_4 + 13x_5$, $x_2 = -57 + 24x_3 + 4x_4 - 10x_5$; частное решение: $x_1 = 60, x_2 = -39, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1.$

90. Общее решение:
$x_3 = -11 + 22x_1 - 33x_2$, $x_4 = 8 - 16x_1 + 24x_2$; частное решение: $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0.$

91. Общее решение:
$x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2$, $x_4 = 1$; частное решение: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1.$

92. Общее решение: $x_1 = \dfrac{-2 + x_3 - 9x_4}{11}$, $x_2 = \dfrac{10 - 5x_3 + x_4}{11}$; частное решение: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1.$

93. Система несовместна.

94. Система имеет единственное решение: $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1.$

95. Система несовместна.

96. Общее решение: $x_3 = -1 - 8x_1 + 4x_2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1 + 2x_1 - x_2$; частное решение: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = 0, x_5 = 1.$

97. Общее решение: $x_3 = 13$, $x_4 = 19 - 3x_1 - 2x_2$, $x_5 = -34$; частное решение: $x_1 = 1, x_2 = 8, x_3 = 13, x_4 = 0, x_5 = -34.$

98. Система имеет единственное решение:
$x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -5, x_4 = 11.$

99. Система несовместна.

100. При $\lambda \neq 0$ система несовместна. При $\lambda = 0$ она совместна, и общее решение имеет вид: $x_1 = \frac{-3 - 5x_3 - 13x_4}{2}$, $x_2 = \frac{-7 - 7x_3 - 19x_4}{2}$.

101. Система совместна при любых значениях λ. При $\lambda = 8$ общее решение имеет вид: $x_2 = 4 + 2x_1 - 2x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$. При $\lambda \neq 8$ общее решение имеет вид: $x_1 = 0$, $x_2 = 4 - 2x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$.

102. Общее решение, например: $x_1 = 8x_3 - 7x_4$, $x_2 = -6x_3 + 5x_4$. Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4
8	-6	1	0
-7	5	0	1

103. Общее решение: $x_3 = -\frac{5}{2}x_1 + 5x_2$, $x_4 = \frac{7}{2}x_1 - 7x_2$.

Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
0	1	5	7

104. Система имеет только нулевое решение.

105. Система имеет только нулевое решение.

106. Общее решение: $x_1 = x_4 - x_5$, $x_2 = x_4 - x_6$, $x_3 = x_4$. Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	1	1	1	0	0
-1	0	0	0	1	0
0	-1	0	0	0	1

107. Общее решение: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{x_3 - 2x_5}{3}$, $x_4 = 0$.

Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$\frac{1}{3}$	1	0	0
0	$-\frac{2}{3}$	0	0	1

108. Общее решение: $x_1 = -3x_3 - 5x_5, \quad x_2 = 2x_3 + 3x_5, \quad x_4 = 0.$ Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	2	1	0	0
-5	3	0	0	1

109. Четвёртая строка вместе с любыми двумя из первых трёх строк образуют фундаментальную систему, а остальные системы строк – не образуют.

110. $(1, 2, 3)$. 111. $(1, 1, 1)$. 112. $(1, 3, 1)$.

113. $(2, -2, -2)$. 114. $(3, -6, -6)$. 115. $(0, 2, 1, 2)$.

116. $T = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$

117. $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

118. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$ 119. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

120. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$ б) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$

121. Собственные значения: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$. Соответствующие собственные векторы: $\overline{X}_{(\lambda_1=1)} = \alpha(1, 1, 1);$ $\overline{X}_{(\lambda_2=3)} = \alpha(-1, -1, 1);$ $\overline{X}_{(\lambda_3=5)} = \alpha(1, -1, 1),$ где $\alpha \in R, \quad \alpha \neq 0.$

122. Собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Собственные векторы имеют вид: $\overline{X}_{(\lambda_{1,2,3}=-1)} = \alpha(1, 1, -1),$ где $\alpha \in R, \quad \alpha \neq 0.$

123. Собственные значения: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$. Соответствующие собственные векторы: $\overline{X}_{(\lambda_1=1)} = \alpha(-1, 0, 1);$ $\overline{X}_{(\lambda_2=3)} = \alpha(0, 1, 1);$ $\overline{X}_{(\lambda_3=5)} = \alpha(1, 1, 1),$ где $\alpha \in R, \quad \alpha \neq 0.$

124. Собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Собственные векторы имеют вид: $\overline{X}_{(\lambda_{1,2,3}=2)} = \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 0, 1),$ где $\alpha, \beta \in R$ и α и β не равны нулю одновременно.

