

Физико-математическая модель фильтрации с учетом образования газовых гидратов

Насыщения и пористость

$$S_g + S_w + S_h = 1, \quad 0 \leq S_\alpha \leq 1, \quad (1)$$

где S_g, S_w, S_h — насыщения газа, воды и гидрата соответственно.

Пористость ϕ считаем зависящей от образования гидрата:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x}) (1 - \beta_h S_h(t, \mathbf{x})), \quad (2)$$

где $\phi_0(\mathbf{x})$ — начальная пористость коллекторной породы, $\beta_h \in [0, 1]$ — коэффициент, характеризующий, какую долю порового объёма блокирует единица насыщения гидратом.

Абсолютная проницаемость как функция пористости

Абсолютная проницаемость коллектора, связанная с геометрией пор, описывается как функция пористости. Для простоты используем степенную аппроксимацию типа Козени–Кармена:

$$k_{\text{abs}}(\phi) = k_0 \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^m, \quad (3)$$

где k_0 — начальная абсолютная проницаемость при $\phi = \phi_0$, $m \geq 1$ — эмпирический показатель.

Подставляя (2) в (3), получаем явную зависимость абсолютной проницаемости от насыщения гидратом:

$$k_{\text{abs}}(S_h) = k_0 (1 - \beta_h S_h)^m. \quad (4)$$

Здесь k_{abs} описывает *только* изменение проводимости скелета пористой среды из-за уменьшения эффективного порового объёма при образовании твёрдого гидрата.

Закон сохранения массы (неразрывность)

Запишем уравнение неразрывности для каждой моделируемой фазы (газ, вода, газовый гидрат). При этом учтём, что в рамках рассматриваемой задачи обратный переход не рассматривается (моделирование до остановки). Тогда получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_g \rho_g) + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{u}_g) = -\nu_g R_h, \quad (5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_w \rho_w) + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{u}_w) = -\nu_w R_h, \quad (5b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_h \rho_h) = +\nu_h R_h. \quad (5c)$$

Здесь $\rho_\alpha = \rho_\alpha(p_\alpha, T)$ — плотности фаз, \mathbf{u}_α — фильтрационные скорости, R_h — скорость образования гидрата (масса на единицу объёма и времени), ν_g, ν_w, ν_h — стехиометрические коэффициенты переноса массы.

Закон Дарси

1. Закон Дарси для однофазной фильтрации

Для *одной* подвижной фазы классический закон Дарси имеет вид:

$$\mathbf{u}_\alpha = -\frac{k_{\text{abs}}(\phi)}{\mu_\alpha}(\nabla p_\alpha), \quad (6)$$

где

- $k_{\text{abs}}(\phi)$ — абсолютная проницаемость, описывающая только свойства скелета порового пространства, зависит от свободной пористости;
- μ_α — динамическая вязкость фазы α ;
- p_α — давление фазы α ;
- \mathbf{g} — вектор ускорения силы тяжести.

Чтобы учитывать образование гидрата, представим $k_{\text{abs}}(\phi)$ как функцию от насыщения $k_{\text{abs}}(S_h)$ из (4), таким образом учитывая, что поровое пространство становится менее проводящим по мере роста S_h .

2. Закон Дарси для многофазной фильтрации

Для фильтрации в многофазном случае (газ + вода) необходимо учитывать *относительные* фазовые проницаемости $k_{r\alpha}$, которые описывают дополнительное гидродинамическое сопротивление фаз за счёт конкуренции за один и тот же поровый объём, в котором происходит движение флюида.

Определим *эффективную фазовую проницаемость* для фазы α :

$$k_{\text{eff},\alpha}(S_g, S_w, S_h) := k_{\text{abs}}(S_h) k_{r\alpha}(S_g, S_w, S_h), \quad (7)$$

и по определению относительную проницаемость как

$$k_{r\alpha}(S_g, S_w, S_h) = \frac{k_{\text{eff},\alpha}}{k_{\text{abs}}(S_h)}. \quad (8)$$

То есть:

- $k_{\text{abs}}(S_h)$ — абсолютная фазовая проницаемость, определённая как (4);
- $k_{r\alpha}$ — относительная фазовая проницаемость;
- $k_{\text{eff},\alpha}$ — эффективная фазовая проницаемость фазы α в законе Дарси.

