Т. Н. Маслова, А. М. Суходский

СПРАВОЧНИК ШКОЛЬНИКА ПО МАТЕМАТИКЕ

5—11 классы

Москва
ОНИКС
Мир и Образование

УДК 51(075.3)(035)
ББК 22.1я72
М31

Маслова Т. Н.
М31 Справочник школьника по математике. 5—11 кл. / Т. Н. Маслова, А. М. Суходский. — М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008. — 672 с.: ил.

ISBN 978-5-488-01478-7 (ООО «Издательство Оникс»)
ISBN 978-5-94666-435-6 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

В справочнике в краткой и доступной форме излагается весь материал школьного курса математики для 5—11-х классов.

Пособие содержит большое количество примеров и задач с подробными решениями.

Справочник адресован учащимся общеобразовательных школ, лицеев и колледжей.

УДК 51(075.3)(035)
ББК 22.1я72

ISBN 978-5-488-01478-7
(ООО «Издательство Оникс»)
ISBN 978-5-94666-435-6
(ООО «Издательство «Мир и Образование»)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный справочник содержит как основной, так и дополнительный материал всех разделов школьного курса математики, изучаемого в 5—11 классах: математические понятия, определения, теоремы, формулы, свойства и т. д. Кроме того, в нем имеется довольно много подробно разобранных примеров и задач; при их решении зачастую используется не только материал того пункта, к которому относится рассматриваемый пример или задача, но и материал других разделов. Вместе с тем, доказательства теорем в справочнике не приводятся — эти доказательства можно найти в школьных учебниках по математике.

Весь материал, относящийся к тому или иному понятию, помещен компактно (в школьных пособиях это не всегда бывает так), что позволит вам быстро получить все необходимые сведения об интересующем вас понятии.

Изложенный в справочнике материал разбит на разделы, разделы — на параграфы, а параграфы — на довольно мелкие пункты (так вам будет удобнее отыскать нужную информацию). Нумерация разделов, параграфов и пунктов — сквозная по всей книге, а нумерация примеров — самостоятельная внутри каждого пункта. Теоремы нумеруются двумя цифрами: первая из них означает номер раздела, в котором сформулирована данная теорема, а вторая — порядковый номер теоремы в этом разделе. Например, Т.4.6 означает, что речь идет о теореме 6 из раздела IV. В книге приняты следующие обозначения: начало и конец решения примера отмечаются соответственно знаками ❑ и ■.

Для удобства пользования справочником в конце его помещены списки основных формул и основных обозначений, а также предметный указатель.

Справочник поможет вам:

— быстро найти нужную информацию о том или ином понятии, определении, свойстве, о той или иной формуле, теореме;

— повторить соответствующий материал при подготовке к уроку, к тестированию, к контрольной работе, к экзамену;

— вспомнить, как решаются типовые примеры и задачи школьного курса математики;

— подготовиться к вступительному экзамену или собеседованию по математике при поступлении в вуз или другое учебное заведение.

АЛГЕБРА

Раздел I

ЧИСЛА

§ 1. Натуральные числа

1. Запись натуральных чисел. Числа 1, 2, 3, 4, 5, ..., использующиеся для счета предметов или для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов, называются ***натуральными***. Любое натуральное число в десятичной системе счисления записывается с помощью ***цифр*** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Например, запись 2457 означает, что 2 — цифра тысяч, 4 — цифра сотен, 5 — цифра десятков и 7 — цифра единиц, т. е.

$$2457 = 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7.$$

Вообще, если a — цифра тысяч, b — цифра сотен, c — цифра десятков и d — цифра единиц, то имеем

$$a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d.$$

Используется также сокращенная запись $\overline{abcd}$ (написать $abcd$ нельзя, поскольку такая запись означает произведение чисел a, b, c, d).

В общей форме для m-значного числа a_m справедлива запись

$$a_m = c_1 \cdot 10^{m-1} + c_2 \cdot 10^{m-2} + \ldots + c_{m-1} \cdot 10 + c_m,$$

или

$$a_m = \overline{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} c_m},$$

где

$$c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}, c_m \text{ — цифры.}$$

2. Арифметические действия над натуральными числами. Результатом сложения или умножения двух натуральных чисел всегда является натуральное число: если m, n — натуральные числа, то $p = m + n$ также натуральное число, m и n — ***слагаемые***, p — ***сумма***; $p = mn$ также натуральное число, m, n — ***множители***, p — ***произведение***.

Справедливы следующие свойства:

1^0. $a + b = b + a$ (***переместительное свойство сложения***);

2^0. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (***сочетательное свойство сложения***);

3^0. $ab = ba$ (***переместительное свойство умножения***);

4^0. $(ab)\,c = a\,(bc)$ (***сочетательное свойство умножения***);

5^0. $a\,(b + c) = ab + ac$ (***распределительное свойство умножения относительно сложения***).

В результате вычитания или деления натуральных чисел не всегда получается натуральное число.

Если m, n, k — натуральные числа, то *при* $m - n = k$ говорят, что m — ***уменьшаемое***, n — ***вычитаемое***, k — ***разность***; при $m : n = k$ говорят, что m — ***делимое***, n — ***делитель***, k — ***частное***; число m называют также ***кратным*** числа n, а число n — ***делителем*** числа m. Если m — кратное числа n, то существует натуральное число k такое, что $m = kn$.

Из чисел с помощью знаков арифметических действий и скобок составляют ***числовые выражения***. Если в числовом выражении выполнить указанные действия, соблюдая принятый порядок, то получится число, которое называется ***значением выражения***.

Напомним порядок арифметических действий в числовом выражении: прежде всего выполняют действия в скобках; внутри любых скобок сначала выполняют умножение и деление, а затем сложение и вычитание. Например, если нужно найти значение выражения

$$(28 \cdot 93 + (1927 - 1873) \cdot 31) : 6 - 710,$$

то порядок действий таков:

$$(28 \overset{1}{\cdot} 93 \overset{4}{+} (1927 \overset{2}{-} 1873) \overset{3}{\cdot} 31) \overset{5}{:} 6 \overset{6}{-} 710.$$

3. Деление с остатком. Если натуральное число m не делится на натуральное число n, т. е. не существует такого натурального числа k, что $m = nk$, то рассматривают ***деление с остатком***. Например, при делении числа 43 на число 18 в частном получается 2 и в остатке 7, т. е. $43 = 18 \cdot 2 + 7$. В общем случае, *если m — **делимое**, n — **делитель** ($m > n$), p — **частное** и r — **остаток**, то*

$$m = np + r, \tag{1}$$

где $r < n$. Здесь m, n, p, r — натуральные числа (исключение составляет случай, когда m делится на n без остатка и $r = 0$). Например, если $n = 3$, а $r = 2$, то $m = 3p + 2$. Это формула чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2.

П р и м е р. Найти частное и остаток от деления числа 36 421 на число 25.

❑ Выполним деление «углом»:

$$\begin{array}{r|l}
-36421 & 25 \\ \cline{2-2}
\underline{25} & 1456 \\
-114 & \\
\underline{100} & \\
-142 & \\
\underline{125} & \\
-171 & \\
\underline{150} & \\
21 &
\end{array}$$

Итак, частное 1456, а остаток 21. Воспользовавшись равенством (1), можем записать:

$$36\,421 = 25 \cdot 1456 + 21.$$

Заметим, что этот пример можно решить и по-другому, не используя деление «углом», а непосредственно используя формулу (1). Имеем $36\,421 = 36\,400 + 21 = 25 \cdot 1456 + 21$. Значит, 1456 — частное, а 21 — остаток. ■

4. Разложение натурального числа на простые множители. Если число имеет только два делителя — само себя и единицу, то оно называется ***простым***; если число имеет более двух делителей, то оно называется ***составным***; число 1 не относят ни к простым, ни к составным. Так, число 37 простое, оно имеет только два делителя: 1 и 37; число 36 составное, оно имеет более двух делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Простое число 37 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел только одним способом (если не учитывать порядок множителей): $37 = 1 \cdot 37$; составное число 36 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел более чем одним способом: $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12$ и т. д. Однако в виде произведения простых множителей составное число 36 можно представить только одним способом: $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Т.1.1. *Любое составное число можно разложить на простые множители, причем только одним способом.*

Если в разложении числа на простые множители один и тот же множитель a встречается n раз, то записывают кратко: a^n, т. е. $\overline{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = a^n}$. Выражение a^n называют ***степенью***, a — ***основанием степени***, n — ***показателем степени***.

Поэтому можно записать:

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

5. Наибольший общий делитель нескольких натуральных чисел. Пусть даны числа 72 и 96. Выпишем все делители числа 72:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.$$

Выпишем все делители числа 96:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96.$$

Среди выписанных чисел есть одинаковые:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.$$

Все эти числа называют ***общими делителями*** чисел 72 и 96, а наибольшее из них — ***наибольшим общим делителем***.

Для любых заданных натуральных чисел a и b можно найти наибольший общий делитель. Он обозначается D (a, b) (читается: «D от a, b»). Если числа a и b таковы, что D (a, b) = 1, то они называются ***взаимно простыми***.

Например, взаимно простыми являются числа 72 и 35 (хотя каждое из них — составное число).

Чтобы найти наибольший общий делитель нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение общих простых множителей, взяв каждый из них с наименьшим (из имеющихся) показателем.

Пример. Найти D (3780, 7056).

❑ Имеем $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$, $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$. Тогда D (3780, 7056) $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$; взяты те простые множители, которые входят и в разложение числа 3780, и в разложение числа 7056. ■

6. Наименьшее общее кратное нескольких натуральных чисел. Пусть даны числа 12 и 18. Выпишем несколько чисел, кратных числу 12:

$$12, 24, 36, 48, 60, 72, \dots .$$

Выпишем числа, кратные 18:

$$18, 36, 54, 72, \dots .$$

Среди выписанных чисел есть одинаковые:

$$36, 72, \dots .$$

Такие числа называют ***общими кратными*** чисел 12 и 18, а наименьшее из них (число 36) — ***наименьшим общим кратным.***

Аналогично определяется наименьшее общее кратное произвольных чисел a и b, оно обозначается К (a, b) (читается: «К от a, b»). Любое общее кратное чисел a и b делится на К (a, b).

Чтобы найти наименьшее общее кратное нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение всех получившихся простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим (*из имеющихся*) *показателем.*

Пример. Найти К (3780, 7056).

❑ Имеем $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$; $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ (см. п. 5). Тогда К $(3780, 7056) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$, т. е. взяты все простые множители, которые входят в разложение хотя бы одного из чисел 3780 и 7056. Итак, К $(3780, 7056) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 105\,840$. ■

Для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство

$$\mathrm{D}\,(a, b) \cdot \mathrm{K}\,(a, b) = ab.$$

Если, в частности, числа a и b взаимно простые, т. е. D $(a, b) = 1$, то К $(a, b) = ab$. Это значит, что *наименьшее общее кратное двух взаимно простых* *чисел равно произведению этих чисел*. Например, К (15, 16) = 15 · 16 = 240.

7. Признаки делимости. В некоторых случаях, не выполняя деления натурального числа n на натуральное число a, можно ответить на вопрос, делится ли n на a без остатка или нет. Это достигается с помощью различных признаков делимости.

Иногда удобно пользоваться сокращенной записью $n \vdots a$, означающей, что натуральное число n делится на натуральное число a (без остатка).

Т.1.2. *Если в сумме натуральных чисел каждое слагаемое делится на натуральное число a, то и вся сумма делится на число a* (***теорема о делимости суммы***).

Кратко это можно записать так:

$$\text{если } m \vdots a,\ n \vdots a,\ k \vdots a, \text{ то и } (m+n+k) \vdots a.$$

Однако не следует считать, что если каждое слагаемое суммы не делится на какое-то число, то и сумма не делится на это число. Например, сумма 37 + 19 делится на 4, хотя ни 37, ни 19 не являются кратными числа 4. Вместе с тем, заметим, что если все слагаемые, кроме одного, делятся на некоторое число, то сумма не делится на это число.

Т.1.3. *Если в произведении хотя бы один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число* (***теорема о делимости произведения***).

Например, не выполняя умножения, можно утверждать, что произведение 105 · 48 · 93 · 54 делится на 5, так как 105 делится на 5.

Т.1.4. *Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2* (***признак делимости на 2***).

Т.1.5. *Натуральное число делится на* 5 *тогда и только тогда, когда его последняя цифра либо* 0, *либо* 5 (***признак делимости на*** **5**).

Т.1.6. *Натуральное число делится на* 10 *тогда и только тогда, когда его последняя цифра* 0 (***признак делимости на*** **10**).

Т.1.7. *Натуральное число, содержащее не менее трех цифр, делится на* 4 *тогда и только тогда, когда делится на* 4 *двузначное число, образованное последними двумя цифрами заданного числа* (***признак делимости на*** **4**).

Например, 4724 делится на 4, так как двузначное число 24 делится на 4; 4318 не делится на 4, поскольку двузначное число 18 не делится на 4.

Т.1.8. *Натуральное число, содержащее не менее трех цифр, делится на* 25 *тогда и только тогда, когда делится на* 25 *двузначное число, образованное последними двумя цифрами заданного числа* (***признак делимости на*** **25**).

Т.1.9. *Натуральное число делится на* 3 *тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на* 3 (***признак делимости на*** **3**).

Например, 27 426 делится на 3, поскольку сумма его цифр, т. е. число 21, делится на 3. В то же время 17 945 не делится на 3, так как сумма его цифр, т. е. число 26, не делится на 3.

Т.1.10. *Натуральное число делится на* 9 *тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на* 9 (***признак делимости на*** **9**).

Т.1.11. *Если натуральное число n имеет своими делителями числа a и b, то оно делится и на их наименьшее кратное.*

П р и м е р. Не выполняя деления, установить, делится ли 26 775 на 225.

❑ Найдем сумму цифр числа 26 775. Она равна 27. Так как $27 \vdots 9$, то по теореме 1.10 и $26\,775 \vdots 9$. Далее, так как $75 \vdots 25$ то по теореме 1.8 и $26\,775 \vdots 25$. Наконец, так как числа 9 и 25 взаимно простые, то К (9, 25) = 9 · 25 = 225 (см. п.6), а по теореме 1.11 заданное число 26 775 делится на К (a, b), т. е. на 225. ■

8. Употребление букв в алгебре. Переменные. В алгебре часто конкретные свойства чисел записывают с помощью букв. Например, переместительное свойство сложения записывают так: $a + b = b + a$, где вместо a и b можно подставить любые числа: $3 + 5 = 5 + 3$; $100 + 3501 = 3501 + 100$ и т. д. Число, подставляемое вместо буквы, называют ее ***значением***. В некоторых случаях (например, в уравнениях) вместо буквы можно подставить только определенные числа, чтобы написанное равенство было верным. Например, $7 + x = 10$ обращается в верное равенство лишь при $x = 3$. Употребляемые в алгебре буквы называют ***переменными***; смысл такого названия состоит в том, что числовое значение буквы можно изменить: например, в равенстве $a + b = b + a$ можно положить $a = 3$, $b = 5$, а можно $a = 7$, $b = 19$ и т. д. — во всех случаях равенство будет верно. В равенстве $7 + x = 10$ можно положить $x = 3$, а можно $x = 5$; разница в том, что в первом случае получается верное числовое равенство, а во втором — неверное.

§ 2. Рациональные числа

9. Обыкновенные дроби. Правильные и неправильные дроби. Смешанные числа. ***Обыкновенная дробь*** — это число вида $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа, например $\frac{12}{17}$, $\frac{15}{8}$. Число m называют ***числителем*** дроби, n — ***знаменателем***. В частности, может быть $n = 1$, в этом случае дробь имеет вид $\frac{m}{1}$, но чаще пишут просто m. Это означает, что *всякое натуральное число можно представить в виде обыкновенной дроби со знаменателем* 1. Запись $\frac{m}{n}$ — другой вариант записи $m : n$.

Среди обыкновенных дробей различают правильные и неправильные. Дробь $\frac{m}{n}$ называется ***правильной***, если ее числитель меньше знаменателя, и ***неправильной***, если ее числитель больше знаменателя или равен ему.

Всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы натурального числа и правильной дроби (или в виде натурального числа, если дробь $\frac{m}{n}$ такова, что m кратно n).

Например, $\frac{43}{13} = \frac{39 + 4}{13} = \frac{39}{13} + \frac{4}{13} = 3 + \frac{4}{13}$.

Принято сумму натурального числа и правильной дроби записывать без знака сложения, т. е. вместо $3 + \frac{4}{13}$ пишут $3\frac{4}{13}$. Число, записанное в таком виде, называется ***смешанным***. Оно состоит из двух частей: ***целой*** и ***дробной***. Так, для числа $3\frac{4}{13}$ целая часть равна 3, а дробная равна $\frac{4}{13}$. Всякую неправильную дробь можно записать в виде смешанного числа (или в виде натурального числа). Верно и обратное: всякое смешанное или натуральное число можно записать в виде неправильной дроби. Например,

$$4\frac{1}{3} = 4 + \frac{1}{3} = \frac{12}{3} + \frac{1}{3} = \frac{13}{3};\ 3 = \frac{3}{1}.$$

10. Равенство дробей. Основное свойство дроби. Сокращение дробей. Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ считаются ***равными***, если $ad = bc$. Например, равными являются дроби $\frac{3}{5}$ и $\frac{9}{15}$ (так как $3 \cdot 15 = 5 \cdot 9$), $\frac{12}{7}$ и $\frac{24}{14}$ (поскольку $12 \cdot 14 = 7 \cdot 24$).

Из определения равенства дробей следует, что дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{am}{bm}$ равны, так как $a\,(bm) = b\,(am)$, здесь использованы сочетательное и переместительное свойства умножения натуральных чисел (см. п. 2). Значит, $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$, т. е. *если числитель и знаменатель данной дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной*. Это свойство называется ***основным свойством дроби***.

Пользуясь основным свойством дроби, иногда можно заменить данную дробь другой, равной данной, но с меньшим числителем и меньшим знаменателем. Такую замену называют ***сокращением дроби***. Например, $\frac{45}{60}=\frac{15}{20}$ (числитель и знаменатель мы разделили на одно и то же число 3); полученную дробь снова можно сократить, разделив числитель и знаменатель на 5, т. е. $\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.

В общем случае сокращение дроби возможно, если числитель и знаменатель — не взаимно простые числа (см. п. 5); если же числитель и знаменатель — взаимно простые числа, то дробь называется ***несократимой***: например, $\frac{3}{4}$ — несократимая дробь. Основная цель сокращения дроби — замена данной дроби равной ей несократимой дробью.

11. Приведение дробей к общему знаменателю. Пусть даны дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{15}{8}$. Они имеют разные знаменатели: 3 и 8, но, воспользовавшись основным свойством дроби (см. п. 10), можно заменить эти дроби другими, равными им, причем такими, что у полученных дробей будут одинаковые знаменатели. Такое преобразование называется ***приведением дробей к общему знаменателю***.

Привести дроби к общему знаменателю можно многими способами, но обычно стараются привести дроби к ***наименьшему общему знаменателю***, который равен наименьшему общему кратному знаменателей данных дробей.

П р и м е р. Привести к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{7}{24}$ и $\frac{11}{30}$.

❑ Найдем наименьшее общее кратное чисел 24 и 30, т. е. К (24, 30) = 120 (см. п. 6). Имеем 120 : 24 = = 5, поэтому чтобы привести дробь $\frac{7}{24}$ к знаменателю 120, надо ее числитель и знаменатель умножить на 5; значит, $\frac{7}{24} = \frac{7 \cdot 5}{24 \cdot 5} = \frac{35}{120}$.

Далее имеем 120 : 30 = 4, поэтому чтобы привести дробь $\frac{11}{30}$ к знаменателю 120, надо ее числитель и знаменатель умножить на 4; тогда $\frac{11}{30} = \frac{11 \cdot 4}{30 \cdot 4} = \frac{44}{120}$. Таким образом, дроби приведены к общему знаменателю: $\frac{7}{24} = \frac{35}{120}$; $\frac{11}{30} = \frac{44}{120}$. ■

Числа 5 и 4 называют ***дополнительными множителями*** соответственно для первой и второй дроби. Используется следующая запись:

$$\frac{7}{24} = \frac{7^{5}}{24} = \frac{35}{120}; \quad \frac{11}{30} = \frac{11^{4}}{30} = \frac{44}{120}.$$

Итак, чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, нужно:

1) найти наименьшее общее кратное знаменателей дробей;

2) вычислить дополнительные множители, разде-

лив наименьшее общее кратное на каждый знаменатель;

3) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на соответствующий дополнительный множитель.

12. Арифметические действия над обыкновенными дробями. Сложение обыкновенных дробей выполняют так:

а) если знаменатели дробей одинаковы, то к числителю первой дроби прибавляют числитель второй дроби и оставляют тот же знаменатель, т. е.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b};$$

б) если знаменатели дробей различны, то сначала приводят дроби к общему знаменателю, предпочтительнее к наименьшему, а затем применяют правило а).

Например,

$$\frac{7}{24}+\frac{11}{30}=\frac{7^{5}}{24}+\frac{11^{4}}{30}=\frac{35}{120}+\frac{44}{120}=\frac{35+44}{120}=\frac{79}{120}.$$

Вычитание обыкновенных дробей выполняют следующим образом:

а) если знаменатели дробей одинаковы, то

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b};$$

б) если знаменатели различны, то сначала приводят дроби к общему знаменателю, а затем применяют правило а).

Умножение обыкновенных дробей выполняют так:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

т. е. перемножают отдельно числители, отдельно знаменатели, первое произведение делают числителем, второе — знаменателем.

Например, $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{11}=\frac{3\cdot 2}{7\cdot 11}=\frac{6}{77}$.

Деление обыкновенных дробей выполняют так:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc},$$

т. е. делимое $\frac{a}{b}$ умножают на дробь $\frac{d}{c}$, обратную делителю $\frac{c}{d}$.

Например, $\frac{2}{3}:\frac{7}{10}=\frac{2}{3}\cdot\frac{10}{7}=\frac{2\cdot 10}{3\cdot 7}=\frac{20}{21}$.

П р и м е р 1. Найти значение числового выражения

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{12}{5}+\frac{7}{8}:\frac{5}{6}-\frac{11}{30}.$$

❑ 1) $\frac{4}{9}\cdot\frac{12}{5}=\frac{4\cdot 12}{9\cdot 5}$. Сократив числитель и знаменатель на 3 (это полезно сделать до выполнения умножения в числителе и знаменателе), получим $\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}$, т. е. $\frac{16}{15}$. Значит, $\frac{4}{9}\cdot\frac{12}{5}=\frac{16}{15}$.

2) $\frac{7}{8}:\frac{5}{6}=\frac{7\cdot 6}{8\cdot 5}=\frac{7\cdot 3}{4\cdot 5}=\frac{21}{20}$.

3) При нахождении значения выражения $\frac{16}{15}+$

$+\dfrac{21}{20}-\dfrac{11}{30}$ сложение и вычитание можно выполнять одновременно. Наименьшим общим кратным чисел 15, 20, 30 является число 60. Приведем все три дроби к знаменателю 60, использовав дополнительные множители: для первой дроби 4, для второй 3, для третьей 2. Получим

$$\frac{16^{4)}}{15}+\frac{21^{3)}}{20}-\frac{11^{2)}}{30}=\frac{64}{60}+\frac{63}{60}-\frac{22}{60}=\frac{64+63-22}{60}=$$

$$=\frac{105}{60}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}.\ \blacksquare$$

П р и м е р 2. Выполнить действия:

а) $2\dfrac{1}{7}+3\dfrac{2}{3}$; б) $1\dfrac{2}{5}\cdot 2\dfrac{1}{7}$.

❑ а) Обратим сначала каждое из данных смешанных чисел в неправильную дробь, а затем выполним сложение:

$$2\frac{1}{7}=2+\frac{1}{7}=\frac{14}{7}+\frac{1}{7}=\frac{15}{7};\ 3\frac{2}{3}=3+\frac{2}{3}=\frac{9}{3}+\frac{2}{3}=\frac{11}{3};$$

$$\frac{15}{7}+\frac{11}{3}=\frac{15^{3)}}{7}+\frac{11^{7)}}{3}=\frac{45}{21}+\frac{77}{21}=\frac{122}{21}.$$

Обратим теперь неправильную дробь $\dfrac{122}{21}$ в смешанное число:

$$\frac{122}{21}=\frac{105+17}{21}=\frac{105}{21}+\frac{17}{21}=5+\frac{17}{21}=5\frac{17}{21}.$$

б) В случае умножения и деления смешанных чисел всегда переходят к неправильным дробям:

$1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}$; $2\frac{1}{7} = \frac{15}{7}$. Значит, $1\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{7} = \frac{7}{5} \cdot \frac{15}{7} = \frac{7 \cdot 15}{5 \cdot 7} = 3$. ■

13. Десятичные дроби. В виде ***десятичной дроби*** можно записать правильную дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 и вообще 10^n. Например, $\frac{3}{10} = 0{,}3$; $\frac{48}{100} = 0{,}48$; $\frac{21}{1000} = 0{,}021$. Таким же образом можно записать смешанное число или неправильную дробь с указанным выше знаменателем (превратив ее предварительно в смешанное число). Например, $2\frac{3}{10} = 2{,}3$; $\frac{317}{100} = 3\frac{17}{100} = 3{,}17$. В этих случаях целую часть смешанного числа отделяют запятой от числителя дробной части. Значит, десятичная дробь — это, по существу, другая форма записи дроби со знаменателем 10^n.

В виде десятичной дроби можно представить любую обыкновенную дробь, знаменатель которой является делителем некоторой степени числа 10. Например, 125 — делитель числа 1000, поэтому дробь $\frac{196}{125}$ можно представить в виде десятичной:

$$\frac{196}{125} = \frac{196 \cdot 8}{125 \cdot 8} = \frac{1568}{1000} = 1{,}568.$$

Общий вывод о представлении обыкновенной дроби в виде десятичной таков: *если в разложении знаменателя дроби на простые множители содержатся только двойки и пятерки, то эту дробь можно записать в виде десятичной; если же дробь несократима и в разложение ее знаменателя на простые множители входят, кроме двоек и пятерок, другие* *простые множители, то эту дробь нельзя записать в виде десятичной.*

Рассмотрим десятичную дробь 7,234. Имеем

$$7{,}234 = 7\frac{234}{1000} = 7 + \frac{200 + 30 + 4}{1000} = 7 + \frac{200}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{4}{1000} = 7 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000}.$$

Данную дробь можно записать так:

$$7{,}234 = 7\frac{234}{1000} = 7\frac{2340}{10\,000} = 4\frac{23\,400}{100\,000}.$$

Но $7\frac{2340}{10\,000} = 7{,}2340$, а $7\frac{23\,400}{100000} = 7{,}23400$. Значит, $7{,}234 = 7{,}2340 = 7{,}23400$. Таким образом, *если к десятичной дроби приписать справа нуль или несколько нулей, то получится равная ей дробь. Если десятичная дробь оканчивается одним или несколькими нулями, то эти нули можно отбросить — получится равная ей дробь.*

Для десятичных дробей вводится понятие значащей цифры числа. ***Значащими цифрами*** числа называют все его цифры, кроме нулей, стоящих в начале. Например, в числе 23,4009 шесть значащих цифр; в числе 0,1023 четыре значащих цифры: 1, 0, 2, 3; в числе 0,0004 одна значащая цифра: 4.

