INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAIBA
COORDENAÇÃO DO CURSO SUPERIOR DE BACHARELADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ALYSSON BATISTA DE SOUZA
FABRÍCIO DA SILVA LEITÃO
GABRIEL BARBOSA DO NASCIMENTO

Projeto 2 – Sistemas de Controle I

JOÃO PESSOA
Maio de 2023

ALYSSON BATISTA DE SOUZA
FABRÍCIO DA SILVA LEITÃO
GABRIEL BARBOSA DO NASCIMENTO

Projeto 2 – Sistemas de Controle I

Relatório referente à disciplina de Sistemas de controle 1 , ministrada no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, durante o semestre 2023.1, orientado pelo professor Dr. Ademar Gonçalves da Costa Júnior

João Pessoa
Maio de 2023

Lista de ilustrações

Sumário

1 Analítica

1.1 Função de transferência

A primeira etapa do processo foi o modelamento matemático do circuito 1, apresentado na Figura 1, proposto em aula para desenvolvimento deste projeto.

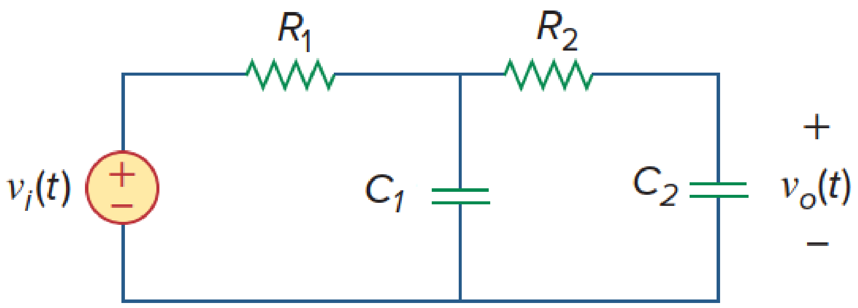


Figura 1 – Circuito 1

$$C_1 = 10\mu F \quad \Longrightarrow \quad Z_{C_1} = \frac{1}{j\omega C_1} \quad \Longrightarrow \quad Z_{C_1} = \frac{1}{sC_1} = \frac{100K}{s}$$

$$C_2 = 1\mu F \quad \Longrightarrow \quad Z_{C_2} = \frac{1}{j\omega C_2} \quad \Longrightarrow \quad Z_{C_2} = \frac{1}{sC_2} = \frac{1M}{s}$$

$$Z_{eq} = Z_{C_1} // (R_2 + Z_{C_2})$$

$$Z_{eq} = \frac{\frac{100K}{s} \times (100 + \frac{1M}{s})}{\frac{100K}{s} + 100K + \frac{1M}{s}} = \frac{\frac{100K}{s} \times 100K(1 + \frac{10}{s})}{100K + \frac{1{,}1M}{s}} = \frac{\cancel{\frac{100K}{s}} \times 100K(\frac{s+10}{s})}{\cancel{\frac{100K}{s}}(11+s)}$$

$$Z_{eq} = \frac{100K(\frac{s+10}{s})}{(11+s)}$$

$$Z_{eq} = \frac{100K(s+10)}{s(11+s)} \qquad 1$$

Regra do divisor de tensão

$$V_o(s) = \frac{Z_{C_2}}{R_2 + Z_{C_2}} \times V_1(s) \qquad 2$$

$$V_1(s) = \frac{Z_{eq}}{R_1 + Z_{eq}} \times V_i(s) \qquad 3$$

substituindo 3 em 2

$$V_o(s) = \frac{Z_{C_2}}{R_2 + Z_{C_2}} \times \frac{Z_{eq}}{R_1 + Z_{eq}} \times V_i(s)$$

$$V_o(s) = \frac{\frac{1M}{s}}{100K + \frac{1M}{s}} \times \frac{Z_{eq}}{R_1 + Z_{eq}} \times V_i(s)$$

Portanto a função de tranferência é:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1M}{s}}{100K + \frac{1M}{s}} \times \frac{Z_{eq}}{R_1 + Z_{eq}} \qquad 4$$

Substituindo 1 em 4

$$G(s) = \frac{\frac{1M}{s}}{100K + \frac{1M}{s}} \times \frac{\left[\frac{100K(s+10)}{s(11+s)}\right]}{180K + \left[\frac{100K(s+10)}{s(11+s)}\right]}$$

$$G(s) = \frac{1M}{\cancel{100Ks + 1M}} \times \frac{\cancel{100Ks + 1M}}{180Ks(11+s) + 100Ks + 1M}$$

$$G(s) = \frac{1M}{180Ks^2 + 1{,}98Ms + 100Ks + 1M}$$

$$G(s) = \frac{1M}{180Ks^2 + 2{,}08M + 1M}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{5{,}56}{s^2 + 11{,}55s + 5{,}56}}$$

1.2 Item 1.a

1a. Nesse item, acrescentem o ganho K antes do sistema dinâmico (ramo direto), e projetem para que o sistema em malha fechada apresente overshoot máximo de 5% (cálculo do K que atenda a essa premissa) (ver tema: diagrama de blocos). Obs: analisem para a entrada do tipo degrau (amplitude dada para cada grupo).

$$G(s) = \frac{5{,}56}{s^2 + 11{,}55s + 5{,}56}$$

substituindo na equação:

$$T(s) = \frac{k \times G(s)}{1 + k \times G(s)}$$

$$T(s) = \frac{k \times \frac{5{,}56}{s^2+11{,}55s+5{,}56}}{1 + k \times \frac{5{,}56}{s^2+11{,}55s+5{,}56}}$$

$$T(s) = \frac{k \times \frac{5{,}56}{s^2+11{,}55s+5{,}56}}{\frac{s^2+11{,}55s+5{,}56+5{,}56\times k}{s^2+11{,}55s+5{,}56}}$$

$$T(s) = \frac{k \times \frac{5{,}56}{\cancel{s^2+11{,}55s+5{,}56}}}{\frac{s^2+11{,}55s+5{,}56+5{,}56\times k}{\cancel{s^2+11{,}55s+5{,}56}}}$$

$$T(s) = \frac{k \times 5{,}56}{s^2 + 11{,}55s + 5{,}56 + 5{,}56 \times k}$$

$$T(s) = \frac{k \times 5{,}56}{s^2 + 11{,}55s + 5{,}56(1+k)}$$

A forma da função de transferência de malha fechada é igual:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Por comparação:

$$5{,}56(1+k) = \omega_n^2 \quad 5$$

e comparando:

$$11{,}55 = 2\zeta\omega_n$$

$$\omega_n = \frac{11{,}55}{2\zeta} \quad 6$$

podemos então substituir 6 em 5

$$5{,}56(1+k) = \left(\frac{11{,}55}{2\zeta}\right)^2$$

$$5{,}56(1+k) = \frac{133{,}4}{4\zeta^2}$$

$$\zeta^2 = \frac{133{,}4}{4 \times 5{,}56(1+k)}$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{133{,}4}{4 \times 5{,}56(1+k)}}$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{133{,}4}{22{,}24(1+k)}} \longrightarrow \div 133{,}4$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{0{,}16(1+k)}} \quad 7$$

