

# Физико-математическая модель фильтрации с учетом образования газовых гидратов

## Насыщения и пористость

$$S_g + S_w + S_h = 1, \quad 0 \leq S_\alpha \leq 1, \quad (1)$$

где  $S_g, S_w, S_h$  — насыщения газа, воды и гидрата соответственно.

Пористость  $\phi$  считаем зависящей от образования гидрата:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x}) (1 - \beta_h S_h(t, \mathbf{x})), \quad (2)$$

где  $\phi_0(\mathbf{x})$  — начальная пористость коллекторной породы,  $\beta_h \in [0, 1]$  — коэффициент, характеризующий, какую долю порового объёма блокирует единица насыщения гидратом.

## Абсолютная проницаемость как функция пористости

Абсолютная проницаемость коллектора, связанная с геометрией пор, описывается как функция пористости. Для простоты используем степенную аппроксимацию типа Козени–Кармена:

$$k_{\text{abs}}(\phi) = k_0 \left( \frac{\phi}{\phi_0} \right)^m, \quad (3)$$

где  $k_0$  — начальная абсолютная проницаемость при  $\phi = \phi_0$ ,  $m \geq 1$  — эмпирический показатель.

Подставляя (2) в (3), получаем явную зависимость абсолютной проницаемости от насыщения гидратом:

$$k_{\text{abs}}(S_h) = k_0 (1 - \beta_h S_h)^m. \quad (4)$$

Здесь  $k_{\text{abs}}$  описывает только изменение проводимости скелета пористой среды из-за уменьшения эффективного порового объёма при образовании твёрдого гидрата.

## Закон сохранения массы (неразрывность)

Запишем уравнение неразрывности для каждой моделируемой фазы (газ, вода, газовый гидрат). При этом учтём, что в рамках рассматриваемой задачи обратный переход не рассматривается (моделирование до остановки). Тогда получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S_g \rho_g) + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{u}_g) = -\nu_g R_h, \quad (5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S_w \rho_w) + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{u}_w) = -\nu_w R_h, \quad (5b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S_h \rho_h) = +\nu_h R_h. \quad (5c)$$

Здесь  $\rho_\alpha = \rho_\alpha(p_\alpha, T)$  — плотности фаз,  $\mathbf{u}_\alpha$  — фильтрационные скорости,  $R_h$  — скорость образования гидрата (масса на единицу объёма и времени),  $\nu_g, \nu_w, \nu_h$  — стехиометрические коэффициенты переноса массы.

## Закон Дарси

### 1. Закон Дарси для однофазной фильтрации

Для *одной* подвижной фазы классический закон Дарси имеет вид:

$$\mathbf{u}_\alpha = -\frac{k_{\text{abs}}(\phi)}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha), \quad (6)$$

где

- $k_{\text{abs}}(\phi)$  — абсолютная проницаемость, описывающая только свойства скелета порового пространства, зависит от свободной пористости;
- $\mu_\alpha$  — динамическая вязкость фазы  $\alpha$ ;
- $p_\alpha$  — давление фазы  $\alpha$ ;
- $\mathbf{g}$  — вектор ускорения силы тяжести.

Чтобы учитывать образование гидрата, представим  $k_{\text{abs}}(\phi)$  как функцию от насыщения  $k_{\text{abs}}(S_h)$  из (4), таким образом учитывая, что поровое пространство становится менее проводящим по мере роста  $S_h$ .

### 2. Закон Дарси для многофазной фильтрации

Для фильтрации в многофазном случае (газ + вода) необходимо учитывать *относительные* фазовые проницаемости  $k_{r\alpha}$ , которые описывают дополнительное гидродинамическое сопротивление фаз за счёт конкуренции за один и тот же поровый объём, в котором происходит движение флюида.

Определим *эффективную фазовую проницаемость* для фазы  $\alpha$ :

$$k_{\text{eff},\alpha}(S_g, S_w, S_h) := k_{\text{abs}}(S_h) k_{r\alpha}(S_g, S_w, S_h), \quad (7)$$

и по определению относительную проницаемость как

$$k_{r\alpha}(S_g, S_w, S_h) = \frac{k_{\text{eff},\alpha}}{k_{\text{abs}}(S_h)}. \quad (8)$$

То есть:

- $k_{\text{abs}}(S_h)$  — абсолютная фазовая проницаемость, определённая как (4);
- $k_{r\alpha}$  — относительная фазовая проницаемость;
- $k_{\text{eff},\alpha}$  — эффективная фазовая проницаемость фазы  $\alpha$  в законе Дарси.

