NOTAS DE AULAS – PROF. FABIO DIAS (UFC QUIXADÁ)

Raízes de Equações

Nosso objetivo é apresentar dois métodos numéricos para resolver equação do tipo f(x) = 0. Resolver essas equações significar encontrar números β's, denominados de raízes, tais que f(β) = 0. Equações até do quarto grau, existe forma analítica direta para encontrara as raízes. A partir daí não. Além das equações não lineares.

Interpretação geográfica das raízes. As raízes ocorrem quando a função intercepta o eixo x e esses valores de x são chamados de raízes.

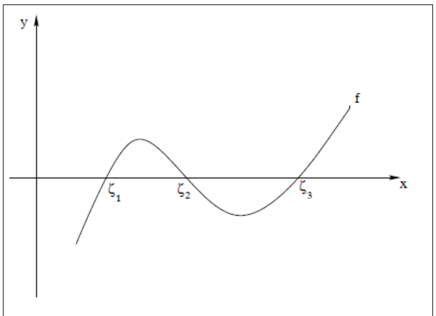


Figura 1: Raízes de uma equação

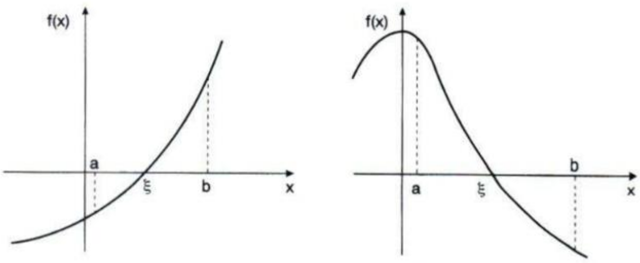
Os métodos que veremos parte de uma aproximação inicial e refinar essa aproximação. Isso é feito utilizando duas fases: fase de isolamento e fase de refinamento.

Fase de Isolamento

Nesta fase o objetivo é o de determinar um intervalo [a, b], o menor possível, que contenha uma única raiz.

Teorema de Cauchy-Bolzano: Seja *f* uma função contínua em um intervalo [a, b]. Se f(a) * f(b) < 0 então existe pelo menos um ponto β∈ [a, b] : f(β) = 0.

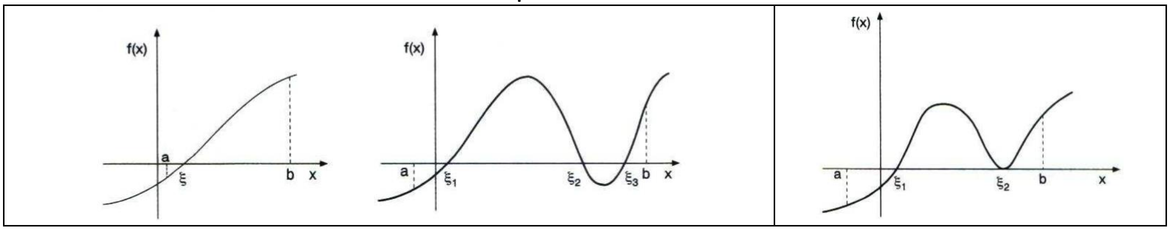
Observem na figura abaixo as duas situações:



$f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ $f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$

Mas precisamos garantir que no intervalor [a,b] tenha apenas uma raiz. Isso é feito usando o resultado abaixo.

Resultado 2: Se f' preservar o sinal em [a, b] e o Teorema de Cauchy-Bolzano for verificado neste intervalo então a raiz β é única.



Encontrando o intervalor [a,b]

Vamos gerar uma tabela com vários pontos (x, f(x)) da equação. O importante nessa tabela será o sinal de f(x) e não necessariamente o valor.

Exemplos:

a) $f(x) = 2x - \cos x = 0$.

x_i	$f(x_i)$
⋮	⋮
-2	-3.58
-1	-2.54
0	-1
1	1.46
2	4.42
⋮	⋮

Como $f(0) * f(1) < 0 \rightarrow \beta \in [0, 1]$. Sendo $f'(x) = 2 + \text{sen}\, x > 0\ \forall x \rightarrow \beta$ é única.

b) $f(x) = x^{1/2} - 5e^{-x}$

x	0	1	2	3
f(x)	-5	-0,83...	0,73...	1,48

$f'(x) = (½)\, x^{-1/2} + 5e^{-x} > 0,\ \forall x > 0$. Logo f(x) admite uma única raiz no intervalo [1, 2].

c) $f(x) = x^3 - 9x + 3$. $f'(x) = 3x^2 - 9$

x	$-\infty$	–100	–10	–5	–3	–1	0	1	2	3	4	5
f(x)	–	–	–	–	+	+	+	–	–	+	+	+

Fase de Refinamento

Antes de apresentarmos os métodos propriamente dito, precisamos definir os critérios de paradas. Lembrem-se, os métodos que veremos são iterativos e a cada iteração encontra uma aproximação de raiz. Pode ocorrer do método precisar de muitas iterações para encontrar uma raiz de fato, e em muitas situações práticas, uma boa aproximação é suficiente.

