4-1 العمليات على الدوال
Operations on Functions

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درست إجراء العمليات على كثيرات الحدود.

والآن

- أجد مجموع دالتين والفرق بينهما وحاصل ضربهما وقسمتهما.
- أجد تركيب دالتين.

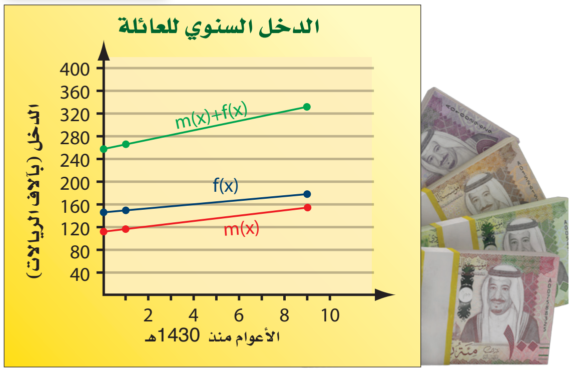
المفردات

تركيب دالتين
composition of functions

لماذا؟

تبين التمثيلات البيانية المجاورة الدخل السنوي لعائلة منذ عام 1430هـ؛ حيث $f(x)$ تعبِّر عن الدخل السنوي للزوج، و$m(x)$ تعبِّر عن الدخل السنوي للزوجة.

يمكن التعبير عن إجمالي الدخل السنوي لتلك العائلة بالدالة $f(x) + m(x)$.



العمليات الحسابية: لقد أجريت العمليات الحسابية على كثيرات الحدود في الفصل السابق. ويمكنك إجراء عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على الدوال أيضًا.

يمكنك الاعتماد على القواعد الآتية لإجراء العمليات الحسابية على الدوال:

مفهوم أساسي — العمليات على الدوال

أضف إلى مطويتك

العملية	التعريف	مثال لتكن $f(x) = 2x,\ g(x) = -x + 5$
الجمع	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$2x + (-x + 5) = x + 5$
الطرح	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$2x - (-x + 5) = 3x - 5$
الضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$2x(-x + 5) = -2x^2 + 10x$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$	$\frac{2x}{-x + 5},\ x \neq 5$

مثال 1 — جمع الدوال وطرحها

إذا كان $f(x) = x^2 - 4,\ g(x) = 2x + 1$، فأوجد كلَّ دالة فيما يأتي:

a) $(f + g)(x)$

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ — جمع دالتين

$= (x^2 - 4) + (2x + 1)$ — عوِّض

$= x^2 + 2x - 3$ — بسِّط

b) $(f - g)(x)$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ — طرح دالتين

$= (x^2 - 4) - (2x + 1)$ — عوِّض

$= x^2 - 2x - 5$ — بسِّط

✔ تحقق من فهمك

$f(x) = x^2 + 5x - 2,\ g(x) = 3x - 2$

1A) $(f + g)(x)$ **1B)** $(f - g)(x)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2023 - 1445

في المثال 1، الدالتان $g(x)$ و $f(x)$ لهما المجال نفسه، وهو مجموعة الأعداد الحقيقية. وكذلك الدالتان $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ مجالاهما مجموعة الأعداد الحقيقية. يتكون مجال جميع الدوال الناتجة عن عمليات الجمع أو الطرح أو الضرب للدالتين $g(x)$ و $f(x)$ من تقاطع مجاليهما. كما أن مجال الدالة الناتجة عن قسمة هاتين الدالتين هو تقاطع مجاليهما أيضًا، مع استثناء القيم التي تجعل المقام يساوي صفرًا.

مراجعة المفردات

التقاطع

تقاطع مجموعتين هو مجموعة العناصر المشتركة بين هاتين المجموعتين، ويرمز له بالرمز ∩.

مثال 2 ضرب الدوال وقسمتها

إذا كان $f(x) = x^2 + 7x + 12,\ g(x) = 3x - 4$، فأوجد كلَّ دالة مما يأتي:

a) $(f \cdot g)(x)$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ضرب دالتين

$= (x^2 + 7x + 12)(3x - 4)$ عوِّض

$= 3x^3 + 21x^2 + 36x - 4x^2 - 28x - 48$ خاصية التوزيع

$= 3x^3 + 17x^2 + 8x - 48$ بسِّط

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ قسمة دالتين

$= \frac{x^2 + 7x + 12}{3x - 4},\ x \neq \frac{4}{3}$ عوِّض

بما أن $x = \frac{4}{3}$ تجعل المقام $3x - 4$ يساوي صفرًا، فإن $\frac{4}{3}$ تستثنى من مجال الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

تنبيه !