14. Арифметические действия над десятичными дробями. При сложении десятичных дробей надо записать их одну под другой так, чтобы одинаковые разряды были друг под другом, а запятая — под запятой, и сложить дроби так, как складывают натуральные числа. Сложим, например, дроби 12,7 и 3,442. Первая дробь содержит одну цифру после запятой, а вторая — три. Чтобы выполнить сложение, преобразуем первую дробь так, чтобы после запятой было три цифры: 12,7 = 12,700, тогда

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 12{,}700 \\ 3{,}442 \end{array} \\ \hline 16{,}142 \end{array}$$

Аналогично выполняется вычитание десятичных дробей.

При умножении десятичных дробей достаточно перемножить заданные числа, не обращая внимания на запятые (как натуральные числа), а затем в результате справа отделить запятой столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях суммарно.

Например, умножим 2,7 на 1,3. Имеем $27 \cdot 13 = 351$. Отделим запятой справа две цифры (сумма цифр у множителей после запятой равна двум). В итоге получаем $2{,}7 \cdot 1{,}3 = 3{,}51$.

Если в произведении получается меньше цифр, чем надо отделить запятой, то впереди пишут недостающие нули, например:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 2{,}12 \\ 0{,}13 \end{array} \\ \hline 636 \\ 212 \\ \hline 0{,}2756 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 3{,}43 \\ 0{,}0002 \end{array} \\ \hline 0{,}000686 \end{array}$$

Рассмотрим умножение десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д. Пусть нужно умножить дробь 12,733 на 10. Имеем $12\,733 \cdot 10 = 127\,330$. Отделив запятой справа три цифры, получим $12{,}733 \cdot 10 = 127{,}330$. Но $127{,}330 = 127{,}33$. Значит, $12{,}733 \cdot 10 = 127{,}33$. Таким образом, умножение десятичной дроби на 10 сводится к переносу запятой на одну цифру вправо.

Вообще, *чтобы умножить десятичную дробь на* 10, 100, 1000, *надо в этой дроби перенести запятую на одну, две, три цифры вправо* (*приписав в случае необходимости к дроби справа определенное количество нулей*). Например, 1,47 · 10 000 = 14 700.

Деление десятичной дроби на натуральное число выполняется так же, как деление натурального числа на натуральное, а запятую в частном ставят после того, как закончено деление целой части. Пусть надо разделить 22,1 на 13; имеем

$$\begin{array}{r|l} 22{,}1 & 13 \\ \underline{13} & 1{,}7 \\ 91 & \\ \underline{91} & \\ 0 & \end{array}$$

Если целая часть делимого меньше делителя, то в ответе получается нуль целых; так, 0,221 : 13 = 0,017.

Рассмотрим теперь деление десятичной дроби на десятичную. Пусть нужно разделить 2,576 на 1,12. Для этого и в делимом, и в делителе перенесем запятую вправо на столько цифр, сколько их имеется после запятой в делителе (в данном случае — на две). Иными словами, умножим делимое и делитель на 100 — от этого частное не изменится. Тогда нужно разделить дробь 257,6 на натуральное число 112, т. е. задача сводится к уже рассмотренному случаю:

$$\begin{array}{r|l} 257{,}6 & 112 \\ \underline{224} & 2{,}3 \\ 336 & \\ \underline{336} & \\ 0 & \end{array}$$

Чтобы разделить десятичную дробь на 10^n, *надо в этой дроби перенести запятую на n цифр влево* (*при этом в случае необходимости слева приписывается нужное число нулей*). Так, $27{,}344 : 10^4 = 0{,}0027344$.

Деление десятичных дробей, как и деление натуральных чисел, не всегда выполнимо. Пусть нужно разделить 2,8 на 0,09. Имеем $280 : 9 = 31{,}11\ldots$. В результате получается так называемая бесконечная десятичная дробь (см. п. 16). В таких случаях, как правило, переходят к обыкновенным дробям. Например,

$$2{,}8 : 0{,}09 = \frac{28}{10} : \frac{9}{100} = \frac{28 \cdot 100}{10 \cdot 9} = \frac{280}{9} = 31\frac{1}{9}.$$

15. Проценты. Среди десятичных дробей особенно часто на практике используют дробь 0,01, которая называется ***процентом*** и обозначается 1%. Так, 1% = 0,01, 2% = 0,02, 45% = 0,45, 350% = 3,5 и т. д.

П р и м е р 1. Рабочий должен был изготовить за смену 80 деталей. По окончании рабочего дня оказалось, что он выполнил 150% сменного задания. Сколько деталей изготовил рабочий?

❑ Так как 150% = 1,5, то рабочий изготовил $80 \times 1{,}5 = 120$ (деталей). ■

П р и м е р 2. Рабочий к 12 часам изготовил 55 деталей, что составило 68,75% сменного задания. Сколько деталей он должен изготовить за смену?

❑ Обозначим количество деталей, составляющих сменное задание, через x. Из условия следует, что $68{,}75\% \cdot x = 55$, т. е. что $\frac{68{,}75}{100} \cdot x = 55$, откуда

$$x = \frac{100 \cdot 55}{68{,}75} = 80 \text{ (деталей).}$$ ■

16. Обращение обыкновенной дроби в бесконечную десятичную периодическую дробь. Пусть дана десятичная дробь 2,73. Ее значение не изменится, если справа приписать любое число нулей (см. п.13): $2{,}73 = 2{,}730 = 2{,}7300 = \ldots = 2{,}73000\ldots0$. Допускают также запись дроби 2,73 в виде десятичной дроби с бесконечным множеством нулей, т. е. $2{,}73 = 2{,}73000\ldots$. Здесь после запятой содержится бесконечно много десятичных знаков. Такая десятичная дробь называется ***бесконечной десятичной дробью***.

Т.1.12. *Любую обыкновенную дробь можно представить в виде бесконечной десятичной дроби.*

Возьмем, например, число $\frac{3}{14}$ и будем делить числитель на знаменатель, постепенно получая десятичные знаки:

$$
\begin{array}{l|l}
-\,3{,}00000000\ldots & \;14 \\ \cline{2-2}
\;\;\underline{28} & 0{,}214285714\ldots \\
\;\;-\,20 & \\
\;\;\;\;\underline{14} & \\
\;\;\;\;-\,60 & \\
\;\;\;\;\;\;\underline{56} & \\
\;\;\;\;\;\;-\,40 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{28} & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;-\,120 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{112} & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;-\,80 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{70} & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;-\,100 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{98} & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;-\,20 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\underline{14} & \\
\;60\ldots &
\end{array}
$$

Таким образом, $\dfrac{3}{14} = 0{,}214285714\ldots$.

Выпишем последовательно остатки, которые получились при выполнении операции деления:

$$2, 6, 4, 12, 8, 10, 2, 6, \ldots .$$

Все эти остатки меньше делителя, т. е. меньше числа 14. Это значит, что на каком-то шаге деления должен неизбежно появиться снова такой остаток, который уже встречался ранее. Так, на седьмом шаге появился остаток 2, который был на первом шаге. Кроме того, ясно, что как только появится остаток, который уже встречался, за ним пойдут остатки в той же последовательности, которая была ранее.

Периодически повторяющиеся группы остатков приведут к периодически повторяющейся группе цифр в десятичной записи числа:

$$\frac{3}{14} = 0{,}2142857142857142857\ldots.$$

Последовательно повторяющаяся группа цифр (минимальная) в записи бесконечной десятичной дроби после запятой называется ***периодом***, а бесконечная десятичная дробь, имеющая такой период в своей записи, называется ***периодической***. Для краткости принято период записывать один раз, заключая его в круглые скобки:

$$0{,}2142857142857142857\ldots = 0{,}2(142857).$$

Если период начинается сразу после запятой, то дробь называется ***чистой периодической***; если же между запятой и периодом есть другие десятичные знаки, то дробь называется ***смешанной периодической***. Так, $2{,}(23) = 2{,}2323232323\ldots$ — чистая периодическая дробь; 2,73 = 2,73666... = 2,73(6) — смешанная периодическая дробь.

17. Обращение бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную дробь. Чтобы бесконечную десятичную дробь умножить на 10, 100, 1000 и т. д., достаточно, как и в конечной десятичной дроби, перенести запятую на один, два, три и т. д. знака вправо. Так, $0,1(23) \cdot 100 = 0,1232323\ldots \times 100 = 12,323232\ldots = 12,(32)$.

П р и м е р. Обратить в обыкновенную дробь число: а) 0,(13); б) 0,2(54).

❑ а) Положим $x = 0,(13) = 0,131313\ldots$.Умножим эту чистую периодическую дробь x на такое число, чтобы запятая переместилась ровно на период вправо. Поскольку в периоде две цифры, надо перенести запятую на две цифры вправо, а для этого достаточно умножить число x на 100, тогда $100x = 0,131313\ldots \cdot 100 = 13,1313\ldots = 13,(13)$. Теперь вычтем x из $100x$, получим $100x - x = 13,(13) - 0,(13)$. Значит, $99x = 13$, откуда находим $x = \dfrac{13}{99}$.

б) Положим $x = 0,2(54)$. Перенесем в этой смешаной периодической дроби запятую вправо так, чтобы получилась чистая периодическая дробь. Для этого достаточно x умножить на 10, получим $10x = 2,(54)$.

Положим $y = 2,(54)$ и обратим эту чистую периодическую дробь в обыкновенную так, как мы это делали ранее. Имеем

$$100y = 254,(54);\ 100y - y = 254,(54) - 2,(54);$$

$$99y = 252;\ y = \frac{252}{99} = \frac{28}{11}.$$

Значит, $10x = \frac{28}{11}$, откуда $x = \frac{28}{11 \cdot 10} = \frac{14}{55}$. ■

18. Координатная прямая. Проведем прямую l, отметим на ней точку O, которую примем за начало отсчета, выберем направление и единичный отрезок $[0, 1]$ (рис. 1).

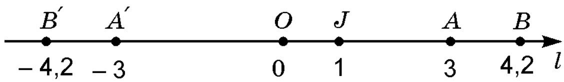


Рис. 1

В этом случае говорят, что задана ***координатная прямая***. Каждому натуральному числу или дроби соответствует одна точка прямой l. Пусть, например, дано число 3. Отложим от точки O в заданном направлении единичный отрезок три раза, получим точку A — она и соответствует числу 3. Аналогично, если дано число 4,2, то отложив от точки O в заданном направлении единичный отрезок четыре раза, а затем еще 0,2 части этого отрезка, получим точку B — она и соответствует числу 4,2.

Если точка M прямой l соответствует некоторому числу r, то это число называют ***координатой точки*** и пишут $M(r)$. Так, для точек J, A, B (рис. 1) можно указать их координаты: $J(1)$, $A(3)$, $B(4{,}2)$. Координатой точки O считается число нуль.

Отложим теперь три раза единичный отрезок от точки O в направлении, противоположном заданному. Получим точку A', симметричную точку A относительно начала отсчета O. Координатой точки A

является число 3, а координату точки A' записывают -3 и читают: «минус 3». Аналогично, координата точки B', симметричной точке B (рис. 1), есть число $-4{,}2$. Числа 3 и -3, 4,2 и $-4{,}2$ называют ***противоположными***. Числа, которым соответствуют точки, расположенные на координатной прямой в заданном направлении, называют ***положительными***; так, 1, 3, 4,2 — положительные числа. Числа, которым соответствуют точки, расположенные на координатной прямой в направлении, противоположном заданному, называют ***отрицательными***; так, -3, $-4{,}2$ — отрицательные числа. Число 0 не считается ни положительным, ни отрицательным.

Заданное направление на координатной прямой называют ***положительным*** (обычно оно идет вправо), а направление, противоположное заданному, — ***отрицательным***.

19. Множество рациональных чисел. Натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5,... называют также положительными целыми числами. Числа -1, -2, -3, -4, -5, ..., противоположные натуральным, называют отрицательными целыми числами. Число 0 также считают целым числом. Итак, ***целые числа*** — это натуральные числа, числа, противоположные натуральным, и число 0.

Целые числа и дроби (положительные и отрицательные) составляют вместе множество ***рациональных чисел***.

Заметим, что любое рациональное число можно представить в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное число, причем одно и то же число можно записать в виде отношения многими способами.

Например:

$$-2=\frac{-4}{2}=\frac{-6}{3}=\frac{-100}{50};\ \ 0{,}3=\frac{3}{10}=\frac{6}{20}=\frac{300}{1000}.$$

Среди дробей, обозначающих данное рациональное число, имеется одна и только одна несократимая дробь. Для целых чисел — это дробь со знаменателем 1.

§ 3. Действительные числа

20. Иррациональные числа. Для измерения используются не только рациональные числа, но и числа иной природы, т. е. не являющиеся целыми или дробными. Все такие числа называются ***иррациональными***. Например, длина диагонали квадрата со стороной 1 (рис. 2, *а*) должна выражаться некоторым положительным числом r, таким, что $r^2 = 1^2 + 1^2$ (по теореме Пифагора, см. п. 275), т. е. таким, что $r^2 = 2$. Число r не может быть целым, так как $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $3^2 = 9$ и т. д. Число r не может быть и дробным: если $r=\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, где $n \neq 1$, то $r^2=\frac{m^2}{n^2}$ — также несократимая дробь, где $n^2 \neq 1$; значит, $\frac{m^2}{n^2}$ не является целым числом, а потому не может быть равным 2. Поэтому длина диагонали квадрата выражается иррациональным числом, которое обозначается $\sqrt{2}$ (читается: «квадратный корень из двух»). На рис. 2, *б* изображена координатная прямая l, $OABJ$ — квадрат, $OC = OB = OD$. Тогда координатой точки C является число $\sqrt{2}$, а коорди-

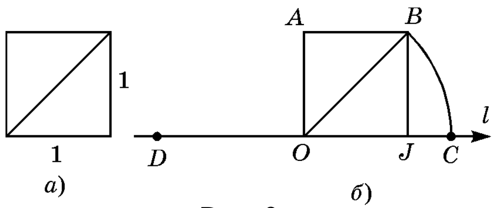


Рис. 2

натой точки D — число $-\sqrt{2}$. Обе точки C и D имеют иррациональные координаты.

Так как любое рациональное число можно записать в виде бесконечной десятичной дроби (см. п. 16) и в свою очередь любая бесконечная десятичная периодическая дробь представляет собой рациональное число (см. п. 17), то *каждое иррациональное число можно записать в виде бесконечной десятичной дроби и в свою очередь любая бесконечная десятичная непериодическая дробь есть иррациональное число.*

21. Множество действительных чисел. Числовая прямая. Рациональные и иррациональные числа составляют вместе множество ***действительных чисел***. Каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой. Каждая точка координатной прямой соответствует единственному действительному числу (достаточно найти расстояние до этой точки от начала отсчета и поставить перед найденным числом знак «+» или «−» в зависимости от того, справа или слева от начала отсчета находится заданная точка).

Множество действительных чисел называют также ***числовой прямой***. Геометрической моделью числовой прямой служит координатная прямая.

22. Числовая плоскость. Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве. Под ***парой чисел*** обычно понимают два числа, которые рассматриваются в определенном порядке (упорядоченная пара). Множество всех пар действительных чисел называют ***числовой плоскостью***.

Как для множества всех действительных чисел (или числовой прямой) есть геометрическая модель — координатная прямая (см. пп. 18 и 21), так и для множества всех пар действительных чисел (числовой плоскости) есть геометрическая модель — координатная плоскость. ***Координатная плоскость*** xOy определяется двумя взаимно перпендикулярными прямыми с общим началом O и одинаковым масштабом (рис. 3). Точка O называется ***началом координат***. Горизонтальная прямая называется ***осью абсцисс*** или осью Ox, вертикальная — ***осью ординат*** или осью Oy. Говорят, что эти оси образуют ***прямоугольную декартову систему координат на плоскости***.

Каждой точке плоскости xOy соответствует пара чисел — координат этой точки относительно данной кооординатной системы. Рассмотрим прямоугольные проекции точки M на оси Ox и Oy (рис. 3); соответ-

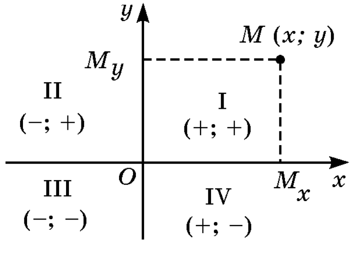


Рис. 3

ствующие точки на осях Ox и Oy обозначены через M_x и M_y. Точка M_x имеет координату (***абсциссу***) x, точка M_y — координату (***ординату***) y. Эти два числа, записанные в указанном порядке, называют ***координатами*** точки M и пишут $M\ (x;\ y)$.

Оси координат делят координатную плоскость на четыре ***координатные четверти*** (***квадранты***), которые нумеруются римскими цифрами (см. рис. 3). Знаки координат точки в зависимости от того, в каком квадранте она лежит, указаны на рис. 3.

Точки, лежащие на оси Ox, имеют ординату y, равную нулю; точки на оси Oy — абсциссу x, равную нулю.

Аналогично вводится ***прямоугольная декартова система координат в пространстве***. Для этого возьмем три попарно перпендикулярные прямые с общим началом O и одинаковым масштабом (рис. 4, *а*). Проведем через каждую пару этих прямых плоскость. Плоскость, проходящая через прямые Ox и Oy, называется плоскостью xOy, а две другие — плоскостями xOz и yOz. Точка O называется ***началом координат***, прямые Ox, Oy, и Oz — ***координатными осями***, а плоскости xOy, xOz и yOz — ***координатными плоскостями***. При этом ось Ox называется ***осью абсцисс***, ось Oy— ***осью ординат***, а ось Oz — ***осью аппликат***.

Возьмем произвольную точку M и проведем через нее плоскость, параллельную плоскости yOz (рис. 4, *б*); тогда построенная плоскость пересечет ось Ox в точке M_x.

Координатой x точки M является число, равное по модулю длине отрезка OM_x (оно положительно, если M_x лежит на положительной полуоси, и отрицательно, если M_x лежит на отрицательной полуоси). Аналогично определяются координаты y и z точки M.

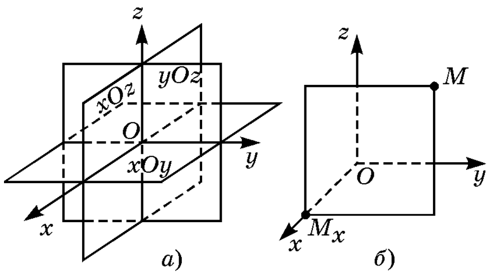


Рис. 4

Точку M с координатами x, y, z будем записывать так: M (x; y; z), причем x называется ***абсциссой***, y — ***ординатой***, а z — ***аппликатой***.

Итак, каждой точке M в пространстве соответствуют три числа, взятые в определенном порядке, — ***координаты*** точки M в пространстве.

23. Полярная система координат. Положение точки на плоскости можно задать не только ее декартовыми прямоугольными координатами x, y, но и другими способами. Соединим, например, точку M с началом O (рис. 5) и рассмотрим следующие два числа: длину отрезка $OM = r$ и угол φ наклона этого отрезка к положительному направлению оси Ox (этот угол считается положительным, если поворот от оси Ox до ее совмещения с направлением OM происходит против часовой стрелки, и отрицательным в противном случае). Отрезок $r = OM$ называется ***полярным радиусом*** точки M, угол φ — ее ***полярным углом***, пара чисел (r; φ) — ее ***полярными координатами***, точка O — ***полюсом***, ось Ox — ***полярной осью***. Такая система координат называется ***полярной***.

На рис. 5 изображены точки, заданные полярными координатами: $A(1;0)$, $B\left(\frac{3}{5};\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(\frac{1}{2};\ \frac{3\pi}{4}\right)$, $D\left(\frac{3}{5};\ \pi\right)$.

Зная полярные координаты точки, можно найти ее декартовы координаты по формулам

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \tag{1}$$

непосредственно вытекающим из определения тригонометрических функций (см. п. 118). Наоборот, если известны декартовы координаты точки, то ее полярные координаты находятся по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{r} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{2}$$

П р и м е р. Найти полярные координаты точки $M(-4;\ 4\sqrt{3})$.

❑ Используя первую из формул (2), находим $r = \sqrt{(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = 8$. Далее, согласно второй и третьей формулам (2), имеем $\cos\varphi = \frac{-4}{8} = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда следует, что $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Итак, $M\left(8;\ \frac{2\pi}{3}\right)$. ■

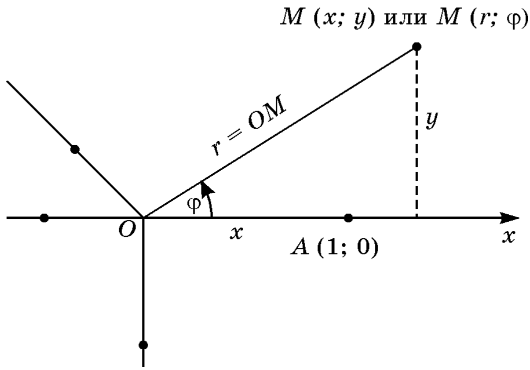


Рис. 5

24. Обозначения некоторых числовых множеств. Основные понятия, связанные с множествами. Приведем обозначения часто встречающихся числовых множеств:

$\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел;
$\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел;
$\boldsymbol{Q}$ — множество рациональных чисел;
$\boldsymbol{I}$ — множество иррациональных чисел;
$\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел;
$\boldsymbol{C}$ — множество комплексных чисел (см. п. 45).

Если a является элементом множества A, то говорят, что a принадлежит множеству A и пишут $a \in A$ ($\in$ — ***знак принадлежности***). В противном случае, т. е. если a не является элементом множества A, пишут $a \notin A$. Так, например, $5 \in \boldsymbol{N}$, а $0 \notin \boldsymbol{N}$; $-5 \in \boldsymbol{Z}$, а $1{,}4 \notin \boldsymbol{Z}$; $\frac{2}{3} \in \boldsymbol{Q}$, а $\sqrt{2} \notin \boldsymbol{Q}$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** (обозначение: $\varnothing$). Например, пустым является множество точек пересечения двух параллельных прямых или множество действительных корней уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Множество B называется ***подмножеством*** множества A, если любой элемент множества B принадлежит множеству A. В этом случае пишут $B \subset A$ ($\subset$ — ***знак включения***). Например, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{R}$.

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B. В этом случае пишут: $A \cup B$ ($\cup$ — ***знак объединения***). Например, $\boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I} = \boldsymbol{R}$.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат каждому из множеств A и B. В этом случае пишут: $A \cap B$ ($\cap$ — ***знак пересечения***). Например, $\boldsymbol{N} \cap \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{I} = \varnothing$.

25. Сравнение действительных чисел. Для любых неравных действительных чисел a и b можно сказать, какое больше, а какое меньше.

Говорят, что число a ***больше*** числа b, и пишут $a > b$, если разность $a - b$ — положительное число; если разность $a - b$ — отрицательное число, то говорят, что число a ***меньше*** числа b, и пишут $a < b$. Согласно этому определению любое положительное число больше нуля, любое отрицательное число меньше нуля и меньше любого положительного числа. Для любых заданных чисел a и b верно одно и только одно из соотношений $a > b$, $a < b$, $a = b$.

Геометрически неравенство $a < b$ ($a > b$) означает, что точка a расположена на координатной прямой левее (правее) точки b.

Знаки $<$, $>$ называются ***знаками строгих неравенств***. Иногда используются ***знаки нестрогих неравенств*** $\geq, \leq$; запись $a \leq b$ означает, что верно одно из двух: или число a меньше числа b, или число a равно числу b. Например, $3 \leq 5$, $5 \geq 5$ — верные неравенства. Неравенства $a > b$ и $c > d$ называются ***неравенствами одного знака***; неравенства $a > b$ и $c < d$ называются ***неравенствами противоположных знаков***. Если числа a, b, c таковы, что $a < b$ и $b < c$, то используют запись $a < b < c$, которую называют ***двойным неравенством***.

26. Свойства числовых неравенств. Для любых действительных чисел a, b, c, d выполняются следующие свойства:

1^0. Если $a > b$, то $b < a$.

2^0. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (***свойство транзитивности***).

3^0. Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

4^0. Если $a > b$ и c — положительное число ($c > 0$), то $ac > bc$ (*если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство*).

5^0. Если $a > b$ и c — отрицательное число ($c < 0$), то $ac < bc$ (*если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и изменить знак исходного неравенства на противоположный, то получится верное неравенство*).

6^0. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$ (*если почленно сложить два верных неравенства одного знака, то получится верное неравенство*).

7^0. Если a, b, c, d — положительные числа, причем $a > b$ и $c > d$, то $ac > bd$ (*если почленно перемножить верные неравенства одного знака, левые и правые части которых положительные числа, то получится верное неравенство*).

8^0. Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.

9^0. Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

10^0. Если $a > b > 0$, то $a^n > b^n$ для любого натурального числа n.

27. Числовые промежутки. Возьмем два числа a и b такие, что $a < b$, и отметим на координатной прямой соответствующие им точки.

Множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, обозначают (a, b) и называют ***интервалом***.

Множество всех чисел x, каждое из которых удовлетворяет неравенствам $a \le x \le b$, обозначают $[a, b]$ и называют ***отрезком***.

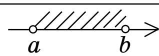
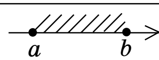
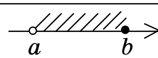
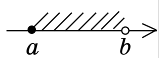
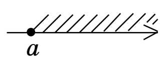
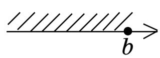
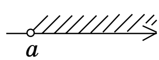
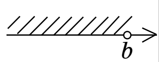
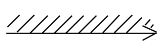
Интервал и отрезок — это ***конечные числовые промежутки***. Имеются конечные числовые промежутки еще двух видов: $[a, b)$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x < b$, и $(a, b]$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x \le b$. Эти промежутки называют ***полуинтервалами***.

Существуют и ***бесконечные числовые промежутки***. Множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $x \ge a$, обозначают $[a, +\infty)$ и называют ***лучом***, а множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $x > a$, обозначают $(a, +\infty)$ и называют

открытым лучом. Знак « $+\infty$ » читается : «плюс бесконечность».

Аналогично, рассматривают луч вида $(-\infty,\ b]$ (числа, удовлетворяющие неравенству $x \le b$) и открытый луч вида $(-\infty,\ b)$ (числа, удовлетворяющие неравенству $x < b$). Знак « $-\infty$ » читается: «минус бесконечность».

В приведенной ниже таблице для каждого вида числового промежутка даны его геометрическое изображение, обозначение и запись с помощью неравенств.

Вид числового промежутка	Геометрическое изображение	Обозначение	Запись с помощью неравенств
Интервал		(a, b)	$a < x < b$
Отрезок		$[a, b]$	$a \le x \le b$
Полуинтервал		$(a, b]$	$a < x \le b$
Полуинтервал		$[a, b)$	$a \le x < b$
Луч		$[a, +\infty)$	$x \ge a$
Луч		$(-\infty, b]$	$x \le b$
Открытый луч		$(a, +\infty)$	$x > a$
Открытый луч		$(-\infty, b)$	$x < b$
Числовая прямая		$(-\infty, +\infty)$	$-\infty < x < +\infty$

На практике не всегда используют термины «интервал», «отрезок», «полуинтервал», «луч», заменяя их общим названием ***числовой промежуток***.