В (7) произведение $k_{\text{abs}} \cdot k_{r\alpha}$ есть эффективная фазовая проницаемость. Тогда закон Дарси для каждой подвижной фазы $\alpha \in \{g, w\}$ *только* через эффективную фазовую проницаемость с учетом образования гидрата запишется как:

$$\mathbf{u}_\alpha = -\frac{k_{\text{eff},\alpha}(S_g, S_w, S_h)}{\mu_\alpha}(\nabla p_\alpha), \quad \alpha \in \{g, w\}. \quad (9)$$

Связь с абсолютной проницаемостью и насыщениями задаётся через (4) и (7):

$$k_{\text{eff},\alpha}(S_g, S_w, S_h) = k_0(1 - \beta_h S_h)^m k_{r\alpha}(S_g, S_w, S_h).$$

Фазовый переход газа и воды в газовый гидрат

В этом разделе будет показано, как фазовый переход учитывается в законах сохранения массы и энергии.

Локальное уравнение баланса массы для фазы

Рассмотрим произвольную фазу $\alpha \in \{g, w, h\}$ (газ, вода, гидрат). Запишем локальное уравнение баланса массы для этой фазы в пористой среде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_\alpha \rho_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = \Gamma_\alpha, \quad (10)$$

где

- ϕ — пористость;
- S_α — насыщение фазы α (доля порового объёма);
- ρ_α — плотность фазы α ;
- \mathbf{u}_α — фильтрационная скорость фазы α (скорость Дарси);
- Γ_α — источник (если > 0) или сток (если < 0) массы фазы за счёт фазового перехода.

Определение скорости фазового перехода R_h

Введём скалярную величину $R_h(t, \mathbf{x})$:

- R_h — скорость образования гидрата *в пересчёте на массу гидрата* на единицу порового объёма и времени.

Тогда:

$$\Gamma_h = \nu_h R_h, \quad (11)$$

то есть правая часть уравнения для гидратной фазы может быть записана как

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_h \rho_h) = \Gamma_h = \nu_h R_h. \quad (12)$$

Для газа и воды R_h даёт *отрицательные* источники (стоки):

$$\Gamma_g = -\nu_g R_h, \quad \Gamma_w = -\nu_w R_h, \quad (13)$$

то есть

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_g \rho_g) + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{u}_g) = -\nu_g R_h, \quad (14a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_w \rho_w) + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{u}_w) = -\nu_w R_h. \quad (14b)$$

Коэффициенты ν_g , ν_w , ν_h здесь:

- могут быть выражены через стехиометрию реакции и молярные массы,
- можно представить как эмпирические *эффективные коэффициенты*, которые учитывают, сколько массы газа и воды уходит на единицу массы образующегося гидрата.

За счёт (12) и (14) фазовый переход можно *явно* учесть в уравнениях неразрывности: масса газа и воды убывает, масса гидрата возрастает.

Связь скорости фазового перехода R_h с насыщением гидратом S_h

Если предположить, что плотность гидрата ρ_h и пористость ϕ меняются медленно (или считать их константами на первом приближении), из (12) получаем:

$$\rho_h \phi \frac{\partial S_h}{\partial t} = \nu_h R_h \implies \frac{\partial S_h}{\partial t} = \frac{\nu_h}{\rho_h \phi} R_h. \quad (15)$$

Таким образом, используя функцию скорости образования гидрата R_h (кинетику образования гидрата), можно определять насыщение порового пространства газовым гидратом $S_h(t, \mathbf{x})$.