Critérios de Parada

Dizemos que x_k é uma "boa" aproximação para uma raiz β de uma equação $f(x) = 0$ se os critérios abaixo forem satisfeitos:

a) $|f(x_k)| < \epsilon$;
b) $| x_k - \beta| < \epsilon$;
c) A quantidade máxima de iterações. (Critério adicional não relacionado a qualidade da aproximação)

Onde ϵ é a precisão (tolerância) admitida.

O critério (a) verifica o quão próximo de zero está o valor da função para a aproximação. Já o (b) o quão próximo do valor da raiz β está x_k. O (c) é necessário pois dependendo do método e da função, a convergência pode demorar.

ATENÇÃO: Os dois critérios não são equivalentes. Vejamos onde cada um pode falha.

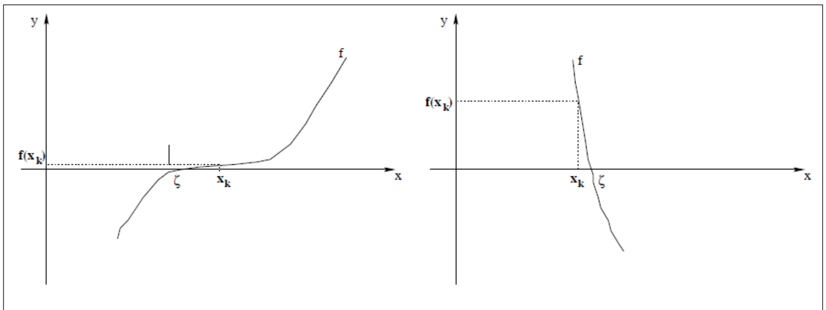


Figura 2: Caso (a)
Figura 3: Caso (b)

Desta forma, devemos impor os dois critérios, adicionado a quantidade máxima de iterações.

Como avaliar o critério de parada (b) se não se conhece β?

Assim, sendo $\boldsymbol{b - a < \epsilon} \rightarrow \forall x_k \in [a, b]$ tem-se $|x_k - \beta| < \boldsymbol{b - a < \epsilon}$**.** Logo, $|x_k - \beta| < \epsilon$ e qualquer $x_k \in [a, b]$ é uma boa aproximação para a raiz β.

Método da Bisseção

A ideia do Método da Bisseção é reduzir o intervalo [*a*, *b*] que contém a raiz β dividindo-o ao meio a cada iteração.

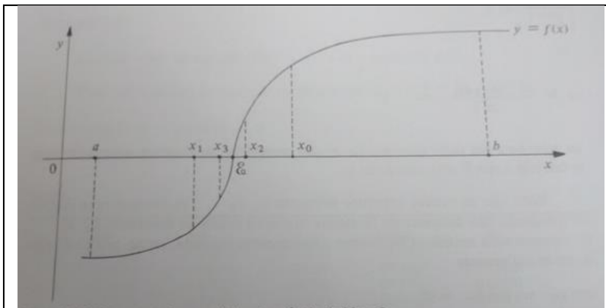


Figura 3.18. Interpretação geométrica do método da bisseção.

As iterações são realizadas da seguinte forma:

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} \quad \begin{cases} f(a_0) < 0 \\ f(b_0) > 0 \\ f(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \in (a_0, x_0) \\ a_1 = a_0 \\ b_1 = x_0 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad \begin{cases} f(a_1) < 0 \\ f(b_1) > 0 \\ f(x_1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \in (x_1, b_1) \\ a_2 = x_1 \\ b_2 = b_1 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \quad \begin{cases} f(a_2) < 0 \\ f(b_2) > 0 \\ f(x_2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \in (x_2, b_2) \\ a_3 = x_2 \\ b_3 = b_2 \end{cases}$$

Exemplo: Determinar com precisão $\epsilon < 0{,}01$ e com um máximo de 10 iterações, a raiz da equação $f(x) = 2x - \cos x = 0$.

Isolamento da raiz: Já foi visto que $\beta \in [0, 1]$.

k	a	b	x_k	$f(x_k)$	$b-a$	Conclusão
0	0	1	0.500	0.122	1	$\xi \in [0.000, 0.500]$
1	0	0.500	0.250	-0.469	0.500	$\xi \in [0.250, 0.500]$
2	0.250	0.500	0.375	-0.181	0.250	$\xi \in [0.375, 0.500]$
3	0.375	0.500	0.438	-0.031	0.125	$\xi \in [0.438, 0.500]$
4	0.438	0.500	0.469	0.045	0.063	$\xi \in [0.438, 0.469]$
5	0.438	0.469	0.453	0.007	0.031	$\xi \in [0.438, 0.453]$
6	0.438	0.453	0.445	-0.012	0.016	$\xi \in [0.445, 0.453]$
7	0.445	0.453	0.449	-0.002	0.008	Pare! pois $b - a < \varepsilon$ e $\lvert f(x_k)\rvert < \varepsilon$

Temos que $b - a = 0{,}453 - 0{,}445 = 0{,}008 < \epsilon = 0{,}01$ e $|f(x_7)| = 0{,}008 < \epsilon = 0{,}01$. Desta forma, $x_7 = 0{,}449$ é uma aproximação para a raiz com precisão $\epsilon = 0{,}01$.