28. Модуль действительного числа. ***Модулем*** (***абсолютной величиной***) действительного числа a называется само это число, если $a \geq 0$, и противоположное число $-a$, если $a < 0$. Модуль числа a обозначается $|a|$. Итак,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Например: $|\pi - 3| = \pi - 3$, так как $\pi - 3 > 0$ ($\pi = 3{,}14\ldots$) ; $|-3{,}7| = -(-3{,}7) = 3{,}7$, так как $-3{,}7 < 0$.

Геометрически $|a|$ означает расстояние на координатной прямой точки a от точки O (рис. 6).

Отметим свойства модулей:

1^0. $|a| \geq 0$.

2^0. $|a| = |-a|$.

3^0. $|ab| = |a| \cdot |b|$.

4^0. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

5^0. $|a|^2 = a^2$.

29. Формула расстояния между двумя точками координатной прямой. Если a и b — две точки координатной прямой, то расстояние между ними $\rho\,(a;\,b)$ выражается формулой $\rho\,(a;\,b) = a - b$ (рис. 7).

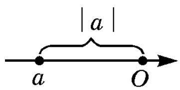


Рис. 6

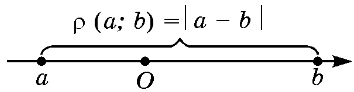


Рис. 7

Ясно, что $\rho(a; b) = \rho(b; a)$. Так, $\rho(-2; 5) = |-2 - 5| = |-7| = -(-7) = 7$.

Пример. Найти все такие точки x, которые удовлетворяют: а) уравнению $|x - 1| = 3$; б) неравенству $|x + 1| \leq 2$; в) неравенству $|x + 1| > 2$.

❑ а) Данному уравнению удовлетворяют такие точки x, расстояние которых от точки 1 равно 3. Это точки −2 и 4 (рис. 8). Значит, уравнение имеет два корня: −2; 4.

б) Данному неравенству удовлетворяют такие точки x, которые удалены от точки −1 на расстояние, меньшее или равное 2. Это точки отрезка $[-3, 1]$ (рис. 9).

в) Данному неравенству удовлетворяют точки x, удаленные от точки −1 на расстояние, большее 2. Это точки двух открытых лучей: от $-\infty$ до −3 и от 1 до $+\infty$ (на рис. 9 эти лучи заштрихованы). Используя

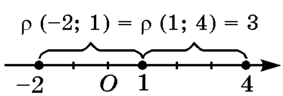


Рис. 8

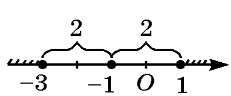


Рис. 9

знак объединения множеств (см. п. 24), ответ можно записать так: $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$. ■

30. Правила действий над действительными числами. Сумма двух чисел одного знака есть число того же знака; чтобы найти модуль такой суммы, надо сложить модули слагаемых. Например, $(+12) + (+8) = +20$; $(-12) + (-8) = -20$.

Сумма двух чисел с разными знаками есть число, которое имеет тот же знак, что и слагаемое с бо́льшим модулем; чтобы найти модуль этой суммы, надо из большего модуля вычесть меньший. Например, $(+12) + (-8) = +(12-8) = 4$; $(-12) + (+8) = -(12-8) = -4$.

Чтобы из одного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому. Например, $12 - (-8) = 12 + (+8) = 20$; $12 - (+8) = 12 + (-8) = 4$.

Произведение (частное) двух чисел одного знака есть число положительное, а произведение (частное) двух чисел разных знаков есть число отрицательное; чтобы найти модуль произведения (частного), надо перемножить (разделить) модули данных чисел. Например, $(-12) \cdot (-8) = +12 \cdot 8 = 96$; $(-24) : (+3) = -24 : 3 = -8$.

31. Свойства арифметических действий над действительными числами.

1^0. $a + b = b + a$.

2^0. $(a + b) + c = a + (b + c)$.

3^0. $a + 0 = a$.

4^0. $a + (-a) = 0$.

5^0. $ab = ba$.

6^0. $(ab)c = a(bc)$.

7^0. $a(b + c) = ab + ac$.

8^0. $a \cdot 1 = a$.

9^0. $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$, $a \neq 0$.

Эти свойства называют иногда ***основными законами алгебры***, причем свойства 1^0 и 5^0 выражают ***переместительный закон*** соответственно ***сложения*** и ***умножения***, свойства 2^0 и 6^0 — ***сочетательный закон***, а свойство 7^0 — ***распределительный закон умножения относительно сложения***.

32. Пропорции. Пусть a, b, c, d — действительные числа, отличные от нуля, и пусть имеет место равенство $a : b = c : d$. Это равенство называют ***пропорцией***, числа a и d — ***крайними членами***, а числа b и c — ***средними членами*** пропорции. Для пропорции используют и запись $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Например, из чисел 2,5; −4; −5 и 8 можно составить пропорцию: $\frac{2{,}5}{-4} = \frac{-5}{8}$.

Т.1.13. *Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов.*

Т.1.14. *Крайние члены пропорции можно поменять местами, т. е. если* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *то* $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$. *Средние члены пропорции также можно поменять местами, т. е. если* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Производные пропорции:

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}; \quad \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c};$$

$$\frac{a \pm c}{c} = \frac{b \pm d}{d}; \quad \frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}.$$

33. Целая часть числа. Дробная часть числа. Пусть x — действительное число. Его ***целой частью*** называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Целая часть числа x обозначается $[x]$.

Дробной частью числа x называется разность между самим числом и его целой частью, т. е. $x - [x]$. Дробная часть числа x обозначается $\{x\}$.

Значит, $\{x\} = x - [x]$.

Например,

$[3{,}47] = 3$; $\{3{,}47\} = 0{,}47$;
$[-2{,}3] = -3$; $\{-2{,}3\} = -2{,}3 - (-3) = 0{,}7$;
$[15] = 15$; $\{15\} = 0$.

34. Степень с натуральным показателем. Пусть a — действительное число, а n — натуральное число, большее единицы; n-й ***степенью числа*** a называют произведение n множителей, каждый из которых равен a, т. е.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}.$$

Число a — ***основание степени***, n — ***показатель степени***. Если $n = 1$, то полагают $a^1 = a$.

Например, $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$.

Справедливы следующие свойства:

1^0. $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$.

2^0. $a^n : a^k = a^{n-k}$, если $n > k$.

3^0. $(a^n)^k = a^{nk}$.

4^0. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

5^0. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, b \neq 0$.

Например,

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8; (2^3)^5 = 2^{3\cdot 5} = 2^{15};$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}.$$

35. Степень с нулевым показателем. Степень с отрицательным показателем. Полагают по определению: *если* $a \neq 0$ *, то* $a^0 = 1$. Например, $(2{,}7)^0 = 1$; $(-5)^0 = 1$. *Нулевая степень числа* 0 *не имеет смысла*.

Полагают по определению: *если* $a \neq 0$ *и* n *— натуральное число*, *то* $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Например, $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$; $(-2)^{-2} = \dfrac{1}{(-2)^2} = \dfrac{1}{4}$.

Справедливо равенство

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

36. Стандартный вид положительного действительного числа. Любое положительное число a можно представить в виде $a_1 \cdot 10^n$, где $1 \le a_1 < 10$, а n — целое число. Если положительное число представлено указанным образом, то говорят, что число a записано в ***стандартном виде***; при этом показатель n называют ***порядком числа***.

Для того чтобы положительное число a представить в стандартном виде, нужно поставить запятую так, чтобы в целой части оказалась одна значащая цифра (см. п. 13), и умножить полученное число на 10^n так, чтобы в результате умножения запятая вернулась на то место, которое она занимала в числе a.

П р и м е р. Записать в стандартном виде число: а) $a = 395$; б) $a = 4{,}13$; в) $a = 0{,}0023$.

❑ а) Отделив в числе 395 первую значащую цифру, получим 3,95; чтобы вернуться к исходному числу, надо запятую передвинуть на две цифры вправо — это равносильно умножению на 10^2. Значит, $395 = 3{,}95 \cdot 10^2$, т. е. $a_1 = 3{,}95$ и $n = 2$.

б) Здесь одна значащая цифра уже отделена запятой, поэтому $4{,}13 = 4{,}13 \cdot 10^0$, т. е. $a_1 = 4{,}13$; и $n = 0$.

в) Отделив запятой в числе 0,0023 первую значащую цифру, получим 2,3; чтобы вернуться к исходному числу, надо запятую передвинуть на три цифры влево — это равносильно делению на 10^3 или умножению на 10^{-3}. Итак, $0{,}0023 = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$, т. е. $a_1 = 2{,}3$ и $n = -3$. ■

37. Определение арифметического корня. Свойства арифметических корней. Если $a \geq 0$ и n — натуральное число, большее 1, то существует, и только одно, неотрицательное число x такое, что выполняется равенство $x^n = a$. Это число x называется ***арифметическим корнем*** n-й степени из неотрицательного числа a и обозначается $\sqrt[n]{a}$. Число a называется ***подкоренным числом***, n — ***показателем корня***. Если $n = 2$, то обычно пишут $\sqrt{a}$ и называют это выражение ***квадратным корнем***. Часто вместо термина «корень» употребляют термин «радикал».

Итак, согласно определению запись $\sqrt[n]{a} = x$, где $a \geq 0$,означает, во-первых, что $x \geq 0$ и, во-вторых, что

$x^n = a$, т. е. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Например, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt[3]{125} = 5$, $\sqrt[10]{0} = 0$.

Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то справедливы следующие свойства:

1^0. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

2^0. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$.

3^0. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$.

4^0. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

5^0. $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$.

Свойство 1^0 распространяется на произведение любого числа множителей. Например,

$$\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 125} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{125} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

П р и м е р. Упростить:

а) $\sqrt[5]{7\dfrac{19}{32}}$; б) $\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^3$; в) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}$; г) $\sqrt[6]{a^4}$.

❑ а) $\sqrt[5]{7\dfrac{19}{32}} = \sqrt[5]{\dfrac{243}{32}} = \dfrac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \dfrac{3}{2}$;

б) $\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^3 = \sqrt[5]{(a^2)^3} = \sqrt[5]{a^6}$; в) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[4\cdot 3]{a} = \sqrt[12]{a}$;

г) $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$ (показатели корня и подкоренного выражения разделили на 2). ■

38. Корень нечетной степени из отрицательного числа. Пусть $a < 0$, а n — натуральное число, большее 1. Если n — четное число, то равенство $x^n = a$ не выполняется ни при каком действительном значении x. Это значит, что в области действительных чисел нельзя определить корень четной степени из отрицательного числа. Если же n — нечетное число, то существует одно и только одно действительное число x такое, что $x^n = a$. Это число обозначают $\sqrt[n]{a}$ и называют ***корнем нечетной степени*** n ***из отрицательного числа*** a.

Например, $\sqrt[3]{-8} = -2$, так как $(-2)^3 = -8$; $\sqrt[5]{-243} = -3$, так как $(-3)^5 = -243$.

В случае нечетных показателей корней свойства радикалов, справедливые для неотрицательных значений подкоренных выражений (см. п. 37), верны и для отрицательных значений подкоренных выражений.

Например, $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ для любых a и b.

39. Степень с дробным показателем. Полагают по определению: *если* $a \geq 0$ *и* m, n — *натуральные числа,* $n \geq 2$, *то* $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; *если* $a > 0$, *то* $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$. *Нецелая степень отрицательного числа не имеет смысла.*

Например: $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2$; $81^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{81^3}=\sqrt[4]{(3^4)^3}=$
$=\sqrt[4]{3^{12}}=3^3=27$; $4^{-0,5}=\dfrac{1}{4^{0,5}}=\dfrac{1}{\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}$.

40. Свойства степеней с рациональными показателями. Для любого числа a определена операция возведения в натуральную степень (см. п. 34); для любого числа $a \neq 0$ определена операция возведения в нулевую и целую отрицательную степень (см. п.35); для любого $a \geq 0$ определена операция возведения в положительную дробную степень (см. п. 39), и, наконец, для любого числа $a > 0$ определена операция возведения в отрицательную дробную степень (см. п. 39).

П р и м е р. Вычислить

$$(6{,}25)^{0,5}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{0,25}-(-4)^{-1}\cdot(0{,}343)^0.$$

❑ Имеем $(6{,}25)^{0,5}=\left(\dfrac{25}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{25}{4}}=\dfrac{5}{2}$; $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{0,25}=$
$=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}=\dfrac{1}{2}$; $(-4)^{-1}=-\dfrac{1}{4}$; $(0{,}343)^0=1$.

В итоге получаем $\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{4}\right)\cdot 1=\dfrac{3}{2}$. ■

Если $a > 0$, $b > 0$ и r, s — любые рациональные числа, то:

1^0. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

2^0. $a^r : a^s = a^{r-s}$.

3^0. $(a^r)^s = a^{rs}$.

4^0. $a^r \cdot b^r = (ab)^r$.

5^0. $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$.

41. Приближенные значения чисел. Абсолютная и относительная погрешности. При округлении десятичной дроби до какого-нибудь разряда все следующие за этим разрядом цифры заменяют нулями, а если они стоят после запятой, то их отбрасывают. Если первая следующая за этим разрядом цифра больше или равна 5, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на 1. Если же первая следующая за этим разрядом цифра меньше 5, то последнюю оставшуюся цифру не изменяют.

П р и м е р 1. Округлить число $\alpha = 2471{,}05624$ с точностью до: а) десятков; б) единиц; в) десятых; г) сотых; д) тысячных.

❑ а) Цифра единиц, следующая за разрядом десятков, равна 1, т. е. меньше 5. Значит, округлив до десятков, имеем $\alpha \approx 2470$. Знак $\approx$ называют ***знаком приближенного равенства***.

б) Цифра десятых равна 0, значит, округлив до единиц, имеем $\alpha \approx 2471$.

в) Цифра сотых равна 5, значит, округлив до десятых, имеем $\alpha \approx 2471{,}1$.

г) Цифра тысячных равна 6, значит, округлив до сотых, имеем $\alpha \approx 2471{,}06$.

д) Цифра десятитысячных равна 2, значит, округлив до тысячных, имеем $\alpha \approx 2471{,}056$. ■

Все найденные значения называются ***приближенными значениями*** числа $\alpha \approx 2471{,}05624$.

Пусть a — приближенное значение числа α. Тогда модуль разности чисел α и a, т. е. $|\alpha - a|$, называется ***абсолютной погрешностью*** приближенного значения числа α, а отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения называется ***относительной погрешностью*** приближенного значения. Относительную погрешность обычно выражают в процентах.

П р и м е р 2. Взвесив деталь, масса которой равна 54,12705 г, на весах с ценой деления шкалы 0,1 г, получили приближенное значение массы 54,1 г. Найти абсолютную и относительную погрешности этого приближенного значения.

❑ Абсолютная погрешность равна $54{,}12705 - 54{,}1 = 0{,}02705$; относительная погрешность равна

$$\frac{0{,}02705}{54{,}1} \cdot 100\% = 0{,}05\%. \quad ■$$

Если абсолютная погрешность приближенного значения a, найденного для интересующего нас числа α, не превосходит некоторого числа h, то пишут $\alpha = a \pm h$; говорят, что a — приближенное значение числа α с ***точностью*** до h.

П р и м е р 3. Найти приближенное значение числа $\alpha = 2471{,}05624$ с точностью до 0,01.

❑ Округлив число α до сотых (см. пример 1, г), получим $\alpha = 2471{,}06$. Абсолютная погрешность этого приближенного значения равна $|2471{,}05624 - 2471{,}06| = |0{,}00376| < 0{,}01$. Значит, 2471,06 — приближенное значение числа α с точностью до 0,01. ■

42. Десятичные приближения действительного числа по недостатку и по избытку. Возьмем иррациональное число $\sqrt{2}$.

Имеем:

$$1^2 < 2 < 2^2; \qquad 1 < \sqrt{2} < 2;$$

$$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2; \qquad 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5;$$

$$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2; \qquad 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42;$$

$$1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2; \qquad 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415;$$

$$1{,}4142^2 < 2 < 1{,}4143^2; \qquad 1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143.$$

Числа 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 называются ***десятичными приближениями числа*** $\sqrt{2}$ ***по недостатку*** с точностью соответственно до 1, до 0,1, до 0,01, до 0,001, до 0,0001. Числа 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143 называются ***десятичными приближениями числа*** $\sqrt{2}$ ***по избытку*** соответственно с той же точностью.

Для числа $\sqrt{2}$ используют представление в виде бесконечной десятичной дроби: $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$.

Вообще, *любое действительное число представимо в виде бесконечной десятичной дроби, причем периодической, если число рациональное* (см. п. 16), *и непериодической, если число иррациональное*.

Например, $\dfrac{14}{55} = 0{,}2(54) = 0{,}2545454\ldots$ (см. п. 17).

Десятичное приближение числа $\dfrac{14}{55}$ с точностью до

0,001 по недостатку равно 0,254, а по избытку равно 0,255.

43. Понятие о степени с иррациональным показателем. Пусть α — иррациональное число. Какой смысл вкладывается в запись a^{α}, где a — положительное число? Рассмотрим три случая: $a = 1$, $a > 1$, $0 < a < 1$.

1) Если $a = 0$, то полагают $1^{\alpha} = 1$.

2) Пусть $a > 1$. Возьмем любое рациональное число $r_1 < \alpha$ и любое рациональное число $r_2 > \alpha$. Тогда $r_1 < r_2$ и $a^{r_1} < a^{r_2}$. В этом случае под a^{α} понимают число, которое заключено между a^{r_1} и a^{r_2} для любых рациональных чисел r_1 и r_2 таких, что $r_1 < \alpha$, а $r_2 > \alpha$. Доказано, что такое число существует и единственно для любого $a > 1$ и любого иррационального числа α.

3) Пусть $0 < a < 1$. Возьмем любое рациональное число $r_1 < \alpha$ и любое рациональное число $r_2 > \alpha$. Тогда $r_1 < r_2$ и $a^{r_1} > a^{r_2}$. В этом случае под a^{α} понимают такое число, которое заключено между a^{r_2} и a^{r_1} для любых рациональных чисел r_1 и r_2, удовлетворяющих неравенству $r_1 < \alpha < r_2$. Доказано, что такое число существует и единственно для любого числа a из интервала (0, 1) и любого иррационального числа α.

44. Свойства степеней с действительными показателями. Если $a > 0$, $b > 0$ и x, y — любые действительные числа, то справедливы следующие свойства:

1^0. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

2^0. $a^x : a^y = a^{x-y}$.

3^0. $(a^x)^y = a^{xy}$.

4^0. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$.

5^0. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

§ 4. Комплексные числа

45. Понятие о комплексном числе. Процесс расширения понятия числа от натуральных к действительным был связан как с потребностями практики, так и с нуждами математики. Сначала для счета предметов использовались натуральные числа. Затем необходимость выполнения деления привела к понятию дробных положительных чисел; далее,необходимость выполнения вычитания — к понятиям нуля и отрицательных чисел; наконец, необходимость извлечения корней из положительных чисел — к понятию иррациональных чисел. Все перечисленные операции выполнимы на множестве действительных чисел. Однако остались и невыполнимые на этом множестве операции, например извлечение квадратного корня из отрицательного числа. Значит, имеется потребность в дальнейшем расширении понятия числа, в появлении новых чисел, отличных от действительных.

Геометрически действительные числа изображаются точками на координатной прямой. Возникает предположение о том, что геометрические образы новых чисел надо искать уже не на прямой, а на плоскости. Так как каждую точку M координатной плоскости xOy можно отождествить с координатами этой точки, то естественно в качестве новых чисел ввести упорядоченные пары действительных чисел.

Комплексным числом называется всякая упорядоченная пара $(a;\ b)$ действительных чисел a и b.

Два комплексных числа $(a;\ b)$ и $(c;\ d)$ называются ***равными*** тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

46. Арифметические операции над комплексными числами. ***Суммой комплексных чисел*** $z = (a;\ b)$ и $w = (c;\ d)$ называется комплексное число $(a + c;\ b + d)$.

Например, $(2;\ 7) + (3;\ -4) = (2 + 3;\ 7 - 4) = (5;\ 3)$.

Комплексным нулем считают пару $(0;0)$. Числом, ***противоположным*** числу $z = (a;\ b)$, считают число $(-a;\ -b)$; его обозначают $-z$.

Разностью комплексных чисел z и w называют такое число u, что $z = w + u$. Справедливо следующее правило вычитания комплексных чисел: $(a;\ b) - (c;\ d) = (a - c;\ b - d)$.

Например, $(9;\ 10) - (8;\ 12) = (9 - 8;\ 10 - 12) = (1;\ -2)$.

Произведением комплексных чисел $z = (a;\ b)$ и $w = (c;\ d)$ называется комплексное число $(ac - bd;\ ad + bc)$.

Например, если $z = (2;\ 5)$, $w = (3;\ 1)$, то

$$zw = (2 \cdot 3 - 5 \cdot 1;\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3) = (1;\ 17).$$

Пусть $z = (a;\ b)$, $w = (c;\ d) \neq (0;\ 0)$. Тогда существует, и только одно, комплексное число $u = (x;\ y)$ такое, что $z = uw$. Это число u называют ***частным*** от деления z на w. Можно доказать, что справедливо следующее правило деления комплексных чисел:

если $(c;\ d) \neq (0;\ 0)$, то $\dfrac{(a;\ b)}{(c;\ d)} = \left(\dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2};\ \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$.

Впрочем, при делении комплексных чисел используют не указанную формулу, а умножают числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю (см. п.48).

Арифметические операции над комплексными числами обладают теми же свойствами, что и арифметические операции над действительными числами (см. п. 31).

47. Алгебраическая форма комплексного числа. Используя введенные в п. 46 определения сложения и умножения комплексных чисел, легко получить следующие равенства:

$$(0;\ 1) \cdot (0;\ 1) = (-\ 1;\ 0), \qquad (1)$$
$$(a;\ b) = (a;\ 0) + (b;\ 0) \cdot (0;\ 1), \qquad (2)$$
$$(a;\ 0) + (b;\ 0) = (a + b;\ 0), \qquad (3)$$
$$(a;\ 0) \cdot (b;\ 0) = (ab;\ 0). \qquad (4)$$

Условимся вместо $(a;\ 0)$ писать просто a, а комплексное число $(0;\ 1)$ обозначать буквой i и называть ***мнимой единицей***. Тогда равенство (1) принимает вид $i \cdot i = -1$, т. е.

$$i^2 = -1, \qquad (5)$$

а равенство (2) — вид

$$(a;\ b) = a + bi. \qquad (6)$$

Запись $a + bi$ называется ***алгебраической формой комплексного числа*** $z = (a;\ b)$; при этом число a называется ***действительной частью*** комплексного числа z (обозначение: $\operatorname{Re} z$), число b — его ***мнимой частью*** (обозначение: $\operatorname{Im} z$).

Например,

$$z = (2;\ -4) = 2 - 4i;\ \mathrm{Re}\, z = 2,\ \ \mathrm{Im}\, z = -4.$$

Если мнимая часть комплексного числа $a + bi$ отлична от нуля, то такое число называется ***мнимым***; если при этом $a = 0$, т. е. число имеет вид bi, то оно называется ***чисто мнимым***; наконец, если у комплексного числа $a + bi$ мнимая часть равна нулю, то получается действительное число a.Комплексные числа $a + bi$ и $a - bi$, действительные части которых равны, а мнимые противоположны по знаку, называют ***сопряженными***. Число, сопряженное с числом z, обозначают через $\overline{z}$, т. е. если $z = a + bi$, то $\overline{z} = a - bi$. Сумма и произведение двух сопряженных чисел являются действительными числами:

$$z + \overline{z} = 2a,\ z\overline{z} = a^2 + b^2.$$

Модулем комплексного числа $a + bi$ называется число $\sqrt{a^2 + b^2}$ (обозначение: $|z|$ или r).

Сопряженные комплексные числа имеют один и тот же модуль: $|a + bi| = |a - bi|$.

48. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме. Над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, можно осуществлять все арифметические операции как над обычными двучленами, учитывая лишь, что $i^2 = -1$. Чтобы преобразовать в комплексное число дробь вида $\dfrac{a + bi}{c + di}$, нужно и числитель, и знаменатель дроби умножить на число $c - di$, сопряженное знаменателю.

П р и м е р 1. Найти действительные числа x и y такие, что выполняется равенство

$$(2x-3yi)(2x+3yi)+4xi=97+8i.$$

❑ Имеем $(2x-3yi)(2x+3yi)=4x^2-9y^2i^2=4x^2+$ $+9y^2$. Тогда заданное равенство можно переписать в виде

$$4x^2+9y^2+4xi=97+8i.$$

Так как комплексные числа $a+bi$ и $c+di$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части ($a=c$) и коэффициенты при мнимых частях ($b=$ $=d$), то приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 4x^2+9y^2=97, \\ 4x=8, \end{cases}$$

откуда находим $x_1=2,\ y_1=3;\ x_2=2,\ y_2=-3.$ ■

П р и м е р 2. Вычислить $(1+2i)i-\dfrac{3+2i}{1-i}$.

❑ 1) $(1+2i)i=i+2i^2=-2+i;$

2) $\dfrac{3+2i}{1-i}=\dfrac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)\ (1+i)}=\dfrac{3+2i+3i+2i^2}{1-i^2}=$

$=\dfrac{3+5i-2}{1+1}=\dfrac{1+5i}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}i;$

3) $(-2+i)-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}i\right)=-\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}i.$ ■

Чтобы возвести комплексное число в степень с натуральным показателем, используют формулы квадрата суммы, куба суммы (см. п. 56) и более общую формулу бинома Ньютона (см. п. 62 или п. 203).

При этом удобно пользоваться общим правилом для возведения мнимой единицы i в любую натуральную степень. Так как $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, то

$$i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i,\ i^{4n} = 1, n \in \boldsymbol{N}.$$

❑ Пример 3. Вычислить $(1 + 2i)^6$.
Согласно формуле бинома Ньютона, имеем

$$(1+2i)^6 = 1^6 + C_6^1 \cdot 1^5 \cdot 2i + C_6^2 \cdot 1^4 \cdot (2i)^2 +$$

$$+ C_6^3 \cdot 1^3 \cdot (2i)^3 + C_6^4 \cdot 1^2 \cdot (2i)^4 + C_6^5 \cdot 1 \cdot (2i)^5 + (2i)^6 =$$

$$= 1 + 12i + 15 \cdot 4i^2 + 20 \cdot 8i^3 + 15 \cdot 16i^4 + 6 \cdot 32i^5 + 64i^6 =$$

$$= 1 + 12i - 60 - 160i + 240 + 192i - 64 = 117 + 44i. \ ■$$

49. Геометрическое изображение комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексного числа. Комплексное число $z = a + bi$ на координатной плоскости xOy изображается точкой M с координатами a и b. При этом ось Ox называют ***действительной осью***, а ось Oy — ***мнимой осью***.