Закон сохранения энергии

Учитывая, что рассматриваемый процесс образования гидратов в аномальных пластах зависит не только от давления, но и от температуры, необходимо также учитывать закон сохранения энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[(1 - \phi) \rho_r c_r T + \phi \sum_{\alpha \in \{g, w, h\}} S_\alpha \rho_\alpha c_\alpha T \right] + \nabla \cdot \left(-\lambda_{\text{eff}} \nabla T + \sum_{\alpha \in \{g, w\}} \rho_\alpha h_\alpha \mathbf{u}_\alpha \right) = -L_h R_h. \quad (16)$$

Здесь ρ_r, c_r — плотность и теплоёмкость матрицы, c_α — теплоёмкости фаз, λ_{eff} — эффективная теплопроводность пористой среды, h_α — удельные энтальпии фаз, L_h — удельная скрытая теплота образования гидрата.

Величина

$$\phi \sum_{\alpha \in \{g, w, h\}} S_\alpha \rho_\alpha c_\alpha T$$

описывает внутреннюю энергию фаз в порах. В каждой фазе присутствует теплоёмкость c_α , плотность ρ_α и температура T .

Член

$$\nabla \cdot \left(\sum_{\alpha \in \{g, w\}} \rho_\alpha h_\alpha \mathbf{u}_\alpha \right)$$

описывает конвективный перенос тепла движущимися фазами, где

- $\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha$ — массовый поток фазы,
- h_α — удельная энтальпия фазы.

Кинетика образования гидрата

В соответствии с моделью Ленгмюра, образование газового гидрата ограничено предельной равновесной концентрацией, определяемой как функция от давления и температуры:

$$S_h^{\text{eq}}(p_g, T) = S_{h, \text{max}} \frac{p_g}{p_g + P_L(T)}, \quad (17a)$$

$$R_h = \rho_h k_L \left(S_h^{\text{eq}}(p_g, T) - S_h \right), \quad (17b)$$

где $S_{h, \text{max}}$ — максимальное гидратное насыщение, $P_L(T)$ — параметр Ленгмюра (характерное давление насыщения), k_L — кинетический коэффициент.

Из баланса массы гидрата (5с) при медленном изменении ρ_h получаем:

$$\rho_h \phi \frac{\partial S_h}{\partial t} = \nu_h R_h \implies \frac{\partial S_h}{\partial t} = \frac{\nu_h}{\rho_h \phi} R_h. \quad (18)$$

Подставляя (17b), имеем:

$$\frac{\partial S_h}{\partial t} = \frac{\nu_h k_L}{\phi} \left(S_h^{\text{eq}}(p_g, T) - S_h \right). \quad (19)$$

Решив уравнение (19) относительно насыщения гидратом и подставив его в (2) и (3), можно написать:

$$k_{\text{abs}}(S_h) = k_0 (1 - \beta_h S_h)^m. \quad (20)$$

Таким образом получаем квазистационарное уравнение, учитывающее влияние роста гидратного насыщения на абсолютную проницаемость.

Динамика кольтматации порового пространства

Чтобы учесть перенос и накопление частиц гидрата (суффозия, кольтматация) на проницаемость призабойной зоны скважины, введём безразмерный множитель кольтматации $F_{\text{colm}}(t, \mathbf{x})$ и определим эффективную фазовую проницаемость как

$$k_{\text{eff},\alpha}(S_g, S_w, S_h, t) = k_{\text{abs}}(S_h) F_{\text{colm}}(t, \mathbf{x}) k_{r\alpha}(S_g, S_w, S_h). \quad (21)$$

Для F_{colm} запишем уравнение Леонтьева:

$$\frac{\partial F_{\text{colm}}}{\partial t} = -\alpha |\mathbf{u}_f| S_h F_{\text{colm}}, \quad (22a)$$

$$\mathbf{u}_f = \omega_g \mathbf{u}_g + \omega_w \mathbf{u}_w, \quad (22b)$$

где α — коэффициент кольтматации, \mathbf{u}_f — характерная скорость фильтрации смеси, ω_g, ω_w — весовые коэффициенты (вклад газа и воды).