sistema em malha fechada apresente overshoot máximo de 5%

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$0{,}05 = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$ln(0{,}05) = ln(e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}})$$

$$-2{,}995 = \frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\frac{-2{,}995}{\pi} = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$0{,}95 = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$0{,}95 \times \sqrt{1-\zeta^2} = \zeta$$

$$(0{,}95 \times \sqrt{1-\zeta^2})^2 = (\zeta)^2$$

$$(0{,}95)^2 \times (\sqrt{1-\zeta^2})^2 = (\zeta)^2$$

$$\zeta^2 = 0{,}9025(1-\zeta^2)$$

$$\zeta^2 = 0{,}9025 - 0{,}9025\zeta^2$$

$$1{,}9025\zeta^2 = 0{,}9025$$

$$\boxed{\zeta = 0{,}6887}$$

Com valor de ζ aplicamos na equação 7:

$$0{,}6887 = \frac{1}{\sqrt{0{,}16(1+k)}}$$

$$\sqrt{0{,}16(1+k)} = \frac{1}{0{,}6887}$$

$$(k+1) = \frac{(\frac{1}{0{,}6887})^2}{0{,}16}$$

$$k = 13{,}17 - 1$$

$$\boxed{k = 11{,}64}$$

1.3 Item 1.b

1b. Com o valor do ganho K calculado no item 1a, estimem o tempo de pico, o overshoot e o tempo de assentamento para o sistema em malha fechada.

$$\omega_n = \sqrt{5{,}56 + k \times 5{,}56}$$
$$\omega_n = \sqrt{5{,}56 + 11{,}64 \times 5{,}56}$$
$$\boxed{\omega_n = 8{,}3832}$$

Tempo de pico T_p:

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{8{,}3832\sqrt{1-(0{,}6887)^2}}$$
$$\boxed{T_p = 0{,}5168}$$

Tempo de assentamento:

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0{,}6887 \times 8{,}3832}$$
$$\boxed{T_s = 0{,}6928}$$

Overshoot:

$$\zeta = 0{,}6887 \qquad \longrightarrow \qquad M_p(\%) = 100 \times e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100 \times e^{-\frac{0{,}6887\pi}{\sqrt{1-(0{,}6887)^2}}}$$
$$\boxed{M_p(\%) = 5{,}0584\%}$$

1.4 Item 1.c

1c. Com os dados do item 1a, esbocem o diagrama de polos e zeros do sistema em malha fechada, comparando com o diagrama de polos e zeros em malha aberta (do sistema dinâmico);

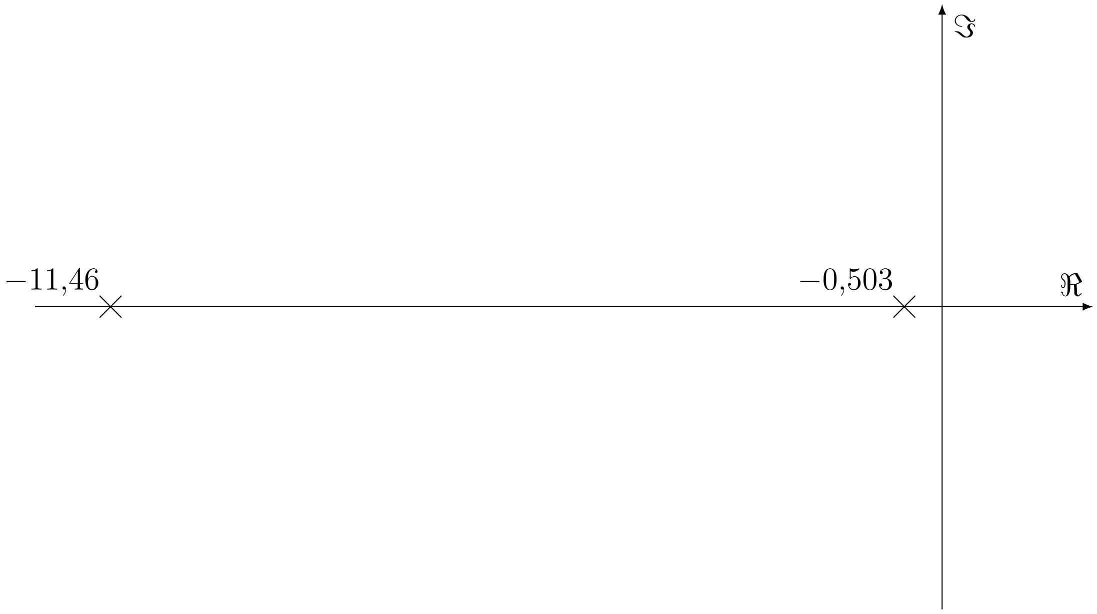
Função de tranferência em malha aberta:

$$G(s) = \frac{5{,}56}{s^2 + 11{,}55s + 5{,}56} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{s_1 = -0{,}503} \text{ e } \boxed{s_2 = -11{,}046}$$

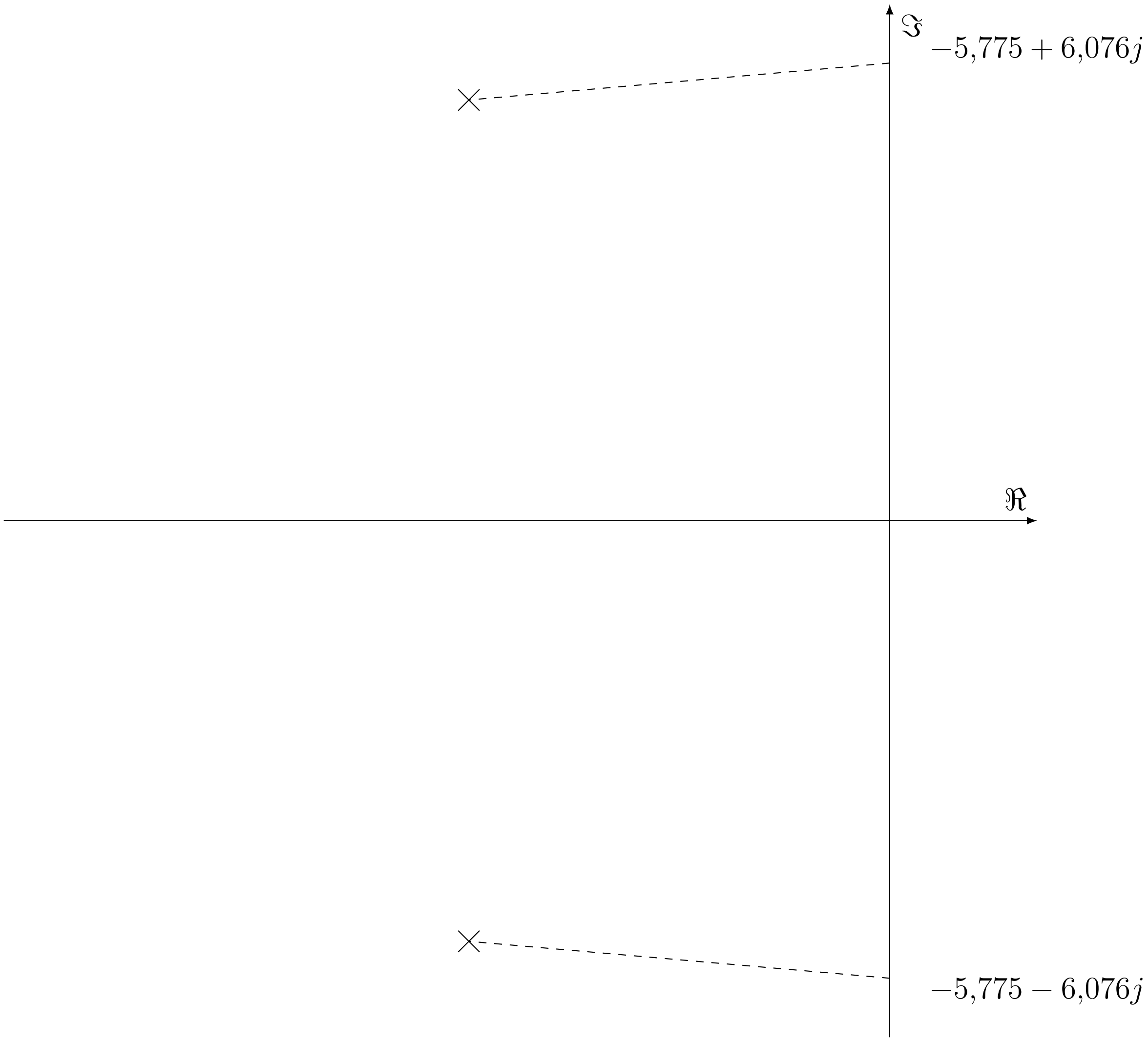
Função de tranferência em malha fechada:

$$T(s) = \frac{64{,}71}{s^2 + 11{,}55s + 70{,}27} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{s_1 = --5{,}775 + 6{,}076j} \text{ e } \boxed{s_2 = -5{,}775 - 6{,}076j}$$

Malha aberta:



Malha fechada:



1.5 Item 1.d

1d. Determinem a faixa de valores do ganho K do sistema em malha fechada, para que o sistema seja estável, instável e marginalmente estável (ver tema: estabilidade);

Pela função de tranferência em malha fechada:

$$T(s) = \frac{k \times 5{,}56}{s^2 + 11{,}55s + 5{,}56(1+k)}$$

Tabela de Routh-Hurwitz:

s^2	1	5,56(1+k)
s^1	11,55	
s^0	b_1	

calculamos:

$$b_1 = \frac{(\cancel{11{,}55})(5{,}56 + 5{,}56k) - 0}{\cancel{11{,}55}} = 5{,}56 + 5{,}56K$$

Sistema estável:

$$b_1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad 5{,}56 + 5{,}56K > 0$$

$$\boxed{K > -1}$$

Sistema instável:

$$b_1 < 0 \quad \Longrightarrow \quad 5{,}56 + 5{,}56K < 0$$

$$\boxed{K < -1}$$

Sistema marginalmente estável:

$$b_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 5{,}56 + 5{,}56K = 0$$

$$\boxed{K = -1}$$

1.6 Item 1.e

1e. Nesse item, acrescentem o ganho K novamente antes do sistema dinâmico (ramo direto), e projetem para que o sistema em malha fechada, possua erro em regime permanente de, no máximo, 5% (não utilizar os valores de K estimados anteriormente).

Função de transferência em malha fechada

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \times G(s)}{1 + K \times G(s)}$$

Função de tranrência entre o sinal de erro, $e(t)$ e o sinal de entrara $r(t)$:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = 1 - \frac{K \times G(s)}{1 + K \times G(s)} = \frac{1 + \cancel{K \times G(s)} - \cancel{K \times G(s)}}{1 + K \times G(s)}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + K \times G(s)} \quad \longrightarrow \quad E(s) = \frac{1}{1 + k \times G(s)} \times R(s)$$

o erro estacionário é:

$$e_{ss} = \lim_{x \to 0} \frac{s \times R(s)}{1 + K \times G(s)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{s} \times {}^{1}\!/\!\cancel{s}}{1 + K \times G(s)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + K \times G(s)} =$$

$$e_{ss} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + K \times \left(\cancel{\frac{5{,}56}{s^2 + 11{,}55 + 5{,}56}}\right)}$$

$$e_{ss} = 5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{1 + K} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{1 + K} = 0{,}05 \quad \longrightarrow \quad 1 + K = \frac{1}{0{,}05} = 20$$

$$1 + K = 20 \quad \longrightarrow \quad K = 20 - 1$$

$$\boxed{K = 19}$$

1.7 Item 1.f

1f. Com o valor do ganho K calculado no item 1e, calculem as constantes de erro estático e o erro em regime permanente para as entradas do tipo degrau (amplitude dada para cada grupo) e rampa unitária (ver tema: erro em regime permanente).

O valor de K do item 1.e:

$$K = 19$$

A função de transferência em malha aberta:

$$G(s) = \frac{5{,}56}{s^2 + 11{,}55s + 5{,}56}$$

Sabendo que o erro é:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s) \times K} \times R(s)$$

Aplicamos o teorema do valor final:

$$e(\infty) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s \times E(s) = \lim_{s \to 0} s \times \frac{1}{1 + G(s) \times K} \times R(s)$$

Adicionamos a entrada degrau $R(s) = \frac{1.5}{s}$:

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \times \frac{1}{1 + G(s) \times K} \times \frac{1.5}{\cancel{s}}$$

$$e(\infty) = \frac{1.5}{1 + \underbrace{\lim_{s \to 0} \left(G(s) \times K \right)}_{K_p}} \qquad 8$$

calculando o limite de K_p:

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) \times K$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{5{,}56}{s^2 + 11{,}55s + 5{,}56} \times 19$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{5{,}56}{\cancel{s^2} + \cancel{11{,}55s} + 5{,}56} \times 19 = \frac{\cancel{5{,}56} \times 19}{\cancel{5{,}56}}$$

$$\boxed{K_p = 19}$$

Aplicando K_p na equação 8:

$$e(\infty) = \frac{1.5}{1 + 19}$$

$$\boxed{e(\infty) = 0{,}075}$$

Erro em regime permanente aplicado ao degrau 1.5 com $K = 19$.

