Физико-математическая модель фильтрации с учетом образования газовых гидратов

Насыщения и пористость

$$S_g + S_w + S_h = 1, \qquad 0 \le S_\alpha \le 1, \tag{1}$$

где S_g, S_w, S_h - насыщения газа, воды и гидрата соответственно.

Пористость ϕ считаем зависящей от образования гидрата:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x}) \big(1 - \beta_h S_h(t, \mathbf{x})\big), \tag{2}$$

где $\phi_0(\mathbf{x})$ - начальная пористость коллекторной породы, $\beta_h \in [0, 1]$ - коэффициент, характеризующий, какую долю порового объёма блокирует единица насыщения гидратом.

Абсолютная проницаемость как функция пористости

Абсолютная проницаемость коллектора, связанная с геометрией пор, описывается как функция пористости. Для простоты используем степенную аппроксимацию типа Козени-Кармена:

$$k_{\text{abs}}(\phi) = k_0 \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^m, \tag{3}$$

где k_0 - начальная абсолютная проницаемость при $\phi = \phi_0$, $m \ge 1$ - эмпирический показатель.

Подставляя (2) в (3), получаем явную зависимость абсолютной проницаемости от насыщения гидратом:

$$k_{\text{abs}}(S_h) = k_0 \big(1 - \beta_h S_h\big)^m. \tag{4}$$

Здесь k_{abs} описывает *только* изменение проводимости скелета пористой среды из-за уменьшения эффективного порового объёма при образовании твёрдого гидрата.

Закон сохранение массы (неразрывность)

Запишем уравнение неразрывности для каждой моделируемой фазы (газ, вода, газовый гидрат). При этом учтем, что в рамках рассматриваемой задачи обратный переход не рассматривается (моделирование до остановки). тогда получим, что:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\phi S_g \rho_g\big) + \nabla \cdot \big(\rho_g \mathbf{u}_g\big) = -\nu_g R_h, \tag{5a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\phi S_w \rho_w\big) + \nabla \cdot \big(\rho_w \mathbf{u}_w\big) = -\nu_w R_h, \tag{5b}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\phi S_h \rho_h\big) = +\nu_h R_h. \tag{5c}$$

Где $\rho_\alpha = \rho_\alpha(p_\alpha, T)$ - плотности фаз, $\mathbf{u}_\alpha$ - фильтрационные скорости, R_h - скорость образования гидрата (масса на единицу объёма и времени), ν_g, ν_w, ν_h - стехиометрические коэффициенты переноса массы.

Закон Дарси

1. закон Дарси для однофазной фильтрации

Для *одной* подвижной фазы классический закон Дарси имеет следующий вид:

$$\mathbf{u}_\alpha = -\frac{k_{\text{abs}}(\phi)}{\mu_\alpha}\Big(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}\Big), \tag{6}$$

где

- $k_{\text{abs}}(\phi)$ - абсолютная проницаемость, описывающая только свойства скелета порового пространства, зависит от свободной пористости;
- μ_α - динамическая вязкость фазы α;
- p_α - давление фазы α;
- $\mathbf{g}$ - вектор ускорения силы тяжести.

Чтобы учитывать образование гидрата, представим $k_{\text{abs}}(\phi)$ как функцию от насыщения $k_{\text{abs}}(S_h)$ из (4), таким образов учитываем что поровое пространство становится менее проводящим по мере роста S_h.

2. закон Дарси для многофазной фильтрации

Для фильтрации в многофазном случае (газ + вода) необходимо учитывать *относительные* фазовые проницаемости $k_{r\alpha}$, которые описывают дополнительное гидродинамического сопротивления фаз за счет конкуренции за один и тот же поровый объём, в котором происходит движение флюида.

Определим *эффективную фазовую проницаемость* для фазы α:

$$k_{\text{eff},\alpha}(S_g, S_w, S_h) := k_{\text{abs}}(S_h)\, k_{r\alpha}(S_g, S_w, S_h), \tag{7}$$

и *по определению* относительную проницаемость как

$$k_{r\alpha}(S_g, S_w, S_h) = \frac{k_{\text{eff},\alpha}}{k_{\text{abs}}(S_h)}. \tag{8}$$

То есть:

- $k_{\text{abs}}(S_h)$ - будем использовать абсолютную фазовую проницаемость определенную как (4);
- $k_{r\alpha}$ - относительная фазовая проницаемость;
- $k_{\text{eff},\alpha}$ - эффективная фазовая проницаемостьα в законе Дарси.

