

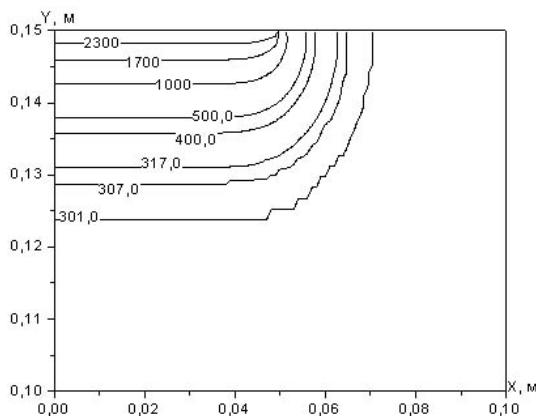
Федеральное агентство по образованию

Томский государственный  
архитектурно-строительный университет

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Методические указания к лабораторным работам  
по математическому моделированию

Составитель Е.А. Маслов



Томск – 2008

Численное решение двумерных нестационарных уравнений теплопроводности: методические указания к лабораторным работам по математическому моделированию / Сост. Е.А. Маслов, Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2007. – 29 с.

Рецензент доцент Томского государственного университета, к.ф.-м.н. И.К. Жарова

Редактор Е.Ю. Глотова

Методические указания для выполнения лабораторных работ по курсу “Математическое моделирование плазмохимических процессов” предназначены студентам специальности 270113 – “Механизация и автоматизация строительства”, обучающимся по специализации “Плазменные технологии в строительной индустрии“.

Печатаются по решению методического семинара кафедры прикладной механики и материаловедения, протокол № 82 от 04. 12. 2007г.

Утверждены и введены в действие проректором по учебной работе В.В. Дзюбо

с 01.01.2008  
до 01.10.2013

Подписано в печать Формат 60x90/16.  
Бумага офсет. Гарнитура Таймс, печать офсет.  
Уч.-изд.л. 1,5. Тираж 100 экз. Заказ №

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.  
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.  
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

## **Оглавление**

<b>1. Общие сведения.....</b>	<b>4</b>
<b>2. Метод конечных разностей (МКР) .....</b>	<b>8</b>
<b>3. Линейные задачи теплопроводности .....</b>	<b>9</b>
3.1. Двумерное уравнение теплопроводности .....	9
3.2. Алгоритм численного решения (метод "расщепления по пространственным координатам") .....	11
3.3. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом прогонки.....	13
3.4. Листинг программы решения рассматриваемой задачи (язык программирования Fortran Powerstation)....	17
3.5. Список основных идентификаторов .....	22
3.6. Тестовая задача .....	23
<b>4. Варианты заданий.....</b>	<b>24</b>
<b>Список рекомендуемой литературы .....</b>	<b>28</b>
<b>Приложение .....</b>	<b>29</b>

## **1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ**

Теплопередача, или теплообмен – это учение о самоиз произвольных необратимых процессах распределения (переноса) теплоты в пространстве с неоднородным полем температуры [1].

При проектировании различных теплосиловых установок: тепловых двигателей, компрессоров, холодильных машин, летательных аппаратов, технологического оборудования, особенно химической и пищевой промышленности, и ряда других устройств – следует учитывать процессы переноса теплоты; часто эти процессы становятся определяющими при выборе конструкций, в которых осуществляется оптимальный тепловой режим [1].

Для того, чтобы конструкция работала надежно, необходимо предусмотреть меры, которые установили бы предел росту температуры. В противном случае нормальная работа таких установок может прекратиться, так как конструкционные материалы при нагревании теряют прочность и при определенной температуре разрушаются. Например, если не предусмотреть специальных мер для защиты камеры сгорания и сопла, то ракетный двигатель разрушится в течение долей секунды. Баллистическая ракета, входящая в плотные слои атмосферы, без тепловой защиты ее головной части и стенок корпуса разрушится в течение нескольких секунд, так как температура ее головной части при этом достигает нескольких тысяч градусов [1].

При работе компактных электронных устройств генерируется теплота, которая может повысить температуру отдельных элементов до уровня, при котором устройство не будет выполнять своих функций [1].

Сложный процесс переноса теплоты разбивают на ряд более простых: теплопроводность, конвекция и теплообмен излучением. Различают молекулярный и конвективный механизмы переноса теплоты.

Молекулярный перенос теплоты осуществляется посредством теплового движения микрочастиц в среде с неоднородным распределением температуры [1].

Конвективный перенос теплоты осуществляется в среде с неоднородным распределением скорости и температуры макроскопическими элементами среды при их перемещении.

Теплопроводностью называют молекулярный перенос теплоты в сплошной среде, обусловленный наличием градиента температуры (закон Фурье) [1].

Конвективным теплообменом называют процесс, обусловленный совместным действием конвективного и молекулярного переноса теплоты. В инженерной практике большое значение имеет частный случай этого способа переноса теплоты, а именно: теплоотдача – конвективный теплообмен между движущейся средой и поверхностью ее раздела с другой средой: твердым телом, жидкостью или газом [1].

Теплообмен излучением – это процесс, который происходит следующим образом: внутренняя энергия вещества превращается в энергию излучения (энергия фотонов или электромагнитных волн, излучаемых телом или средой), далее происходит распространение излучения в пространстве (процесс переноса излучения), далее энергия излучения поглощается веществом, которое оказалось на пути фотонов или электромагнитных волн [1].

Нестационарный перенос тепла теплопроводностью описывается следующим уравнением, записанным в декартовой системе координат:

$$\rho c \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + Q_w(x, y, t, T). \quad (1)$$

Это уравнение устанавливает связь между времененным и пространственным изменением температуры в любой точке тела. Здесь  $\rho$  – плотность ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ),  $c$  – удельная теплоемкость ( $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{°C})$ ),  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности ( $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{°C})$ ),  $T$  – температура ( $\text{°C}$ ),  $x$ ,  $y$  – декартовы координаты ( $\text{м}$ ),  $t$  – время ( $\text{с}$ ),  $Q_w(x, y, t, T)$  – мощность внутренних источников тепловыделения ( $\text{Вт}/\text{м}^3$ ).