В (7) произведение  $k_{\text{abs}} \cdot k_{r\alpha}$  есть эффективная фазовая проницаемость. Тогда закон Дарси для каждой подвижной фазы  $\alpha \in \{g, w\}$  *только* через эффективную фазовую проницаемость с учетом образования гидрата запишется как:

$$\mathbf{u}_\alpha = -\frac{k_{\text{eff},\alpha}(S_g, S_w, S_h)}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha), \quad \alpha \in \{g, w\}. \quad (9)$$

Связь с абсолютной проницаемостью и насыщеними задаётся через (4) и (7):

$$k_{\text{eff},\alpha}(S_g, S_w, S_h) = k_0 (1 - \beta_h S_h)^m k_{r\alpha}(S_g, S_w, S_h).$$

# Фазовый переход газа и воды в газовый гидрат

В этом разделе будет показано, как фазовый переход учитывается в законах сохранения массы и энергии.

## Локальное уравнение баланса массы для фазы

Рассмотрим произвольную фазу  $\alpha \in \{g, w, h\}$  (газ, вода, гидрат). Запишем локальное уравнение баланса массы для этой фазы в пористой среде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_\alpha \rho_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = \Gamma_\alpha, \quad (10)$$

где

- $\phi$  — пористость;
- $S_\alpha$  — насыщение фазы  $\alpha$  (доля порового объёма);
- $\rho_\alpha$  — плотность фазы  $\alpha$ ;
- $\mathbf{u}_\alpha$  — фильтрационная скорость фазы  $\alpha$  (скорость Дарси);
- $\Gamma_\alpha$  — источник ( $\text{если } > 0$ ) или сток ( $\text{если } < 0$ ) массы фазы за счёт фазового перехода.

## Определение скорости фазового перехода $R_h$

Введём скалярную величину  $R_h(t, \mathbf{x})$ :

- $R_h$  — скорость образования гидрата *в пересчёте на массу гидрата* на единицу порового объема и времени.

Тогда:

$$\Gamma_h = \nu_h R_h, \quad (11)$$

то есть правая часть уравнения для гидратной фазы может быть записана как

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_h \rho_h) = \Gamma_h = \nu_h R_h. \quad (12)$$

Для газа и воды  $R_h$  даёт *отрицательные* источники (стоки):

$$\Gamma_g = -\nu_g R_h, \quad \Gamma_w = -\nu_w R_h, \quad (13)$$

то есть

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_g \rho_g) + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{u}_g) = -\nu_g R_h, \quad (14a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi S_w \rho_w) + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{u}_w) = -\nu_w R_h. \quad (14b)$$

Коэффициенты  $\nu_g$ ,  $\nu_w$ ,  $\nu_h$  здесь:

- могут быть выражены через стехиометрию реакции и молярные массы,
- можно представить как эмпирические *эффективные коэффициенты*, которые учитывают, сколько массы газа и воды уходит на единицу массы образующегося гидрата.

За счёт (12) и (14) фазовый переход можно *явно* учесть в уравнениях неразрывности: масса газа и воды убывает, масса гидрата возрастает.

## Связь скорости фазового перехода $R_h$ с насыщением гидратом $S_h$

Если предположить, что плотность гидрата  $\rho_h$  и пористость  $\phi$  меняются медленно (или считать их константами на первом приближении), из (12) получаем:

$$\rho_h \phi \frac{\partial S_h}{\partial t} = \nu_h R_h \implies \frac{\partial S_h}{\partial t} = \frac{\nu_h}{\rho_h \phi} R_h. \quad (15)$$

Таким образом, используя функцию скорости образования гидрата  $R_h$  (кинетику образования гидрата), можно определять насыщение порового пространства газовым гидратом  $S_h(t, \mathbf{x})$ .