В (7) произведение $k_{\text{abs}} \cdot k_{r\alpha}$ есть эффективная фазовая проницаемость. Тогда закон Дарси для каждой подвижной фазы $\alpha \in \{g, w\}$ *только* через эффективную фазовую проницаемость с учетом образования гидрата запишется как:

$$\mathbf{u}_\alpha = -\frac{k_{\text{eff},\alpha}(S_g, S_w, S_h)}{\mu_\alpha}\Big(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}\Big), \qquad \alpha \in \{g, w\}. \tag{9}$$

Где связь с абсолютной проницаемостью и насыщениями задаётся через (4) и (7):

$$k_{\text{eff},\alpha}(S_g, S_w, S_h) = k_0\big(1 - \beta_h S_h\big)^m\, k_{r\alpha}(S_g, S_w, S_h).$$

Фазовый переход газа и вода $\to$ газовый гидрат

В этом разделе будет показано, как фазовый переход учитываетс в законах сохранения массы и энергии.

Локальное уравнение баланса массы для фазы

Рассмотрим произвольную фазу $\alpha \in \{g, w, h\}$ (газ, вода, гидрат). Запишем локальное уравнение баланса массы для этой фазы в пористом среде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\phi S_\alpha \rho_\alpha\big) + \nabla \cdot \big(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha\big) = \Gamma_\alpha, \tag{10}$$

где

- ϕ — пористость;
- S_α — насыщение фазы α (доля порового объёма);
- ρ_α — плотность фазы α;
- $\mathbf{u}_\alpha$ — фильтрационная скорость фазы α (скорость Дарси);
- Γ_α — источник (если > 0) или сток (если < 0) массы фазы за счёт фазового перехода.

Определение скорости фазового перехода R_h

Введём скалярную величину $R_h(t, \mathbf{x})$:

- R_h — скорость образования гидрата *в пересчёте на массу гидрата* на единицу порового объема и времени.

Тогда:

$$\Gamma_h = \nu_h R_h, \tag{11}$$

то есть правая часть уравнения для гидратной фазы может быть записана как

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\phi S_h \rho_h\big) = \Gamma_h = \nu_h R_h. \tag{12}$$

Для газа и воды R_h даёт *отрицательные* источники (стоки):

$$\Gamma_g = -\nu_g R_h, \qquad \Gamma_w = -\nu_w R_h, \tag{13}$$

то есть

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\phi S_g \rho_g\big) + \nabla \cdot \big(\rho_g \mathbf{u}_g\big) = -\nu_g R_h, \tag{14a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\phi S_w \rho_w\big) + \nabla \cdot \big(\rho_w \mathbf{u}_w\big) = -\nu_w R_h. \tag{14b}$$

Коэффициенты ν_g, ν_w, ν_h здесь:

- могут быть выражены через стехиометрию реакции и молярные массы,
- можно представить как эмпирические *эффективные коэффициенты*, которые учитывают, сколько массы газа и воды уходит на единицу массы образующегося гидрата.

За счет (12) и (14) фазовый переход можно *явно* учесть в уравнениях неразрывности: масса газа и воды убывает, масса гидрата возрастает.

Связь скорости фазового перехода R_h с насыщением гидратом S_h

Если предположить, что плотность гидрата ρ_h и пористость ϕ меняются медленно (или считаем их константами на первом приближении), из (12) получаем:

$$\rho_h \phi \frac{\partial S_h}{\partial t} = \nu_h R_h \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial S_h}{\partial t} = \frac{\nu_h}{\rho_h \phi} R_h. \tag{15}$$

Таким образом, используя функцию скорости образования гидрата R_h (кинетику образования гидрата), можно определять насыщение порового пространства газовым гидратом $S_h(t, \mathbf{x})$.

Закон сохранения энергии

Учитывая что рассматриваемые процесс образования гидратов в аномальных пластах зависит не только от давления но и температуры, необходимо так же учитывать закон сохранения энергии.

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[(1-\phi)\,\rho_r c_r T + \phi \sum_{\alpha\in\{g,w,h\}} S_\alpha \rho_\alpha c_\alpha T\Big] + \nabla\cdot\Big(-\lambda_{\text{eff}} \nabla T + \sum_{\alpha\in\{g,w\}} \rho_\alpha h_\alpha \mathbf{u}_\alpha\Big) = -L_h R_h. \tag{16}$$

Здесь ρ_r, c_r - плотность и теплоёмкость матрицы, c_α - теплоёмкости фаз, λ_{eff} - эффективная теплопроводность пористой среды, h_α - удельные энтальпии фаз, L_h - удельная скрытая теплота образования гидрата.