Уравнение (1) описывает множество вариантов развития процесса кондуктивного теплопереноса (теплопроводности). Чтобы из большого количества этих вариантов выбрать один и дать его полное математическое описание, к соотношению (1) необходимо добавить условия однозначности, которые содержат геометрические, физические, начальные и граничные условия.

Геометрические условия определяют форму и размеры тела, в котором протекает изучаемый процесс. Физические условия определяют теплофизические характеристики тела  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $c$ . Временные (начальные) условия содержат распределение температуры в теле в начальный момент времени:

$$t=0: T=f(x, y) \text{ – в общем виде.}$$

При равномерном распределении температуры в теле начальное условие упрощается:  $t=0: T=T_0=\text{const}$ . Граничные условия определяют особенности протекания процесса на поверхности тела и могут быть заданы несколькими способами.

1. Граничные условия первого рода – задается распределение температуры на поверхности (или границе) тела для каждого момента времени [1]:

$$T=T_W(x, y, t),$$

где  $T_W$  – температура на поверхности тела. Во многих практических значимых вариантах  $T_W = \text{const}$ .

2. Граничные условия второго рода – задается значение теплового потока для каждой точки поверхности (или границы) тела в любой момент времени (закон Фурье) [1]:

$$-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_W = q_w(x, y, t),$$

где  $n$  – нормаль к поверхности тела,  $q_w$  – тепловой поток ( $\text{Вт}/\text{м}^2$ ). Наиболее часто используется условие  $q_w = \text{const}$ .

3. Граничные условия третьего рода – задается взаимосвязь между потоком тепла за счет теплопроводности от твердой стенки и тепловым потоком из окружающей среды за счет температурного напора (закон Ньютона – Рихмана) [1]:

$$-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_W = \alpha(T_w - T_e),$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплообмена ( $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ ),  $T_e$  – температура окружающей среды вблизи поверхности тела.

4. Граничные условия четвертого рода – для определения теплового взаимодействия между элементами, имеющими различные теплофизические характеристики, задают условия равенства температур и тепловых потоков по обе стороны от границы раздела [1]:

$$\begin{cases} -\lambda_1 \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_{\Gamma-0} = -\lambda_2 \left( \frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_{\Gamma+0}; \\ T_1(x_{\Gamma-0}, y_{\Gamma-0}, t) = T_2(x_{\Gamma+0}, y_{\Gamma+0}, t). \end{cases}$$

где  $x_\Gamma, y_\Gamma$  – координаты границы раздела сред;  $T_1, T_2$  – температуры соприкасающихся сред. Это условие применяется, например, при решении задач теплопроводности для многослойных пластин.

Дифференциальное уравнение (1) вместе с условиями однозначности дает полную математическую формулировку краевой задачи теплопроводности.

## 2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ (МКР)

Сформулированное уравнение (1) с соответствующими краевыми условиями (начальными и граничными) будем решать численно, т.е. воспользуемся возможностями ЭВМ. Численным решением называется решение, полученное в виде таблицы чисел [2].

При решении дифференциального уравнения в частных производных наиболее часто используется метод конечных разностей (МКР). Идея МКР решения краевых задач весьма проста и видна уже из самого названия: вместо производных в дифференциальном уравнении используются их конечно-разностные аппроксимации. При построении дискретных аппроксимаций краевых дифференциальных задач нужно стремиться увязать две, возможно, противоречивые цели: хорошее качество аппроксимации и эффективное устойчивое решение получающихся при этом алгебраических систем [2].

При использовании МКР для задач теплопроводности твердое тело представляют в виде совокупности узлов. Аппроксимируя (заменяя) частные производные дифференциального уравнения (1) конечно-разностями, получают систему линейных алгебраических уравнений для определения температуры как локальной характеристики в каждом узле сетки. Полученная система является незамкнутой, для ее замыкания используют разностное представление граничных условий. В результате получают замкнутую систему линейных алгебраических уравнений, которую решают численными методами с помощью ЭВМ [2].

### 3. ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

#### 3.1. Двумерное уравнение теплопроводности

В качестве примера применения метода конечных разностей рассмотрим задачу на основе двумерного нестационарного уравнения теплопроводности. Анализируется задача теплообмена между высокотемпературной струей и пластиной из конструкционного материала (КМ), внешняя поверхность которого подвергается воздействию высокотемпературной высокоскоростной одно- или двухфазной струи с заданными параметрами.

Схема взаимодействия высокотемпературной струи с преградой представлена на рис. 1.

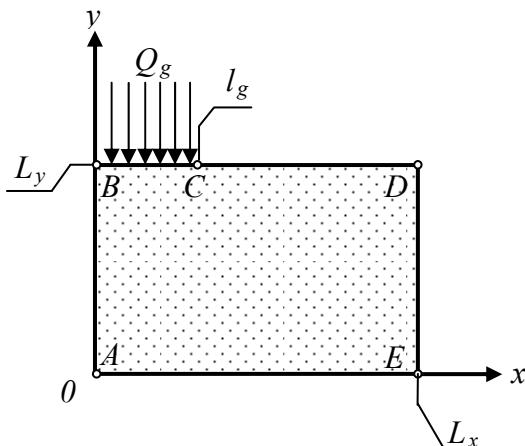


Рис. 1. Область решения задачи:  $x, y$  – декартовы координаты;  $L_x$  – ширина пластины;  $L_y$  – толщина пластины;  $l_g$  – протяженность области воздействия струи;  $Q_g$  – высокотемпературный поток;  $A, B, C, D, E$  – граничные точки

При постановке задачи были приняты следующие допущения:

1. Вклад радиационной составляющей в теплообмен на внешней поверхности не учитывается.
2. Возможные процессы плавления и окисления материала препятствия активными компонентами газового потока не рассматриваются.
3. Влияние конденсированной фазы в струе на теплообмен учитывается через коэффициент теплообмена  $\alpha_g$  на разрушающейся поверхности.
4. Теплофизические характеристики ( $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $c$ ) КМ постоянны.