## Закон сохранения энергии

Учитывая, что рассматриваемый процесс образования гидратов в аномальных пластах зависит не только от давления, но и от температуры, необходимо также учитывать закон сохранения энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ (1 - \phi) \rho_r c_r T + \phi \sum_{\alpha \in \{g, w, h\}} S_\alpha \rho_\alpha c_\alpha T \right] + \nabla \cdot \left( -\lambda_{\text{eff}} \nabla T + \sum_{\alpha \in \{g, w\}} \rho_\alpha h_\alpha \mathbf{u}_\alpha \right) = -L_h R_h. \quad (16)$$

Здесь  $\rho_r, c_r$  — плотность и теплоёмкость матрицы,  $c_\alpha$  — теплоёмкости фаз,  $\lambda_{\text{eff}}$  — эффективная теплопроводность пористой среды,  $h_\alpha$  — удельные энталпии фаз,  $L_h$  — удельная скрытая теплота образования гидрата.

Величина

$$\phi \sum_{\alpha \in \{g, w, h\}} S_\alpha \rho_\alpha c_\alpha T$$

описывает внутреннюю энергию фаз в порах. В каждой фазе присутствует теплоёмкость  $c_\alpha$ , плотность  $\rho_\alpha$  и температура  $T$ .

Член

$$\nabla \cdot \left( \sum_{\alpha \in \{g, w\}} \rho_\alpha h_\alpha \mathbf{u}_\alpha \right)$$

описывает конвективный перенос тепла движущимися фазами, где

- $\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha$  — массовый поток фазы,
- $h_\alpha$  — удельная энталпия фазы.

## Кинетика образования гидрата

В соответствии с моделью Ленгмюра, образование газового гидрата ограничено предельной равновесной концентрацией, определяемой как функция от давления и температуры:

$$S_h^{\text{eq}}(p_g, T) = S_{h,\text{max}} \frac{p_g}{p_g + P_L(T)}, \quad (17a)$$

$$R_h = \rho_h k_L \left( S_h^{\text{eq}}(p_g, T) - S_h \right), \quad (17b)$$

где  $S_{h,\text{max}}$  — максимальное гидратное насыщение,  $P_L(T)$  — параметр Ленгмюра (характерное давление насыщения),  $k_L$  — кинетический коэффициент.

Из баланса массы гидрата (5с) при медленном изменении  $\rho_h$  получаем:

$$\rho_h \phi \frac{\partial S_h}{\partial t} = \nu_h R_h \implies \frac{\partial S_h}{\partial t} = \frac{\nu_h}{\rho_h \phi} R_h. \quad (18)$$

Подставляя (17b), имеем:

$$\frac{\partial S_h}{\partial t} = \frac{\nu_h k_L}{\phi} \left( S_h^{\text{eq}}(p_g, T) - S_h \right). \quad (19)$$

Решив уравнение (19) относительно насыщения гидратом и подставив его в (2) и (3), можно написать:

$$k_{\text{abs}}(S_h) = k_0 (1 - \beta_h S_h)^m. \quad (20)$$

Таким образом получаем квазистационарное уравнение, учитывающее влияние роста гидратного насыщения на абсолютную проницаемость.

## Динамика кольматации порового пространства

Чтобы учесть перенос и накопление частиц гидрата (суффозия, кольматация) на проницаемость призабойной зоны скважины, введём безразмерный множитель кольматации  $F_{\text{colm}}(t, \mathbf{x})$  и определим эффективную фазовую проницаемость как

$$k_{\text{eff},\alpha}(S_g, S_w, S_h, t) = k_{\text{abs}}(S_h) F_{\text{colm}}(t, \mathbf{x}) k_{r\alpha}(S_g, S_w, S_h). \quad (21)$$

Для  $F_{\text{colm}}$  запишем уравнение Леонтьева:

$$\frac{\partial F_{\text{colm}}}{\partial t} = -\alpha |\mathbf{u}_f| S_h F_{\text{colm}}, \quad (22a)$$

$$\mathbf{u}_f = \omega_g \mathbf{u}_g + \omega_w \mathbf{u}_w, \quad (22b)$$

где  $\alpha$  — коэффициент кольматации,  $\mathbf{u}_f$  — характерная скорость фильтрации смеси,  $\omega_g, \omega_w$  — весовые коэффициенты (вклад газа и воды).