Действительные числа изображаются точками действительной оси, а чисто мнимые числа — точками мнимой оси.

На рис. 10 построены изображения комплексных чисел $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3$, $z_3 = 2i$, $z_4 = -1 + i$, $z_5 = -2{,}5$, $z_6 = -1 - i$, $z_7 = -3i$, $z_8 = 3 - 2i$. Заметим, что сопряженные комплексные числа изображаются точками, симметричными относительно оси Ox (точки z_4 и z_6 на рис. 10).

Известно, что положение точки на плоскости можно задавать также ее полярными координатами r и φ

(см. п. 23). Из рис. 11 ясно, что $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ является модулем комплексного числа $z = a + bi$. Полярный угол φ называют ***аргументом*** комплексного числа, изображаемого этой точкой. Аргумент комплексного числа определен неоднозначно: если φ — аргумент числа z, то $\varphi + 2\pi k$ — также аргумент этого числа при любом целом k. Для однозначности определения аргумента его выбирают в пределах $-\pi < \varphi \leq \pi$ и обозначают $\arg z$; такое значение аргумента называют ***главным***. В дальнейшем под аргументом комплексного числа будем понимать его главное значение.

Тригонометрической формой комплексного числа $z = a + bi$ называется его запись в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{1}$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль, а φ — аргумент числа z.

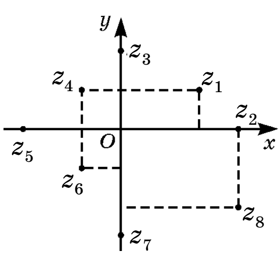


Рис. 10

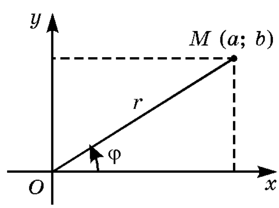


Рис. 11

При этом аргумент φ связан с a и b формулами

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (2)$$

П р и м е р. Записать в тригонометрической форме числа: а) $-2\sqrt{3}+2i$; б) $-3i$; в) $1-\sqrt{5}$.

❑ а) Сначала находим модуль числа: $r = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2} = 4$. Далее, согласно формулам (2), имеем $\cos\varphi = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Значит, $\arg z = \varphi = \frac{5\pi}{6}$. Итак, $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

б) Здесь $r = 3$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ (точка, изображающая данное число, принадлежит отрицательной части мнимой оси). Поэтому $z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

в) Здесь $r = \sqrt{5}-1$, $\varphi = \pi$. Значит, $z = \sqrt{5}-1(\cos\pi + i\sin\pi)$. ■

50. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме. Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ — комплексные числа, заданные в тригонометрической форме. Тогда для их произведения z_1z_2 и частного $\frac{z_1}{z_2}$

справедливы формулы

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \qquad (1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \qquad (2)$$

т. е. *при умножении (делении) комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются (делятся), а аргументы складываются (вычитаются).*

П р и м е р 1. Выполнить действия:

а) $4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{1}{10}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$;

б) $32\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) : 8i$.

❑ а) Используя формулу (1), находим

$$\frac{4}{10}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{2}{5}i.$$

б) Сначала представим число $8i$ в тригонометрической форме; получим $8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Теперь воспользуемся формулой (2):

$$\frac{32}{8}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 2\sqrt{3} + 2i. \ \blacksquare$$

При возведении комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в натуральную степень n выполняется равенство

$$z' = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad (3)$$

т. е. *модуль данного числа возводится в степень n, а аргумент умножается на показатель степени.*

При $r = 1$ соотношение (3) принимает вид

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \qquad (4)$$

и называется ***формулой Муавра.***

П р и м е р 2. Возвести в степень:

$$2\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)^7.$$

❑ Используя формулу (3), а также периодичность синуса и косинуса (см. п. 121), получим

$$2^7\left(\cos\left(-\frac{21\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{21\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 128\left(\cos\left(-\frac{21\pi}{4} + 6\pi\right) + i\sin\left(-\frac{21\pi}{4} + 6\pi\right)\right) =$$

$$= 128\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -64\sqrt{2} + 64\sqrt{2}\,i.$$

■

Рассмотрим, наконец, задачу извлечения корня натуральной степени n из комплексного числа z. Можно доказать, что *корень n-й степени из комплек-*

сного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *имеет* n *различных значений, которые находятся по формуле*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (5)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

П р и м е р 3. Решить уравнение $z^2 + 4 = 0$.

❑ Корнями данного уравнения являются все значения $\sqrt{-4}$. Для числа -4 имеем $r = 4$, $\varphi = \pi$. Согласно формуле (5), находим

$$\sqrt{-4} = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{2}\right), \text{ где } k = 0, 1.$$

Если $k = 0$, то $w_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$.

Если $k = 1$, то $w_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$.

Итак, уравнение $z^2 + 4 = 0$ имеет два корня: $2i$ и $-2i$. ■

П р и м е р 4. Найти $\sqrt[3]{-64i}$.

❑ Для числа $-64i$ имеем $r = 64$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Используя формулу (5), получим

$$\sqrt[3]{-64i}=4\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right),\ k=0,1,2.$$

При $k = 0, 1, 2$ соответственно находим

$$w_1=4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\sqrt{3}-2i;$$

$$w_2=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=4i;$$

$$w_3=4\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=-2\sqrt{3}-2i. \blacksquare$$

Раздел II

ВЫРАЖЕНИЯ

§ 5. Основные понятия

51. Виды алгебраических выражений. Из чисел и переменных с помощью знаков сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в рациональную степень и извлечения корня, а также с помощью скобок составляют ***алгебраические выражения.***

Примеры алгебраических выражений:

$$1)\ 2a^2b - 3ab^2(a+b);\ 2)\ a+b+\frac{c}{5};\ 3)\ \frac{3a^2+3a+1}{a-1};$$

$$4)\ \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{c}{3}\right)^3;\ 5)\ \sqrt{a+b};\ 6)\ (\sqrt[3]{2}-x)^4;\ 7)\ a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}.$$

Если алгебраическое выражение не содержит деления на переменные и извлечения корня из переменных (в частности, возведения в степень с дробным показателем), то оно называется ***целым.*** Из написанных выше целыми являются выражения 1, 2 и 6.

Если алгебраическое выражение составлено из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, возведения в степень с натуральным показателем и деления, причем используется деление на выражения с переменными, то оно называется ***дробным.*** Так, из написанных выше дробными являются выражения 3 и 4.

Целые и дробные выражения называют ***рациональными*** выражениями. Например, из написанных выше рациональными являются выражения 1, 2, 3, 4 и 6.

Если в алгебраическом выражении используется извлечение корня из переменных (или возведение переменных в дробную степень), то такое алгебраическое выражение называется ***иррациональным***. Так, из написанных выше иррациональными являются выражения 5 и 7.

Итак, алгебраические выражения могут быть рациональными и иррациональными. Рациональные выражения, в свою очередь, разделяются на целые и дробные.

52. Допустимые значения переменных. Область определения алгебраического выражения. Значения переменных, при которых алгебраическое выражение имеет смысл, называют ***допустимыми значениями переменных***. Множество всех допустимых значений переменных называют ***областью определения алгебраического выражения***.

Целое выражение имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных. Так, при любых значениях переменных имеют смысл целые выражения 1, 2, 6 из п. 51.

Дробные выражения не имеют смысла при тех значениях переменных, которые обращают знаменатель в нуль. Например, дробное выражение 3 из п. 51 имеет смысл при всех a, кроме $a = 1$, а дробное выражение 4 — при всех a, b, c, кроме значений $a = 0$, $b = 0$.

Иррациональное выражение не имеет смысла при тех значениях переменных, которые обращают в отрицательное число выражение, содержащееся под знаком корня четной степени или под знаком возведения в дробную степень. Так, иррациональное выражение 5 имеет смысл только при тех a, b, при которых $a + b \geq 0$, а иррациональное выражение 7 — только при $a \geq 0$ и $b \geq 0$ (см. п. 51).

Если в алгебраическом выражении переменным придать допустимые значения, то получится числовое выражение; его значение называется ***значением алгебраического выражения*** при выбранных значениях переменных.

Например, значение выражения $\dfrac{\sqrt[3]{a^2+b}}{2a-b}$ при $a = 5$, $b = 2$ найдем подстановкой данных значений переменных в это выражение: $\dfrac{\sqrt[3]{5^2+2}}{2\cdot 5-2} = \dfrac{\sqrt[3]{27}}{10-2} = \dfrac{3}{8}$.

53. Понятие тождественного преобразования выражения. Тождество. Рассмотрим два выражения $f(x) = x^2 - 2x$ и $g(x) = 4x - 5$. При $x = 2$ имеем $f(2) = 2^2 - 2\cdot 2 = 0$; $g(2) = 4\cdot 2 - 5 = 3$. Числа 0 и 3 называются ***соответственными значениями выражений*** $x^2 - 2x$ и $4x - 5$ при $x = 2$.

Найдем соответственные значения тех же выражений при $x = 1$:

$$f(1) = 1^2 - 2\cdot 1 = -1;\quad g(1) = 4\cdot 1 - 5 = -1;$$

при $x = 0$:

$$f(0) = 0^2 - 2\cdot 0 = 0;\quad g(0) = 4\cdot 0 - 5 = -5.$$

Соответственные значения двух выражений могут быть равными друг другу (так, в рассмотренном примере выполняется равенство $f(1) = g(1)$), а могут и отличаться друг от друга (в рассмотренном примере $f(2) \neq g(2)$; $f(0) \neq g(0)$).

Если соответственные значения двух выражений, содержащих одни и те же переменные, совпадают при всех допустимых значениях переменных, то выражения называются ***тождественно равными***. ***Тождеством*** называют равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Так, тождественно равны выражения x^5 и $x^2 \cdot x^3$, $a + b + c$ и $c + b + a$, $(2ab)^2$ и $4a^2b^2$.

Примеры тождеств: $a + b = b + a$, $a + 0 = a$, $(a + b)\,c = ac + bc$, $a \cdot 1 = a$, $x^5 = x^2 \cdot x^3$.

Пропорция (см. п. 32) $\dfrac{2a}{a-1} = \dfrac{10a}{5(a-1)}$ есть тождество при всех значениях a, кроме $a = 1$, поскольку при $a = 1$ знаменатели дробей обращаются в нуль, т. е. дроби не имеют смысла. Замена выражения $\dfrac{ac}{bc}$ выражением $\dfrac{a}{b}$ (сократили на c) есть тождественное преобразование выражения $\dfrac{ac}{bc}$ при ограничениях $b \neq 0$, $c \neq 0$. Значит, $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$ — тождество при всех значениях переменных, кроме $b = 0$, $c = 0$. Верные числовые равенства также называют тождествами.

Замена одного выражения другим, тождественно равным ему, называется ***тождественным преобразованием выражения***.

§ 6. Целые рациональные выражения

54. Одночлены и операции над ними. ***Одночленом*** называют такое выражение, которое содержит числа, натуральные степени переменных и их произведения и не содержит никаких других действий над числами и переменными. Например, $3a \cdot (2{,}5a^3)$, $(5ab^2) \cdot (0{,}4c^3d)$, $x^2y \cdot (-2z) \cdot 0{,}85$ — одночлены, тогда как выражения $a+b$, $\frac{ab}{c}$ не являются одночленами.

Любой одночлен можно привести к ***стандартному виду***, т. е. представить в виде произведения числового множителя, стоящего на первом месте, и степеней различных переменных. Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют ***коэффициентом одночлена***. Сумму показателей степеней всех переменных называют ***степенью одночлена***. Если между двумя одночленами поставить знак умножения, то получится одночлен, называемый ***произведением*** исходных одночленов. При возведении одночлена в натуральную степень также получается одночлен. Результат обычно приводят к стандартному виду.

Приведение одночлена к стандартному виду, умножение одночленов — тождественные преобразования.

П р и м е р 1. Привести одночлен $3a \cdot (2{,}5a^3)$ к стандартному виду.

❑ $3a \cdot (2{,}5a^3) = (3 \cdot 2{,}5) \cdot (a \cdot a^3) = 7{,}5a^4$. ■

П р и м е р 2. Умножить одночлены $24ab^2cd^3$ и $0{,}3a^2b^3c$.

❑ $24ab^2cd^3 \cdot (0{,}3a^2b^3c) =$

$= (24 \cdot 0{,}3) \cdot (a \cdot a^2) \cdot (b^2 \cdot b^3) \cdot (c \cdot c) \cdot d^3 = 7{,}2a^3b^5c^2d^3$. ■

П р и м е р 3. Возвести одночлен $(-3ab^2c^3)$ в четвертую степень.

❑ $(-3ab^2c^3)^4 = (-3)^4 \cdot a^4 \cdot (b^2)^4 \cdot (c^3)^4 = 81a^4b^8c^{12}$. ■

Одночлены, приведенные к стандартному виду, называются ***подобными***, если они отличаются только коэффициентами или совсем не отличаются. Подобные одночлены можно складывать и вычитать, в результате чего снова получается одночлен, подобный исходным (иногда получается 0). Сложение и вычитание подобных одночленов называют ***приведением подобных членов***.

П р и м е р 4. Сложить $5x^2yz^3$ и $-8x^2yz^3$.

❑ $5x^2yz^3 + (-8x^2yz^3) = (5 + (-8))\,x^2yz^3 = -3x^2yz^3$. ■

55. Многочлены. Приведение многочленов к стандартному виду. ***Многочленом*** называют сумму одночленов. Если все члены многочлена записать в стандартном виде (см. п. 54) и привести подобные члены, то получится ***многочлен стандартного вида***.

Всякое целое выражение можно преобразовать в многочлен стандартного вида — в этом состоит цель преобразований (упрощений) целых выражений.

П р и м е р. Привести к многочлену стандартного вида заданное выражение:

а) $3a \cdot 5b + 3ab + 2a \cdot (-4b) + b \cdot b$;

б) $(3a + 5b - 2c) + (2a - b + 4c)$;

в) $(5a^2b + ab^2) - (3a^2b - 4ab^2)$;

г) $4x^2(x - 0{,}5x^2 + 3)$;

д) $(2x^2y + 3xy^2)(2x + 3y + 1)$.

❑ а) Сначала приведем к стандартному виду члены многочлена: $15ab + 3ab - 8ab + b^2$. Приведя подобные члены, получим многочлен стандартного вида $10ab + b^2$.

б) Так как перед скобками стоит знак «+», то скобки можно опустить, сохранив знаки всех слагаемых, заключенных в скобки. Тогда получим

$$3a + 5b - 2c + 2a - b + 4c = (3a + 2a) + (5b - b) +$$
$$+(-2c + 4c) = 5a + 4b + 2c.$$

в) Так как перед скобками стоит знак «−», то скобки можно опустить, изменив знаки всех слагаемых, заключенных в скобки. Тогда получим

$$5a^2b + ab^2 - 3a^2b + 4ab^2 =$$
$$= (5a^2b - 3a^2b) + (ab^2 + 4ab^2) = 2a^2b + 5ab^2.$$

г) Произведение одночлена и многочлена согласно распределительному закону равно сумме произведений этого одночлена и каждого члена многочлена:

$$4x^2\left(x - 0{,}5x^2 + 3\right) = 4x^2 \cdot x - 4x^2 \cdot 0{,}5x^2 + 4x^2 \cdot 3 =$$
$$= 4x^3 - 2x^4 + 12x^2.$$

д) $2x^2y(2x + 3y + 1) + 3xy^2(2x + 3y + 1) =$

$$= (4x^3y + 6x^2y^2 + 2x^2y) + (6x^2y^2 + 9xy^3 + 3xy^2) =$$
$$= 4x^3y + \underline{6x^2y^2} + 2x^2y + \underline{6x^2y^2} + 9xy^3 + 3xy^2.$$

Остается привести подобные члены (они подчеркнуты). Получим

$$4x^3y + 12x^2y^2 + 2x^2y + 3xy^2 + 9xy^3. \blacksquare$$

56. Формулы сокращенного умножения. В некоторых случаях приведение целого выражения к стандартному виду многочлена осуществляется с использованием тождеств:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2, \tag{1}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{2}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \tag{3}$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3, \tag{4}$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3, \tag{5}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \tag{6}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \tag{7}$$

Эти тождества называют ***формулами сокращенного умножения***; формулу (1) — ***разностью квадратов***, формулы (2) и (3) — соответственно ***квадратом суммы*** и ***квадратом разности***, формулы (4) и (5) — ***суммой кубов*** и ***разностью кубов***, а формулы (6) и (7) — ***кубом суммы*** и ***кубом разности***.

П р и м е р. Привести к многочлену стандартного вида заданное выражение:

а) $(3x^2 + 4y^3)(3x^2 - 4y^3)$;

б) $(3a^2 - 5b^3)^2$;

в) $(3a + 1)(9a^2 - 3a + 1)$.

❑ а) Используя формулу (1), получим

$$(3x^2)^2 - (4y^3)^2 = 9x^4 - 16y^6.$$

б) Согласно формуле (3), находим

$$(3a^2)^2 - 2\cdot 3a^2\cdot 5b^3 + (5b^3)^2 = 9a^4 - 30a^2b^3 + 25b^6.$$

в) Воспользовавшись формулой (4), имеем

$$(3a)^3 + 1 = 27a^3 + 1. \blacksquare$$

57. Разложение многочленов на множители. Иногда можно преобразовать многочлен в произведение нескольких множителей — многочленов или одночленов. Такое тождественное преобразование называется ***разложением многочлена на множители***. В этом случае говорят, что многочлен делится на каждый из этих множителей.

Рассмотрим некоторые способы разложения многочленов на множители.

1. *Вынесение общего множителя за скобки*. Это преобразование является непосредственным следствием распределительного закона (для наглядности нужно лишь переписать этот закон «справа налево»): $ac + bc = c(a + b)$.

Пример 1. Разложить на множители

$$28x^3 - 35x^4.$$

❑ $28x^3 - 35x^4 = 7x^3\cdot 4 - 7x^3\cdot 5x = 7x^3(4 - 5x).$ ■

Обычно при вынесении общего множителя за скобки каждую переменную, входящую во все члены многочлена, выносят с наименьшим показателем, который она имеет в данном многочлене. Если все коэффициенты многочлена — целые числа, то в качестве коэффициента общего множителя берут наибольший по модулю общий делитель всех коэффициентов многочлена.

2. <u>*Использование формул сокращенного умножения*</u>. Формулы (1)— (7) из п. 56, будучи прочитанными «справа налево», во многих случаях оказываются полезными для разложения многочленов на множители.

П р и м е р 2. Разложить на множители:

а) $x^6 - 1$; б) $4a^4b^3 + 16a^3b^4 + 16a^2b^5$.

❑ а) Имеем $x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2$. Применив формулу разности квадратов, получим $(x^3 + 1)(x^3 - 1)$. Далее, используя формулы суммы кубов и разности кубов, находим $(x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x^2 + x + 1)$. Итак,

$$x^6 - 1 = (x+1)(x-1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

б) Сначала вынесем за скобки общий множитель. Для этого найдем наибольший общий делитель коэффициентов 4, 16, 16 и наименьшие показатели степеней, с которыми переменные a и b входят в составляющие данный многочлен одночлены. Получим $4a^2b^3(a^2 + 4ab + 4b^2)$. Но по формуле (2) имеем $a^2 + 4ab + 4b^2 = (a + 2b)^2$, поэтому окончательно получаем

$$4a^4b^3 + 16a^3b^4 + 16a^2b^5 = 4a^2b^3(a + 2b)^2. \blacksquare$$

3. <u>*Способ группировки.*</u> Он основан на том, что переместительный и сочетательный законы сложения позволяют группировать члены многочлена различными способами. Иногда удается такая группиров-

ка, что после вынесения за скобки общих множителей в каждой группе в скобках остается один и тот же многочлен, который в свою очередь как общий множитель может быть вынесен за скобки.

Пример 3. Разложить на множители:

а) $x^3 - 3x^2 + 5x - 15$;

б) $20x^2 + 3yz - 15xy - 4xz$;

в) $a^2 - 7ab + 12b^2$;

г) $x^4 + 4y^4$.

❑ а) Произведем группировку следующим образом: $(x^3 - 3x^2) + (5x - 15)$. В первой группе вынесем за скобки общий множитель x^2, во второй — общий множитель 5. Получим $x^2(x-3) + 5(x-3)$. Теперь многочлен $(x - 3)$ как общий множитель вынесем за скобки: $(x - 3)(x^2 + 5)$. Таким образом,

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = (x-3)(x^2+5).$$

б) $$20x^2 + 3yz - 15xy - 4xz = (20x^2 - 15xy) + (3yz - 4xz) = 5x(4x-3y) - z(4x-3y) = (4x-3y)(5x-z).$$

в) Здесь никакая группировка не приведет к появлению во всех группах одного и того же многочлена. В таких случаях иногда оказывается полезным представить какой-либо член многочлена в виде некоторой суммы, после чего попробовать применить способ группировки. В данном примере представим $-7ab$ в виде $-3ab - 4ab$. Тогда получим

$$a^2 - 7ab + 12b^2 = a^2 - 3ab - 4ab + 12b^2 =$$

$$= (a^2 - 3ab) - (4ab - 12b^2) = a(a - 3b) - 4b(a - 3b) =$$
$$= (a - 3b)(a - 4b).$$

г) Прибавим и вычтем одночлен $4x^2y^2$:

$$x^4 + 4y^4 = (x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4) - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 -$$
$$- (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy). \blacksquare$$

58. Многочлены от одной переменной. Многочлен $ax + b$, где a, b — числа $(a \neq 0)$, а x — переменная, называется ***многочленом первой степени***; многочлен $ax^2 + bx + c$, где a, b, c — числа $(a \neq 0)$, а x — переменная, называется ***многочленом второй степени*** (или ***квадратным трехчленом***); многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c d — числа $(a \neq 0)$, а x — переменная, называется ***многочленом третьей степени***.

Вообще, если $a, b, c, \ldots, l, m$ — числа $(a \neq 0)$, а x — переменная, то многочлен

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + lx + m$$

называется ***многочленом*** n***-й степени*** (относительно x); $ax^n, bx^{n-1}, \ldots, lx, m$ — ***члены*** многочлена; a, b, c, …, l, m — ***коэффициенты***; ax^n — ***старший член многочлена***; a — коэффициент при старшем члене; m — ***свободный член многочлена***. Обычно многочлен записывают по убывающим степеням переменной, т. е. степени переменной x постепенно уменьшаются (в частности, на первом месте стоит старший член, на последнем — свободный член) и называют эту запись ***стандартным видом многочлена. Степень многочлена*** — это степень старшего члена.

Например, $5x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 1$ — многочлен пятой степени, в котором $5x^5$ — старший член, 1 — свободный член многочлена.

Корнем многочлена $P(x)$ называют такое значение x, при котором многочлен обращается в нуль. Например, число 2 является корнем многочлена $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 2$, так как $P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 - 2 = 0$.

59. Деление многочленов. Схема Горнера. Теорема Безу. Многочлены можно складывать, вычитать, умножать и возводить в натуральную степень. Иногда выполнимо и деление многочлена на многочлен. А именно, если существует такой многочлен $S(x)$, что $P(x) = Q(x)\ S(x)$, то говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$ и называют $P(x)$ ***делимым***, $Q(x)$ — ***делителем***, а $S(x)$ — ***частным***.

Например, многочлен $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 15$ делится на многочлен $Q(x) = x^2 + 5$, поскольку $x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = (x^2 + 5)(x - 3)$; здесь в частном получается многочлен $S(x) = x - 3$.

Если же многочлен $P(x)$ не делится на многочлен $Q(x)$, то рассматривают ***деление с остатком***. Возможность такого деления вытекает из следующего свойства: *для любых двух многочленов* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *таких, что степень* $P(x)$ *не меньше степени* $Q(x)$, *существует одна и только одна пара многочленов* $S(x)$ *и* $R(x)$ *таких, что справедливо тождество*

$$P(x) = Q(x)\ S(x) + R(x), \qquad (1)$$

причем степень многочлена $R(x)$ *меньше степени многочлена* $Q(x)$ (многочлен $R(x)$ называют ***остатком***).

При делении многочленов, приведенных к стандартному виду, используют правило деления «углом», аналогичное правилу деления многозначных чисел (см. п. 3).

П р и м е р 1. Разделить $P(x) = 3x^4 + 2x^3 + 70x^2 + 3x - 4$ на $Q(x) = x^2 + 5x + 1$.

❑ Выполним деление «углом»:

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} 3x^4 + 2x^3 + 70x^2 + 3x - 4 \\ 3x^4 + 15x^3 + 3x^2 \end{array} & x^2 + 5x + 1 \\ \cline{2-2}
\hline
-\begin{array}{l} -13x^3 + 67x^2 + 3x - 4 \\ -13x^3 - 65x^2 - 13x \end{array} & 3x^2 - 13x + 132 \\
\hline
-\begin{array}{l} 132x^2 + 16x - 4 \\ 132x^2 + 660x + 132 \end{array} & \\
\hline
-644x - 136 &
\end{array}$$

Итак, $S(x) = 3x^2 - 13x + 132$ — частное, $R(x) = -644x - 136$ — остаток. При этом выполняется тождество

$$\underbrace{3x^4 + 2x^3 + 70x^2 + 3x - 4}_{P(x)} =$$

$$=\underbrace{(x^2+5x+1)}_{Q(x)}\underbrace{(3x^2-13x+132)}_{S(x)}+\underbrace{(-644x-136)}_{R(x)}.\ \blacksquare$$

Рассмотрим процесс деления многочлена n-й степени, имеющего вид $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+$ $+\ldots+a_n$, на линейный двучлен $x-\alpha$. Тогда деление можно производить по специальной схеме, называемой ***схемой Горнера***.

В этом случае тождество (1) примет вид

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=$$
$$=(x-a)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1})+r, \qquad (2)$$

где частное имеет степень $n-1$, а остаток — нулевую степень, т. е. является просто числом. Так как многочлены в левой и правой частях тождества (2) совпадают, то, раскрыв скобки, получим равенства, выражающие совпадение коэффициентов при одинаковых степенях x:

$a_0=b_0$, т. е. $b_0=a_0$,

$a_1=-\alpha b_0+b_1$, т. е. $b_1=a_1+\alpha b_0$,

$a_2=-\alpha b_1+b_2$, т. е. $b_2=a_2+\alpha b_1$,

$a_{n-1}=-\alpha b_{n-2}+b_{n-1}$, т. е. $b_{n-1}=a_{n-1}+\alpha b_{n-2}$,

$a_n=-\alpha b_{n-1}+r$, т. е. $r=a_n+\alpha b_{n-1}$.

Обычно вычисление коэффициентов частного и остатка располагают в следующей таблице:

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
α	$a_0 = b_0$	$\alpha b_0 + a_1$	$\alpha b_1 + a_2$	...	$\alpha b_{n-2} + a_{n-1}$	$\alpha b_{n-1} + a_n = r$

Верхнюю строку таблицы заполняют сразу; нижнюю строку, где помещены коэффициенты частного и остаток, заполняют постепенно, двигаясь слева направо. В каждой клетке нижней строки записывают сумму коэффициента из верхней строки с умноженным на α числом, полученным в соседней слева клетке нижней строки.