Математическая модель, описывающая в рамках сформулированной задачи процесс прогрева КМ, включает нестационарное двумерное уравнение теплопроводности (2) с соответствующими начальными (3) и граничными условиями (4) – (8):

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s(x, y, t)}{\partial t} = \lambda_s \left( \frac{\partial^2 T_s(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s(x, y, t)}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$0 < t \leq t_k; 0 < x < L_x; 0 < y < L_y.$$

Начальное условие:

$$T_s(x, y) = T_0 \equiv \text{const.} \quad (3)$$

Границные условия:

– условие (II род) симметрии на оси  $0Y$  (AB):

$$x = 0, 0 < y < L_y : \lambda_s \frac{\partial T_s(x, y, t)}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

– условие (III род) кондуктивно-конвективного теплообмена газового потока с поверхностью КМ (BC):

$$0 \leq x \leq l_g, y = L_y : \lambda_s \frac{\partial T_s(x, y, t)}{\partial y} = \alpha_g (T_g - T_s(x, y, t)), \quad (5)$$

– условие (III род) кондуктивно-конвективного теплообмена с воздухом на нагреваемой поверхности (*CD*):

$$l_g < x \leq L_x, y = L_y : \lambda_s \frac{\partial T_s(x, y, t)}{\partial y} = \alpha_e (T_e - T_s(x, y, t)), \quad (6)$$

– условие (III род) кондуктивно-конвективного теплообмена с воздухом на боковой поверхности (*DE*):

$$x = L_x, 0 < y < L_y : \lambda_s \frac{\partial T_s(x, y, t)}{\partial x} = \alpha_e (T_e - T_s(x, y, t)), \quad (7)$$

– условие (III род) кондуктивно-конвективного теплообмена с воздухом на тыльной стороне пластины (*AE*):

$$0 \leq x \leq L_x, y = 0 : -\lambda_s \frac{\partial T_s(x, y, t)}{\partial y} = \alpha_e (T_e - T_s(x, y, t)), \quad (8)$$

где  $T$  – температура;  $t$  – время;  $\rho$  – плотность;  $c$  – коэффициент удельной теплоемкости;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $\alpha$  – коэффициент теплообмена. Индексы "g", "e" и "s" относятся к характеристикам струи, окружающей среды и материала пластины соответственно.

### 3.2. Алгоритм численного решения (метод "расщепления по пространственным координатам")

Для численного решения задачи (2) – (8) воспользуемся методом Писмена – Рекфорда (метод расщепления по пространственным координатам) [2, 3]. Для аппроксимации дифференциального уравнения (2) разностным методом введем пространственно–временную сетку с координатами  $x_i = i \cdot h_x$ ;  $y_j = j \cdot h_y$ ,  $t_k = k \cdot \tau$ , где  $h_x$ ,  $h_y$  – шаги по пространству,  $\tau$  – шаг по времени;  $i = \overline{0, N_x}$ ,  $j = \overline{0, N_y}$  и  $k = \overline{0, K}$ . Таким образом, вся расчетная область покрывается сеткой (рис. 2) [2].

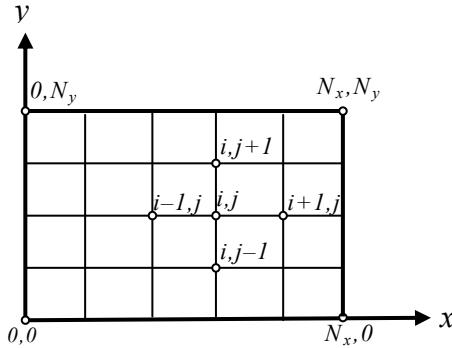


Рис. 2. Разностная сетка области решения

Введем следующее обозначение:  $T(x_i, y_j, t_k) = T_{i,j}^k$ . Дискретизацию уравнения (2) будем проводить на основе локально-одномерной схемы А.А. Самарского, которая является абсолютно устойчивой и обладает свойством суммарной аппроксимации. Суть этого подхода состоит в том, что шаг по времени реализуется в два этапа – на промежуточном (половинном шаге  $\tau/2$ ) временнем шаге проводим дискретизацию двумерного уравнения (2) только в направлении оси  $x$  и получаем одномерное уравнение, после его решения проводим вновь дискретизацию уравнения (2), но уже в направлении оси  $y$  и, решая полученное одномерное уравнение, определяем поле температуры на целом шаге по времени. Представим (2) в разностном виде, используя неявную схему на каждом половинном шаге по времени [3]:

$$c\rho \frac{T_{i,j}^{k+1/2} - T_{i,j}^k}{\tau/2} = \lambda \left( \frac{T_{i+1,j}^{k+1/2} - 2T_{i,j}^{k+1/2} + T_{i-1,j}^{k+1/2}}{h_x^2} \right), \quad (9)$$

$$c\rho \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^{k+1/2}}{\tau/2} = \lambda \left( \frac{T_{i,j+1}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1}}{h_y^2} \right). \quad (10)$$

Аппроксимация граничных условий (3) – (8):

$$i = 0, 0 < j < N_y : \lambda \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i,j}^k}{h_x} = 0, \quad (11)$$

$$0 \leq i \leq N_{x_l_g}, j = N_y : \lambda \frac{T_{i,j}^p - T_{i,j-1}^p}{h_y} = \alpha_g (T_g - T_{i,j}^p), \quad (12)$$

$$N_{x_l_g} < i \leq N_x, j = N_y : \lambda \frac{T_{i,j}^k - T_{i,j-1}^k}{h_y} = \alpha_e (T_e - T_{i,j}^k), \quad (13)$$

$$i = N_x, 0 < j < N_y : \lambda \frac{T_{i,j}^k - T_{i-1,j}^k}{h_x} = \alpha_e (T_e - T_{i,j}^k), \quad (14)$$

$$0 \leq i \leq N_x, j = 0 : -\lambda \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j}^k}{h_y} = \alpha_e (T_e - T_{i,j}^k). \quad (15)$$

Разностные уравнения (9), (10) сводятся к стандартному трехдиагональному виду и решаются последовательно методом прогонки [4]. Сначала для всей области решается уравнение (9), после того, как его решение будет найдено, переходят к решению уравнения (10).