125. Собственные значения: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Соответствующие собственные векторы: $\overline{X}_{(\lambda_1 = 1)} = \alpha(1, 1, 1)$; $\overline{X}_{(\lambda_2 = \lambda_3 = 0)} = \alpha(1, 2, 3)$, где $\alpha \in R, \quad \alpha \neq 0$.

126. Собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Собственные векторы имеют вид: $\overline{X}_{(\lambda_{1,2,3} = 1)} = \alpha(3, 1, 1)$, где $\alpha \in R, \quad \alpha \neq 0$.

127. Собственные значения: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Соответствующие собственные векторы: $\overline{X}_{(\lambda_1 = 3)} = \alpha(1, 2, 2)$; $\overline{X}_{(\lambda_2 = \lambda_3 = -1)} = \alpha(1, 2, 1)$, где $\alpha \in R, \quad \alpha \neq 0$.

128. Собственные значения: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Соответствующие собственные векторы: $\overline{X}_{(\lambda_1 = -1)} = \alpha(3, 5, 6)$, где $\alpha \in R, \quad \alpha \neq 0$; $\overline{X}_{(\lambda_2 = \lambda_3 = 1)} = \beta(2, 1, 0) + \gamma(1, 0, -1)$, где $\beta, \gamma \in R$ и β и γ не равны нулю одновременно.

129. Собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Соответствующие собственные векторы: $\overline{X}_{(\lambda_1 = \lambda_2 = 1)} = \alpha(0, 0, 0, 1)$, где $\alpha \in R, \quad \alpha \neq 0$; $\overline{X}_{(\lambda_3 = \lambda_4 = 0)} = \beta(0, 1, 0, 0) + \gamma(0, 0, 1, 0)$, где $\beta, \gamma \in R$ и β и γ не равны нулю одновременно.

130. Собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Соответствующие собственные векторы: $\overline{X}_{(\lambda_1 = \lambda_2 = 1)} = \alpha(1, 0, 1, 0) + \beta(0, 0, 0, 1)$, где $\alpha, \beta \in R$ и α и β не равны нулю одновременно; $\overline{X}_{(\lambda_3 = \lambda_4 = 0)} = \gamma(0, 1, 0, 0) + \delta(0, 0, 1, 0)$, где $\gamma, \delta \in R$ и γ и δ не равны нулю одновременно.

131. Собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$. Собственные векторы имеют вид: $\overline{X}_{(\lambda_{1,2,3,4} = 2)} = \alpha(1, 1, -1, 0) + \beta(1, 1, 0, 1)$, где $\alpha, \beta \in R$ и α и β не равны нулю одновременно.

132. Собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Собственные векторы имеют вид: $\overline{X}_{(\lambda_{1,2,3,4} = 1)} = \alpha(1, 2, 0, 0) + \beta(0, 1, 1, 2)$, где $\alpha, \beta \in R$ и α и β не равны нулю одновременно.

133. $1 + 18i$.　134. $4i$.　135. $7 + 17i$.

136. $10 - 11i$.　137. $14 - 5i$.　138. $5 + i$.

139. $\frac{13}{2} - \frac{1}{2}i$.　140. $\frac{11}{5} - \frac{27}{5}i$.

141. 4.　142. $52i$.　143. 2.　144. 1.

145. $i^n = 1$ при $n = 4k$, $i^n = i$ при $n = 4k + 1$, $i^n = -1$ при $n = 4k + 2$, $i^n = -i$ при $n = 4k + 3$, где k – целое число; $i^{77} = i; i^{98} = -1; i^{-57} = -i$.

146. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

147. $\pm(2 - i)$.　148. $\pm(3 - 2i)$.

149. $z_1 = 1 - 2i, \quad z_2 = 3i$.

150. $z_1 = 5 - 2i, \quad z_2 = 2i.$

151. $z_1 = 5 - 3i, \quad z_2 = 2 + i.$

152. $5(Cos\, 0 + i\, Sin\, 0).-$

153. $Cos\,\frac{\pi}{2} + i\, Sin\,\frac{\pi}{2}.$

154. $2(Cos\,\pi + i\, Sin\,\pi).$

155. $3\left(Cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\, Sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$

156. $\sqrt{2}\left(Cos\,\frac{\pi}{4} + i\, Sin\,\frac{\pi}{4}\right).$

157. $\sqrt{2}\left(Cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\, Sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$

158. $2\left(Cos\,\frac{\pi}{3} + i\, Sin\,\frac{\pi}{3}\right).$

159. $2\left(Cos\,\frac{2\pi}{3} + i\, Sin\,\frac{2\pi}{3}\right).$

160. $2\left(Cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\, Sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$