Решение (22a) при известном S_h и \mathbf{u}_f :

$$F_{\text{colm}}(t, \mathbf{x}) = \exp \left(-\alpha \int_0^t |\mathbf{u}_f(\tau, \mathbf{x})| S_h(\tau, \mathbf{x}) d\tau \right), \quad (23)$$

если $F_{\text{colm}}(0, \mathbf{x}) = 1$.

Тогда $k_{\text{eff},\alpha}$ из (21) учитывает три эффекта:

- изменение свободной пористости из-за гидрата ($k_{\text{abs}}(S_h)$);
- многофазность ($k_{r\alpha}$);
- динамическую кольтматацию F_{colm} каналов.

Численная схема для закона сохранения энергии

Для численного решения уравнения сохранения энергии (16) используем метод контрольных объёмов (finite volume method, FVM). Пространственная область разбивается на непересекающееся семейство контрольных объёмов

$$\{V_i\}_{i=1}^N,$$

каждый из которых имеет объём $|V_i|$ и набор соседей $N(i)$. Через A_{ij} обозначим площадь общей грани между объёмами V_i и V_j , через \mathbf{n}_{ij} — внешнюю нормаль, направленную из V_i в V_j , через d_{ij} — расстояние между центрами ячеек i и j .

Интегральная форма уравнения энергии

Интегрируя (16) по контрольному объёму V_i , получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_i} \left[(1 - \phi) \rho_r c_r T + \phi \sum_{\alpha \in \{g, w, h\}} S_\alpha \rho_\alpha c_\alpha T \right] dV + \oint_{\partial V_i} \left(-\lambda_{\text{eff}} \nabla T + \sum_{\alpha \in \{g, w\}} \rho_\alpha h_\alpha \mathbf{u}_\alpha \right) \cdot \mathbf{n} dA = - \int_{V_i} L_h R_h dV \quad (24)$$

Введём обозначение для внутренней энергии в ячейке V_i :

$$E_i = (1 - \phi_i) \rho_{r,i} c_{r,i} T_i + \phi_i \sum_{\alpha \in \{g, w, h\}} S_{\alpha,i} \rho_{\alpha,i} c_{\alpha,i} T_i. \quad (25)$$

Тогда интегральное уравнение (24) в дискретной форме (для шага времени $\Delta t = t^{n+1} - t^n$) запишется как

$$\frac{|V_i|}{\Delta t} (E_i^{n+1} - E_i^n) + \sum_{j \in N(i)} \left(q_{ij}^{\text{cond}, n+1} + q_{ij}^{\text{conv}, n+1} \right) = -|V_i| L_h R_{h,i}^{n+1}. \quad (26)$$

Здесь:

- E_i^n, E_i^{n+1} — внутренняя энергия в ячейке V_i на шагах t^n и t^{n+1} , определяемая по (25);
- $q_{ij}^{\text{cond}, n+1}$ — теплопроводный поток через грань между ячейками i и j на шаге t^{n+1} ;
- $q_{ij}^{\text{conv}, n+1}$ — конвективный поток энтальпии через ту же грань;
- $R_{h,i}^{n+1}$ — скорость образования гидрата в объёме V_i на шаге t^{n+1} , определяемая по кинетике Ленгмюра (17);
- правая часть $-|V_i| L_h R_{h,i}^{n+1}$ описывает поглощение теплоты при фазовом переходе (образовании гидрата).