### 3.3. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом прогонки

Рассмотрим решение уравнения (9) методом прогонки. Приведем это уравнение к виду [4]:

$$a_i T_{i,j}^{k+1/2} = b_i T_{i+1,j}^{k+1/2} + c_i T_{i-1,j}^{k+1/2} + d_i. \quad (16)$$

Преобразуем уравнение (9):

$$c\rho \frac{T_{i,j}^{k+1/2}}{\tau/2} + \lambda \frac{2T_{i,j}^{k+1/2}}{h_x^2} = \lambda \frac{T_{i+1,j}^{k+1/2}}{h_x^2} + \lambda \frac{T_{i-1,j}^{k+1/2}}{h_x^2} + c\rho \frac{T_{i,j}^k}{\tau/2},$$

$$\text{затем } \left( \frac{c\varphi}{\tau/2} + \frac{2\lambda}{h_x^2} \right) T_{i,j}^{k+1/2} = \left( \frac{\lambda}{h_x^2} \right) T_{i+1,j}^{k+1/2} + \left( \frac{\lambda}{h_x^2} \right) T_{i-1,j}^{k+1/2} + \frac{c\varphi}{\tau/2} T_{i,j}^k.$$

Тогда

$$a_i = 2 \left( \frac{c\varphi}{\tau} + \frac{\lambda}{h_x^2} \right), \quad b_i = c_i = \left( \frac{\lambda}{h_x^2} \right) \text{ и } d_i = \frac{2c\varphi}{\tau} T_{i,j}^k. \quad (17)$$

Для границ  $(AB)$  и  $(CD)$  (см. рис. 2) для точек  $0$  и  $N_x$  мы должны записать выражение (16) в виде:

$$a_0 T_{0,j}^{k+1/2} = b_0 T_{1,j}^{k+1/2} + d_0, \quad (18)$$

$$a_N T_{N,j}^{k+1/2} = c_N T_{N-1,j}^{k+1/2} + d_N. \quad (19)$$

Так как граничные точки имеют только по одной соседней точке, то выражения (18) и (19) могут рассматриваться в виде (16), если положить  $c_0 = 0$  для (18) и  $b_N = 0$  для (19).

Для реализации граничных условий (11) и (14) на соответствующих границах мы должны положить коэффициенты  $a_0, b_0, d_0, a_N, c_N, d_N$ , входящие в (18), (19), следующие:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 1, \quad d_0 = 0, \quad a_N = 1 + \frac{\alpha_e h_x}{\lambda}, \quad c_N = 1, \quad d_N = \frac{\alpha_e h_x}{\lambda} T_e. \quad (20)$$

Алгоритм прогонки начинается с записи уравнения (18) в виде:

$$T_{0,j}^{k+1/2} = P_0 T_{1,j}^{k+1/2} + Q_0, \quad (21)$$

где

$$P_0 = b_0 / a_0 \text{ и } Q_0 = d_0 / a_0. \quad (22)$$

Соотношение (21) подставляется в (16) для  $i = 0$ . В результате получается, что  $T_{0,j}^{k+1/2}$  выражается через  $T_{1,j}^{k+1/2}$ . Продолжая процесс последовательной подстановки (или прямой прогонки), можно выразить  $T_{i,j}^{k+1/2}$  через  $T_{i+1,j}^{k+1/2}$ :

$$T_{i,j}^{k+1/2} = P_i T_{i+1,j}^{k+1/2} + Q_i, \quad (23)$$

где  $P_i$  и  $Q_i$  – новые коэффициенты, появившиеся в процессе подстановки.

Представим, что мы находимся на стадии процесса подстановок, когда только что выразили  $T_{i-1,j}^{k+1/2}$  в виде

$$T_{i-1,j}^{k+1/2} = P_{i-1} T_{i,j}^{k+1/2} + Q_{i-1}. \quad (24)$$

Если подставить (24) в (16), то получается выражение

$$a_i T_{i,j}^{k+1/2} = b_i T_{i+1,j}^{k+1/2} + c_i (P_{i-1} T_{i,j}^{k+1/2} + Q_i) T_{i-1,j}^{k+1/2} + d_i, \quad (25)$$

которое может быть переписано в форме (23). Таким образом, можно получить формулы для  $P_i$  и  $Q_i$ :

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}, \quad (26)$$

$$Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}}. \quad (26a)$$

Заметим, что знаменатели в выражениях (26) и (26a) одинаковые.

Выражения (26) и (26a) рекурсивные, т.е.  $P_i$  и  $Q_i$  зависят от значений  $P_{i-1}$  и  $Q_{i-1}$ . Такой рекурсивный процесс нуждается в отправной точке. Она обеспечивается выражениями (22), которые не рекурсивны [4].

Перейдя к вычислению  $P_N$  и  $Q_N$ , можно обнаружить, что, как  $b_N = 0$ ,  $P_N$  тоже будет равно нулю (см. (20) и (26)). В результате согласно (17)  $T_N$  будет равно  $Q_N$ . Рассчитав таким образом значение  $T_N$ , можно начать процесс обратной прогонки с использованием формулы (24) для получения  $T_{N-1}, T_{N-2}, T_{N-3}, \dots, T_2, T_1$  и  $T_0$  [4].