Adicionamos a entrada rampa unitária $R(s) = \frac{1}{s^2}$:

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \times \frac{1}{1 + G(s) \times K} \times \frac{1}{s^{\cancel{2}}}$$

$$e(\infty) = \frac{1}{\underbrace{\lim_{s \to 0} \left(s \times G(s) \times K \right)}_{K_v}} \qquad 9$$

calculando o limite de K_v:

$$K_v = \lim_{s \to 0} s \times G(s) \times K$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} \frac{s^2 \times 5{,}56}{s^2 + 11{,}55s + 5{,}56} \times 19$$
$$\boxed{K_v = 0}$$

Aplicando K_v na equação 9:

$$e(\infty) = \frac{1}{0}$$
$$\boxed{e(\infty) = \infty}$$

Adicionamos a entrada $R(s) = \frac{1}{s^3}$:

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} \times \frac{1}{1 + G(s) \times K} \times \frac{1}{s^{\cancel{3}}}$$
$$e(\infty) = \frac{1}{\underbrace{\lim_{s\to 0}\left(s^2 \times G(s) \times K\right)}_{K_a}} \qquad (10)$$

calculando o limite de K_a:

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 \times G(s) \times K$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} \frac{s^2 \times 5{,}56}{s^2 + 11{,}55s + 5{,}56} \times 19$$
$$\boxed{K_a = 0}$$

Aplicando K_a na equação 10:

$$e(\infty) = \frac{1}{0}$$
$$\boxed{e(\infty) = \infty}$$

1.8 Item 1.g

1g. Utilizando a mesma estrutura do item 1e, calculem a sensibilidade do erro em regime permanente em malha fechada para variações no parâmetro do ganho "K"e no parâmetro "b"da função de transferência em malha aberta (ex: G(s) = num(s)/den(s), com $den(s) = s^2 + as + b$) , com a aplicação da entrada do tipo degrau (amplitude dada para cada grupo).

$$G(s) = \frac{5{,}56}{s^2 + 11{,}55s + 5{,}56}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - T(s) = 1 - \frac{K \times G(s)}{1 + K(s)} = \frac{1 \cancel{+K \times G(s)} \cancel{-K \times G(s)}}{1 + K \times G(s)} = \frac{1}{1 + K \times G(s)}$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + K \times G(s)} \times R(s) = \frac{1}{1 + K \times G(s)} \times \frac{1.5}{s}$$

$$E(s) = \frac{1{,}5}{s + s \times k \times G(s)}$$

O erro estacionário:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \times E(s) = \lim_{s \to 0} \frac{\cancel{s} \times 1{,}5}{\cancel{s} + \cancel{s} \times k \times G(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1{,}5}{1 + k \times G(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{1{,}5}{1 + k \times \left(\frac{5{,}56}{\cancel{s^2} \cancel{+11{,}55s} + 5{,}56 \times {\color{red}b}}\right)} = \frac{1{,}5}{1 + k \frac{\cancel{5{,}56}}{\cancel{5{,}56} \times b}}$$

$$e_{ss} = \frac{1{,}5}{1 + \frac{k}{b}}$$

Sensibilidade do erro em regime permanente para o parâmetro K:

$$S_{e:K} = \frac{K}{e} \times \frac{\partial e}{\partial K} = \frac{K}{\frac{1{,}5}{\cancel{1 + \frac{k}{b}}}} \times \frac{\cancel{0 \times (1 + \frac{K}{b})} - 1{,}5 \times \frac{1}{b}}{(1 + \frac{K}{b})^2}$$

$$S_{e:K} = \frac{K}{1{,}5} \times \frac{(\frac{-1{,}5}{b})}{1 + \frac{K}{b}}$$

$$S_{e:K} = \frac{K}{\cancel{1{,}5}} \times \frac{\cancel{-1{,}5}}{b} \times \frac{1}{1 + \frac{K}{b}}$$

$$S_{e:K} = \frac{-K}{b(\frac{1+K}{b})}$$

$$\boxed{S_{e:K} = \frac{-K}{b + K}}$$

Sensibilidade do erro em regime permanente para o parâmetro b:

$$S_{e:b} = \frac{b}{e} \times \frac{\partial e}{\partial b} = \frac{b}{\frac{1{,}5}{1 + \frac{k}{b}}} \times \frac{-1{,}5 \times (\frac{-k}{b^2})}{(1 + \frac{K}{b})^2}$$

$$S_{e:b} = \frac{\cancel{b}\cancel{(1 + \frac{k}{b})}}{\cancel{1{,}5}} \times \frac{\cancel{1{,}5} \times \frac{K}{b^{\cancel{2}}}}{(1 + \frac{k}{b})^{\cancel{2}}}$$

$$S_{e:b} = \frac{\frac{k}{b}}{1 + \frac{K}{b}}$$

$$\boxed{S_{e:b} = \frac{K}{b + K}}$$

Considerando $b = 1$:

$$S_{e:b} = \frac{K}{b + K} = \frac{19}{1 + 19} = 0{,}95$$

Variando b para $\pm 10\%$, logo $b = 1{,}1$ ou $b = 0{,}9$:

$$S_{e:b} = \frac{19}{1{,}1 + 19} = 0{,}945 \quad \Longrightarrow \quad b_{+10\%} = 0{,}53\%$$

ou

$$S_{e:b} = \frac{19}{0{,}9 + 19} = 0{,}954 \quad \Longrightarrow \quad b_{-10\%} = -0{,}42\%$$

2 Simulação

O software utilizado no projeto foi o MATLAB R2020a. O código desenvolvido completo encontra-se em anexo.

2.1 Item 2.a

2a. Calculem por meio de uma rotina computacional em Matlab, os parâmetros dos itens 1a e 1b;

```
Omega_n:
    8.3827

csi:
    0.6889

Tr:
    0.6926

Tp:
    0.5170

Overshoot:
    5.0494

Raízes_denominador:
  -5.7750 + 6.0761i
  -5.7750 - 6.0761i
```

Figura 2 – Cálculo do tempo de pico, o overshoot e o tempo de assentamento.

2.2 Item 2.b

2b. Gerem o gráfico da saída do sistema em malha fechada, de acordo com o ganho K encontrado no item 1a para a entrada do tipo degrau (amplitude dada para cada grupo).

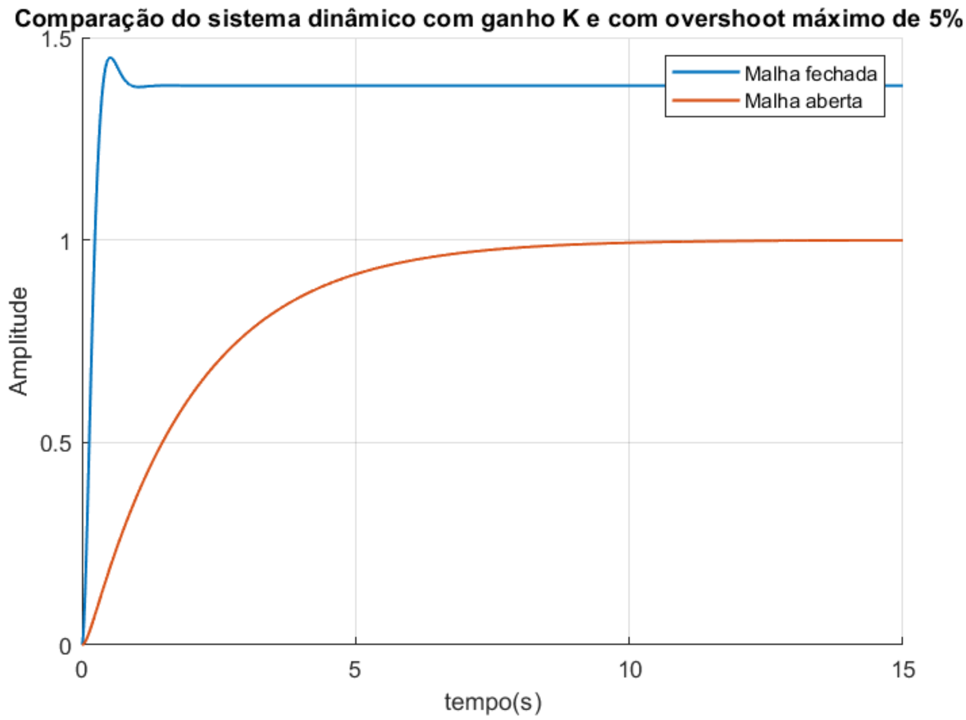


Figura 3 – Comparação entre as curvas dos sistemas de malha aberta e malha fechada.