Дискретизация теплопроводного потока

Теплопроводный вклад в плотность теплового потока задаётся выражением

$$\mathbf{q}^{\text{cond}} = -\lambda_{\text{eff}} \nabla T.$$

Поток через грань между ячейками V_i и V_j дискретизируем по нормальному направлению:

$$q_{ij}^{\text{cond}, n+1} = -\lambda_{\text{eff}, ij}^{n+1} \left(\frac{T_j^{n+1} - T_i^{n+1}}{d_{ij}} \right) A_{ij}. \quad (27)$$

Здесь:

- $\lambda_{\text{eff}, ij}^{n+1}$ — эффективная теплопроводность на грани i – j (полученная, например, как гармоническое или арифметическое среднее значений в ячейках i и j);
- T_i^{n+1}, T_j^{n+1} — температуры в центрах ячеек на шаге t^{n+1} ;
- d_{ij} — расстояние между центрами ячеек;
- A_{ij} — площадь грани между ячейками.

Отрицательный знак в (27) отражает направление потока от более высокой температуры к более низкой.

Дискретизация конвективного переноса энтальпии

Конвективная часть потока тепла связана с переносом энтальпии движущимися фазами газа и воды:

$$\mathbf{q}^{\text{conv}} = \sum_{\alpha \in \{g, w\}} \rho_{\alpha} h_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}.$$

Поток через грань между ячейками V_i и V_j запишем в виде

$$q_{ij}^{\text{conv}, n+1} = \sum_{\alpha \in \{g, w\}} \rho_{\alpha, ij}^{n+1} h_{\alpha, ij}^{n+1} (\mathbf{u}_{\alpha, ij}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{ij}) A_{ij}. \quad (28)$$

Здесь:

- $\rho_{\alpha, ij}^{n+1}$ — интерполированная плотность фазы α на грани i - j (например, среднее между ячейками или апвинд-приближение);
- $h_{\alpha, ij}^{n+1}$ — удельная энтальпия фазы α на грани;
- $\mathbf{u}_{\alpha, ij}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{ij}$ — нормальная к грани составляющая фильтрационной скорости фазы α , взятая на шаге t^{n+1} ;
- знак потока (вход/выход из ячейки V_i) определяется направлением нормали \mathbf{n}_{ij} .

Таким образом, слагаемое

$$\nabla \cdot \left(\sum_{\alpha \in \{g, w\}} \rho_{\alpha} h_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \right)$$

в непрерывном уравнении (16) в дискретной форме заменяется суммой конвективных потоков $\sum_{j \in N(i)} q_{ij}^{\text{conv}, n+1}$.

Дискретное уравнение для ячейки контрольного объёма

Подставляя выражения (27), (28) в уравнение (26), получаем окончательную схему для контрольного объёма V_i :

$$\begin{aligned} \frac{|V_i|}{\Delta t} (E_i^{n+1} - E_i^n) + \sum_{j \in N(i)} \left[-\lambda_{\text{eff}, ij}^{n+1} \left(\frac{T_j^{n+1} - T_i^{n+1}}{d_{ij}} \right) A_{ij} + \sum_{\alpha \in \{g, w\}} \rho_{\alpha, ij}^{n+1} h_{\alpha, ij}^{n+1} (\mathbf{u}_{\alpha, ij}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{ij}) A_{ij} \right] \\ = -|V_i| L_h R_{h, i}^{n+1}. \end{aligned} \quad (29)$$

Уравнение (29):

- учитывает теплопроводный перенос тепла через грани (первое слагаемое в сумме по j);
- учитывает конвективный перенос энтальпии фазами газа и воды (второе слагаемое в сумме по j);
- учитывает тепловой эффект образования газового гидрата как сток энергии.

Численная схема для неразрывности

В этом разделе приводится дискретизация уравнений сохранения массы (5) методом контрольных объёмов и формирование общей нелинейной алгебраической системы.

Интегральная форма уравнения массы для контрольного объёма

Рассмотрим контрольный объём V_i с центром в точке \mathbf{x}_i . Интегрируя локальное уравнение баланса массы фазы $\alpha \in \{g, w, h\}$ по V_i , получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_i} \phi S_\alpha \rho_\alpha dV + \oint_{\partial V_i} \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{n} dA = \int_{V_i} \Gamma_\alpha dV, \quad (30)$$

где Γ_α — объёмная плотность источника/стока массы фазы за счёт фазового перехода.