Итоговый алгоритм решения [4].

Алгоритм прогонки может быть разбит на следующие шаги [4].

1. Вычисляем  $P_0$  и  $Q_0$  по выражениям (22).

2. Получаем  $P_i$  и  $Q_i$  для  $i = 1, 2, \dots, N$ , используя рекурсивные выражения (26) и (26а).

3. Полагаем  $T_N = Q_N$ .

4. Подставляем найденные значения величин в формулу (24) для  $i = N-1, N-2, \dots, 0$  и определяем  $T_{N-1}, T_{N-2}, T_{N-3}, \dots, T_2, T_1$  и  $T_0$ .

Алгоритм решения уравнения (10) аналогичен. Отличие составляют записи граничных условий на границах ( $BC$ ), ( $CD$ ) и ( $AE$ ). То есть запись коэффициентов  $a_0, b_0, d_0, a_N, c_N, d_N$ , входящих в (18), (19), которые будут следующими:

$$0 \leq i \leq N_x, j = 0 : a_0 = 1 + \frac{\alpha_e h_y}{\lambda}, b_0 = 1, d_0 = \frac{\alpha_e h_y}{\lambda} T_e,$$

$$0 \leq i \leq N_{x_{l_g}}, j = N_y : a_N = 1 + \frac{\alpha_g h_y}{\lambda}, c_N = 1, d_N = \frac{\alpha_g h_y}{\lambda} T_g, \quad (27)$$

$$N_{x_{l_g}} < i \leq N_x, j = N_y : a_N = 1 + \frac{\alpha_e h_y}{\lambda}, c_N = 1, d_N = \frac{\alpha_e h_y}{\lambda} T_e.$$

Коэффициенты  $a_i, b_i, c_i, d_i$  уравнения (10), входящие в (16), примут следующий вид:

$$a_i = 2 \left( \frac{\varphi}{\tau} + \frac{\lambda}{h_y^2} \right), \quad b_i = c_i = \left( \frac{\lambda}{h_y^2} \right), \quad d_i = \frac{2\varphi}{\tau} T_{i,j}^{k+1/2}. \quad (28)$$

Прогонка будет осуществляться по индексу  $j$ , не известные будут  $T_{i,j}^{k+1}$ ,  $T_{i,j+1}^{k+1}$  и  $T_{i,j-1}^{k+1}$ .

### **3.4. Листинг программы решения рассматриваемой задачи (язык программирования Fortran Powerstation)**

```
Program Tempreture_Dim2
Integer Nx,Ny,K
Real*8 Lx, Ly, lg, Ros, Cps, Lams, Alfae, Alfag, T0,
1      Tg, Te, Time
Parameter (Lx=0.1, Ly=0.15, lg=0.05, Nx=100,
1          Ny=100, K=100, Ros=1800., Cps=840.,
2          Lams=1.2, Alfae=30., Alfag=2500.,
3          T0=300., Tg=3000., Te=300., Time=25.)

Integer Nxlg

Real*8 hx, hy, tau
Real*8 a0, b0, d0, an, cn, dn

Real*8 TX(0:Nx, 0:Ny)

Real*8 TX(0:Nx), TY1(1:Nx-1)
Real*8 TY(0:Ny), TX1(1:Ny-1)

Real*8 Axi(0:Nx), Bxi(0:Nx), Cxi(0:Nx), Dxi(0:Nx)
Real*8 Ayj(0:Ny), Byj(0:Ny), Cyj(0:Ny), Dyj(0:Ny)

Open(1,file='T(x,y).txt')
Open(2,file='T(0,y).txt')

hx = Nx           !шаг по оси ОХ
hx = Lx / hx     !шаг по оси ОХ
```

```

hy = Ny           !шаг по оси ОУ
hy = Ly / hy     ! шаг по оси ОУ

Nxlг = int (lg / hx) !кол-во точек на гр. (BC)

tau = K           !шаг по времени
tau = Time / K   !шаг по времени

TXY = T0          !нач. условие T(x,y,0)=To(x,y)
DO L = 1, K       !Цикл по времени

Do j = 1, Ny-1 !направление 0X
!гр. усл.(II рода) левая гр.(AB) ao To = bo T1+do
a0 = 1.
b0 = 1.
d0 = 0.
!г.у.(III рода) правая гр.(DE) an Tn = cn Tn-1+dn
an = 1. + Alfae * hx / Lams
cn=1.
dn = Te * Alfae * hx / Lams

TY1(1:Nx-1) = TXY(1:Nx-1,j) !Ti,j

1 call ABCD_X(Nx, Axi, Bxi, Cxi, Dxi, Lams, Ros,
      Cps, hx, tau, TY1, a0, b0, d0, an, cn, dn)

      call TDMA(Nx, Axi, Bxi, Cxi, Dxi, TX)
      TXY(0:Nx, j) = TX(0:Nx)
end Do
TXY(0:Nx, 0) = TXY(0:Nx, 1)
TXY(0:Nx, Ny) = TXY(0:Nx, Ny-1)