П р и м е р 2. Используя схему Горнера, разделить $x^3 + 4x^2 - 3x + 5$ на $x - 2$.

❑ Составим таблицу:

	1	4	−3	5
2	1	6	9	23

Значит, частное равно $x^2 + 6x + 9$, а остаток равен 23. ■

Заметим, что остаток от деления многочлена на двучлен $x - \alpha$ можно найти, не выполняя деления. А именно, справедливо следующее свойство: *остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - \alpha$ равен значению многочлена при $x = \alpha$* (***теорема Безу***).

Так, в примере 2 имеем $P(2) = 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 23$.

Из теоремы Безу вытекает, что *многочлен* $P(x)$ *делится на двучлен* $x-\alpha$ *тогда и только тогда, когда* α *— корень этого многочлена.*

П р и м е р 3. При каком значении λ многочлен $P(x)=x^4+6x^2+\lambda x+6$ делится на двучлен $x+2$?

❑ Для того чтобы выполнялось указанное требование, необходимо и достаточно, чтобы число -2 было корнем многочлена. Имеем $P(-2)=16+24-$ $-2\lambda+6=46-2\lambda$, т. е. многочлен $P(x)$ разделится на $x+2$ при условии $\lambda=23$. ■

60. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители. Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c (т. е. корни уравнения $ax^2+bx+c=0$), то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Это — ***формула разложения квадратного трехчлена на множители.***

П р и м е р. Разложить на множители

$$6x^2-x-2.$$

❑ Применив формулу корней квадратного уравнения (см. п. 141) к уравнению $6x^2-x-2=0$, находим, $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{2}{3}$. Значит,

$$6x^2-x-2=6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 3\left(x-\frac{2}{3}\right)=$$
$$=(2x+1)(3x-2). \blacksquare$$

61. Разложение на множители двучлена $x^n - a^n$. Известно, что

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a), \qquad (1)$$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + xa + a^2). \qquad (2)$$

Перемножив многочлены $x - a$ и $x^3 + x^2a + xa^2 + a^3$, получим

$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3). \qquad (3)$$

Обобщением формул (1), (2), (3) является формула разложения на множители двучлена $x^n - a^n$:

$$x^n - a^n =$$

$$= (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}).$$

Так, $x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

62. Возведение двучлена в натуральную степень (формула бинома Ньютона). В этом пункте речь идет о том, как двучлен (или бином) $a + b$ возвести в любую натуральную степень.

Если $n = 1$, то $(a + b)^1 = a + b$.

Если $n = 2$, то $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Если $n = 3$, то $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Воспользовавшись тем, что $(a + b)^4 = (a + b)^3 \times (a + b)$, можно вывести формулу

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Вообще, справедлива формула

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots$$

$$\ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n,$$

называемая ***формулой бинома Ньютона.***

Здесь $C_n^0, C_n^1 = n,\ C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}, \ldots,$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}, \ldots,$$

$C_n^{n-1} = n, C_n^n = 1$ — биномиальные коэффициенты (числа сочетаний из n элементов по нулю, одному, двум,…, $k,\ldots,n-1$, n элементам (см. пп.202, 203).

Например,

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}a^4b^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}a^3b^3 +$$

$$+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^2b^4 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}ab^5 + b^6 =$$

$$= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

§ 7. Дробные рациональные выражения

63. Рациональная дробь и ее основное свойство. Любое дробное алгебраическое выражение (см. п. 51) можно записать в виде $\dfrac{P}{Q}$, где P и Q — рациональные выражения, причем Q обязательно содержит переменные. Такую дробь называют ***рациональной дробью***.

Примеры рациональных дробей:

$$\frac{x+1}{2x-\frac{1}{3}},\ \frac{(x+2)(x^2-3)}{a+2b+5c},\ \frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{a-b}.$$

Основное свойство рациональной дроби выражается тождеством $\frac{P}{Q}=\frac{PR}{QR}$, справедливым при условиях $R \neq 0$ и $Q \neq 0$; здесь R — целое рациональное выражение. Это значит, что числитель и знаменатель рациональной дроби можно умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, одночлен или многочлен. Так,

$$\frac{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+1}{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}}=\frac{12\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+1\right)}{12\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{4x^3-6x^2+12}{3x^2+2x+6}.$$

Основное свойство дроби можно использовать для перемены знаков у членов дроби. Если числитель и знаменатель дроби $\frac{P}{Q}$ умножить на — 1, то получим $\frac{P}{Q}=\frac{-P}{-Q}$. Таким образом, *значение дроби не изменится, если одновременно изменить знаки чис-*

лителя и знаменателя. Если же изменить знак только числителя или только знаменателя, то и дробь изменит свой знак:

$$\frac{-P}{Q} = -\frac{P}{Q};\ \frac{P}{-Q} = -\frac{P}{Q}.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{P}{Q} = -\dfrac{-P}{Q} = -\dfrac{P}{-Q}$.

Например, $\dfrac{3x-2}{3x+4} = -\dfrac{-(3x-2)}{3x+4} = -\dfrac{2-3x}{3x+4}$.

64. Сокращение рациональных дробей. Сократить дробь — это значит разделить числитель и знаменатель дроби на общий множитель. Возможность такого сокращения обусловлена основным свойством дроби.

Для того чтобы сократить рациональную дробь, нужно числитель и знаменатель разложить на множители. Если окажется, что числитель и знаменатель имеют общие множители, то дробь можно сократить. Если же общих множителей нет, то преобразование дроби с помощью сокращения невозможно.

П р и м е р. Сократить дробь $\dfrac{x^2-3xy}{9y^2-x^2}$.

❑ Имеем $x^2 - 3xy = x(x-3y)$;

$$9y^2 - x^2 = -(x^2 - 9y^2) = -(x-3y)(x+3y).$$

Значит, $\dfrac{x^2-3xy}{9y^2-x^2} = \dfrac{x(x-3y)}{-(x-3y)(x+3y)} = -\dfrac{x}{x+3y}$.

Заметим, что сокращение дроби выполнено при условии $x - 3y \neq 0$. ■

65. Приведение рациональных дробей к общему знаменателю. ***Общим знаменателем*** нескольких рациональных дробей называется целое рациональное выражение, которое делится на знаменатель каждой дроби (см. п. 57). Обычно берут такой общий знаменатель, что любой другой общий знаменатель делится на выбранный. Так, общим знаменателем дробей $\frac{x}{x+2}$ и $\frac{3x-1}{x-2}$ служит многочлен $(x+2)(x-2)$. Имеем

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)}; \quad \frac{3x-1}{x-2} = \frac{(3x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)}.$$

Приведение данных дробей к общему знаменателю достигнуто умножением числителя и знаменателя первой дроби на $x - 2$, а числителя и знаменателя второй дроби — на $x + 2$. Многочлены $x - 2$ и $x + 2$ называются ***дополнительными множителями***.

Чтобы привести несколько рациональных дробей к общему знаменателю, нужно:

1) разложить знаменатель каждой дроби на множители;

2) составить общий знаменатель, включив в него все множители полученных в п. 1 разложений; если некоторый множитель имеется в нескольких разложениях, то он берется с показателем степени, равным наибольшему из имеющихся;

3) найти дополнительные множители для каждой из дробей (для этого общий знаменатель делят на знаменатель дроби);

4) домножив числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительный множитель, привести дроби к общему знаменателю.

П р и м е р. Привести к общему знаменателю дроби

$$\frac{a}{12a^2-12b^2};\ \frac{b}{18a^3+18a^2b};\ \frac{a+b}{24a^2-24ab}.$$

❑ Разложим знаменатели на множители:

$$12a^2-12b^2=12(a-b)(a+b);$$

$18a^3+18a^2b=18a^2(a+b);\ 24a^2-24ab=24a(a-b)$. В общий знаменатель надо включить следующие множители: $(a-b),(a+b),\ a^2$ и наименьшее общее кратное чисел 12, 18, 24, т. е. К (12, 18, 24) = 72. Итак, общий знаменатель равен $72a^2(a-b)(a+b)$.

Найдем дополнительные множители: для первой дроби $6a^2$, для второй $4(a-b)$, для третьей $3a(a+b)$. Значит,

$$\frac{\overset{6a^2}{a}}{12a^2-12b^2}=\frac{6a^3}{72a^2(a-b)(a+b)};$$

$$\frac{\overset{4(a-b)}{b}}{18a^3+18a^2b}=\frac{4b(a-b)}{72a^2(a-b)(a+b)};$$

$$\frac{\overset{3a(a+b)}{a+b}}{24a^2-24ab}=\frac{3a(a+b)^2}{72a^2(a-b)(a+b)}. \blacksquare$$

66. Сложение и вычитание рациональных дробей. Сумма двух (и вообще любого конечного числа) рациональных дробей с одинаковыми знаменателями тождественно равна дроби с тем же знаменателем и с числителем, равным сумме числителей складываемых дробей:

$$\frac{P_1}{Q} + \frac{P_2}{Q} = \frac{P_1 + P_2}{Q}.$$

Аналогично обстоит дело в случае разности дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{P_1}{Q} - \frac{P_2}{Q} = \frac{P_1 - P_2}{Q}.$$

Для сложения или вычитания рациональных дробей с разными знаменателями нужно прежде всего привести дроби к общему знаменателю, а затем выполнить операции над полученными дробями с одинаковыми знаменателями.

П р и м е р. Упростить выражение

$$\frac{3}{2x^2 + 2x} + \frac{2x - 1}{x^2 - 1} - \frac{2}{x}.$$

❑ Имеем $2x^2 + 2x = 2x(x + 1)$; $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Общий знаменатель равен $2x(x + 1)(x - 1)$; значит,

$$\frac{3}{2x^2 + 2x} + \frac{2x - 1}{x^2 - 1} - \frac{2}{x} = \frac{3^{\smile x-1}}{2x(x + 1)} + \frac{2x - 1^{\smile 2x}}{(x - 1)(x + 1)} -$$

$$- \frac{2^{\smile 2(x-1)(x+1)}}{x} = \frac{3(x - 1) + 2x(2x - 1) - 4(x - 1)(x + 1)}{2x(x - 1)(x + 1)} =$$

$$= \frac{x + 1}{2x(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{2x(x - 1)}. \blacksquare$$

67. Умножение и деление рациональных дробей. Произведение двух (и вообще любого конечного числа) рациональных дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей перемножаемых дробей:

$$\frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot P_2}{Q_1 \cdot Q_2}.$$

Частное от деления двух рациональных дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителя первой дроби на знаменатель второй дроби, а знаменатель — произведению знаменателя первой дроби на числитель второй дроби:

$$\frac{P_1}{Q_1} : \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot Q_2}{Q_1 \cdot P_2}.$$

Учитывая возможность сокращения рациональной дроби, полученной в результате умножения или деления рациональных дробей, обычно стремятся до выполнения этих операций разложить на множители числители и знаменатели исходных дробей.

П р и м е р. Выполнить действия:

а) $\dfrac{x^2+2x+1}{18x^3} \cdot \dfrac{9x^4}{x^2-1}$; б) $\dfrac{a^3-2a^2}{3a+3} : \dfrac{a^2-4}{3a^2+6a+3}$.

❑ Имеем

$$\frac{x^2+2x+1}{18x^3} = \frac{(x+1)^2}{18x^3}; \quad \frac{9x^4}{x^2-1} = \frac{9x^4}{(x-1)(x+1)}.$$

Используя правило умножения дробей, получаем

$$\frac{x^2+2x+1}{18x^3} \cdot \frac{9x^4}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2 \cdot 9x^4}{18x^3(x+1)(x-1)} = \frac{x(x+1)}{2(x-1)}.$$

б) Имеем

$$\frac{a^3-2a^2}{3a+3}=\frac{a^2(a-2)}{3(a+1)};\ \frac{a^2-4}{3a^2+6a+3}=\frac{(a-2)(a+2)}{3(a+1)^2}.$$

Используя правило деления дробей, находим

$$\frac{a^3-2a^2}{3a+3}:\frac{a^2-4}{3a^2+6a+3}=\frac{a^2(a-2)\cdot 3(a+1)^2}{3(a+1)(a-2)(a+2)}=$$

$$=\frac{a^2(a+1)}{a+2}.\ \blacksquare$$

68. Возведение рациональной дроби в целую степень. Чтобы возвести рациональную дробь $\frac{P}{Q}$ в натуральную степень n, нужно возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель дроби; первое выражение — числитель, а второе выражение — знаменатель результата: $\left(\frac{P}{Q}\right)^n=\frac{P^n}{Q^n}$.

П р и м е р 1. Преобразовать в дробь степень

$$\left(\frac{2x^2y^3}{3z^5}\right)^3.$$

❑ $\left(\frac{2x^2y^3}{3z^5}\right)^3=\frac{(2x^2y^3)^3}{(3z^5)^3}=\frac{8x^6y^9}{27z^{15}}.\ \blacksquare$

При возведении дроби в целую отрицательную степень используется тождество $\left(\frac{P}{Q}\right)^{-n}=\left(\frac{Q}{P}\right)^{n}$, справедливое при всех значениях переменных, при которых $P \neq 0$ и $Q \neq 0$.

П р и м е р 2. Преобразовать в дробь выражение

$$\left(\frac{(a+b)^2(a-b)^3}{(a+2b)^4}\right)^{-5}.$$

❑ $$\left(\frac{(a+b)^2(a-b)^3}{(a+2b)^4}\right)^{-5}=\left(\frac{(a+2b)^4}{(a+b)^2(a-b)^3}\right)^{5}=$$

$$=\frac{(a+2b)^{20}}{(a+b)^{10}(a-b)^{15}}.\ ■$$

69. Преобразование рациональных выражений. Преобразование любого рационального выражения сводится к сложению, вычитанию, умножению и делению рациональных дробей, а также к возведению дроби в натуральную степень. Всякое рациональное выражение можно преобразовать в дробь, числитель и знаменатель которой — целые рациональные выражения; в этом, как правило, состоит цель тождественных преобразований рациональных выражений.

П р и м е р. Упростить выражение

$$\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)^{-1}+\frac{8a^2}{2a+b}.$$

❑1) $$\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}=\frac{2a^{\underset{\smile}{2a+b}}}{2a+b}-\frac{4a^2}{(2a+b)^2}=$$

$$=\frac{2a(2a+b)-4a^2}{(2a+b)^2}=\frac{2ab}{(2a+b)^2};$$

2) $$\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}=\frac{2a}{(2a-b)(2a+b)}-\frac{1^{\underset{\smile}{2a+b}}}{2a-b}=$$

$$=\frac{2a-2a-b}{(2a-b)(2a+b)}=\frac{-b}{(2a-b)(2a+b)};$$

3) $$\left(-\frac{b}{(2a-b)(2a+b)}\right)^{-1}=-\frac{(2a-b)(2a+b)}{b};$$

4) $$\frac{2ab}{(2a+b)^2}\cdot\left(-\frac{(2a-b)(2a+b)}{b}\right)=$$

$$=-\frac{2ab(2a-b)(2a+b)}{b(2a+b)^2}=\frac{2a(b-2a)}{2a+b}=\frac{2ab-4a^2}{2a+b};$$

5) $$\frac{2ab-4a^2}{2a+b}+\frac{8a^2}{2a+b}=\frac{2ab+4a^2}{2a+b}=$$

$$=\frac{2a(2a+b)}{2a+b}=2a.$$ ■

§ 8. Иррациональные выражения

70. Простейшие преобразования арифметических корней (радикалов). При преобразовании арифметических корней используются их свойства 1^0 — 5^0 (см. п. 37).

П р и м е р. Упростить выражение:

а) $\sqrt{45a^5}$; б) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^5$; в) $\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}}$; г) $\sqrt[30]{2^9}$;

д) $\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{a^2}$; е) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$ (все переменные считаются принимающими только неотрицательные значения).

❑ а) Используя свойство 1^0, получим

$$\sqrt{45a^5}=\sqrt{9a^4\cdot 5a}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{a^4}\cdot\sqrt{5a}=3a^2\sqrt{5a}.$$

Такое преобразование называется ***вынесением множителя из-под знака корня***.

б) Согласно свойству 3^0, имеем $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^5=\sqrt[3]{(a^2)^5}=$ $=\sqrt[3]{a^{10}}$. Упростим подкоренное выражение, для чего вынесем множитель за знак корня. Тогда $\sqrt[3]{a^{10}}=$ $=\sqrt[3]{a^9\cdot a}=\sqrt[3]{a^9}\cdot\sqrt[3]{a}=a^3\sqrt[3]{a}$.

в) Преобразуем выражение $x^2\sqrt[3]{x}$, для чего воспользуемся ***внесением множителя под знак корня***:

$$x^2\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(x^2)^3} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^6 \cdot x} = \sqrt[3]{x^7}.$$

Согласно свойству 4^0, имеем $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^7}} = \sqrt[12]{x^7}$.

г) В силу свойства 5^0 показатель корня и показатель степени подкоренного выражения можно разделить на одно и то же натуральное число. Разделив указанные показатели на 3, получим $\sqrt[30]{2^9} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}$.

д) Согласно свойству 1^0, для перемножения корней одной и той же степени достаточно перемножить подкоренные выражения и из полученного результата извлечь корень той же степени. Значит, $\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a^2} = \sqrt[5]{a \cdot a^2} = \sqrt[5]{a^3}$.

е) Прежде всего нужно привести радикалы к одному показателю. Согласно свойству 5^0, мы можем показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить на одно и то же натуральное число. Поэтому $\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}$. Далее имеем $\sqrt[6]{a^2} \times$ $\times \sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{a^3}$. Разделив теперь показатели корня и степени подкоренного выражения на 3, получим $\sqrt[6]{a^3} =$ $= \sqrt{a}$. ■

На практике при выполнении действий над радикалами довольно часто переходят к дробным показателям. Например,

$$\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^7} = x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{7}{12}} = x^{\frac{3}{8}+\frac{7}{12}} = x^{\frac{23}{24}} = \sqrt[24]{x^{23}}.$$

71. Тождество $\sqrt{a^2}=|a|$. Упростим выражение $\sqrt{a^2}$. Здесь возможны два случая: $a \ge 0$ или $a < 0$. Если $a \ge 0$, то $\sqrt{a^2} = a$; если же $a < 0$, то $\sqrt{a^2} = -a$.

Значит,

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, \text{ если } a \ge 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Но точно так же определяется модуль действительного числа (см. п. 28). Итак, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Например, $\sqrt{3^2} = |3| = 3$; $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = -(-5) = 5$.

Вообще, если n — четное число, т. е. $n = 2k$, то

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|.$$

П р и м е р. Упростить

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{2 - x} + x - 3.$$

❑ Имеем $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x - 3|$. Так как заданное выражение содержит слагаемое $\sqrt{2-x}$, то $2 - x \ge 0$, откуда находим, что $x \le 2$. Значит, $x - 3 < 0$, а потому $|x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$. Итак, $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 3 - x$, и мы получаем

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{2-x} + x - 3 =$$
$$= 3 - x + \sqrt{2-x} + x - 3 = \sqrt{2-x}. \blacksquare$$

72. Преобразование иррациональных выражений. Для преобразования иррациональных выражений используют свойства радикалов (см. п. 37) и свойства степени с рациональным показателем (см. п. 40).

П р и м е р. Упростить выражение

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \left(x^0 + \frac{2}{\sqrt{x}} + x^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

❑ 1) $$\frac{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x^2} - 1)}{1 - \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\sqrt[4]{x}(\sqrt{x} - 1)}{1 - \sqrt{x}} = -\sqrt[4]{x};$$

2) $$-\sqrt[4]{x} + \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = \frac{-\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x} + 1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} =$$

$$= \frac{-\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}};$$

3) $$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 = \frac{1}{(\sqrt[4]{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}};$$

4) $$x^0 + \frac{2}{\sqrt{x}} + x^{-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x} = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{x}.$$

5) $\left(\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{x}{(\sqrt{x}+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$= \sqrt{\dfrac{x}{(\sqrt{x}+1)^2}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$

6) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}.$

Обычно стараются записать ответ так, чтобы в знаменателе не содержалась иррациональность. Для избавления от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ умножим и числитель, и знаменатель на $\sqrt{x}-1$ — это выражение называется ***сопряженным*** для выражения $\sqrt{x}+1$. Получим

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^2-1^2} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}. \blacksquare$$

§ 9. Преобразование выражений, содержащих переменную под знаком логарифма

73. Понятие трансцендентного выражения. ***Трансцендентным*** называется выражение, содержащее переменные под знаком ***трансцендентной функции***, т.е. под знаком показательной, логарифмической, тригонометрических или обратных тригонометрических функций (см. пп. 114, 116, 118, 126–128).

Примеры трансцендентных выражений: $\log_2 a + \log_2 b$; $\sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$; $\arcsin(x^2 - x)$.

74. Определение логарифма положительного числа по данному основанию. ***Логарифмом*** положительного числа x по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число x:

$$a^{\log_a x} = x.$$

Равенство $\log_a x = y$ означает, что $a^y = x$.

Например, $\log_3 81 = 4$, так как $3^4 = 81$; $\log_{10} 0{,}001 = -3$, поскольку $10^{-3} = 0{,}001$; $\log_{0,5} \sqrt{2} = -0{,}5$, так как $(0{,}5)^{-0{,}5} = 2^{0{,}5} = \sqrt{2}$.

В записи $\log_a x$ число a — ***основание логарифма***, x — ***логарифмируемое число***.

Из определения логарифма вытекают следующие важные равенства:

$$\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1.$$

Первое следует из того, что $a^0 = 1$, а второе — из того, что $a^1 = a$. Вообще, имеет место равенство $\log_a a^r = r$.

75. Свойства логарифмов.

1^0. Если $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

(*логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей*).

Так, $\log_3 15 = \log_3(3 \cdot 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + \log_3 5$.

2^0. Если $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

(*логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя*).

Так, $\log_2 1{,}25 = \log_2 \frac{5}{4} = \log_2 5 - \log_2 4 = \log_2 5 - 2$.

Если же $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, то справедливы равенства

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a|x_1| + \log_a|x_2|,$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a|x_1| - \log_a|x_2|.$$

3^0. Если $x > 0$, то

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

(*логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания*).

Например, $\log_5 81 = \log_5 3^4 = 4\log_5 3$; $\log_3 \sqrt{2} = \log_3 2^{0,5} = 0{,}5\log_3 2$.

Справедливо следующее утверждение: если k — четное число, то $\log_a x^k = k\log_a|x|$ для любого $x \neq 0$.

Например, $\log_2 x^4 = 4\log_2|x|$; $\log_3 x^2 = 2\log_3|x|$.

Справедливы следующие два свойства, позволяющие перейти к новому основанию логарифма:

4^0. Если $x > 0$, то $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

(***формула перехода к новому основанию***).

Например,

$$\log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2};\ \log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

5^0. Если $x > 0$, то

$$\log_a x = \log_{a^k} x^k.$$

Так, $\log_2 5 = \log_{2^3} 5^3 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{5}$.

П р и м е р. Вычислить $\log_5 6$, если $\log_2 3 = a$, $\log_2 10 = b$.

❑ Перейдем в $\log_5 6$ к основанию 2. Воспользовавшись свойством 4^0, получим

$$\log_5 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 5} = \frac{\log_2(2 \cdot 3)}{\log_2 \dfrac{10}{2}} = \frac{\log_2 2 + \log_2 3}{\log_2 10 - \log_2 2} = \frac{1+a}{b-1} \blacksquare$$

76. Логарифмирование и потенцирование. Если некоторое выражение A составлено из положительных чисел с помощью операций умножения, деления и возведения в степень, то, используя свойства логарифмов, можно выразить $\log_a A$ через логарифмы входящих в выражение A чисел. Такое преобразование называется ***логарифмированием***.

П р и м е р 1. Прологарифмировать по основанию 5 выражение $\frac{125a^3b^2}{\sqrt{c}}$, где a, b, c — положительные числа.

❑ Используя свойства логарифмов (см. п. 75), получим

$$\log_5 \frac{125a^3b^2}{\sqrt{c}} = \log_5(125a^3b^2) - \log_5 \sqrt{c} =$$

$$= \log_5 125 + \log_5 a^3 + \log_5 b^2 - \log_5 c^{0,5} =$$

$$= 3 + 3\log_5 a + 2\log_5 b - 0{,}5\log_5 c. \blacksquare$$

Часто приходится решать обратную задачу: находить выражение по его логарифму. Такое преобразование называется ***потенцированием***.

П р и м е р 2. Найти x, если

$$\log_3 x = 2\log_3 5 + 0{,}5\log_3 8 - 3\log_3 10.$$

❑ Имеем

$$\log_3 x = \log_3 25 + \log_3 8^{0,5} - \log_3 10^3 =$$

$$= \log_3 \frac{25 \cdot 2\sqrt{2}}{1000} = \log_3 \frac{\sqrt{2}}{20}.$$

Из равенства $\log_3 x = \log_3 \frac{\sqrt{2}}{20}$ находим $x = \frac{\sqrt{2}}{20}$. ■

77. Десятичный логарифм. Характеристика и мантисса десятичного логарифма. Если основание логарифма равно 10, то логарифм называется ***десятичным***. Вместо записи $\log_{10} x$ принята запись $\lg x$.

В частности, для десятичных логарифмов справедливы равенства:

$$10^{\lg a} = a;$$

$$\lg 1 = 0; \qquad \lg 0{,}1 = -1;$$
$$\lg 10 = 1; \qquad \lg 0{,}01 = -2;$$
$$\lg 100 = 2; \qquad \lg 0{,}001 = -3;$$
$$\lg 1000 = 3; \qquad \lg 0{,}0001 = -4;$$

$$\lg 10^n = n.$$

Пусть положительное число a представлено в стандартном виде (см. п. 36): $a = a_1 \cdot 10^n$, где $1 \le a_1 < 10$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (n — порядок числа a). Прологарифмируем число a по основанию 10, воспользовавшись свойствами логарифмов (см. п. 75). Имеем $\lg a = \lg(a_1 \cdot 10^n) = \lg a_1 + \lg 10^n = \lg a_1 + n$. Итак,

$$\lg a = \lg a_1 + n. \qquad (1)$$

Так как $1 \le a_1 < 10$, то $\lg 1 \le \lg a_1 < \lg 10$, т.е. $0 \le \lg a_1 < 1$. Поэтому из равенства (1) следует, что n есть наибольшее целое число, не превосходящее число $\lg a$, иначе говоря, n есть целая часть числа $\lg a$, т. е. $n = [\lg a]$ (см. п. 33). Слагаемое $\lg a_1$ есть дробная часть числа $\lg a$, т.е. $\lg a_1 = \{\lg a\}$ (см. п. 33). Целая часть числа $\lg a$, т.е. порядок числа a, называется ***характеристикой*** $\lg a$, а дробная часть числа $\lg a$ — его ***мантиссой***.

Имеет место следующее утверждение: *если число $a > 0$ умножить на 10^k, где k — целое число, то* *мантисса логарифма не изменится*, иными словами, $\lg a$ и $\lg(a \cdot 10^k)$ имеют одинаковые мантиссы.