Введём обозначение

$$M_{\alpha,i} = \phi_i S_{\alpha,i} \rho_{\alpha,i}, \quad (31)$$

как массу фазы α на единицу объёма пористой среды в ячейке V_i . Тогда при допущении кусочно-постоянных величин по V_i имеем

$$\int_{V_i} \phi S_\alpha \rho_\alpha dV \approx |V_i| M_{\alpha,i}, \quad \int_{V_i} \Gamma_\alpha dV \approx |V_i| \Gamma_{\alpha,i},$$

где $|V_i|$ — объём ячейки.

Дискретизация по времени (неявная схема)

Пусть шаг по времени равен $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. Используем неявный метод Эйлера (backward Euler) для производной по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_i} \phi S_\alpha \rho_\alpha dV \approx \frac{|V_i|}{\Delta t} (M_{\alpha,i}^{n+1} - M_{\alpha,i}^n),$$

где верхний индекс n относится к моменту времени t^n .

Поток через грань i – j обозначим как

$$F_{\alpha,ij} = \int_{A_{ij}} \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{n}_{ij} dA \approx \rho_{\alpha,ij} (\mathbf{u}_{\alpha,ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}) A_{ij},$$

где A_{ij} — площадь грани, \mathbf{n}_{ij} — единичная нормаль, направленная из ячейки i в ячейку j .

Тогда дискретное уравнение баланса массы в ячейке V_i имеет вид

$$\frac{|V_i|}{\Delta t} (M_{\alpha,i}^{n+1} - M_{\alpha,i}^n) + \sum_{j \in N(i)} F_{\alpha,ij}^{n+1} = |V_i| \Gamma_{\alpha,i}^{n+1}, \quad (32)$$

где $N(i)$ — множество соседних ячеек, имеющих общую грань с V_i .

Массовый поток и дискретный закон Дарси

Фильтрационная скорость фазы α задаётся законом Дарси в форме с эффективной фазовой проницаемостью:

$$\mathbf{u}_\alpha = -\frac{k_{\text{eff},\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}),$$

где $k_{\text{eff},\alpha} = k_{\text{eff},\alpha}(S_g, S_w, S_h, t)$ учитывает абсолютную проницаемость, относительную фазовую проницаемость и кольтматацию.

Дискретная нормальная компонента скорости на грани i – j :

$$\mathbf{u}_{\alpha,ij}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{ij} = -\frac{k_{\text{eff},\alpha,ij}^{n+1}}{\mu_{\alpha,ij}^{n+1}} \left(\frac{p_{\alpha,j}^{n+1} - p_{\alpha,i}^{n+1}}{d_{ij}} - (\rho_{\alpha,ij}^{n+1} \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n}_{ij} \right), \quad (33)$$

где d_{ij} — расстояние между центрами ячеек V_i и V_j , а индекс ij означает интерполяцию величин на грань.

Массовый поток через грань, используемый в (32):

$$F_{\alpha,ij}^{n+1} = \rho_{\alpha,ij}^{n+1} (\mathbf{u}_{\alpha,ij}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{ij}) A_{ij}. \quad (34)$$

Источник массы из-за фазового перехода

Как было введено ранее, скорость образования гидрата R_h определяется, например, по модели Ленгмюра:

$$R_h^{n+1} = \rho_h k_L (S_h^{\text{eq}}(p_g^{n+1}, T^{n+1}) - S_h^{n+1}). \quad (35)$$

Тогда объёмные источники масс для фаз:

$$\Gamma_g^{n+1} = -\nu_g R_h^{n+1}, \quad \Gamma_w^{n+1} = -\nu_w R_h^{n+1}, \quad \Gamma_h^{n+1} = +\nu_h R_h^{n+1}.$$