قسمة دالتين

بما أنه قد تم تعلُّم قسمة كثيرات الحدود في الفصل 3، فإنه سيُكتفى عند إيجاد ناتج قسمة دالتين (في هذا الدرس) بكتابتهما في صورة دالة نسبية، وتحديد مجالها من دون إجراء عملية القسمة.

✓ تحقق من فهمك

$f(x) = x^2 - 7x + 2,\ g(x) = x + 4$

2A) $(f \cdot g)(x)$

2B) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

تركيب دالتين: هي إحدى الطرائق التي تستعمل لدمج دالتين. وعند **تركيب دالتين** فإن قيم دالة منهما تستعمل لحساب قيم الدالة الأخرى.

قراءة الرياضيات

تركيب دالتين

يرمز إلى تركيب الدالتين f و g بالرمز $f \circ g$ أو $f[g(x)]$، وتقرأ f بعد g.

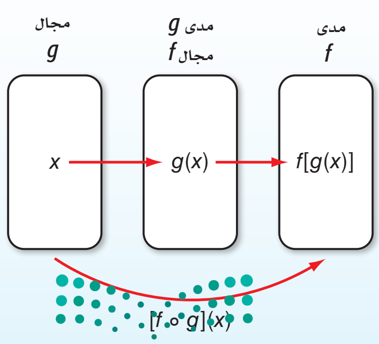
مفهوم أساسي تركيب دالتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت f و g دالتين وكان مدى g مجموعة جزئية من مجال f. فإنه يمكن إيجاد دالة التركيب $f \circ g$ بالشكل:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

النموذج:



يمكن أن يكون تركيب دالتين غير معرّف. فإذا كانت f و g دالتين، فإن $[f \circ g](x)$ يكون معرفًا فقط عند قيم x التي تجعل $g(x)$ عنصرًا في مجال الدالة f. وكذلك تكون الدالة $[g \circ f](x)$ معرّفة فقط عند قيم x التي تجعل $f(x)$ عنصرًا في مجال الدالة g.

مثال 3 تركيب دالتين

أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$، لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنًا:

a) $f = \{(1, 8), (0, 13), (14, 9), (15, 11)\}, g = \{(8, 15), (5, 1), (10, 14), (9, 0)\}$

لإيجاد $f \circ g$، أوجد قيم $g(x)$ أولًا، ثم استعملها كقيم من مجال الدالة f لإيجاد $f[g(x)]$

$g(8) = 15$ $\quad f[g(8)] = f(15) = 11$ $\qquad$ $g(10) = 14$ $\quad f[g(10)] = f(14) = 9$

$g(5) = 1$ $\quad f[g(5)] = f(1) = 8$ $\qquad$ $g(9) = 0$ $\quad f[g(9)] = f(0) = 13$

$f \circ g = \{(8, 11), (5, 8), (10, 9), (9, 13)\}$

لإيجاد $g \circ f$، أوجد قيم $f(x)$ أولًا ثم استعملها كقيم من مجال الدالة g ، لإيجاد $g[f(x)]$

$f(1) = 8$ $\quad g[f(1)] = g(8) = 15$ $\qquad$ $f(14) = 9$ $\quad g[f(14)] = g(9) = 0$

$f(0) = 13$ $\quad g[f(0)] = g(13)$ $\qquad$ $f(15) = 11$ $\quad g[f(15)] = g(11)$

$g(13)$ غير معرّفة $\qquad$ $g(11)$ غير معرّفة

وبما أن 13 , 11 لا ينتميان لمجال الدالة g فإن الدالة $g \circ f$ غير معرّفة عند $x = 11$ و $x = 13$ وبما أن $g[f(1)] = 15, g[f(14)] = 0$ ، فإن $g \circ f = \{(1, 15), (14, 0)\}$.

b) $f(x) = 2x - 5, g(x) = 4x$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف تركيب دالتين	$[g \circ f](x) = g[f(x)]$
$= f(4x)$	عوّض	$= g(2x - 5)$
$= 2(4x) - 5$	عوّض	$= 4(2x - 5)$
$= 8x - 5$	بسّط	$= 8x - 20$

تحقق من فهمك

3A) $f(x) = \{(3, -2), (-1, -5), (4, 7), (10, 8)\}$, $g(x) = \{(4, 3), (2, -1), (9, 4), (3, 10)\}$

3B) $f(x) = x^2 + 2, g(x) = x - 6$

لاحظ أنه في معظم الحالات تكون $f \circ g \neq g \circ f$؛ لذا فإن ترتيب الدالتين عند تركيبهما مهم.

إرشادات للدراسة

التركيب

كن حذرًا من الخلط بين عملية تركيب دالتين $f[g(x)]$ وعملية ضرب دالتين $(f \cdot g)(x)$.