2.3 Item 2.c

2c. Gerem o diagrama de polos e zeros dos sistemas em malha aberta e malha fechada (vejam o item 1c), em um mesmo gráfico;

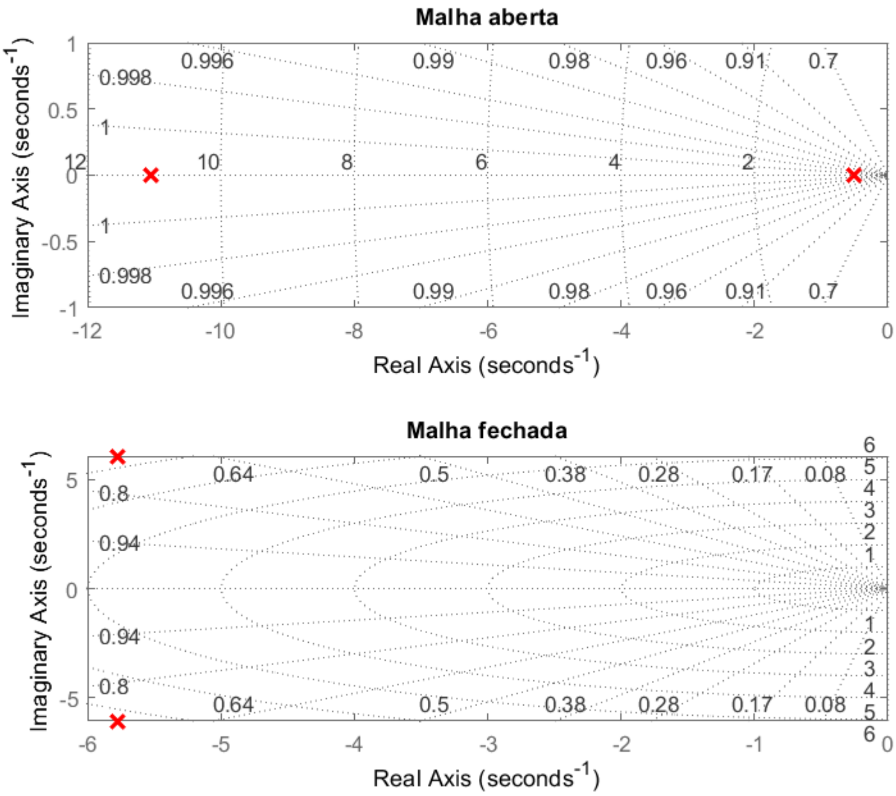


Figura 4 – Diagrama de polos e zeros dos sistemas em malha aberta e malha fechada.

2.4 Item 2.d

2d. Analisem o item 1d por meio de gráficos da saída do sistema em malha fechada;

Quando o sistema é estável o $K > -1$:

```
Digite o K de acordo com a condições abaixo:
 K > -1 => estável
 K < -1 => instável
 K = -1 => marginalmente estável
 3
Você quer calcular uma nova tabela de Routh-Hurwitz S/N s

DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR


DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR


 Tabela Routh-Hurwitz:

rhTable =

    1.0000   22.2400
   11.5500         0
   22.2400         0

~~~~~> É um sistema estável! <~~~~~

 Número de polos no lado direito = 0
```

Figura 5 – Faixa de valores de ganho para o sistema ser estável, instável e marginalmente estável e cálculo da Tabela de Routh-Hurwitz para o k=3

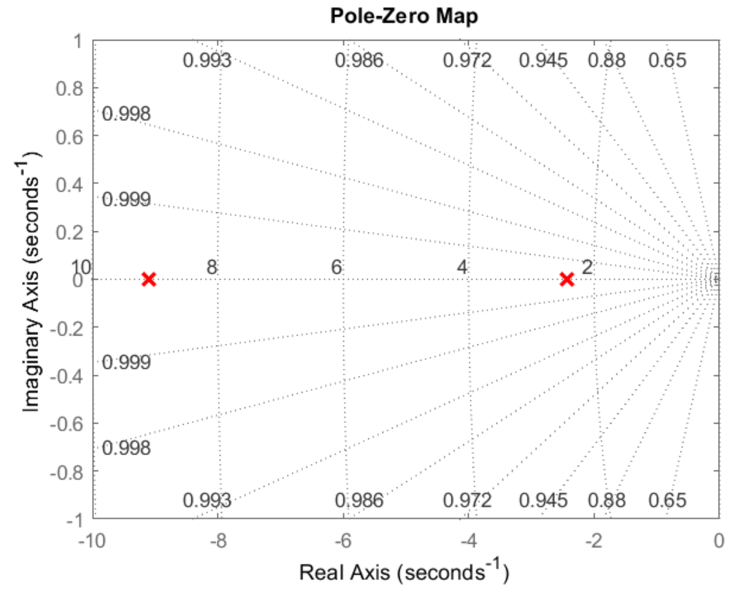


Figura 6 – Diagrama de polos e zeros com k=3

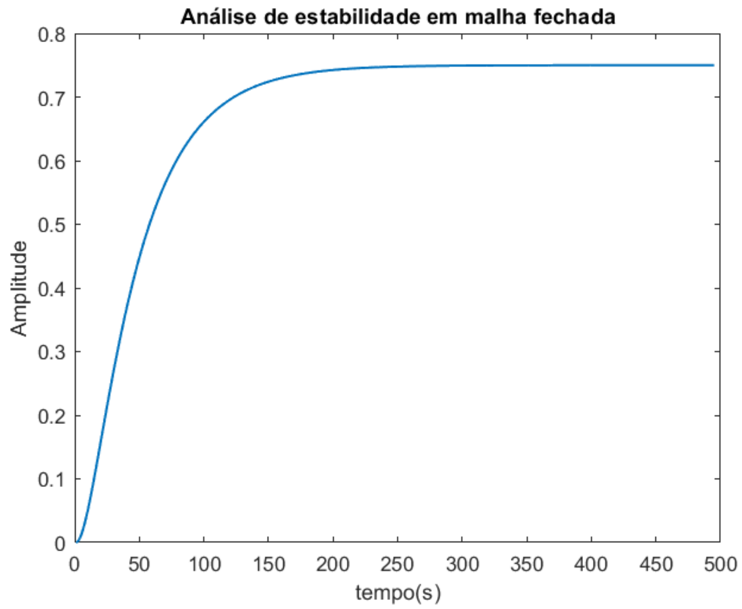


Figura 7 – Resposta do sistema em malha fechada quando temos um K=3

Quando o sistema é instável o $K < -1$:

```
Digite o K de acordo com a condições abaixo:
 K > -1 => estável
 K < -1 => instável
 K = -1 => marginalmente estável
 -3
Você quer calcular uma nova tabela de Routh-Hurwitz S/N s

DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR


DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR


 Tabela Routh-Hurwitz:

rhTable =

    1.0000  -11.1200
   11.5500         0
  -11.1200         0

~~~~~> É um sistema instável! <~~~~~

 Número de polos no lado direito = 1
```

Figura 8 – Faixa de valores de ganho para o sistema ser estável, instável e marginalmente estável e cálculo da Tabela de Routh-Hurwitz para o k=-3

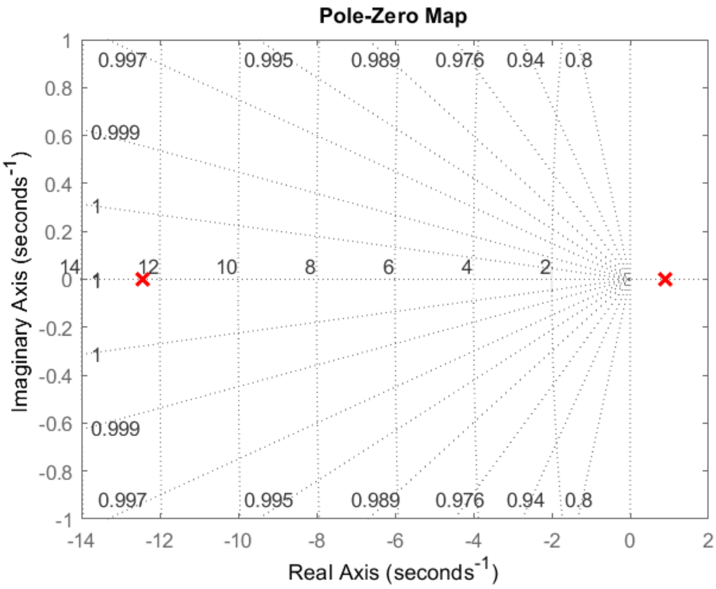


Figura 9 – Diagrama de polos e zeros com k=-3

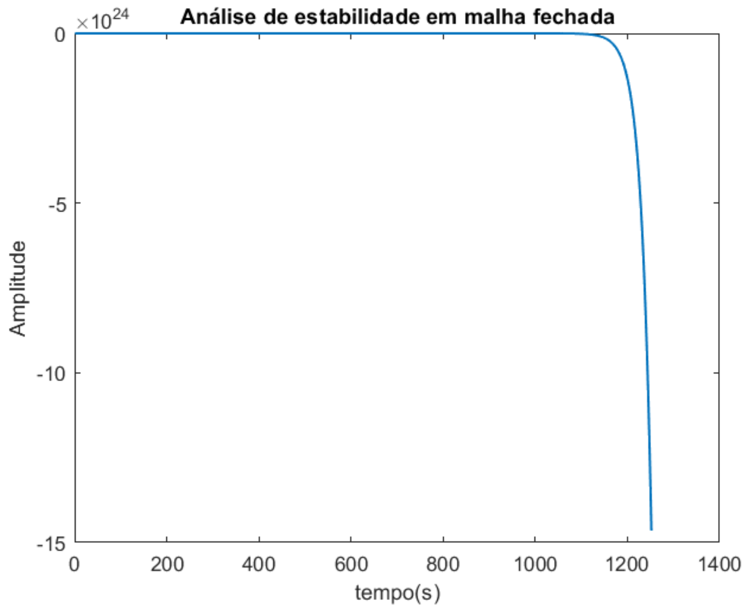


Figura 10 – Resposta do sistema em malha fechada quando temos um K=-3

Quando o sistema é marginalmente estável o $K = -1$:

```
Digite o K de acordo com a condições abaixo:
 K > -1 => estável
 K < -1 => instável
 K = -1 => marginalmente estável
 -1
Você quer calcular uma nova tabela de Routh-Hurwitz S/N s

DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR


DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR


 Tabela Routh-Hurwitz:

rhTable =

    1.0000         0
   11.5500         0
    0.0100         0

~~~~~> É um sistema marginalmente estável! <~~~~~

 Número de polos no lado direito = 0
```

Figura 11 – Faixa de valores de ganho para o sistema ser estável, instável e marginalmente estável e cálculo da Tabela de Routh-Hurwitz para o k=-1

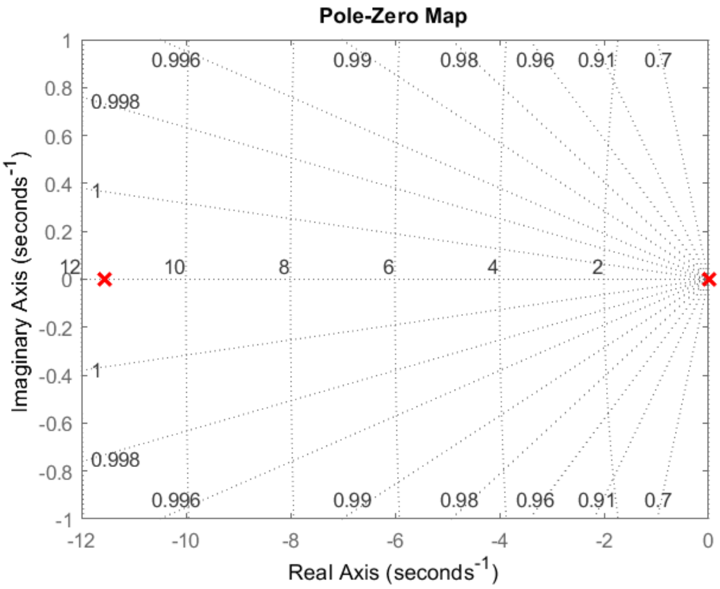


Figura 12 – Diagrama de polos e zeros com k=-1

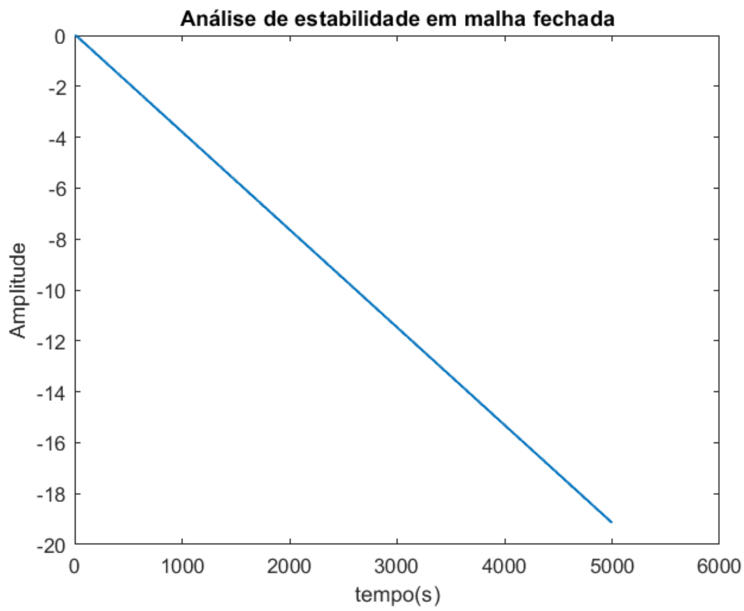


Figura 13 – Resposta do sistema em malha fechada quando temos um K=-1

2.5 Item 2.e

2e. Calculem por meio de uma rotina computacional em Matlab, os parâmetros dos itens 1e e 1f;

```
o erro em regime permanente quando aplicado o degrau 1.5 é:
0.075

A constante de posição é :
    19

o erro em regime permanente quando aplicado a rampa = infinito
A constante de velocidade é :
0.0

A constante de aceleração é :
0.0
```

Figura 14 – Constantes de erro estático.

2.6 Item 2.f

2f. Analisem por meio de gráficos, comparando com o sistema em malha fechada original, como a saida do sistema em malha fechada e o sinal de erro se comportam com variações de +-10% nos valores de 'a' e de 'K'. Aproveitamento do item 1g.