```

Do i = 1, Nx-1 !направление 0Y

!г.у.(III рода)на нижней г. (AE)ao To=bo T1+do  
a0 = 1. + Alfae \* hy / Lams

$$b_0 = 1.$$

$$d0 = Te * Alfae * hy / Lams$$

!г.y.(III рода)на г.(BC)и(AD) an Tn=cn Tn-1+dn  
 if (i <= Nxlg) then !граница (BC)

$$an = 1. + Alfag * hy / Lams$$

$$c_n = 1.$$

$$dn = Tg * Alfag * hy / Lams$$

else !граница (CD)

$$an = 1. + Alfae * hy / Lams$$

$$cn = 1$$

$$dn = Te * Alfae * h\nu / Lams$$

end if

$$TX1(1:Ny-1) = TXY(i,1:Ny-1) \quad !Ti,1:Ny-1$$

call ABCD\_Y(Ny, Ayj, Byj, Cyj, Djy, Lams, Ros, Cps,  
1 hy, tau, TX1, a0, b0, d0, an, cn, dn)

call TDMA(Ny, Ayj, Byj, Cyj, Dyj, TY)

$$TXY(i, 0:Ny) = TY(0:Ny)$$

end Do

$$TXY(0, 0; Nv) = TXY(1, 0; Nv)$$

$$TXY(N_x, 0:N_y) = TXY(N_x-1, 0:N_y)$$

```
write(*, '(A, f5.2, A)') ' Time= ', L*tau, '.c'
end DO
```

```

do j = 0, Ny
  write(1, '(101e10.3)' ) Txy(0:Nx, j)
  write(2, '(e10.3, A, e10.3)' ) j*hy, ', ', Txy(0, j)
end do

close(1)
close(2)
END

```

```

!процедура трехточечной прогонки
Subroutine TDMA(N, a, b, c, d, T)
integer n
real*8 A(0:n), B(0:n), C(0:n), D(0:n), T(0:n)
real*8 P(0:n), Q(0:n)
P(0) = b(0) / a(0)
Q(0) = d(0) / a(0)
do i = 1, N
  P(i) = b(i) / (a(i) - c(i) * P(i-1))
  Q(i) = (d(i) + c(i) * Q(i-1)) / (a(i) - c(i) * P(i-1))
end do
T(n) = Q(n)
do i = N-1, 0, -1
  T(i) = P(i) * T(i+1) + Q(i)
end do
End

```

```

!прогоночные коэффициенты по оси ОХ
Subroutine ABCD_X(Nx, Ax, Bx, Cx, Dx, Lams, Ros,
1                               Cps, hx, tau, TY1, a0, b0, d0,
2                               an, cn, dn)
integer Nx
real*8 Lams, Ros, Cps, hx, tau

```

```
real*8 Ax(i)(0:Nx), Bx(i)(0:Nx), Cx(i)(0:Nx), Dx(i)(0:Nx),
1      TY1(1:Nx-1)
real*8 a0, b0, d0, an, cn, dn
```

!г.у. для левой границы ao To = bo T1+do

Ax(i)(0) = a0

Bx(i)(0) = b0

Dx(i)(0) = d0

!г.у. для правой границы an Tn = cn Tn-1+dn

Ax(i)(Nx) = an

Cx(i)(Nx) = cn

Dx(i)(Nx) = dn

do i = 1, Nx-1

Ax(i) = 2. \* (Cps \* Ros / tau + Lams / hx\*\*2)

Bx(i) = Lams / hx\*\*2

Cx(i) = Lams / hx\*\*2

Dx(i) = 2. \* Cps \* Ros \* TY1(i) / tau

end do

End

!прогоночные коэффициенты по оси OY

Subroutine ABCD\_Y(Ny, Ayj, Byj, Cyj, Dyj, Lams, Ros,

```
1                  Cps, hy, tau, TX1, a0, b0, d0,
2                  an, cn, dn)
```

integer Ny

real\*8 Lams, Ros, Cps, hy, tau

real\*8 Ayj(0:Ny), Byj(0:Ny), Cyj(0:Ny), Dyj(0:Ny),

```
1      TX1(1:Ny-1)
```

real\*8 a0, b0, d0, an, cn, dn

!г.у. для нижней границы ао  $T_0 = b_0 T_1 + d_0$   
 $Ay_j(0) = a_0$   
 $By_j(0) = b_0$   
 $Dy_j(0) = d_0$   
!г.у. для верхней границы ап  $T_n = c_n T_{n-1} + d_n$   
 $Ay_j(N_y) = a_n$   
 $Cy_j(N_y) = c_n$   
 $Dy_j(N_y) = d_n$

```
do j = 1, Ny-1
  Ayj(j) = 2. * (Cps * Ros / tau + Lams / hy**2)
  Byj(j) = Lams / hy**2
  Cyj(j) = Lams / hy**2
  Dyj(j) = 2. * Cps * Ros * TX1(j) / tau
end do
```

End

### 3.5. Список основных идентификаторов

$N_x, N_y$  – количество узлов по оси X и Y соответственно;  
K – количество шагов интегрирования по времени;  
 $L_x, L_y$  – ширина и толщина пластины соответственно (м);  
 $l_g$  – протяженность области воздействия струи (м);  
 $Ros$  – плотность материала пластины ( $\text{кг}/\text{м}^3$ );  
 $Cps$  – теплоемкость материала пластины ( $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{К})$ );  
 $Lams$  – теплопроводность материала пластины ( $\text{Вт}/(\text{м}\cdot^\circ\text{К})$ );  
 $Alfae$  – коэффициент теплообмена материала пластины с окружающей средой "воздух" ( $\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{К})$ );  
 $Alfag$  – коэффициент теплообмена материала пластины с плазменной струей ( $\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{К})$ );

Т<sub>0</sub> – начальная температура материала пластины (°К);  
 Т<sub>g</sub> – температура плазменной струи (°К);  
 Т<sub>е</sub> – температура окружающей среды "воздух" (°К);  
 Time – время протекающего процесса.

### 3.6. Тестовая задача

Результаты вычисления по приведенной программе в 3.4. при следующих значениях геометрических и режимных параметрах:  $L_x = 0,1$  м,  $L_y = 0,15$  м,  $l_g = 0,05$  м,  $\rho_s = 1800$  кг/м<sup>3</sup>;  $C_p = 840$  Дж/(кг·°К);  $\lambda_s = 1,2$  Вт/(м·°К);  $T_0 = 300$  °К;  $T_g = 3000$  °К;  $T_e = 300$  °К,  $\alpha_g = 2500$  Вт/(м<sup>2</sup>·°C),  $\alpha_e = 30$  Вт/(м<sup>2</sup>·°C). Результаты процесса нагрева пластины через 60 секунд приведены на рисунках 3, 4.