§ 10. Формулы тригонометрии и их использование для преобразования тригонометрических выражений

78. Тригонометрические выражения. Выражение, в котором переменная содержится под знаками тригонометрических функций, называют ***тригонометрическим***. Для преобразования тригонометрических выражений используют свойства тригонометрических функций, отмеченные в пп. 120–125 и формулы тригонометрии, указанные в пп. 79–87.

79. Формулы сложения и вычитания аргументов. Для любых действительных чисел α и β справедливы формулы

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \qquad (2)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad (5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad (6)$$

которые называются ***формулами сложения и вычитания аргументов***.

Формула (5) верна при α, β, $\alpha+\beta$, отличных от $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а формула (6) — при α, β, $\alpha-\beta$, отличных от $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

П р и м е р 1. Вычислить $\sin 75^\circ$.

❑ Имеем $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ)$. Воспользовавшись формулой (3) при $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, получим

$$\sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ.$$

Известно, что $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. п. 118). Значит,

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}. \ \blacksquare$$

П р и м е р 2. Найти $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

❑ Воспользуемся формулой (5) и тем, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Имеем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 7. \ \blacksquare$$

80. Формулы приведения. Под ***формулами приведения*** понимают обычно формулы, позволяющие свести значение тригонометрической функции аргумента вида $\frac{\pi n}{2} \pm \alpha$, $n \in \boldsymbol{Z}$, к функции аргумента α.

Пусть, например, нужно вычислить $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Имеем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha =$$

$$= 1 \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \sin\alpha = \cos\alpha.$$

Подобным же образом выводятся и остальные формулы приведения, которые даны в следующей таблице:

Функция	Аргумент t						
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Для облегчения запоминания формул приведения используют следующее правило:

1. В правой части формулы ставят тот знак, который имела бы левая часть при условии $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2. Если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус заменяют на косинус, тангенс — на котангенс и наоборот; если же угол равен $\pi \pm \alpha$ или $2\pi - \alpha$, то замены не происходит.

81. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Если в формуле (2) из п. 79 положить $\alpha = \beta = t$, то получим

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1, \qquad (1)$$

откуда в свою очередь находим

$$1 + \mathrm{tg}^2\, t = \frac{1}{\cos^2 t}, \qquad (2)$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2\, t = \frac{1}{\sin^2 t}. \qquad (3)$$

Тождество (2) справедливо при $t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, а тождество (3) — при $t \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Равенства (1), (2), (3) связывают между собой различные тригонометрические функции одного и того же аргумента. Известны еще два равенства, связывающие между собой различные тригонометрические функции одного и того же аргумента:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \ \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Перемножая эти равенства, получаем соотношение

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1, \tag{4}$$

справедливое при $t \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

П р и м е р. Известно, что $\sin t = -\frac{3}{5}$, причем $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$. Найти $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

❑ Из формулы (1) следует, что $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$. Подставив вместо $\sin t$ его значение, получим

$$\cos^2 t = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Так как $\cos^2 t = \frac{16}{25}$, то либо $\cos t = \frac{4}{5}$, либо $\cos t = -\frac{4}{5}$. По условию, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$, т.е. аргумент t принадлежит III четверти. Но в III четверти косинус отрицателен, поэтому из двух указанных выше возможностей выбираем одну: $\cos t = -\frac{4}{5}$. Зная $\sin t$ и $\cos t$, находим $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}, \ \operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}.$$

Итак, $\cos t = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$. ■

82. Формулы двойного угла. Если в формулах (3), (1), (5) из п. 79 положить $\alpha = t$, $\beta = t$, то получим следующие тождества:

$$\sin 2t = 2\sin t \cos t, \quad (1)$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2t = \frac{2\operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}. \quad (3)$$

Формула (3) верна при $t \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Соотношения (1), (2) и (3) называют ***формулами двойного угла***. С их помощью синус, косинус, тангенс любого аргумента можно выразить через тригонометрические функции вдвое меньшего аргумента. Например, справедливы равенства

$$\sin 5t = 2\sin\frac{5t}{2}\cos\frac{5t}{2}, \quad \cos 8t = \cos^2 4t - \sin^2 4t.$$

В ряде случаев полезным оказывается использование полученных формул «справа налево», т.е. замена выражения $2\sin t \cos t$ выражением $\sin 2t$, выражения $\cos^2 t - \sin^2 t$ выражением $\cos 2t$ и, наконец, выражения $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,t}{1-\mathrm{tg}^2\,t}$ выражением $\mathrm{tg}\,2t$.

П р и м е р. Упростить выражение $\mathrm{tg}\,t - \mathrm{ctg}\,t$.

❑ $\mathrm{tg}\,t - \mathrm{ctg}\,t = \dfrac{\sin t}{\cos t} - \dfrac{\cos t}{\sin t} = \dfrac{\sin^2 t - \cos^2 t}{\sin t \cos t} =$

$$= -\frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\frac{1}{2}\sin 2t} = -2\frac{\cos 2t}{\sin 2t} = -2\,\mathrm{ctg}\,2t. \blacksquare$$

83. Формулы понижения степени. Зная, что $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ (см. п. 81), а $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$ (см. п. 82), находим

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}. \qquad (1)$$

Аналогично находим

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) называются ***формулами понижения степени***. Они позволяют преобразовать $\sin^2 t$ и $\cos^2 t$ в выражения, содержащие первую степень косинуса двойного аргумента. Например, справедливы равенства

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2},\ \cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\alpha\right)}{2}.$$

Формулы (1) и (2) используются и «справа налево» для преобразования сумм $1+\cos 2t$, $1-\cos 2t$ в произведения. Например, верны равенства

$$1+\cos 5x = 2\cos^2\frac{5x}{2},\ 1-\cos(\alpha+\beta) = 2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

П р и м е р 1. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{\sin t}{1+\cos t}.$$

❑ Знаменатель правой части преобразуем по формуле (1), а числитель — по формуле синуса двойного угла (см. п. 82). Получим равенство

$$\frac{\sin t}{1+\cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}} = \operatorname{tg}\frac{t}{2}, \blacksquare$$

справедливое при всех $t \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

П р и м е р 2. Вычислить $\sin^4 x + \cos^4 x$, если известно, что $\cos 2x = \frac{5}{13}$.

❑ Воспользовавшись тем, что $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$ и $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2$, применим формулы понижения степени:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 =$$

$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{2+2\cos^2 2x}{4} =$$

$$=\frac{1+\cos^2 2x}{2}=\frac{1+\dfrac{25}{169}}{2}=\frac{97}{169}.\ \blacksquare$$

84. Выражение $\sin t$, $\cos t$ и $\operatorname{tg} t$ через $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$.

Используя тождества $\sin t=2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}$ и $\cos^2\dfrac{t}{2}+\sin^2\dfrac{t}{2}=1$ (см. пп. 82 и 81), запишем

$$\sin t=2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}=\frac{2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}}{\cos^2\dfrac{t}{2}+\sin^2\dfrac{t}{2}}.$$

Разделим числитель и знаменатель последней дроби почленно на $\cos^2\dfrac{t}{2}$:

$$\sin t=\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{t}{2}}. \qquad (1)$$

Далее, учитывая, что в силу формулы (2) п. 82 $\cos t=\cos^2\dfrac{t}{2}-\sin^2\dfrac{t}{2}$, аналогично получим

$$\cos t=\frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{t}{2}}. \qquad (2)$$

Наконец, разделив равенство (1) на (2), получим

$$\operatorname{tg} t = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}. \qquad (3)$$

Формулы (1) — (3) справедливы при $t \neq (2n+1)\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

П р и м е р. Найти $\dfrac{2 + 3\cos t}{4 - 5\sin t}$, если $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2} = -\dfrac{2}{3}$.

❑ Согласно формулам (1) и (2), имеем

$$\sin t = \frac{2\left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{12}{13}, \ \cos t = \frac{1 - \frac{4}{9}}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{5}{13},$$

откуда $\dfrac{2 + 3\cos t}{4 - 5\sin t} = \dfrac{2 + \frac{15}{13}}{4 + \frac{60}{13}} = \dfrac{41}{112}$. ■

85. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение. Имеют место следующие формулы:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (1)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \qquad (5)$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad (6)$$

Формулы (5) и (6) верны при α и β, отличных от $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

П р и м е р. Преобразовать в произведение

$$\cos 48^\circ - \cos 12^\circ.$$

❑ Применив формулу разности косинусов (4) при $\alpha = 48^\circ$, $\beta = 12^\circ$, получим

$$\cos 48^\circ - \cos 12^\circ = -2\sin\frac{48^\circ + 12^\circ}{2}\sin\frac{48^\circ - 12^\circ}{2} =$$

$$= -2\sin 30^\circ \sin 18^\circ.$$

Так как $\sin 30^\circ = 0{,}5$, то окончательно получим

$$\cos 48^\circ - \cos 12^\circ = -\sin 18^\circ. \ ■$$

86. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Справедливы следующие формулы:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)}{2}, \qquad (1)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}. \qquad (3)$$

П р и м е р. Преобразовать в сумму

$$\sin 43^\circ \cos 19^\circ.$$

❑ Воспользовавшись формулой (1) при $\alpha = 43^\circ$, $\beta = 19^\circ$, получим

$$\sin 43^\circ \cos 19^\circ = \frac{\sin(43^\circ - 19^\circ) + \sin(43^\circ + 19^\circ)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 24^\circ + \sin 62^\circ). \blacksquare$$

87. Преобразование выражения $a\cos t + b\sin t$ к виду $A\sin(t+\alpha)$. Любое выражение вида $a\cos t + b\sin t$ можно представить в виде $A\sin(t+\alpha)$. Для этого вынесем за скобки выражение $\sqrt{a^2+b^2}$ и получим

$$a\cos t + b\sin t =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\right).$$

Но $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$. Это значит, что точка с координатами $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ лежит на единичной окружности, поэтому существует такое α, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha.$$

Обозначив $\sqrt{a^2+b^2}$ через A, имеем

$$a\cos t + b\sin t = A(\sin\alpha\cos t + \cos\alpha\sin t).$$

Применив к выражению в скобках формулу (3) из п. 79, получим

$$a\cos t + b\sin t = A\sin(t+\alpha).$$

Числа a, b, A, α связаны друг с другом соотношениями

$$a = A\sin\alpha,\ b = A\cos\alpha,\ A = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Например,

$$3\sin 2t + 4\cos 2t = 5\sin(2t+\alpha),$$

где $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

88. Преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции. Для преобразования выражений, содержащих обратные тригонометрические функции, используют определения этих функций (см. пп. 126–128) и формулы тригонометрии.

П р и м е р 1. Упростить выражение $\sin(\arccos x)$, где $-1 \le x \le 1$.

❑ Положим $y = \arccos x$. Тогда $\cos y = x$, где $0 \le y \le \pi$. Нужно найти $\sin y$. Известно, что $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$, поэтому $\sin^2 y = 1 - x^2$. Но $0 \le y \le \pi$, а на отрезке $[0, \pi]$ синус принимает только неотрицательные значения. Таким образом, $\sin y = \sqrt{1 - x^2}$, т. е. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$. ■

П р и м е р 2. Вычислить $\operatorname{tg}(0{,}5\arccos(-0{,}6))$.

❑ Пусть $\alpha = \arccos(-0{,}6)$. Тогда $\cos\alpha = -0{,}6$, где $\pi/2 < \alpha < \pi$. Нужно вычислить $\operatorname{tg}(\alpha/2)$. Имеем (см. п. 83) $\cos^2(\alpha/2) = 0{,}5(1 + \cos\alpha) = 0{,}5(1 - 0{,}6) = 0{,}2$. Далее, так как $1 + \operatorname{tg}^2(\alpha/2) = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha/2)}$ (см. п. 81), то $1 + \operatorname{tg}^2(\alpha/2) = 5$, откуда $\operatorname{tg}^2(\alpha/2) = 4$, т. е. $\operatorname{tg}(\alpha/2) = 2$ или $\operatorname{tg}(\alpha/2) = -2$.

По условию, $\pi/2 < \alpha < \pi$, т. е. $\pi/4 < \alpha/2 < \pi/2$, а в интервале $(\pi/4, \pi/2)$ имеем $\operatorname{tg}(\alpha/2) > 0$. Итак, $\operatorname{tg}(\alpha/2) = 2$, т. е. $\operatorname{tg}(0{,}5\arccos(-0{,}6)) = 2$. ■

Раздел III

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§ 11. Свойства функций

89. Определение функции. ***Числовой функцией*** с областью определения D называют соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу число y, зависящее от x. Переменную x называют ***независимой переменной*** (или ***аргументом***). Число y, соответствующее числу x, называют ***значением функции*** f ***в точке*** x и обозначают $f(x)$ (читают: «эф от икс»). Буквой f обозначается заданная функция, т.е. функциональная зависимость между переменными x и y, и используется запись $y = f(x)$. Говорят также, что $f(x)$ есть значение функции f в точке x.

Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют ***область определения функции***, ее обозначают $D(f)$.

Все значения, которые принимает функция $f(x)$ (при x, принадлежащих области ее определения), образуют ***множество значений функции***, его обозначают $E(f)$.

Имеются и другие подходы к введению понятия функции, например такой: переменная y называется ***функцией*** переменной x, если задана такая зависимость между этими переменными, которая позволяет для каждого значения x однозначно определить значение y.

Рассмотрим функцию $y = x^2$, где $1 \le x \le 3$. Эта запись означает, что задана следующая функция: каждому числу x из отрезка [1, 3] ставится в соответствие квадрат этого числа. Например,

$f(1) = 1^2 = 1$, $f(2) = 2^2 = 4$, $f(2{,}3) = 2{,}3^2 = 5{,}29$ и т. д. Запись $f(4)$ в этом случае лишена смысла, так как число 4 не принадлежит отрезку [1, 3]. Отрезок [1, 3] — область определения функции.

90. Аналитическое задание функции. Чтобы задать функцию, нужно указать способ, позволяющий для каждого значения аргумента найти соответствующее значение функции. Наиболее употребительным является способ задания функции с помощью формулы $y=f(x)$, где $f(x)$ — некоторое выражение с переменной x. В таком случае говорят, что функция задана формулой или что функция задана ***аналитически***.

Пусть, например, $y = x^2 + 5x - 1$, где $x \ge 0$. Область определения этой функции — луч $[0, +\infty)$. Чтобы найти значение функции в любой точке $x \ge 0$, достаточно найти числовое значение выражения $x^2 + 5x - 1$ в выбранной точке.

Для аналитически заданной функции иногда не указывают явно область определения функции. В таком случае подразумевают, что область определения функции $y = f(x)$ совпадает с областью определения выражения $f(x)$, т.е. с множеством тех значений x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл.

П р и м е р. Найти область определения функции: а) $y = \dfrac{1}{x+2}$; б) $y = \sqrt{x-1}$.

❑ а) Выражение $\dfrac{1}{x+2}$ определено при всех x, кроме того значения, которое обращает знаменатель в нуль, т.е. значения $x = -2$. Поэтому область определения функции состоит из всех чисел, кроме $x = -2$.

б) Выражение $\sqrt{x-1}$ определено при тех x, при которых $x - 1 \geq 0$, т.е. при $x \geq 1$. Значит, область определения функции — луч $[1, +\infty)$. ■

Иногда функция задается на различных промежутках различными формулами, например:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{если } -1 \leq x \leq 0, \\ x + 2, & \text{если } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Эта функция определена на отрезке $[-1, 1]$. Для вычисления значений функции нужно лишь точно определить, какой формулой следует воспользоваться для заданного конкретного значения аргумента. Так, если нужно вычислить $f(0{,}5)$, то воспользуемся равенством $f(x)=x+2$ и получим $f(0{,}5)=2{,}5$. Если же нужно вычислить $f(-0{,}5)$, то воспользуемся равенством $f(x)=2x+3$ и получим $f(-0{,}5)=2$.

91. Табличное задание функции. На практике часто используется ***табличный*** способ задания функции. При этом способе приводится таблица, указывающая значения функции для имеющихся в таблице значений аргумента. Примерами табличного задания функции являются таблицы квадратов, кубов, квадратных корней и т.д.

92. Графическое задание функции. Возьмем прямоугольную декартову систему координат xOy

(см.п.22); отметив на координатной плоскости все точки с абсциссой $x = a$, получим прямую, параллельную оси Oy (рис. 12); говорят, что $x = a$ — уравнение этой прямой, в частности, $x = 0$ — уравнение самой оси Oy. Аналогично, отметив на координатной плоскости все точки с ординатой $y = b$, получим прямую, параллельную оси Ox (рис. 12); говорят, что $y = b$ — уравнение этой прямой, в частности, $y = 0$ — уравнение самой оси Ox.

Подмножество F точек координатной плоскости является ***графиком*** некоторой функции, если оно имеет не более одной общей точки с любой прямой, параллельной оси Oy. Так, на рис.13, *а* изображено подмножество, являющееся графиком некоторой функции, а на рис. 13, *б* — подмножество, не являющееся графиком никакой функции.

Если дано подмножество F, являющееся графиком некоторой функции, то говорят, что функция задана ***графически***. Областью определения такой функции является проекция D множества F на ось Ox. Если взять точку $x \in D$, то, чтобы найти соот-

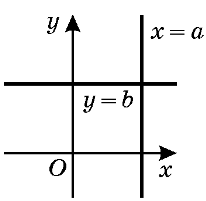
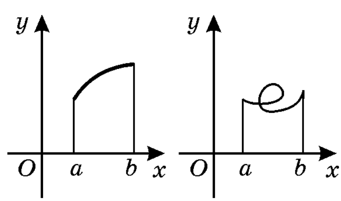


Рис. 12



а) *б*)

Рис. 13

ветствующее выбранному значению x значение функции, нужно через точку x провести прямую, параллельную оси Oy, до пересечения с графиком F в точке M. Ордината точки M и есть значение функции в точке x.

93. График функции, заданной аналитически. Пусть функция задана аналитически формулой $y = f(x)$. Тогда ее ***графиком*** называется множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости, где $y = f(x)$, а x «пробегает» всю область определения функции f. Например, графиком функции $y = x$ является множество точек вида $(x; x)$, т.е. точек, имеющих одинаковые координаты. Это множество точек есть биссектриса I и III координатных углов (рис. 14).

Построим теперь график функции $y = x^2$.

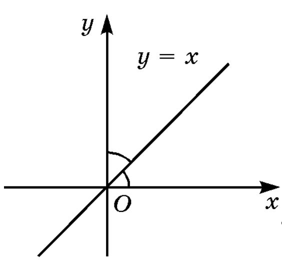


Рис. 14

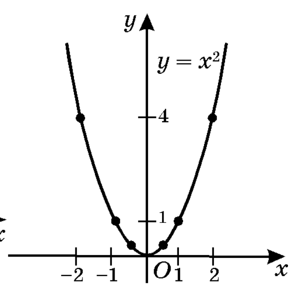


Рис. 15

Составим таблицу некоторых значений функции:

x	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2
y	4	1	$0{,}25$	0	$0{,}25$	1	4

Отметим точки (0; 0); (0,5; 0,25); (−0,5; 0,25); (1; 1); (−1; 1); (2; 4); (−2; 4) на координатной плоскости и соединив их плавной линией, получим график (а точнее, эскиз графика) функции $y = x^2$ (рис. 15). Эта линия называется ***параболой***. Вообще, параболой является график любой функции вида $y = ax^2$, где $a \neq 0$ (см. п. 131).

94. Четные и нечетные функции. Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Например, $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$ — четные, а $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$ — нечетные функции.

Если функция $y = f(x)$ такова, что хотя бы для одной пары значений x и $-x$ оказалось, что $f(-x) \neq f(x)$, и хотя бы для одной пары значений x и $-x$ оказалось, что $f(-x) \neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Область определения X как четной, так и нечетной функции должна обладать следующим свойством: если $x \in X$, то и $-x \in X$, т.е. X — симметричное (относительно O) множество.

П р и м е р. Исследовать на четность функции:

а) $y = x^{20}$; б) $y = x^{13}$; в) $y = \dfrac{x-4}{x^2-9}$.

❑ а) Имеем $f(x) = x^{20}$, $f(-x) = (-x)^{20} = x^{20}$. Значит, $f(-x) = f(x)$ для всех x. Функция четная.

б) Имеем $f(x) = x^{13}$, $f(-x) = (-x)^{13} = -x^{13}$. Значит, $f(-x) = -f(x)$ для всех x. Функция нечетная.

в) Имеем $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-9}$, $f(-x) = \dfrac{-x-4}{(-x)^2-9} = -\dfrac{x+4}{x^2-9}$. Так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(-x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной. ■

95. Графики четной и нечетной функций. Графики четной и нечетной функций обладают следующими особенностями:

Если функция является четной, то ее график симметричен относительно оси ординат.

Если функция является нечетной, то ее график симметричен относительно начала координат.

П р и м е р. Построить график функции:

а) $y = |x|$; б) $y = x|x|$.

❑ а) Здесь $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$. Значит, функция четна, а потому ее график симметричен относительно оси ординат.

Если $x \geq 0$, то $|x| = x$, т.е. при $x \geq 0$ имеем $y = x$. Графиком функции $y = x$ при $x \geq 0$ служит биссектриса I координатного угла. Отобразив ее симметрично относительно оси Oy, получим график функции $y = |x|$ (рис. 16).

б) Имеем $f(-x) = (-x)|-x| = -x|x| = -f(x)$. Значит, функция нечетна, а потому ее график симметричен относительно начала координат.

Если $x \geq 0$, то $|x| = x$, а $f(x) = x \cdot |x| = x \cdot x = x^2$. Таким образом, при $x \geq 0$ получаем $y = x^2$. Графиком является ветвь параболы. Преобразовав ее симметрично относительно начала координат, получим график функции $y = x|x|$ (рис. 17).■

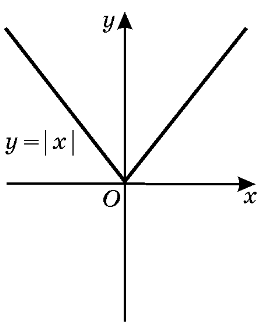


Рис. 16

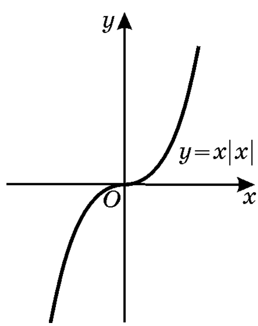


Рис. 17

96. Периодические функции. Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения функции справедливы равенства $f(x+T) = f(x) = f(x-T)$.

Число T называется ***периодом*** функции $y = f(x)$.

Из определения следует, что у периодической функции бесконечно много периодов. Если, например, T — период функции, то и число вида kT, где k — любое целое число, также является периодом функции.

Чаще всего (но не всегда) среди множества положительных периодов функции можно найти наименьший. Его называют ***основным периодом***.

Обычно рассматривают только основной период и, как правило, говорят просто «период».

Примеры периодических функций (с указанием основного периода):

$y = \{x\}$ — период $T = 1$ (см. п. 113);

$y = \sin x$ — период $T = 2\pi$ (см. п. 122);

$y = \operatorname{tg} x$ — период $T = \pi$ (см. п. 124);

Т.3.1. *Если функция f периодическая и имеет период T, то функция $Af(kx+b)$, где A, k и b — постоянные, а $k \neq 0$, также периодическая, причем ее период равен $T/|k|$.*

Например, периодом функции $2\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

является число $\dfrac{2\pi}{3}$, а периодом функции $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ — число 3π.

97. Возрастающие и убывающие функции. Функция $f(x)$ называется ***возрастающей на промежутке*** X, если для любых x_1 и x_2 из X таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (короче: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$). Функция $f(x)$ называется ***убывающей на промежутке*** X, если для любых x_1 и x_2 из X таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ (короче: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$). Иными словами, *функция возрастает (убывает) на промежутке X, если, какие бы два значения аргумента, принадлежащие этому промежутку, ни взять, большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.*

При движении вдоль оси абсцисс слева направо ордината графика возрастающей функции увеличивается (рис. 18, *а*), а ордината графика убывающей функции уменьшается (рис. 18, *б*).

Возрастающие и убывающие функции объединяются термином ***монотонные функции***.

П р и м е р. Исследовать на монотонность функцию $y = 2x^2 + 3$.

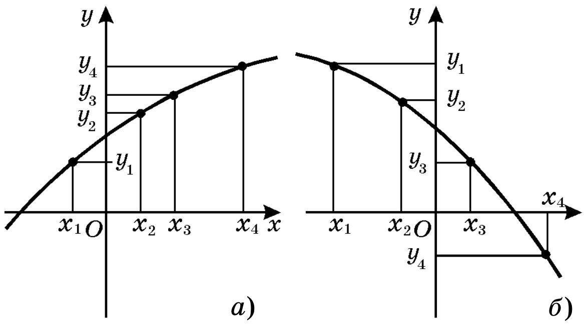


Рис. 18

❑ Пусть $x_1 < x_2$. Тогда, согласно свойствам числовых неравенств (см. п. 26) имеем

$$x_1^3 < x_2^3,\ \ 2x_1^3 < 2x_2^3,\ \ 2x_1^3 + 3 < 2x_2^3 + 3,$$

т. е. $f(x_1) < f(x_2)$.

Итак, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, а это значит, что функция $y = 2x^2 + 3$ возрастает на всей числовой прямой.■

§ 12. Виды функций

98. Постоянная функция. ***Постоянной*** называется функция, заданная формулой $y = b$, где b — некоторое число.

Графиком постоянной функции $y = b$ является прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку $(0;\ b)$ на оси ординат (см. рис. 12).

99. Прямая пропорциональность. Говорят, что переменные x и y связаны ***прямой пропорциональной зависимостью***, если их отношение постоянно: $y / x = k$, т.е. $y = kx$. ***Прямой пропорциональностью*** называется функция, заданная формулой $y = kx$, где $k \neq 0$. Число k называется ***коэффициентом пропорциональности***.

Перечислим свойства функции $y = kx$:

1^0. Область определения — множество $\boldsymbol{R}$.

2^0. Функция нечетная, так как $f(-x) = k(-x) = -kx = -f(x)$.

3^0. При $k > 0$ функция возрастает, а при $k < 0$ убывает на всей числовой прямой.

Т.3.2. *Графиком прямой пропорциональности $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат.*

На рис. 19 изображены графики функции $y = kx$ при $k > 0$ и $k < 0$.

П р и м е р. Построить график функции $y = 2x$.

❑ Для построения искомой прямой достаточно найти одну ее точку, отличную от начала координат, и провести прямую через начало координат и найденную точку. В качестве такой точки выберем точку (1; 2) (если $x = 1$, то $y = 2 \cdot 1 = 2$) График функции $y = 2x$ изображен на рис. 20.■

100. Линейная функция. ***Линейной функцией*** называется функция, заданная формулой $y = kx + b$, где k и b — действительные числа. Если, в частности,

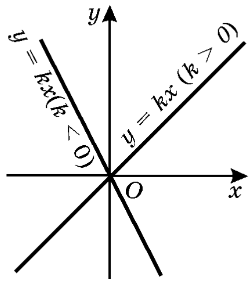


Рис. 19

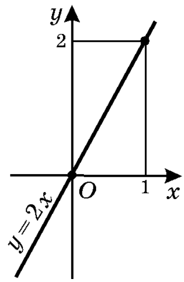


Рис.20

$k = 0$, то получаем постоянную функцию $y = b$; если $b = 0$, то получаем прямую пропорциональность $y = kx$.