```
Sensibilidade do erro em regime permanente para o parâmetro K:
    / 2 k   2 \
  k | --- + - | 3
    \ 3 b   3 /
- ---------------
       / k     \2
   2 b | - + 1 |
       \ b     /

Sensibilidade do erro em regime permanente para o parâmetro b:
  / 2 k   2 \
k | --- + - | 3
  \ 3 b   3 /
---------------
     / k     \2
 2 b | - + 1 |
     \ b     /
```

Figura 15 – Sensibilidade do erro em regime permanente em malha fechada para variações no parâmetro do ganho "K"e no parâmetro "b".

3 Considerações finais

Diante dos resultados obtidos na simulação, pode-se afirmar que o programa MATLAB gerou quase os mesmos valores da parte analítica do projeto.

```
% Instituto Federal da Paraíba
% Data: 11/05/2023
% Ademar Gonçalves da Costa Júnior
% Sistemas de Controle I
% Projeto 2 - Sistemas de Controle I
% Grupo 3: Alysson, Fabrício,Gabriel


close all
clear all
% sistema em malha aberta
num = [5.56];
den = [1 11.55 5.56];
disp(' '); disp('DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR'); disp(' ');
pause
% gerar gráfico
sysc = tf(num,den); % objeto função de transferência
 opt = stepDataOptions('StepAmplitude',1.5);
[y,t] = step(sysc); % gera o gráfico para um degrau UNITÁRIO
figure() % cria objeto figura
plot(t,y,'LineWidth',1.3) % gera gráfico
title('Malha aberta');
xlabel('tempo(s)') % título do eixo x
ylabel('Amplitude do sistema') % título do eixo y
grid % coloca grid no gráfico

%##########################################################################
%##########################################################################

% 2a. Calculem por meio de uma rotina computacional em Matlab, os parâmetros
%dos itens 1a e 1b;
%--------------------------------------------------------------------------
% 1a. Nesse item, acrescentem o ganho K antes do sistema dinâmico
% (ramo direto),% e projetem para que o sistema em malha fechada apresente
% overshoot máximo de 5% (cálculo do K que atenda a essa premissa)
% (ver tema: diagrama de blocos). Obs: analisem para a entrada do tipo
% degrau (amplitude dada para cada grupo).
%--------------------------------------------------------------------------

% para um overshoot de 5%, temos:
% k_ov = 11.64
% num_e = [k_ov*5.56];
% poly_den_e = [1 11.55 5.56+5.56*k_ov];
num_e = [64.71];
poly_den_e = [1 11.55 70.27];

%--------------------------------------------------------------------------
% 1b. Com o valor do ganho K calculado no item 1a, estimem o tempo de pico,
% o overshoot e o tempo de assentamento para o sistema em malha fechada.
%--------------------------------------------------------------------------

omegan = sqrt(poly_den_e(3)); % frequência natural
csi = poly_den_e(2)/(2*omegan); % coeficiente de amortecimento
```

```
Ts = 4/(csi*omegan); % tempo de acomodação
Tp = pi/(omegan*sqrt(1-csi^2)); % tempo de pico
overshoot = 100*exp((-csi*pi)/sqrt(1-csi^2)); % overshoot ou sobressinal
raizes_den = roots(poly_den_e); % raízes do denominador
disp(' '); disp('DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR'); disp(' ');
pause;
disp('Omega_n:'); disp(omegan);
disp('csi:'); disp(csi);
disp('Tr:'); disp(Ts);
disp('Tp:'); disp(Tp);
disp('Overshoot:'); disp(overshoot);
disp('Raízes_denominador:'); disp(raizes_den);

%##########################################################################
%##########################################################################

% 2b. Gerem o gráfico da saída do sistema em malha fechada, de acordo com o
% ganho K encontrado no item 1a para a entrada do tipo degrau (amplitude
% dada para cada grupo).

disp(' '); disp('DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR'); disp(' ');
pause
% gerar gráfico
sysc6 = tf(num_e,poly_den_e); % objeto função de transferência
[y6,t6] = step(sysc6,opt);
figure()
te = 0:0.01:15;
s=tf('s');
sys3_ordem= tf(1.5*[64.61],[1 11.55 70.17]); % sistema em malha fechada
sys2_ordem= tf([5.56],[1 11.55 5.56]); % sistema em malha aberta
hold on
f3 = step(sys3_ordem,te);
f2 = step(sys2_ordem,te);
plot(te,f3,'LineWidth',1.3)
plot(te,f2,'LineWidth',1.3)
title('Comparação do sistema dinâmico com ganho K e com overshoot máximo de 5% ');
xlabel('tempo(s)')
ylabel('Amplitude')
grid on
legend('Malha fechada','Malha aberta')

%##########################################################################
%##########################################################################

% 2c. Gerem o diagrama de polos e zeros dos sistemas em malha aberta e malha
% fechada (vejam o item 1c), em um mesmo gráfico;

disp(' '); disp('DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR'); disp(' ');
pause
figure()
subplot(2,1,1)
h1 = pzplot(sysc(:,:,1),'r');grid on
title('Malha aberta')
```

```
subplot(2,1,2)
h2 = pzplot(sysc6(:,:,1),'r'); grid on
title('Malha fechada')

%##########################################################################
%##########################################################################

% 2d. Analisem o item 1d por meio de gráficos da saída do sistema em malha
% fechada;

%--------------------------------------------------------------------------
% 1d. Determinem a faixa de valores do ganho K do sistema em malha fechada,
% para que o sistema seja estável, instável e marginalmente estável (ver
% tema: estabilidade);
%--------------------------------------------------------------------------

disp(' '); disp('DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR'); disp(' ');
pause
% Critério de Estabilidade Routh-Hurwitz:
K_temp = input('Digite o K de acordo com a condições abaixo: \n K > -1 => estável↙
\n K < -1 => instável \n K = -1 => marginalmente estável  \n ');
entrada = input('Você quer calcular uma nova tabela de Routh-Hurwitz S/N ', 's');
if entrada == 's' || entrada == 'S'