Решение (22a) при известном  $S_h$  и  $\mathbf{u}_f$ :

$$F_{\text{colm}}(t, \mathbf{x}) = \exp \left( -\alpha \int_0^t |\mathbf{u}_f(\tau, \mathbf{x})| S_h(\tau, \mathbf{x}) d\tau \right), \quad (23)$$

если  $F_{\text{colm}}(0, \mathbf{x}) = 1$ .

Тогда  $k_{\text{eff},\alpha}$  из (21) учитывает три эффекта:

- изменение свободной пористости из-за гидрата ( $k_{\text{abs}}(S_h)$ );
- многофазность ( $k_{r\alpha}$ );
- динамическую кольматацию  $F_{\text{colm}}$  каналов.

## Численная схема для закона сохранения энергии

Для численного решения уравнения сохранения энергии (16) используем метод контрольных объёмов (finite volume method, FVM). Пространственная область разбивается на непересекающееся семейство контрольных объёмов

$$\{V_i\}_{i=1}^N,$$

каждый из которых имеет объём  $|V_i|$  и набор соседей  $N(i)$ . Через  $A_{ij}$  обозначим площадь общей грани между объёмами  $V_i$  и  $V_j$ , через  $\mathbf{n}_{ij}$  — внешнюю нормаль, направленную из  $V_i$  в  $V_j$ , через  $d_{ij}$  — расстояние между центрами ячеек  $i$  и  $j$ .

## Интегральная форма уравнения энергии

Интегрируя (16) по контрольному объёму  $V_i$ , получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_i} \left[ (1 - \phi) \rho_r c_r T + \phi \sum_{\alpha \in \{g, w, h\}} S_\alpha \rho_\alpha c_\alpha T \right] dV + \oint_{\partial V_i} \left( -\lambda_{\text{eff}} \nabla T + \sum_{\alpha \in \{g, w\}} \rho_\alpha h_\alpha \mathbf{u}_\alpha \right) \cdot \mathbf{n} dA = - \int_{V_i} L_h R_h dV \quad (24)$$

Введём обозначение для внутренней энергии в ячейке  $V_i$ :

$$E_i = (1 - \phi_i) \rho_{r,i} c_{r,i} T_i + \phi_i \sum_{\alpha \in \{g, w, h\}} S_{\alpha,i} \rho_{\alpha,i} c_{\alpha,i} T_i. \quad (25)$$

Тогда интегральное уравнение (24) в дискретной форме (для шага времени  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ ) запишется как

$$\frac{|V_i|}{\Delta t} (E_i^{n+1} - E_i^n) + \sum_{j \in N(i)} \left( q_{ij}^{\text{cond}, n+1} + q_{ij}^{\text{conv}, n+1} \right) = -|V_i| L_h R_{h,i}^{n+1}. \quad (26)$$

Здесь:

- $E_i^n, E_i^{n+1}$  — внутренняя энергия в ячейке  $V_i$  на шагах  $t^n$  и  $t^{n+1}$ , определяемая по (25);
- $q_{ij}^{\text{cond}, n+1}$  — теплопроводный поток через грань между ячейками  $i$  и  $j$  на шаге  $t^{n+1}$ ;
- $q_{ij}^{\text{conv}, n+1}$  — конвективный поток энталпии через ту же грань;
- $R_{h,i}^{n+1}$  — скорость образования гидрата в объёме  $V_i$  на шаге  $t^{n+1}$ , определяемая по кинетике Ленгмюра (17);
- правая часть  $-|V_i| L_h R_{h,i}^{n+1}$  описывает поглощение теплоты при фазовом переходе (образовании гидрата).