$\phi \sum_{\alpha\in\{g,w,h\}} S_\alpha \rho_\alpha c_\alpha T$ — внутренняя энергия фаз в порах. В каждой фазе присутствует теплоёмкость c_α, плотность ρ_α и температура T.

$$\nabla\cdot\Big(\sum_{\alpha\in\{g,w\}} \rho_\alpha h_\alpha \mathbf{u}_\alpha\Big)$$

— конвективный перенос тепла движущимися фазами, где :

- $\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha$ — массовый поток фазы,
- h_α — удельная энтальпия фазы,

Кинетика образования гидрата

В соответствии с моделью И.Ленгмюра, образование газового гидрата ограничено предельной равновесной концентрацией, определяемой как функция от давления и температуры, а именно:

$$S_h^{\text{eq}}(p_g, T) = S_{h,\max} \frac{p_g}{p_g + P_L(T)}, \tag{17a}$$

$$R_h = \rho_h\, k_L \Big(S_h^{\text{eq}}(p_g, T) - S_h\Big), \tag{17b}$$

где $S_{h,\max}$ - максимальное гидратное насыщение, $P_L(T)$ - параметр Ленгмюра (характерное давление насыщения), k_L - кинетический коэффициент.

Из баланса массы гидрата (5c) при медленном изменении ρ_h получаем:

$$\rho_h \phi \frac{\partial S_h}{\partial t} = \nu_h R_h \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial S_h}{\partial t} = \frac{\nu_h}{\rho_h \phi} R_h. \tag{18}$$

Подставляя (17b), имеем:

$$\frac{\partial S_h}{\partial t} = \frac{\nu_h k_L}{\phi}\Big(S_h^{\mathrm{eq}}(p_g, T) - S_h\Big). \tag{19}$$

Решив уравнение (19) относительно насыщения гидратом и подставив его в (2) и (3), можно написать:

$$k_{\mathrm{abs}}(S_h) = k_0\,(1 - \beta_h S_h)^m\,. \tag{20}$$

Получив квазистационарное уравнение, учитывающее влияние роста гидратного насыщения на абсолютную проницаемость.

Дополнительная динамика кольматации (уравнение Леонтьева)

Чтобы учесть перенос и накопление частиц гидрата (суффозия, кольматация) на проницаемость призабойной зоны скважины, введём безразмерный множитель кольматации $F_{\mathrm{colm}}(t, \mathbf{x})$ и определим эффективную фазовую проницаемость как

$$k_{\mathrm{eff},\alpha}(S_g, S_w, S_h, t) = k_{\mathrm{abs}}(S_h)\, F_{\mathrm{colm}}(t, \mathbf{x})\, k_{r\alpha}(S_g, S_w, S_h). \tag{21}$$

Для F_{colm} запишем уравнение Леонтьева:

$$\frac{\partial F_{\mathrm{colm}}}{\partial t} = -\alpha\,\big|\mathbf{u}_{\mathrm{f}}\big|\, S_h\, F_{\mathrm{colm}}, \tag{22a}$$

$$\mathbf{u}_{\mathrm{f}} = \omega_g \mathbf{u}_g + \omega_w \mathbf{u}_w, \tag{22b}$$

где α - коэффициент кольматации, $\mathbf{u}_{\mathrm{f}}$ - характерная скорость фильтрации смеси, ω_g, ω_w - весовые коэффициенты (вклад газа и воды).

Решение (22a) при известном S_h и $\mathbf{u}_{\mathrm{f}}$:

$$F_{\mathrm{colm}}(t, \mathbf{x}) = \exp\Big(-\alpha \int_0^t \big|\mathbf{u}_{\mathrm{f}}(\tau, \mathbf{x})\big|\, S_h(\tau, \mathbf{x})\, d\tau\Big), \tag{23}$$

если $F_{\mathrm{colm}}(0, \mathbf{x}) = 1$.

Тогда $k_{\mathrm{eff},\alpha}$ из (21) учитывает три эффекта:

- изменение свободной пористой из-за гидрата ($k_{\mathrm{abs}}(S_h)$);
- многофазность ($k_{r\alpha}$);
- динамическую кольматацию F_{colm} каналов.

Возможности предлагаемой физико-математической модели

Таким образом, предлагаемая модель включает в себя:

- массовые балансы фаз (5);
- закон Дарси в виде (9) с эффективной фазовой проницаемостью (21);
- связь пористости с гидратным насыщением (2), как следствие динамическое изменение проницаемости коллектора ;
- зависимость абсолютной проницаемости от пористости, насыщения газовым гидратом;

- кинетику образования гидрата по Ленгмюру (17), эволюцию S_h (19);
- баланс энергии (16) с источником-стоком скрытой теплоты фазового перехода $-L_h R_h$;
- дополнительную динамику кольматации по Леонтьеву через F_{colm} (22), (23).

Данная модель позволит:

- *учитывать зависимость абсолютной* проницаемости k_{abs} от насыщением порового пространства газовым гидратом;
- *учитывать изменение относительные фазовой* проницаемости $k_{r\alpha}$;
- Определяемые в соответствии с моделью $k_{\mathrm{abs}}, F_{\mathrm{colm}}, k_{r\alpha}$ должны позволить определять динамику работы скважины в условиях аномально низких пластовых давлений и температур, прогнозировать вынужденные остановки для ГТМ, подбирать оптимальные режимы работы.