Перечислим свойства линейной функции $y = kx + b$ при $k \neq 0, b \neq 0$:

1^0. Область определения — множество $\boldsymbol{R}$.

2^0. Функция ни четная, ни нечетная.

3^0. При $k > 0$ функция возрастает, а при $k < 0$ убывает на всей числовой прямой.

Т.3.3. *Графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая.*

На рис. 21 изображен график функции $y = kx + b$. Это прямая, параллельная прямой, служащей графиком функции $y = kx$, и проходящая через точку $(0; b)$ на оси ординат.

Число k называется ***угловым коэффициентом прямой***, оно равно тангенсу угла α между прямой и положительным лучом оси Ox, т.е. $k = \operatorname{tg} \alpha$.

П р и м е р. Построить график функции

$$y = -0{,}5x + 4.$$

❑ Графиком линейной функции является прямая, а для ее построения достаточно знать две точки этой прямой.

При $x = 0$ имеем $y = 4$, а при $x = 4$ получим $y = 2$. Отметив на координатной плоскости точки (0; 4) и (4; 2), проведем через них прямую (рис. 22).■

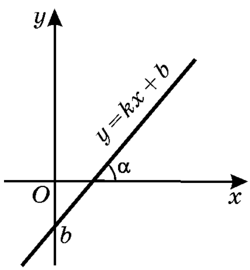


Рис.21

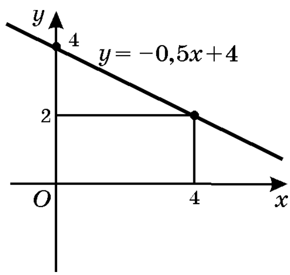


Рис.22

101. Взаимное расположение графиков линейных функций. Пусть даны две линейные функции $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Их графиками служат прямые (см. п. 100). Эти прямые *пересекаются*, если $k_1 \neq k_2$ (рис. 23, *а*). Прямые *параллельны*, если $k_1 = k_2$. Последний случай, в свою очередь, можно разбить на два: если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$, то прямые *совпадают*; если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то прямые *параллельны и не совпадают* (рис. 23, *б*).

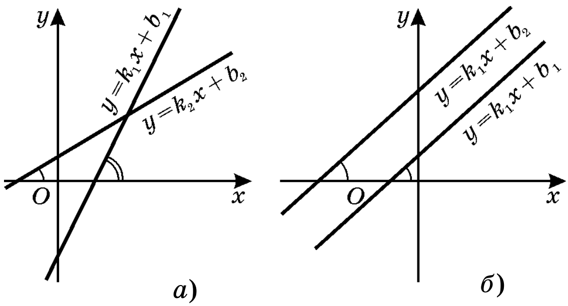


Рис.23

102. Обратная пропорциональность. Говорят, что переменные x и y связаны ***обратной пропорциональной зависимостью***, если их произведение постоянно: $xy = k$, т.е. $y = k/x$. ***Обратной пропорциональностью*** называют функцию, заданную формулой $y = k/x$, где $k \neq 0$. Число k называют ***коэффициентом обратной пропорциональности***.

Перечислим свойства функции $y = k/x$:

1^0. Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ без точки $x = 0$.

2^0. Функция нечетная, поскольку $f(-x) = k/(-x) = -k/x = -f(x)$.

3^0. Если $k > 0$, то функция убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(0, +\infty)$. Если $k < 0$, то функция возрастает на $(-\infty, 0)$ и на $(0, +\infty)$.

4^0. Оси координат, т. е. прямые $x = 0$ и $y = 0$, являются вертикальной и горизонтальной асимптотами графика функции (см. пп. 215 и 218).

Это означает, что ветви графика неограниченно (асимптотически) приближаются к осям координат.

Построим график функции $y = 1/x$. Для этого сначала построим ветвь графика на промежутке $(0, +\infty)$, составив таблицу значений функции: $x = 1/4$, $y = 4$; $x = 1/2$, $y = 2$; $x = 1$, $y = 1$; $x = 2$, $y = 1/2$; $x = 4$, $y = 1/4$. Нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой. Это ветвь графика функции $y = 1/x$ на промежутке $(0, +\infty)$.

Воспользуемся нечетностью функции $y = 1/x$ и к построенной ветви добавим ветвь, симметричную ей относительно начала координат. Получим график функции $y = 1/x$ (рис. 24).

Аналогичный вид имеет график функции $y = k/x$ при любом положительном k. На рис. 25 изображен график функции $y = 2/x$.

Если $k < 0$, то ветви графика обратной пропорциональности расположены не в I и III координатных четвертях, как в случае, когда $k > 0$, а во II и IV четвертях. На рис. 26 изображены графики функций $y = -1/x$, $y = -2/x$.

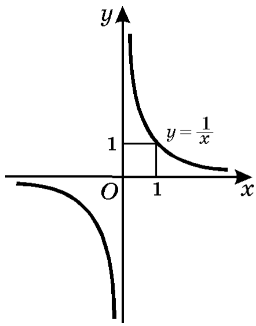


Рис.24

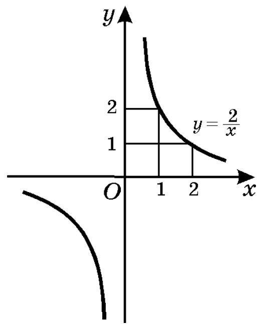


Рис.25

График обратной пропорциональности $y = k / x$ называют ***гиперболой***.

103. Функция $y = x^2$. Перечислим свойства функции $y = x^2$:

1^0. Область определения — вся числовая прямая.

2^0. Функция четная: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

3^0. На промежутке $[0, +\infty)$ функция возрастает.

4^0. На промежутке $(-\infty, 0]$ функция убывает.

Графиком функции $y = x^2$ является парабола (см. п. 93). Этот график изображен на рис. 15.

104. Функция $y = x^3$. Перечислим свойства функции $y = x^3$:

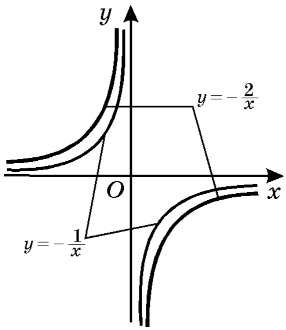


Рис.26

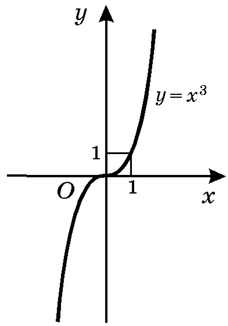


Рис.27

1^0. Область определения — вся числовая прямая.

2^0. Функция нечетная: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

3^0. Функция возрастает на всей числовой прямой.

График функции $y = x^3$ изображен на рис.27. Он называется ***кубической параболой***.

105. Степенная функция с натуральным показателем. Функция $y = x^n$, где n — натуральное число, называется ***степенной функцией с натуральным показателем***. При $n = 1$ получаем функцию $y = x$, ее свойства рассмотрены в п. 99, а график (прямая) изображен на рис. 14. При $n = 2$ получаем функцию $y = x^2$, ее свойства рассмотрены в п. 103, а график (парабола) изображен на рис. 15. При $n = 3$ получаем функцию $y = x^3$, ее свойства рассмотрены в п. 104, а график (кубическая парабола) изображен на рис. 27.

Пусть n — произвольное четное натуральное число, большее двух: $n = 4, 6, 8, \ldots$. В этом случае функция $y = x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y = x^2$. График такой функции напоминает параболу $y = x^2$, только ветви графика при $|x| > 1$ тем круче идут вверх, чем больше n, а при $|x| < 1$ тем «теснее прижимаются» к оси Ox, чем больше n (рис. 28).

Пусть n — произвольное нечетное число, большее трех, т.е. $n = 5, 7, 9, \ldots$. В этом случае функция $y = x^n$ обладает теми же свойствами, что и функ-

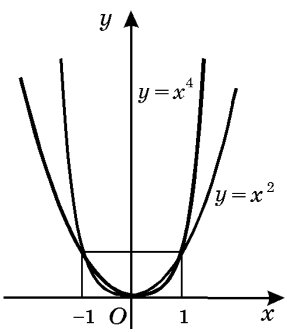


Рис. 28

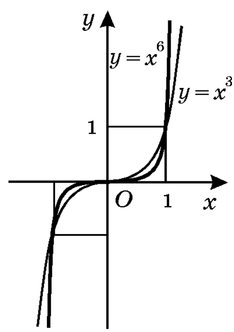


Рис. 29

ция $y = x^3$. График такой функции напоминает кубическую параболу (только ветви графика тем круче идут вверх и вниз, чем больше n; рис. 29). Отметим также, что на промежутке (0, 1) график функции $y = x^n$ тем медленнее отдаляется от оси Ox с ростом x, чем больше n.

106. Степенная функция с целым отрицательным показателем. Рассмотрим функцию $y = x^{-n}$, где n — натуральное число. При $n = 1$ получаем $y = x^{-1}$ или $y = 1/x$. Свойства этой функции рассмотрены в п. 102, а ее график (гипербола) изображен на рис. 24.

Пусть n — нечетное число, большее единицы: $n = 3, 5, 7, \ldots$. В этом случае функция $y = x^{-n}$ обладает в основном теми же свойствами, что и функция $y = 1/x$. График функции $y = x^{-n}$ ($n = 3, 5, 7, \ldots$) напоминает график функции $y = 1/x$ (рис. 30, *а*).

Пусть n — четное число, например $n = 2$. Перечислим некоторые свойства функции $y = x^{-2}$:

1^0. Функция определена при всех $x \neq 0$.

2^0. Функция четная.

3^0. Функция убывает на $(0, +\infty)$ и возрастает на $(-\infty, 0)$.

Теми же свойствами обладают любые функции вида $y = x^{-n}$ при четном n, большем двух.

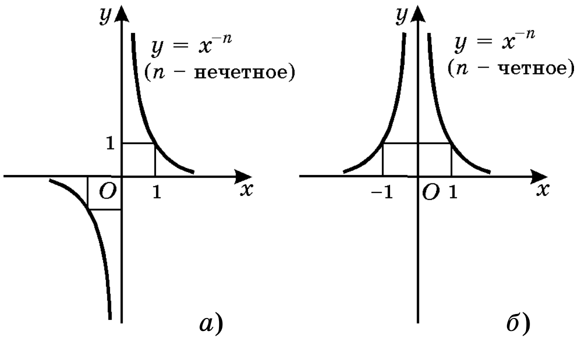


Рис. 30

График функции $y = x^{-n}$ при четном n изображен на рис. 30, *б*.

107. Функция $y = \sqrt{x}$. Перечислим свойства функции $y = \sqrt{x}$:

1^0. Область определения — луч $[0, +\infty)$. Это следует из того, что выражение $\sqrt{x}$ определено лишь при $x \geq 0$.

2^0. Функция ни четная, ни нечетная.

3^0. Функция возрастает на луче $[0, +\infty)$.

Для построения графика составим таблицу значений функции: $x = 0$, $y = 0$; $x = 1$, $y = 1$; $x = 2$, $y = 1{,}4$; $x = 4$, $y = 2$; $x = 9$, $y = 3$.

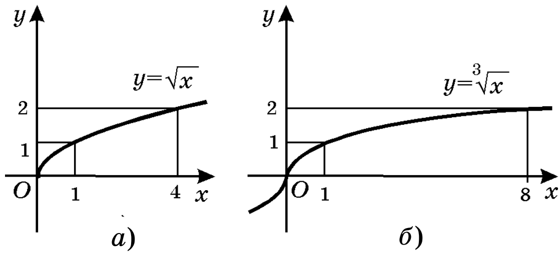


Рис. 31

Нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой. Получим график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 31, *а*).

108. Функция $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{x}}$. Перечислим свойства функции $y = \sqrt[3]{x}$:

1^0. Область определения — вся числовая прямая.

2^0. Функция нечетная, так как $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$.

3^0. Функция возрастает на всей числовой прямой.

Для построения ветви графика при $x \geq 0$ составим таблицу значений функции: $x = 0$, $y = 0$; $x = 1$, $y = 1$; $x = 4$, $y = 1{,}6$; $x = 8$, $y = 2$.

Нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой; затем к построенной ветви добавим ветвь, симметричную ей относительно начала координат. Получим график функции $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 31, *б*).

109. Функция $y = \sqrt[n]{x}$. При четном n функция $y = \sqrt[n]{x}$ обладает теми же свойствами, что и функция $y = \sqrt{x}$ (см. п. 107), ее график напоминает график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 32, *а*). При нечетном n функция $y = \sqrt[n]{x}$ обладает теми же свойствами, что и функция $y = \sqrt[3]{x}$ (см. п. 108), а ее график напоминает график функции $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 32, *б*).

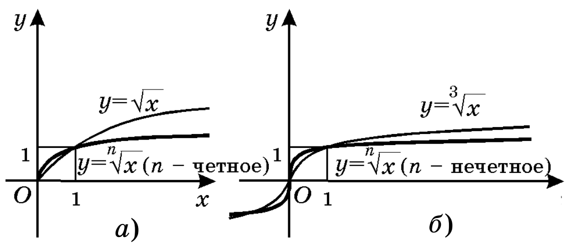


Рис. 32

110. Степенная функция с положительным дробным показателем. Рассмотрим функцию $y = x^r$, где r — положительная несократимая дробь. Перечислим некоторые свойства этой функции:

1^0. Область определения — луч $[0, +\infty)$.

2^0. Функция ни четная, ни нечетная.

3^0. Функция возрастает на $[0, +\infty)$.

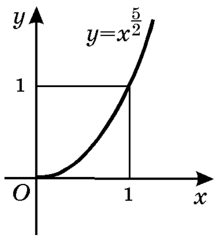


Рис. 33

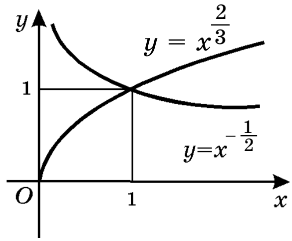


Рис. 34

На рис. 33 изображен график функции $y = x^{5/2}$. Он заключен между графиками функций $y = x^2$ и $y = x^3$, заданных на промежутке $[0, +\infty)$. Подобный вид имеет график любой функции вида $y = x^r$, где $r > 1$.

На рис. 34 изображен график функции $y = x^{2/3}$. Подобный вид имеет график любой степенной функции $y = x^r$, где $0 < r < 1$.

111. Степенная функция с отрицательным дробным показателем. Рассмотрим функцию $y = x^{-r}$, где r — положительная несократимая дробь. Перечислим свойства этой функции:

1^0. Область определения — промежуток $(0, +\infty)$.

2^0. Функция ни четная, ни нечетная.

3^0. Функция убывает на $(0, +\infty)$.

На рис. 34 изображен график функции $y = x^{-1/2}$. Подобный вид имеет график любой функции $y = x^r$, где r — отрицательная дробь.

112. Функция $y = [x]$. Построим график функции $y = [x]$ (см. п. 33). Если $0 \le x < 1$, то $y = [x] = 0$; если $1 \le x < 2$, то $y = [x] = 1$; если $-1 \le x < 0$, то $y = [x] = -1$ и т.д. График функции $y = [x]$ изображен на рис. 35.

113. Функция $y = \{x\}$. Построим график функции $y = \{x\}$ (см. п. 33). Заметим, что для любого x выполняется двойное равенство $\{x-1\} = \{x\} = \{x+1\}$. Это значит, что $y = \{x\}$ — периодическая функция с периодом $T = 1$.

Если $0 \le x < 1$, то $[x] = 0$, а потому $\{x\} = x - [x] = x$. Построив график функции $y = \{x\}$ на промежутке $[0, 1)$ и перенеся его параллельно на расстояния n (n — натуральное число) влево и впра-

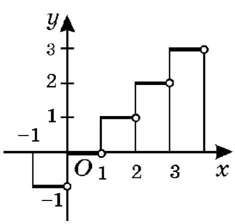


Рис. 35

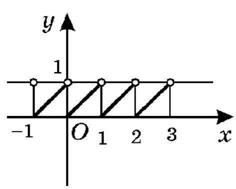


Рис. 36

во вдоль оси Ox, получим график функции $y = \{x\}$ на всей числовой прямой (рис. 36).

114. Показательная функция. ***Показательная функция*** задается формулой $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.

Перечислим свойства функции $y = a^x$ при $a > 1$:

1^0. Область определения — вся числовая прямая.

2^0. Множество значений — луч $(0, +\infty)$.

3^0. Функция не является ни четной, ни нечетной. Это следует из того, что $a^{-x} \neq a^x$ и $a^{-x} \neq -a^x$.

4^0. Функция возрастает на всей числовой прямой.

5^0. Ось Ox является горизонтальной асимптотой графика при $x \to -\infty$.

График функции $y = a^x$ при $a > 1$ выглядит так, как показано на рис. 37, *а*. Например, на рис. 37, *б* изображен график функции $y = 2^x$.

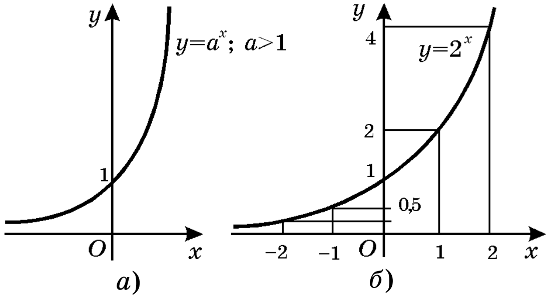


Рис. 37

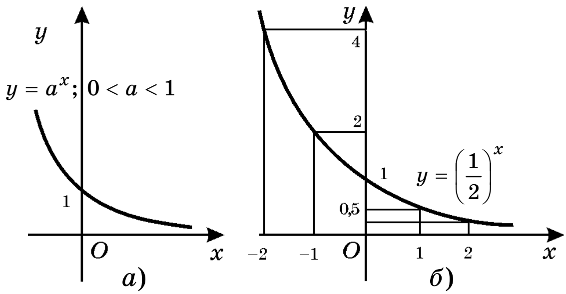


Рис. 38

Перечислим свойства функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$:

1^0. Область определения — вся числовая прямая.

2^0. Множество значений — луч $(0, +\infty)$.

3^0. Функция не является ни четной, ни нечетной.

4^0. Функция убывает на всей числовой прямой.

5^0. Ось Ox является горизонтальной асимптотой графика при $x \to +\infty$.

График функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$ выглядит так, как показано на рис. 38, *а*. Например, на рис. 38, *б* изображен график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

115. Обратная функция. График обратной функции. Сравним две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Их графики изображены на рис. 39, *а* и *б*. Обе они определены на отрезке $[a, b]$, а их множеством значений является отрезок $[c, d]$. Первая функция обладает следующим свойством: для любого y_0 из отрезка $[c, d]$ есть только одно значение x_0 из отрезка $[a, b]$ такое, что $f(x_0) = y_0$. Геометрически указанное свойство означает, что любая горизонтальная прямая, пересекающая ось Oy между точками c и d, пересекает график функции $y = f(x)$ только в одной точке. Вторая функция этим свойством не обладает: например, для значения y_1 прямая $y = y_1$ пересекает график функции $y = g(x)$ в трех точках. Значит, в первом случае при каждом фиксированном y_0 из отрезка $[c, d]$ уравнение $f(x) = y_0$ имеет только один корень x_0, а во втором случае при некоторых y, например при $y = y_1$, уравнение $g(x) = y_1$ имеет более одного корня.

Если функция $y = f(x)$ такова, что для любого ее значения y_0 уравнение $f(x) = y_0$ имеет относительно x единственный корень, то говорят, что функция f ***обратима***.

Так, функция $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 39, *а*, обратима, а функция $y = g(x)$, график которой изображен на рис. 39, *б*, необратима.

Можно сказать и так: функцию, принимающую каждое свое значение в единственной точке области определения, называют ***обратимой***.

Если функция f обратима, то, выразив x из формулы $y = f(x)$ и поменяв затем x и y местами, получим обратную функцию. Таким образом, если функция f задана формулой $y = f(x)$, то для нахожде-

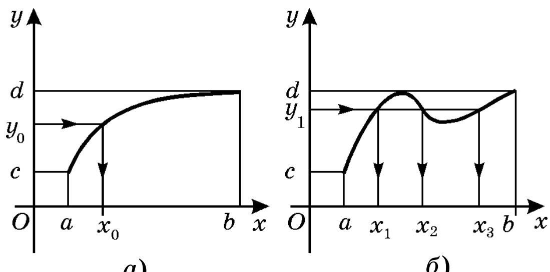


Рис. 39

ния обратной функции нужно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x, а затем x и y поменять местами. Заметим, что если для некоторых y из множества значений функции f это уравнение имеет более одного корня, то обратной функции нет.

Сравнивая графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ (см. рис. 39, *а* и *б*), замечаем, что $y = f(x)$ — возрастающая функция (и у нее есть обратная функция), тогда как функция $y = g(x)$ не является ни возрастающей, ни убывающей (и у нее нет обратной функции). Возрастание или убывание функции обеспечивает существование обратной функции.

Т.3.4. *Если функция $y = f(x)$ определена и возрастает (или убывает) на промежутке X и множеством ее значений является промежуток Y, то у нее существует обратная функция, причем обратная функция определена и возрастает (или убывает) на Y.*

П р и м е р. Доказать, что функция $y = 2x - 1$ имеет обратную, и найти ее.

❑ Функция $y = 2x - 1$ возрастает на всей числовой прямой, значит, у нее есть обратная функция. Чтобы найти эту обратную функцию, надо решить уравнение $2x - 1 = y$ относительно x. Имеем $x = 0{,}5(y+1)$. Поменяв x и y местами, получим $y = 0{,}5(x+1)$. Это и есть искомая обратная функция. ■

Если точка $(x; y)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $(y; x)$ принадлежит графику обратной функции. Поэтому график обратной функции получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования плоскости xOy, переводящего точку $(x; y)$ в точку $(y; x)$. Этим преобразованием является симметрия относительно прямой $y = x$.

Таким образом, *чтобы построить график функции, обратной функции* $y = f(x)$, *надо график функции* $y = f(x)$ *преобразовать симметрично относительно прямой* $y = x$ (рис. 40, *а*).

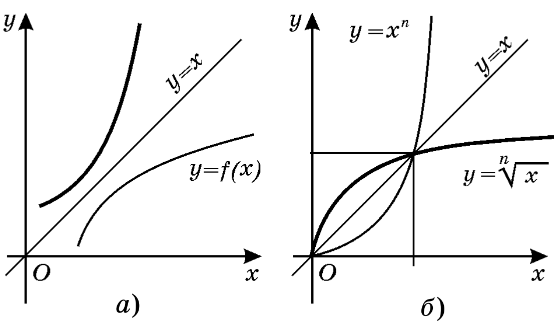


Рис. 40

Например, если $y = x^n$, где $x \geq 0$, n — натуральное, $n > 1$, то $x = \sqrt[n]{y}$. Поменяв x и y местами, получим $y = \sqrt[n]{x}$. Графики двух взаимно обратных функций $y = x^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 40, *б*).

116. Логарифмическая функция. Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, обладает всеми свойствами, которые гарантируют существование обратной функции (см. теорему 3.4): 1) область определения — вся числовая прямая; 2) множество значений — промежуток $(0, +\infty)$; 3) функция $y = a^x$ возрастает при $a > 0$ и убывает при $0 < a < 1$.

Указанные свойства обеспечивают существование функции, обратной показательной, определенной на $(0, +\infty)$ и имеющей в качестве множества своих значений всю числовую прямую.

Эта обратная функция обозначается так: $y = \log_a x$ (читается: «логарифм числа x по основанию a»). Итак, ***логарифмическая функция*** $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, — это функция, обратная показательной функции $y = a^x$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ обладает следующими свойствами (они вытекают из теоремы 3.4):

1^0. Область определения — луч $(0, +\infty)$.

2^0. Множество значений — вся числовая прямая.

3^0. Функция ни четная, ни нечетная.

4^0. Функция возрастает на промежутке $(0, +\infty)$ при $a > 1$, убывает на $(0, +\infty)$ при $0 < a < 1$.

5^0. Ось Oy является вертикальной асимптотой графика (если $a > 1$, то $y \to -\infty$ при $x \to 0$, а если $0 < a < 1$, то $y \to +\infty$ при $x \to 0$).

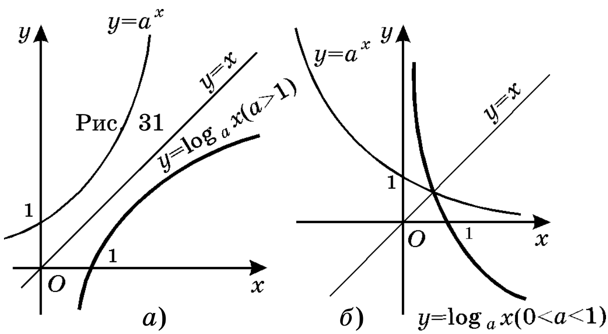


Рис. 41

График функции $y = \log_a x$ можно получить из графика функции $y = a^x$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$. На рис. 41, *а* построен график логарифмической функции для $a > 1$, а на рис. 41, *б* — для $0 < a < 1$.

117. Число *e*. Функция $y = e^x$. Функция $y = \ln x$. Среди показательных функций $y = a^x$, где $a > 1$, особый интерес для математики и ее приложений представляет функция, обладающая следующим свойством: касательная к графику функции (см. п. 224) в точке (0; 1) образует с осью Ox угол 45° (рис. 42). Основание a такой функции $y = a^x$ принято обозначать буквой e, т. е. $y = e^x$. Подсчитано, что $e = 2{,}7182818284590...$, и установлено, что e — иррациональное число, которое можно представить как следующую сумму:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} + \ldots .$$

Именно с помощью этого равенства и находят значение числа e с любой точностью.

Функцию $y = e^x$ иногда называют ***экспонентой***.

Логарифмическую функцию, обратную экспоненте $y = e^x$, т. е. функцию $y = \log_e x$, принято обозначать $y = \ln x$ (где ln читается: «***натуральный логарифм***»). Графики функций $y = e^x$ и $y = \ln x$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 43).

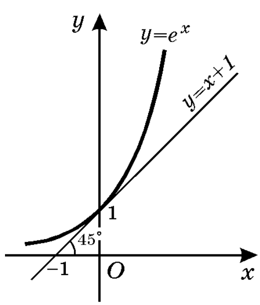


Рис. 42

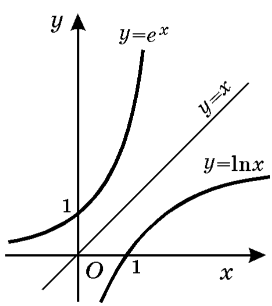


Рис. 43

118. Определение тригонометрических функций. Тригонометрические функции определяются с помощью координат вращающейся точки. Рассмотрим на координатной плоскости xOy ***единичную окружность***, т. е. окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Обозначим через P_0 точку единичной окружности с координатами (1; 0), эту точку будем называть ***начальной***. Возьмем произвольное число t и повернем начальную точку относительно точки O на угол t; при этом если $t > 0$, то поворот осуществляется в направлении против часовой стрелки (рис. 44, *а*), а если $t < 0$ — то по часовой стрелке (рис. 44, *б*).