Дискретные уравнения баланса масс для газа, воды и гидрата

Используя (32) и (31), получаем для газовой фазы:

$$\frac{|V_i|}{\Delta t} (M_{g,i}^{n+1} - M_{g,i}^n) + \sum_{j \in N(i)} F_{g,ij}^{n+1} = -|V_i| \nu_g R_{h,i}^{n+1}, \quad (36)$$

для водной фазы:

$$\frac{|V_i|}{\Delta t} (M_{w,i}^{n+1} - M_{w,i}^n) + \sum_{j \in N(i)} F_{w,ij}^{n+1} = -|V_i| \nu_w R_{h,i}^{n+1}, \quad (37)$$

и для гидрата:

$$\frac{|V_i|}{\Delta t} (M_{h,i}^{n+1} - M_{h,i}^n) = +|V_i| \nu_h R_{h,i}^{n+1}. \quad (38)$$

Здесь

$$M_{\alpha,i}^n = \phi_i^n S_{\alpha,i}^n \rho_{\alpha,i}^n, \quad M_{\alpha,i}^{n+1} = \phi_i^{n+1} S_{\alpha,i}^{n+1} \rho_{\alpha,i}^{n+1},$$

с учётом зависимости ϕ и ρ_α от давления, температуры и насыщений.

Матричная форма полной нелинейной системы

Сгруппируем неизвестные для каждой ячейки V_i :

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \begin{bmatrix} p_{g,i}^{n+1} \\ S_{g,i}^{n+1} \\ S_{w,i}^{n+1} \\ S_{h,i}^{n+1} \\ T_i^{n+1} \end{bmatrix},$$

причём $S_{h,i}^{n+1} = 1 - S_{g,i}^{n+1} - S_{w,i}^{n+1}$.

Объединяя все ячейки:

$$\mathbf{X}^{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{n+1} \\ \mathbf{x}_2^{n+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Дискретные уравнения баланса масс (36)–(38) и дискретное уравнение энергии в форме (29) можно записать в виде общей нелинейной системы:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}^{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (39)$$

где вектор невязки \mathbf{F} включает для каждой ячейки V_i уравнения баланса массы для газа, воды, гидрата и баланс энергии.

Решение системы (39) можно получать, например, итерационным методом Ньютона:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}^{n+1,k}) \Delta \mathbf{X}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{X}^{n+1,k}),$$

где \mathbf{J} — якобиан системы по \mathbf{X} , k — номер итерации Ньютона, $\Delta \mathbf{X}^k$ — поправка. После нахождения $\Delta \mathbf{X}^k$ задаётся новое приближение $\mathbf{X}^{n+1,k+1} = \mathbf{X}^{n+1,k} + \Delta \mathbf{X}^k$ до достижения заданного критерия сходимости.

Возможности предлагаемой физико-математической модели

Таким образом, предлагаемая модель включает в себя:

- массовые балансы фаз (5);
- закон Дарси в виде (9) с эффективной фазовой проницаемостью (21);
- уравнения для связи пористости с насыщением гидратом (2), что позволяет динамически вычислять изменение проницаемости коллектора;
- зависимость абсолютной проницаемости от пористости и насыщения газовым гидратом (4);
- кинетику образования гидрата по Ленгмюру (17), эволюцию S_h (19);
- баланс энергии (16) с источником-стоком скрытой теплоты фазового перехода $-L_h R_h$;
- дополнительную динамику кольматации по Леонтьеву через F_{colm} (22), (23).

Данная модель позволяет:

- учитывать зависимость абсолютной проницаемости k_{abs} от насыщения порового пространства газовым гидратом;
- учитывать изменение относительной фазовой проницаемости $k_{r\alpha}$;
- на основе k_{abs} , F_{colm} , $k_{r\alpha}$ описывать динамику работы скважины в условиях аномально низких пластовых давлений и температур, прогнозировать вынужденные остановки для геолого-технических мероприятий, подбирать оптимальные режимы работы для противодействия образованию газовых гидратов в призабойной зоне.