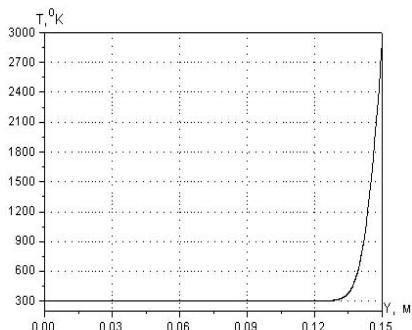


Рис. 3. Распределение температуры по толщине пластины в направлении оси 0Y

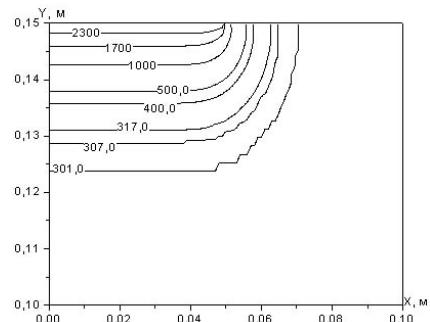


Рис. 4. Изотермы в пластине

## **4. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ**

1. Пластина толщиной 0,2 м из огнеупорного материала Бакор–33 (ГОСТ 23053–78) находилась при постоянной температуре  $T_0 = 20$  °C. В начальный момент времени  $t = 0$  с одной стороны пластины появился источник тепла с постоянной температурой  $T_1 = 1400$  °C, с другой стороны температура всегда поддерживается постоянной  $T_2 = 20$  °C. Определить температуру в центре пластины через 3 часа, если материал пластины имеет следующие теплофизические свойства: коэффициент теплопроводности  $\lambda = 1,7$  Вт/(м·°C), плотность  $\rho = 3500$  кг/м<sup>3</sup>, теплоемкость  $C_p = 650$  Дж/(кг·°C).

2. Стенка изготовлена из теплозащитного материала Динас ДЛ-2 (ТУ 14-8-67-73) и имеет следующие теплофизические свойства: коэффициент теплопроводности  $\lambda = 0,6$  Вт/(м·°C), плотность  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup>, теплоемкость  $C_p = 1200$  Дж/(кг·°C). Стенка толщиной 0,125 м в начальный момент времени имела температуру  $T_0 = 20$  °C. В момент времени  $t = 0$  на внутренней стороне температура стала равной  $T_1 = 1700$  °C, а с другой стороны температура всегда поддерживается постоянной  $T_2 = 20$  °C. Определить температуру в центре пластины через 1 час.

3. Изоляционная бадделеитовая (ТУ 14-8-248-77) пластина толщиной 0,02 м, являющаяся элементом внутренней стенки плазмохимического реактора, имеет следующие теплофизические свойства: коэффициент теплопроводности  $\lambda = 1,2$  Вт/(м·°C), плотность  $\rho = 5100$  кг/м<sup>3</sup>, теплоемкость  $C_p = 550$  Дж/(кг·°C). До запуска устройства пластина находилась при постоянной температуре  $T_0 = 20$  °C. В момент времени  $t = 0$  на внутренней стороне температура стала равной  $T_1 = 2000$  °C, а с другой стороны температура всегда поддер-

живается постоянной  $T_2 = 20^\circ\text{C}$ . Определить температуру в центре пластины через 1 минуту.

4. Реакционно-устойчивое покрытие толщиной 1 мм, нанесенное на не пропускающее тепло тело и находящееся при начальной температуре  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  имеет следующие теплофизические свойства: коэффициент теплопроводности  $\lambda = 1,7 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot^\circ\text{C})$ , плотность  $\rho = 3500 \text{ кг}/\text{м}^3$ , теплоемкость  $C_p = 650 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$ . В момент времени  $t = 0$  с внешней стороны приложен тепловой поток плотностью  $q = 5 \cdot 10^4 \text{ Вт}/\text{м}^2$ . Определить температуру внутренней поверхности покрытия через 30 с нагрева.

5. Датчик плотности теплового потока представляет из себя медную пластинку, в центре которой заделана термопара. Толщина пластинки равна 5 мм. Начальная температура  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . В момент времени  $t = 0$  с внешней стороны приложен тепловой поток плотностью  $q = 1 \cdot 10^7 \text{ Вт}/\text{м}^2$ . Определить температуру в месте заделки термопары через 1 с нагрева, если внутренняя поверхность датчика надежно теплоизолирована.

6. Стенки выходного канала плазмотрона, изготовленные из меди толщиной 10 мм, до включения плазмотрона имели температуру  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . С внешней стороны выходной канал охлаждается водой температурой  $T_1 = 20^\circ\text{C}$ , расход жидкости поддерживается постоянным, обеспечивающим интенсивность теплообмена с коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_1 = 4 \cdot 10^4 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C})$ . Внутри канала после запуска плазмотрона движется нагретый в электрической дуге газ с температурой  $T_2 = 3000^\circ\text{C}$ , с коэффициентом теплоотдачи имеющим следующее значение  $\alpha_2 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C})$ . Определить температуру внешней стенки канала плазмотрона через 3 с после его включения.

7. При плазменном декорировании строительных мате-

риалов плазменная струя оплавляет поверхность строительного изделия, за счет чего образуется защитно-декоративное стекловидное покрытие. Определить температуру поверхности строительного изделия через 1 секунду с момента начала воздействия плазменного потока с температурой  $T_g = 3000 \text{ }^{\circ}\text{C}$  при коэффициенте теплоотдачи  $\alpha_g = 1,5 \cdot 10^3 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°C})$ , если материал имеет следующие теплофизические свойства: коэффициент теплопроводности  $\lambda_s = 0,3 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{°C})$ , плотность  $\rho = 1500 \text{ кг}/\text{м}^3$ , теплоемкость  $C_p = 800 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{°C})$ .