Pós e Contras: Para sua convergência, não é levado em consideração o comportamento do gráfico de f no intervalo [a, b]. Convergência lenta, no pior caso quando a raiz está próxima de um dos extremos.

O método da bisseção é mais usado para reduzir o intervalo antes de usar outro método de convergência mais rápida.

Estimativa do número de iterações

$b_0 - a_0 = b - a$

$b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2 = (b - a)/2$

$b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2 = (b_0 - a_0)/4 = (b - a)/2^2$

$\vdots$

$b_k - a_k = (b - a)/2^k$

Impondo $b_k - a_k < \varepsilon$, vem:

$\frac{b-a}{2^k} < \varepsilon \Longrightarrow \frac{b-a}{\varepsilon} < 2^k \Longrightarrow 2^k > \frac{b-a}{\varepsilon} \Longrightarrow \ln 2^k > \ln \frac{b-a}{\varepsilon} \Longrightarrow k \ln$

Deve-se obter o valor de k tal que $b_k - a_k < \varepsilon$, ou seja,

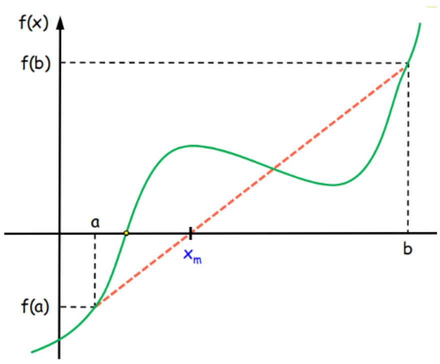
$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} < \varepsilon \Rightarrow 2^k > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \Rightarrow k \log(2) > \log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

Método da Falsa Posição

A ideia deste método é a de tomar como aproximação *x* para a raiz β no intervalo [*a*, *b*] a média ponderada entre os extremos *a* e *b* com pesos |*f*(*a*)| e |*f*(*b*)|, respectivamente. Isto é:

$$x = \frac{a \times |f(b)| + b \times |f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|}$$



Desta forma, *x* estará mais próximo do extremo cuja imagem for menor.

Como *f*(*a*) e *f*(*b*) têm valores de sinais contrários, então temos dois casos a considerar:

(i) $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$

Neste caso, $|f(a)| = -f(a)$ e $|f(b)| = f(b)$. Logo:

$$x = \frac{a \times |f(b)| + b \times |f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{f(b) - f(a)}$$

(ii) $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$

Neste caso, $|f(a)| = f(a)$ e $|f(b)| = -f(b)$. Logo:

$$x = \frac{a \times |f(b)| + b \times |f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{-a \times f(b) + b \times f(a)}{-f(b) + f(a)} = \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Observamos que em ambos os casos temos:

$$x = \frac{a \times f(b) - b \times f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Neste método, as aproximações são geradas conforme a expressão acima garantindo-se, a cada iteração, que elas estejam no intervalo [*a*, *b*] cujos extremos tenham valores de sinais contrários.

Esse método procurar gerar uma aproximação para a raiz cuja imagem seja a menor possível, isto é, uma aproximação tal que $|f(x_k)| < \epsilon$, sem se preocupar com a diminuição da amplitude (b - a).

Exemplo: Determinar com precisão $\epsilon < 0{,}01$ e com um máximo de 10 iterações, a raiz da equação $f(x) = 2x - \cos x = 0$ no intervalo [0, 1].

k	a	b	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$	Conclusão
0	0	1	0.407	-0.105	-	$\xi \in [0.407, 1.000]$
1	0.407	1.000	0.447	-0.009	0.040	$\xi \in [0.447, 1.000]$
2	0.447	1.000	0.450	-0.001	0.003	Pare! pois $\lvert f(x_2)\rvert < 0.01$ e $\lvert x_2 - x_1\rvert < \varepsilon$

Logo, $x_2 = 0.450$ é uma aproximação para a raiz ξ da equação $f(x) = 2x - \cos x = 0$ com uma precisão $\varepsilon < 0.01$.

$f(x) = x^3 - 9x + 3 \qquad I = [0, 1] \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 5 \times 10^{-4}$

Aplicando o método da posição falsa, temos:

Iteração	x	f(x)	b – a
1	.375	–.322265625	1
2	.338624339	$-8.79019964 \times 10^{-3}$	.375
3	.337635046	$-2.25883909 \times 10^{-4}$	.338624339

E portanto $\bar{x} = 0.337635046$ e $f(\bar{x}) = -2.25 \times 10^{-4}$.

Pós e Contras: Para sua convergência, não é levado em consideração o comportamento do gráfico de f no intervalo [a, b]. Entretanto, quando a convergência para a raiz só se faz a partir de um extremo do intervalo [*a; b*] e a imagem desse ponto fixo tem um valor muito elevado, a convergência é lenta.

Referencias:

1. BARROSO, Leônidas Conceição et al. Cálculo numérico: (com aplicações). 2. ed. São Paulo, SP: Harbra, c1987. 367 p. ISBN 8529400895.
2. RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lucia da Rocha. Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.