## Дискретизация теплопроводного потока

Теплопроводный вклад в плотность теплового потока задаётся выражением

$$\mathbf{q}^{\text{cond}} = -\lambda_{\text{eff}} \nabla T.$$

Поток через грань между ячейками  $V_i$  и  $V_j$  дискретизуем по нормальному направлению:

$$q_{ij}^{\text{cond}, n+1} = -\lambda_{\text{eff}, ij}^{n+1} \left( \frac{T_j^{n+1} - T_i^{n+1}}{d_{ij}} \right) A_{ij}. \quad (27)$$

Здесь:

- $\lambda_{\text{eff}, ij}^{n+1}$  — эффективная теплопроводность на грани  $i-j$  (полученная, например, как гармоническое или арифметическое среднее значений в ячейках  $i$  и  $j$ );
- $T_i^{n+1}, T_j^{n+1}$  — температуры в центрах ячеек на шаге  $t^{n+1}$ ;
- $d_{ij}$  — расстояние между центрами ячеек;
- $A_{ij}$  — площадь грани между ячейками.

Отрицательный знак в (27) отражает направление потока от более высокой температуры к более низкой.

## Дискретизация конвективного переноса энталпии

Конвективная часть потока тепла связана с переносом энталпии движущимися фазами газа и воды:

$$\mathbf{q}^{\text{conv}} = \sum_{\alpha \in \{g,w\}} \rho_\alpha h_\alpha \mathbf{u}_\alpha.$$

Поток через грань между ячейками  $V_i$  и  $V_j$  запишем в виде

$$q_{ij}^{\text{conv}, n+1} = \sum_{\alpha \in \{g,w\}} \rho_{\alpha,ij}^{n+1} h_{\alpha,ij}^{n+1} (\mathbf{u}_{\alpha,ij}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{ij}) A_{ij}. \quad (28)$$

Здесь:

- $\rho_{\alpha,ij}^{n+1}$  — интерполированная плотность фазы  $\alpha$  на грани  $i-j$  (например, среднее между ячейками или апвинд-приближение);
- $h_{\alpha,ij}^{n+1}$  — удельная энталпия фазы  $\alpha$  на грани;
- $\mathbf{u}_{\alpha,ij}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{ij}$  — нормальная к грани составляющая фильтрационной скорости фазы  $\alpha$ , взятая на шаге  $t^{n+1}$ ;
- знак потока (вход/выход из ячейки  $V_i$ ) определяется направлением нормали  $\mathbf{n}_{ij}$ .

Таким образом, слагаемое

$$\nabla \cdot \left( \sum_{\alpha \in \{g,w\}} \rho_\alpha h_\alpha \mathbf{u}_\alpha \right)$$

в непрерывном уравнении (16) в дискретной форме заменяется суммой конвективных потоков  $\sum_{j \in N(i)} q_{ij}^{\text{conv}, n+1}$ .

## Дискретное уравнение для ячейки контрольного объёма

Подставляя выражения (27), (28) в уравнение (26), получаем окончательную схему для контрольного объёма  $V_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{|V_i|}{\Delta t} (E_i^{n+1} - E_i^n) + \sum_{j \in N(i)} \left[ -\lambda_{\text{eff},ij}^{n+1} \left( \frac{T_j^{n+1} - T_i^{n+1}}{d_{ij}} \right) A_{ij} + \sum_{\alpha \in \{g,w\}} \rho_{\alpha,ij}^{n+1} h_{\alpha,ij}^{n+1} (\mathbf{u}_{\alpha,ij}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{ij}) A_{ij} \right] \\ = -|V_i| L_h R_{h,i}^{n+1}. \end{aligned} \quad (29)$$

Уравнение (29):

- учитывает теплопроводный перенос тепла через грани (первое слагаемое в сумме по  $j$ );
- учитывает конвективный перенос энталпии фазами газа и воды (второе слагаемое в сумме по  $j$ );
- учитывает тепловой эффект образования газового гидрата как сток энергии.

## Численная схема для неразрывности

В этом разделе приводится дискретизация уравнений сохранения массы (5) методом контрольных объёмов и формирование общей нелинейной алгебраической системы.

## Интегральная форма уравнения массы для контрольного объёма

Рассмотрим контрольный объём  $V_i$  с центром в точке  $\mathbf{x}_i$ . Интегрируя локальное уравнение баланса массы фазы  $\alpha \in \{g, w, h\}$  по  $V_i$ , получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_i} \phi S_\alpha \rho_\alpha dV + \oint_{\partial V_i} \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{n} dA = \int_{V_i} \Gamma_\alpha dV, \quad (30)$$

где  $\Gamma_\alpha$  — объёмная плотность источника/стока массы фазы за счёт фазового перехода.