161. $2\left(Cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\, Sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$

162. $2\left(Cos\,\frac{\pi}{6} + i\, Sin\,\frac{\pi}{6}\right).$

163. $2\left(Cos\,\frac{5\pi}{6} + i\, Sin\,\frac{5\pi}{6}\right).$

164. $2\left(Cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\, Sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right).$

165. $2\left(Cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\, Sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$

166. $2\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \left(Cos\,\frac{\pi}{12} + i\, Sin\,\frac{\pi}{12}\right).$

167. $2\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \left(Cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\, Sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right).$

168. $2^{50}.$

169. $2^{150}.$

170. $-2^{30}.$

171. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{12}.$

172. $-2^{12}\left(2-\sqrt{3}\right)^{6}.$

173. $-2^{6}.$

174. $2^{15}i.$

175. $-64.$

176. $3 + 4i.$

177. $5 - 12i.$

181. $Cos\,\frac{(4k+1)\pi}{12} + i\, Sin\,\frac{(4k+1)\pi}{12} \quad (0 \le k \le 5).$

182. $2\left[Cos\,\frac{(6k-1)\pi}{30} + i\, Sin\,\frac{(6k-1)\pi}{30}\right] \quad (0 \le k \le 9).$

183. $\sqrt[4]{2}\left[Cos\,\frac{(8k-1)\pi}{32} + i\, Sin\,\frac{(8k-1)\pi}{32}\right] \quad (0 \le k \le 7).$

184. $\left\{1, \quad -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$

185. $\{\pm 1, \quad \pm i\}.$

186. $\left\{\pm 1, \quad \pm\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \pm\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}.$

187. $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, \quad -i\right\}.$

188. $\{1\pm i, \quad -1\pm i\}.$

189. $2\left[Cos\,\frac{k\pi}{3}+i\,Sin\,\frac{k\pi}{3}\right] \quad (0\le k\le 5).$

190. $\{\pm\sqrt{2}, \quad \pm\sqrt{2}\,i, \quad \pm(1+i), \quad \pm(1-i)\}.$

191. $\left\{\pm\sqrt{3}\,i, \quad \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right), \quad \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)\right\}.$

192. $\{\sqrt{3}+i, \quad -1+i\sqrt{3}, \quad -\sqrt{3}-i, \quad 1-i\sqrt{3}\}.$

193. $\{3+i\sqrt{3}, \quad \sqrt{3}-3i, \quad -3-i\sqrt{3}, \quad -\sqrt{3}+3i\}.$

194. $\left\{\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}(i-1), \quad \frac{\sqrt[3]{4}}{4}\left(1-\sqrt{3}-i\left(\sqrt{3}+1\right)\right), \quad \frac{\sqrt[3]{4}}{4}\left(1+\sqrt{3}-i\left(\sqrt{3}-1\right)\right)\right\}.$

195. $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right), \quad -\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right), \quad 1-i\right\}.$

196. $\left\{\pm\left(\frac{3}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\,\frac{3}{2}\right)\right\}.$

197. $\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$

198. $\{2i, \quad -\sqrt{3}-i, \quad \sqrt{3}-i\}.$

199. $\sqrt[4]{2}\left[Cos\,\frac{\pi+6k\pi}{12}+i\,Sin\,\frac{\pi+6k\pi}{12}\right] \quad (0\le k\le 3).$

203. $(-1)^{n-1}.$

204. $q(x)=2x^2+3x+11, \quad r(x)=25x-5.$

205. $q(x)=\frac{3x-7}{9}, \quad r(x)=-\frac{26x+2}{9}.$

206. $x+1$.

207. $x^3-x+1.$

208. $x^3+x^2+2.$

209. 1 .

210. $x^2+1.$

211. $x^3+1.$

212. $x^2-2x+2.$

213. $x \;\; +3.$

214. $x^2+x+1.$

215. $x^2-2\sqrt{2}x-1.$

216. 1 .

217. $d(x)=x^2-2=-(x+1)\cdot f(x)+(x+2)\cdot g(x).$

218. $d(x)=1=x\cdot f(x)-\left(3x^2+x-1\right)\cdot g(x).$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра: Учеб.: Для ВУЗов. – М.: Физматлит, 2001.

2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971.

3. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1984.

4. Шипачёв В. С. Задачник повысшей математике: Учеб. пособие для ВУЗов. – М.: Высшая школа, 2002.

СОДЕРЖАНИЕ.

Дмитрий Иванович Иванов

АЛГЕБРА

(часть I)

Учебно-методическое пособие
по дисциплине "Алгебра"
для студентов специальности
"Компьютерная безопасность"