8. Определить температурное поле в медной пластине через 5, 10, 30 и 60 секунд. Толщина пластины  $L = 0,3 \text{ м}$ . Начальная температура  $T_0 = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$ . На границе  $x = 0$  приложен тепловой поток плотностью  $q = 1 \cdot 10^6 \text{ Вт}/\text{м}^2$ , а граница  $x = L$  подвержена воздействию внешней среды температура которой  $T_e = 300 \text{ }^{\circ}\text{C}$ , с коэффициентом теплоотдачи имеющим следующее значение  $\alpha_e = 10^2 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°C})$ . В направлении оси у пластина является однородной и достаточно длинной (неограниченной).

9. Определить температурное поле в медной пластине через 30, 180 и 600 секунд. Толщина пластины  $L = 0,3 \text{ м}$ . Начальная температура  $T_0 = 50 \text{ }^{\circ}\text{C}$ . На границе  $x = 0$  пластина контактирует с внешней средой с температурой  $T_e = -30 \text{ }^{\circ}\text{C}$ , здесь коэффициент теплоотдачи  $\alpha_e = 10^3 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°C})$ , а граница  $x = L$  подвержена воздействию внешней среды с температурой  $T_e = 10 \text{ }^{\circ}\text{C}$ , здесь коэффициент теплоотдачи  $\alpha_e = 5 \cdot 10^2 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°C})$ . В направлении оси 0Y пластина является однородной и неограниченной.

10. Определить температурное поле в составной пластине через 30, 180 и 600 секунд. Толщина пластины  $L = 0,3 \text{ м}$ . Будем полагать, что толщины составных частей одинаковые. Начальная температура  $T_0 = 10 \text{ }^{\circ}\text{C}$ . Одна часть пластины стальная, другая медная. На границе  $x = 0$  поддер-

живается постоянная температура  $T = 100^\circ\text{C}$ , здесь коэффициент теплоотдачи  $\alpha_e = 10^3 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ , а на границе  $x = L$   $T = 50^\circ\text{C}$ . В направлении оси  $0Y$  пластина является однородной и достаточно длинной (неограниченной).

11. Определить температурное поле в неограниченной серебряной пластины через 1, 5 и 10 секунд. Толщина пластины  $L = 0,3 \text{ м}$ . Начальная температура  $T_0 = 10^\circ\text{C}$ . Одна часть пластины стальная, другая медная. На границе  $x = 0$  и  $x = L$  осуществляется теплообмен с окружающей средой – температура  $T_e = 60^\circ\text{C}$ , здесь коэффициент теплоотдачи  $\alpha_e = 50 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ . В пластине равномерно распределены внутренние источники тепла мощностью  $Q(x)$ . Данные источники находятся в точках  $x \in A = \left\{ \frac{L}{4}, \frac{L}{2}, \frac{3L}{4} \right\}$ . В связи с этим

$$\text{определим функцию } Q(x) = \begin{cases} q \frac{L}{4} \text{ Вт}/\text{м}^3, & x = \frac{L}{4}; \\ q \frac{L}{2} \text{ Вт}/\text{м}^3, & x = \frac{L}{2}; \\ q \frac{3L}{4} \text{ Вт}/\text{м}^3, & x = \frac{3L}{4}; \\ 0 \text{ Вт}/\text{м}^3, & x \notin A, \end{cases} \quad \text{где}$$

$q = 10^5 \text{ Вт}/\text{м}^4$ . В направлении оси  $y$  пластина является однородной и достаточно длинной (неограниченной).

12. Определить температурное поле в свинцовой пластине через 60 секунд. Толщина пластины  $L_x = L_y = 0,3 \text{ м}$ . Горизонтальные границы являются адиабатическими. На границе  $x = 0$  поддерживается постоянная температура  $T = 80^\circ\text{C}$ , а на границе  $x = L$  поддерживается постоянная температура  $T = 30^\circ\text{C}$ .

## **СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 600 с.
2. Кузнецов, Г.В. / Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие / Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.
3. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский – М. : Наука, 1977. – 656 с.
4. Патанкар, С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах / С.В. Патанкар. – Пер. с англ. Е.В. Калабина; под. ред. Г.Г. Янькова. – М. : Изд-во МЭИ, 2003. – 312 с.

## Приложение

### Теплофизические свойства металлов

Металл	Свойства при 20 °C		
	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c_p$ , Дж/(кг·°C)	$\lambda$ , Вт/(м·°C)
<b>Алюминий (чистый)</b>	2710	902	236
<b>Силумин(87%Al13%Si)</b>	2660	871	162
<b>Берилий</b>	1850	1758	219
<b>Медь(чистая)</b>	8930	386	398
<b>Золото</b>	19300	127	315
<b>Железо: чистое</b>	7870	455	81,1
<b>Чугун серый (C≈3%)</b>	7570	470	29,2
<b>Углеродистая сталь (C≈1,0%)</b>	7790	470	43,2
<b>Хромистая сталь (Cr≈5%)</b>	7830	460	36,1
<b>Никелевая сталь (Ni≈3,5)</b>	7910	460	36,5
<b>Марганцевая сталь (Mn≈12÷13% Ni≈3%)</b>	7800	487	13,6
<b>Вольфрамовая сталь (W≈5÷6%, TM-1)</b>	8070	430	18,7
<b>Свинец</b>	11430	128	35,3
<b>Магний</b>	1730	1020	156
<b>Молибден</b>	9590	255	138
<b>Никель (чистый)</b>	8900	444	91,4
<b>Платина</b>	21450	133	71,4
<b>Серебро</b>	10500	234	427
<b>Олово</b>	7310	228	67