Введём обозначение

$$M_{\alpha,i} = \phi_i S_{\alpha,i} \rho_{\alpha,i}, \quad (31)$$

как массу фазы  $\alpha$  на единицу объёма пористой среды в ячейке  $V_i$ . Тогда при допущении кусочно-постоянных величин по  $V_i$  имеем

$$\int_{V_i} \phi S_\alpha \rho_\alpha dV \approx |V_i| M_{\alpha,i}, \quad \int_{V_i} \Gamma_\alpha dV \approx |V_i| \Gamma_{\alpha,i},$$

где  $|V_i|$  — объём ячейки.

## Дискретизация по времени (неявная схема)

Пусть шаг по времени равен  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ . Используем неявный метод Эйлера (backward Euler) для производной по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_i} \phi S_\alpha \rho_\alpha dV \approx \frac{|V_i|}{\Delta t} (M_{\alpha,i}^{n+1} - M_{\alpha,i}^n),$$

где верхний индекс  $n$  относится к моменту времени  $t^n$ .

Поток через грань  $i-j$  обозначим как

$$F_{\alpha,ij} = \int_{A_{ij}} \rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{n}_{ij} dA \approx \rho_{\alpha,ij} (\mathbf{u}_{\alpha,ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}) A_{ij},$$

где  $A_{ij}$  — площадь грани,  $\mathbf{n}_{ij}$  — единичная нормаль, направленная из ячейки  $i$  в ячейку  $j$ .

Тогда дискретное уравнение баланса массы в ячейке  $V_i$  имеет вид

$$\frac{|V_i|}{\Delta t} (M_{\alpha,i}^{n+1} - M_{\alpha,i}^n) + \sum_{j \in N(i)} F_{\alpha,ij}^{n+1} = |V_i| \Gamma_{\alpha,i}^{n+1}, \quad (32)$$

где  $N(i)$  — множество соседних ячеек, имеющих общую грань с  $V_i$ .

## Массовый поток и дискретный закон Дарси

Фильтрационная скорость фазы  $\alpha$  задаётся законом Дарси в форме с эффективной фазовой проницаемостью:

$$\mathbf{u}_\alpha = -\frac{k_{\text{eff},\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}),$$

где  $k_{\text{eff},\alpha} = k_{\text{eff},\alpha}(S_g, S_w, S_h, t)$  учитывает абсолютную проницаемость, относительную фазовую проницаемость и кольматацию.

Дискретная нормальная компонента скорости на грани  $i-j$ :

$$\mathbf{u}_{\alpha,ij}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{ij} = -\frac{k_{\text{eff},\alpha,ij}^{n+1}}{\mu_{\alpha,ij}^{n+1}} \left( \frac{p_{\alpha,j}^{n+1} - p_{\alpha,i}^{n+1}}{d_{ij}} - (\rho_{\alpha,ij}^{n+1} \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n}_{ij} \right), \quad (33)$$

где  $d_{ij}$  — расстояние между центрами ячеек  $V_i$  и  $V_j$ , а индекс  $ij$  означает интерполяцию величин на грань.

Массовый поток через грань, используемый в (32):

$$F_{\alpha,ij}^{n+1} = \rho_{\alpha,ij}^{n+1} (\mathbf{u}_{\alpha,ij}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{ij}) A_{ij}. \quad (34)$$

## Источник массы из-за фазового перехода

Как было введено ранее, скорость образования гидрата  $R_h$  определяется, например, по модели Ленгмюра:

$$R_h^{n+1} = \rho_h k_L (S_h^{\text{eq}}(p_g^{n+1}, T^{n+1}) - S_h^{n+1}). \quad (35)$$

Тогда объёмные источники масс для фаз:

$$\Gamma_g^{n+1} = -\nu_g R_h^{n+1}, \quad \Gamma_w^{n+1} = -\nu_w R_h^{n+1}, \quad \Gamma_h^{n+1} = +\nu_h R_h^{n+1}.$$