 % Pega coef do vetor e constroi as duas primeiras linhas
 syms k
 num_temp = [K_temp*5.56];
 coeffVector = [1 11.55 5.56+5.56*K_temp];
 ceoffLength = length(coeffVector);
 rhTableColumn = round(ceoffLength/2);
 % Inicializa a tabela Routh-Hurwitz com vetor nulo
 rhTable = zeros(ceoffLength,rhTableColumn);
 % Computa a primeira linha da tabela
 rhTable(1,:) = coeffVector(1,1:2:ceoffLength);
 % Verifica se o comprimento do vetor de coeficientes é par ou ímpar
 if (rem(ceoffLength,2) ~= 0)
 % se par, a segunda linha da tabela será
 rhTable(2,1:rhTableColumn - 1) = coeffVector(1,2:2:ceoffLength);
 else
 % se impar, a segunda linha da tabela será
 rhTable(2,:) = coeffVector(1,2:2:ceoffLength);
 end

disp(' '); disp('DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR'); disp(' ');
pause
figure()
func_temp = tf(num_temp,coeffVector);
h1 = pzplot(func_temp(:,:,1),'r');grid on
disp(' '); disp('DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR'); disp(' ');
pause
plot_temp = step(func_temp);
figure()
plot(plot_temp,'LineWidth',1.3);
```

```
title('Análise de estabilidade em malha fechada')
xlabel('tempo(s)')
ylabel('Amplitude')
 %% Calcular as linhas da tabela de Routh-Hurwitz
 % Define epss como um valor pequeno
 epss = 0.01;
 % Calcula outros elementos da tabela
 for i = 3:ceoffLength
 % caso especial: linhas de zeros
 if rhTable(i-1,:) == 0
 order = (ceoffLength - i);
 cnt1 = 0;
 cnt2 = 1;
 for j = 1:rhTableColumn - 1
 rhTable(i-1,j) = (order - cnt1) * rhTable(i-2,cnt2);
 cnt2 = cnt2 + 1;
 cnt1 = cnt1 + 2;
 end
 end
 for j = 1:rhTableColumn - 1
 % fprimeiro elemento da linha superior
 firstElemUpperRow = rhTable(i-1,1);
 % computa cada elemento da tabela
 rhTable(i,j) = ((rhTable(i-1,1) * rhTable(i-2,j+1)) - ....
 (rhTable(i-2,1) * rhTable(i-1,j+1))) / firstElemUpperRow;
 end
 % caso especial: zero na primeira coluna
 if rhTable(i,1) == 0
 rhTable(i,1) = epss;
 end
 end


 %% Calcula o número de pólos do lado direito (pólos instáveis)
 % Inicializa pólos instáveis ??com zero
 unstablePoles = 0;
 % Verifica a mudança do sinal
 for i = 1:ceoffLength - 1
 if sign(rhTable(i,1)) * sign(rhTable(i+1,1)) == -1
 unstablePoles = unstablePoles + 1;
 end
 end
 % Print dados na command window
 fprintf('\n Tabela Routh-Hurwitz:\n')
 rhTable
 % Printa o resultado
 if unstablePoles == 0 & K_temp > -1
 fprintf('~~~~~> É um sistema estável! <~~~~~\n')
 else
     if K_temp == -1
        fprintf('~~~~~> É um sistema marginalmente estável! <~~~~~\n')
     else
        fprintf('~~~~~> É um sistema instável! <~~~~~\n')
```

```
     end
  end
  fprintf('\n Número de polos no lado direito =%2.0f\n',unstablePoles)
  reply = input('Você quer ver as raízes do sistema? S/N ', 's');
  if reply == 's' || reply == 'S'
  sysRoots = roots(coeffVector);
  fprintf('\n Raízes de coeficientes polinomiais dadas :\n')
  sysRoots


  end
end


%###########################################################################
%###########################################################################

% 2e. Calculem por meio de uma rotina computacional em Matlab, os
% parâmetros dos itens 1e e 1f;

%---------------------------------------------------------------------------
% 1e. Nesse item, acrescentem o ganho K novamente antes do sistema dinâmico
% (ramo direto), e projetem para que o sistema em malha fechada, possua erro
% em regime permanente de, no máximo, 5% (não utilizar os valores de K
% estimados anteriormente).
%---------------------------------------------------------------------------

syms s k
E_estacionario = limit(1/(1+k*(5.56/(s^2+11.55*s+5.56))),s,0);
%E_estacionario = 5% = 5/100 = 1/(1+k)
% logo E_estacionario = 1/(1+k) = 0.05
k_parcial = 1/0.05; %k_parcial = 20
k = k_parcial - 1;

%---------------------------------------------------------------------------
% 1f. Com o valor do ganho K calculado no item 1e, calculem as constantes de
% erro estático e o erro em regime permanente para as entradas do tipo degrau
% (amplitude dada para cada grupo) e rampa unitária (ver tema: erro em regime
% permanente).
%---------------------------------------------------------------------------

disp(' '); disp('DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR'); disp(' ');
pause
syms s
% Aplicado o degrau R(s)=0.7/s
kp = k; %Constante de posição
if(1+kp == 0)
  disp('O erro em regime permanente quando aplicado o degrau = infinito' );
else
  ErD = vpa(round(10000*1*1.5/(1+kp))/10000);
  disp('o erro em regime permanente quando aplicado o degrau 1.5 é:');
  disp(ErD);
end
```

```
disp('A constante de posição é :');
disp(kp);
% Aplicando a Rampa unitaria R(s)=1/s^2
kv = vpa(round(1000*limit(s*5.56/(s^2+1.56*s+5.56),s,0))/1000); %Constande de
velocidade
if(kv == 0)
 disp('o erro em regime permanente quando aplicado a rampa = infinito' );
else
ErR = 1./(kv); % erro para a rampa
disp('o erro em regime permanente quando amplicado a rampa é:');
disp(ErR);
end
disp('A constante de velocidade é :');
disp(kv);
ka = vpa(round(1000*limit(s^2*5.56/(s^2+1.56*s+5.56),s,0))/1000); %Constante de
Aceleração
disp('A constante de aceleração é :');
disp(ka);

%###########################################################################
%###########################################################################

% 2f. Analisem por meio de gráficos, comparando com o sistema em malha fechada
% original, como a saida do sistema em malha fechada e o sinal de erro se
% comportam com variações de +-10% nos valores de 'a' e de 'K'. Aproveitamento
% do item 1g.

%---------------------------------------------------------------------------
% 1g. Utilizando a mesma estrutura do item 1e, calculem a sensibilidade do
% erro em regime permanente em malha fechada para variações no parâmetro do
% ganho "K" e no parâmetro "b" da função de transferência em malha aberta
% (ex: G(s) = num(s)/den(s), com den(s)=s^2+as+b), com a aplicação da entrada
% do tipo degrau (amplitude dada para cada grupo).
%---------------------------------------------------------------------------
disp(' '); disp('DIGITE QUALQUER TECLA PARA CONTINUAR'); disp(' ');
pause

syms s k b
E_estacionario = limit(1.5/(1+k*(5.56/(s^2+11.55*s+5.56*b))),s,0);
disp('Sensibilidade do erro em regime permanente para o parâmetro K: ' );
parcial_k = (k/E_estacionario);
sensk = parcial_k *  diff(E_estacionario,k);
pretty(sensk);
disp('Sensibilidade do erro em regime permanente para o parâmetro b: ' );
parcial_b = (b/E_estacionario);
sensb = parcial_b *  diff(E_estacionario,b);
pretty(sensb)
```