## Дискретные уравнения баланса масс для газа, воды и гидрата

Используя (32) и (31), получаем для газовой фазы:

$$\frac{|V_i|}{\Delta t} (M_{g,i}^{n+1} - M_{g,i}^n) + \sum_{j \in N(i)} F_{g,ij}^{n+1} = -|V_i| \nu_g R_{h,i}^{n+1}, \quad (36)$$

для водной фазы:

$$\frac{|V_i|}{\Delta t} (M_{w,i}^{n+1} - M_{w,i}^n) + \sum_{j \in N(i)} F_{w,ij}^{n+1} = -|V_i| \nu_w R_{h,i}^{n+1}, \quad (37)$$

и для гидрата:

$$\frac{|V_i|}{\Delta t} (M_{h,i}^{n+1} - M_{h,i}^n) = +|V_i| \nu_h R_{h,i}^{n+1}. \quad (38)$$

Здесь

$$M_{\alpha,i}^n = \phi_i^n S_{\alpha,i}^n \rho_{\alpha,i}^n, \quad M_{\alpha,i}^{n+1} = \phi_i^{n+1} S_{\alpha,i}^{n+1} \rho_{\alpha,i}^{n+1},$$

с учётом зависимости  $\phi$  и  $\rho_\alpha$  от давления, температуры и насыщений.

## Матричная форма полной нелинейной системы

Сгруппируем неизвестные для каждой ячейки  $V_i$ :

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \begin{bmatrix} p_{g,i}^{n+1} \\ S_{g,i}^{n+1} \\ S_{w,i}^{n+1} \\ S_{h,i}^{n+1} \\ T_i^{n+1} \end{bmatrix},$$

причём  $S_{h,i}^{n+1} = 1 - S_{g,i}^{n+1} - S_{w,i}^{n+1}$ .

Объединяя все ячейки:

$$\mathbf{X}^{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{n+1} \\ \mathbf{x}_2^{n+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Дискретные уравнения баланса масс (36)–(38) и дискретное уравнение энергии в форме (29) можно записать в виде общей нелинейной системы:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}^{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (39)$$

где вектор невязки  $\mathbf{F}$  включает для каждой ячейки  $V_i$  уравнения баланса массы для газа, воды, гидрата и баланс энергии.

Решение системы (39) можно получать, например, итерационным методом Ньютона:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}^{n+1,k}) \Delta \mathbf{X}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{X}^{n+1,k}),$$

где  $\mathbf{J}$  — якобиан системы по  $\mathbf{X}$ ,  $k$  — номер итерации Ньютона,  $\Delta \mathbf{X}^k$  — поправка. После нахождения  $\Delta \mathbf{X}^k$  задаётся новое приближение  $\mathbf{X}^{n+1,k+1} = \mathbf{X}^{n+1,k} + \Delta \mathbf{X}^k$  до достижения заданного критерия сходимости.

## Возможности предлагаемой физико-математической модели

Таким образом, предлагаемая модель включает в себя:

- массовые балансы фаз (5);
- закон Дарси в виде (9) с эффективной фазовой проницаемостью (21);
- уравнения для связи пористости с насыщением гидратом (2), что позволяет динамически вычислять изменение проницаемости коллектора;
- зависимость абсолютной проницаемости от пористости и насыщения газовым гидратом (4);
- кинетику образования гидрата по Ленгмюру (17), эволюцию  $S_h$  (19);
- баланс энергии (16) с источником-стоком скрытой теплоты фазового перехода  $-L_h R_h$ ;
- дополнительную динамику кольматации по Леонтьеву через  $F_{\text{colm}}$  (22), (23).

Данная модель позволяет:

- учитывать зависимость абсолютной проницаемости  $k_{\text{abs}}$  от насыщения порового пространства газовым гидратом;
- учитывать изменение относительной фазовой проницаемости  $k_{r\alpha}$ ;
- на основе  $k_{\text{abs}}$ ,  $F_{\text{colm}}$ ,  $k_{r\alpha}$  описывать динамику работы скважины в условиях аномально низких пластовых давлений и температур, прогнозировать вынужденные остановки для геолого-технических мероприятий, подбирать оптимальные режимы работы для противодействия образованию газовых гидратов в призабойной зоне.