В результате поворота получим на единичной окружности точку P_t. Ее ордината называется ***синусом числа*** t и обозначается $\sin t$, а абсцисса — ***косинусом числа*** t (или угла t) и обозначается $\cos t$.

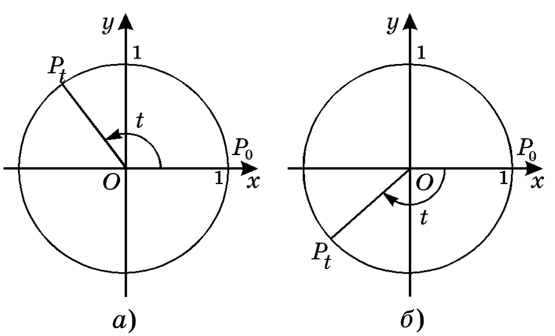


Рис. 44

Тангенсом числа t называется отношение синуса числа t к его косинусу:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

Котангенсом числа t называется отношение косинуса числа t к его синусу:

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Приведем таблицу значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов:

Функция	Аргумент t						
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
$\operatorname{ctg} t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

Из определений следует, что не существует тангенс углов, косинус которых равен нулю, и котангенс углов, синус которых равен нулю.

Говоря о синусе, косинусе, тангенсе и котангенсе числа, используют как градусную, так и радианную меру угла (см. п. 254):

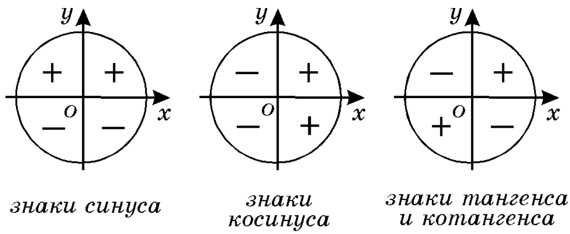


Рис. 45

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ;\ 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \approx 0{,}017 \text{ рад}.$$

Например, $\sin 4 \approx \sin(4 \cdot 57^\circ) = \sin 228^\circ$,

$$\cos 225^\circ = \cos\left(225 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \cos\frac{5\pi}{4}.$$

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ называют ***тригонометрическими функциями***.

119. Знаки тригонометрических функций по четвертям. Поскольку $\sin t$ и $\cos t$ — это соответственно ордината и абсцисса точки P_t единичной окружности с центром в начале координат (см. п. 118), синус положителен для точек, лежащих на верхней полуокружности, и отрицателен для точек, лежащих на нижней полуокружности; косинус положителен для точек, лежащих на правой полуокружности, и отрицателен — на левой полуокружности. Знаки всех тригонометрических функций по четвертям единичной окружности указаны на рис. 45.

120. Исследование тригонометрических функций на четность, нечетность. Точки P_t и P_{-t} единичной окружности имеют одинаковую абсциссу и противоположные (отличающиеся друг от друга лишь знаком) ординаты (рис. 46). Это значит, что $\cos(-t) = \cos t$, $\sin(-t) = -\sin t$, т. е. $y = \cos x$ — четная, а $y = \sin x$ — нечетная функция. Функции $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$ — нечетные.

121. Периодичность тригонометрических функций. Так как P_t и $P_{t+360°}$ — одна и та же точка единичной окружности (см. п. 118), то синусы соответствующих углов, а также их косинусы равны. Значит,

$$\sin(x + 360°) = \sin x,\ \cos(x + 360°) = \cos x,$$

Более общими являются равенства

$$\sin(x + 360°k) = \sin x,\ \cos(x + 360°k) = \cos x,$$

где k — любое целое число.

Если аргумент x выражен в радианах, то

$$\sin(x + 2\pi k) = \sin x,\ \cos(x + 2\pi k) = \cos x,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

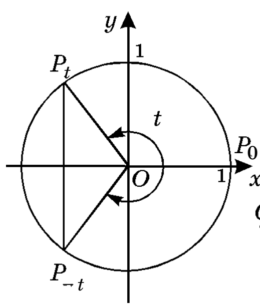


Рис. 46

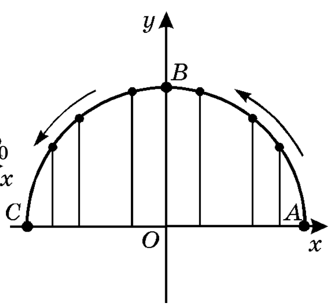


Рис. 47

Для функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ справедливы равенства

$$\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x, \ \operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg} x, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Таким образом, любое число вида $2\pi k$ является периодом функций $\sin x$, $\cos x$, а число вида πk — периодом функций $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. При этом 2π — основной период $\sin x$, $\cos x$, а π — основной период $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ (см. п. 96).

Используя свойства четности, нечетности, периодичности, можно тригонометрическую функцию интересующего нас угла свести к тригонометрической функции угла, заключенного в пределах от 0° до 180°.

П р и м е р. Вычислить $\sin 945^\circ$.

❑ Имеем $\sin 945^\circ = \sin(720^\circ + 225^\circ) = \sin(225^\circ + 360^\circ \cdot 2) = \sin 225^\circ = \sin(225^\circ - 360^\circ) = \sin(-135^\circ) = -\sin 135^\circ$.

Далее, $\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ$ (см. п. 80), но $\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (см. п. 118), значит, $\sin 945^\circ = -\sin 135^\circ = -\sin 45^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ■

122. Свойства и график функции $y = \sin x$.

1^0. Область определения — множество $\boldsymbol{R}$.

2^0. Множество значений — отрезок $[-1, 1]$.

3^0. Функция периодическая; основной период равен 2π.

4^0. Функция нечетная.

5^0. Функция возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$ и убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 47).

Взяв контрольные точки $(0;\ 0)$, $(\pi/6;\ 1/2)$, $(\pi/2;\ 1)$, $(\pi;\ 0)$, построим график функции $y=\sin x$ на отрезке $[0,\ \pi]$. Так как функция $y=\sin x$ нечетная, то, отобразив построенный график симметрично относительно начала координат, получим график функции на отрезке $[-\pi,\ \pi]$. Наконец, воспользовавшись периодичностью функции $y=\sin x$, можно построить график на всей области определения (рис. 48).

123. Свойства и график функции $y=\cos x$. Исследование функции $y=\cos x$ проводится аналогич-

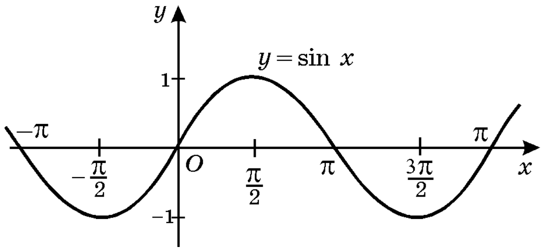


Рис. 48

но исследованию функции $y = \sin x$ (см. п. 122). Перечислим свойства функции $y = \cos x$:

1^0. Область определения — множество $\boldsymbol{R}$.

2^0. Множество значений — отрезок $[-1, 1]$.

3^0. Функция периодическая с основным периодом 2π.

4^0. Функция четная.

5^0. Функция убывает на промежутках $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$ и возрастает на промежутках $[-\pi + 2\pi n, 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

График функции $y = \cos x$ изображен на рис. 49.

124. Свойства и график функции $y = \operatorname{tg} x$.

1^0. Область определения: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2^0. Множество значений — вся числовая прямая.

3^0. Функция периодическая с основным периодом π.

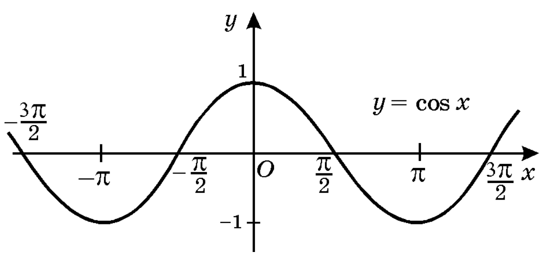


Рис. 49

4^0. Функция нечетная.

5^0. Функция возрастает на промежутках $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

6^0. Прямые $x = \dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ — вертикальные асимптоты.

Выбрав контрольные точки $(0;\ 0)$, $(\pi/4;\ 1)$, $(\pi/3;\ \sqrt{3})$, строим график функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $[0,\ \pi/2)$. Далее, используя нечетность функции $y = \operatorname{tg} x$, построим график в интервале $(-\pi/2,\ \pi/2)$. Наконец, воспользовавшись периодичностью функции $y = \operatorname{tg} x$, построим график на всей области определения (рис. 50).

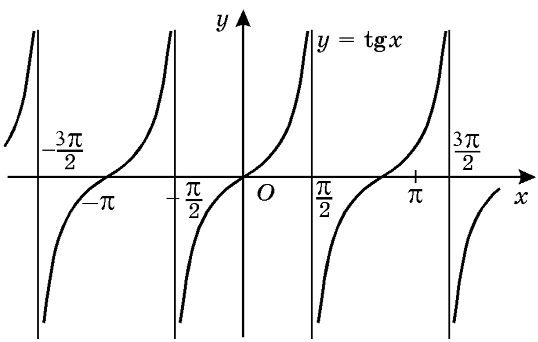


Рис. 50

125. Свойства и график функции y = ctg x.

1^0. Область определения: $x \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2^0. Множество значений — вся числовая прямая.

3^0. Функция периодическая с основным периодом π.

4^0. Функция нечетная.

5^0. Функция убывает на промежутках $(\pi k,\ \pi + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

6^0. Прямые $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ — вертикальные асимптоты.

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ изображен на рис. 51.

126. Функция y = arcsin x. Функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке $[-\pi/2,\ \pi/2]$ принимает на нем

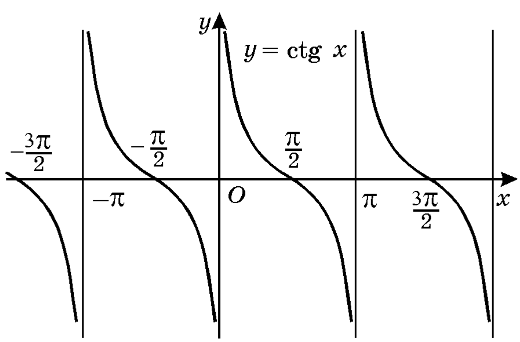


Рис. 51

все значения от -1 до 1 (см. рис. 48). Значит, для функции $y = \sin x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, существует обратная функция (см. п. 115). Эту функцию обозначают $y = \arcsin x$ (читается: «***арксинус*** x»).

График функции $y = \arcsin x$ можно получить из графика функции $y = \sin x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, с помощью преобразования симметрии последнего относительно прямой $y = x$ (рис. 52).

Перечислим свойства функции $y = \arcsin x$:

1^0. Область определения — отрезок $[-1, 1]$.

2^0. Множество значений — отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$.

3^0. Функция нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

4^0. Функция возрастающая.

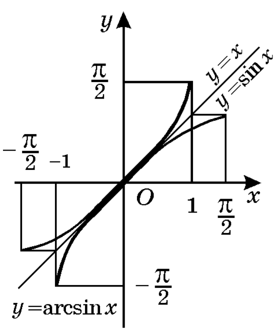


Рис. 52

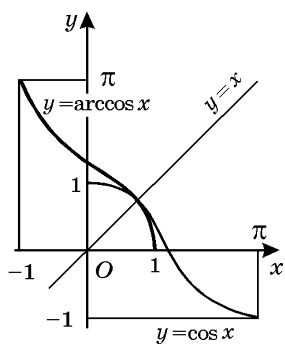


Рис. 53

Из сказанного выше следует, что записи $y = \arcsin x$ и $x = \sin y$, $-\pi / 2 \le y \le \pi / 2$, эквивалентны. Подставив в равенство $x = \sin y$ вместо y его выражение, т. е. $\arcsin x$, получим $x = \sin(\arcsin x)$. Следовательно, для любого x из $[-1, 1]$ имеем

$$\sin(\arcsin x) = x, \; -\pi / 2 \le \arcsin x \le \pi / 2.$$

127. Функция y = arccos x. Функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $[0, \pi]$, принимает на нем все значения от -1 до 1 (см. рис. 49). Значит, для функции $y = \cos x$, рассматриваемой на отрезке $[0, \pi]$, существует обратная функция. Она обозначается $y = \arccos x$ (читается: «***арккосинус x***»).

График функции $y = \arccos x$ получается из графика функции $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$, с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 53).

Перечислим свойства функции $y = \arccos x$:

1^0. Область определения — отрезок $[-1, 1]$.

2^0. Множество значений — отрезок $[0, \pi]$.

3^0. Функция не является ни четной, ни нечетной.

4^0. Функция убывающая.

Из сказанного выше следует, что записи $y = \arccos x$ и $x = \cos y$, $0 \le y \le \pi$, эквивалентны. Подставив в равенство $x = \cos y$ вместо y выражение $\arccos x$, получим $\cos(\arccos x) = x$. Следовательно, для любого x из промежутка $[-1, 1]$ имеем

$$\cos(\arccos x) = x, \; 0 \le \arccos x \le \pi.$$

128. Функции y = arctg x, y = arcctg x. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, принимает на нем все значения (см. рис. 50). Поэтому на указанном интервале для функции $y = \operatorname{tg} x$ существует обратная функция. Она обозначается $y = \operatorname{arctg} x$ (читается: «***арктангенс*** x»).

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 54).

Перечислим свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$:

1^0. Область определения — множество $\boldsymbol{R}$.

2^0. Множество значений — интервал $(-\pi/2, \pi/2)$.

3^0. Функция нечетная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

4^0. Функция возрастающая.

5^0. Прямые $y = \pi/2$ и $y = -\pi/2$ — горизонтальные асимптоты соответственно при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

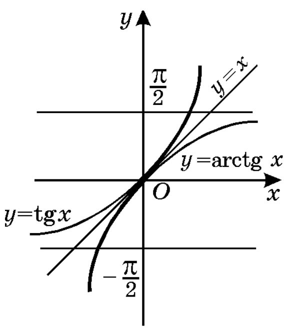


Рис. 54

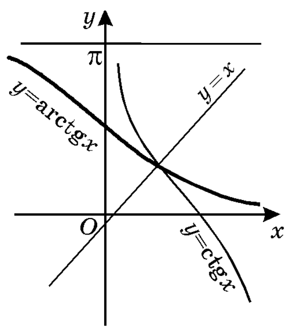


Рис. 55

Из сказанного выше следует, что записи $y = \operatorname{arctg} x$ и $x = \operatorname{tg} y$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, эквивалентны. Для любого x имеем

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x,\ -\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2.$$

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на интервале $(0, \pi)$, принимает на нем все значения (см. рис. 51). Следовательно, на этом интервале для функции $y = \operatorname{ctg} x$ существует обратная функция. Она обозначается $y = \operatorname{arcctg} x$ (читается: «***арккотангенс*** x»).

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{ctg} x$, $0 < x < \pi$, с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 55).

Перечислим свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$:

1^0. Область определения — множество $\boldsymbol{R}$.

2^0. Множество значений — интервал $(0, \pi)$.

3^0. Функция не является ни четной, ни нечетной.

4^0. Функция убывающая.

5^0. Прямые $y = 0$ и $y = \pi$ — горизонтальные асимптоты соответственно при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Из сказанного выше следует, что записи $y = \operatorname{arcctg} x$ и $x = \operatorname{ctg} y$, $0 < x < \pi$, эквивалентны. Для любого x имеем

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x,\ 0 < \operatorname{arcctg} x < \pi.$$

Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ называются ***обратными тригонометрическими фукнциями***.

129. Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс. Определения и свойства обратных тригонометрических функций (см. пп. 126–128) позволяют истолковать их следующим образом:

арксинусом числа $a \in [-1, 1]$ называется такое число $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, синус которого равен a:

$$\arcsin a = \alpha, \text{ если } \sin\alpha = a \text{ и } -\pi/2 \le \alpha \le \pi/2;$$

арккосинусом числа $a \in [-1, 1]$ называется такое число $\alpha \in [0, \pi]$, косинус которого равен a:

$$\arccos a = \alpha, \text{ если } \cos\alpha = a \text{ и } 0 \le \alpha \le \pi;$$

арктангенсом числа a называется такое число $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, тангенс которого равен a:

$$\operatorname{arctg} a = \alpha, \text{ если } \operatorname{tg}\alpha = a \text{ и } -\pi/2 < \alpha < \pi/2;$$

арккотангенсом числа a называется такое число $a \in (0, \pi)$, котангенс которого равен a:

$$\operatorname{arcctg} a = \alpha, \text{ если } \operatorname{ctg}\alpha = a \text{ и } 0 < \alpha < \pi.$$

Справедливы следующие тождества:

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \quad \arccos(-a) = \pi - \arccos a,$$
$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a, \quad \operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a.$$

П р и м е р. Вычислить:

а) $\arcsin(\sqrt{3}/2)$; д) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$;

б) $\arcsin(-1/2)$; е) $\operatorname{arctg}(-1)$;

в) $\arccos(\sqrt{2}/2)$; ж) $\operatorname{arcctg} 0$;

г) $\arccos(-\sqrt{2}/2)$; з) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

❑ а) По определению, $\alpha = \arcsin(\sqrt{3}/2)$ — это такое число, что $\sin\alpha = \sqrt{3}/2$ и $-\pi/2 \le \alpha \le \pi/2$. Отсюда следует, что $\alpha = \pi/3$, т. е. $\arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$.

б) Рассуждая аналогично, получаем $\arcsin(1/2) = \pi/6$. Но $\arcsin(-1/2) = -\arcsin(1/2)$, значит, $\arcsin(-1/2) = -\pi/6$.

в) По определению, $\alpha = \arccos(\sqrt{2}/2)$ — это такое число, что $\cos\alpha = \sqrt{2}/2$ и $0 \le \alpha \le \pi$. Отсюда следует, что $\alpha = \pi/4$, т. е. $\arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$.

г) Так как $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$, то получаем $\arccos(-\sqrt{2}/2) = \pi - \arccos(\sqrt{2}/2) = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$.

д) По определению, $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{3}$ — это такое число, что $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ и $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Отсюда следует, что $\alpha = \pi/3$, т. е. $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi/3$.

е) Рассуждая аналогично, получаем $\operatorname{arctg}1 = \pi/4$. Но $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg}1$, значит, $\operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4$.

ж) По определению, $\alpha = \operatorname{arcctg}0$ — это такое число, что $\operatorname{ctg}\alpha = 0$ и $0 < \alpha < \pi$. Отсюда следует, что $\alpha = \pi/2$, т. е. $\operatorname{arcctg}0 = \pi/2$.

з) Рассуждая аналогично, находим $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi/6$. Так как $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg}a$, то $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$. ■

§ 13. Преобразования графиков

130. Построение графика функции $y = mf(x)$.

<u>Задача I</u>. Построить график функции $y = mf(x)$, где $m > 0$, $m \neq 1$, зная график функции $y = f(x)$.

❑ Ординаты точек графика функции $y = mf(x)$ получаются умножением на m соответствующих ординат точек графика функции $y = f(x)$. Такое преобразование графика функции $y = f(x)$ называется его ***растяжением*** от оси Ox с коэффициентом m, если $m > 1$, и ***сжатием*** к оси Ox, если $0 < m < 1$. ■

На рис. 56 изображены графики функций $y = \log_2 x$ и $y = 0{,}5\log_2 x$.

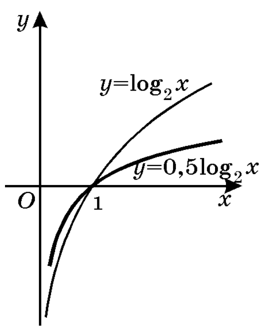


Рис. 56

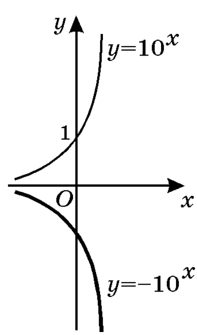


Рис. 57

Задача II. Построить график функции $y = -f(x)$, зная график функции $y = f(x)$.

❑ При одном и том же значении x ординаты точек графиков функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ отличаются только знаками. Значит, график функции $y = -f(x)$ можно получить из графика $y = f(x)$ ***преобразованием симметрии*** последнего относительно оси Ox. ■

На рис. 57 изображены графики функций $y = 10^x$ и $y = -10^x$.

Задача III. Построить график функции $y = mf(x)$, где $m < 0$, $m \neq -1$, зная график функции $y = f(x)$.

❑ Так как $mf(x) = -|m|f(x)$, то график функции $y = mf(x)$ можно получить растяжением (сжатием) графика функции $y = f(x)$ от оси Ox с коэффициентом $|m|$ и последующим преобразованием симметрии относительно оси Ox (см. задачи I и II). ■

На рис. 58 изображены графики функций $y = x^4$ и $y = -3x^4$.

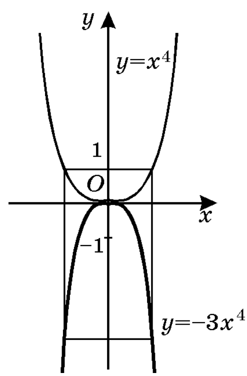


Рис. 58

131. Графики функций $y = ax^2$, $y = ax^3$. Графиком функции $y = x^2$ является парабола. Чтобы построить график функции $y = ax^2$, нужно осуществить растяжение (сжатие) параболы $y = x^2$ от оси Ox с коэффициентом $|a|$; при этом если $a < 0$, то график функции $y = |a|x^2$ нужно еще отобразить симметрично относительно оси Ox (см. п. 130).

На рис. 59 изображены графики функции $y = ax^2$ для значений a, равных 1; –1; 3; – 0,5. Все эти графики называют ***параболами***. При $a > 0$ ветви параболы, служащей графиком функции $y = ax^2$, направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз.

Аналогично, зная график функции $y = x^3$, можно построить график функции вида $y = ax^3$. На рис. 60 изображены эти графики для значений a, равных 1; –1; 3.

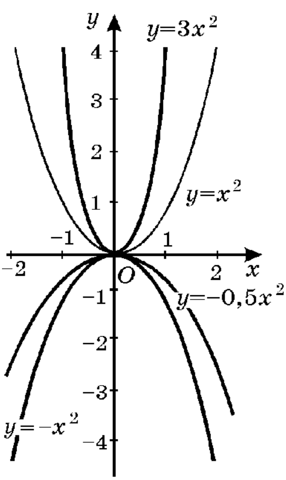


Рис. 59

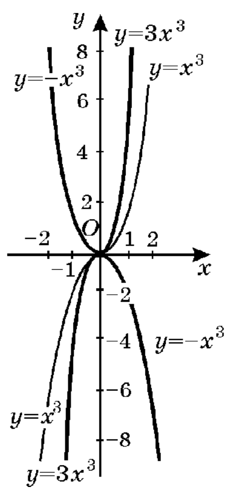


Рис. 60

132. Построение графика функции $y = f(x - a) + b$. Для построения графика функции $y = f(x) + b$ надо перенести график функции $y = f(x)$ на вектор $(0;\ b)$ вдоль оси ординат. Далее, для построения графика функции $y = f(x - a)$ надо перенести график функции $y = f(x)$ на вектор $(a;\ 0)$ вдоль оси абсцисс. Наконец, для построения графика функции $y = f(x - a) + b$ надо выполнить ***параллельный перенос*** графика функции $y = f(x)$ и на вектор $(a;\ 0)$, и на вектор $(0;\ b)$, т. е. в итоге на вектор $(a;\ b)$.

На практике это правило удобно использовать в следующей формулировке. Чтобы построить график функции $y = f(x - a) + b$, нужно:

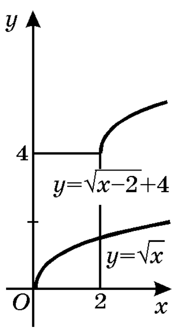


Рис. 61

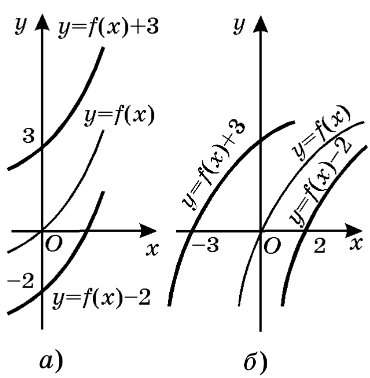


Рис. 62

1) выполнить параллельный перенос плоскости, выбрав в качестве начала новой системы координат $x'O'y'$ точку $O'\,(a;\,b)$;

2) в плоскости $x'O'y'$ построить график функции $y' = f(x')$.

П р и м е р. Построить график функции

$$y = \sqrt{x-2} + 4.$$

❑ 1) Выполним параллельный перенос плоскости, поместив начало новой системы координат $x'O'y'$ в точку $O'\,(2;\,4)$.

2) В плоскости $x'O'y'$ построим график функции $y' = \sqrt{x'}$. Это и есть требуемый график (рис. 61).■

На рис. 62, *а* изображены графики функций $y = f(x)$, $y = f(x) - 2$, $y = f(x) + 3$, а на рис. 62, *б* — графики функций $y = f(x)$, $y = f(x-2)$, $y = f(x+3)$.

133. График квадратичной функции. ***Квадратичной*** называют функцию, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — любые действительные числа, причем $a \neq 0$. Для построения графика этой функции выполним следующие преобразования (называемые ***выделением полного квадрата***) квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c =$$

$$= a\left(\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Итак,

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \qquad (1)$$

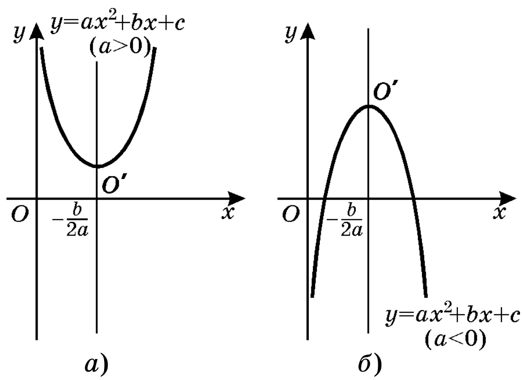


Рис. 63

Для построения графика функции (1) нужно выполнить параллельный перенос плоскости (см. п. 132), поместив начало новой системы координат $x'O'y'$ в точку $O'\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$, и в плоскости $x'O'y'$ построить параболу — график функции $y' = a(x')^2$. Прямая $x = -\dfrac{b}{2a}$ называется ***осью симметрии параболы***, служащей графиком квадратичной функции (1), а точка, в которой парабола пересекается с ее осью симметрии, — ***вершиной параболы***.

Если $a > 0$, то ветви параболы, служащей графиком функции (1), направлены вверх (рис. 63, *а*); в этом случае функция убывает на $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ и возрастает на $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$. Если же $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз (рис. 63, *б*); в этом случае функция возрастает на $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ и убывает на $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$.

134. Способы построения графика квадратичной функции. Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, является парабола (см. п. 133). Для ее построения на практике используются три способа, которые мы проиллюстрируем на следующем примере.

П р и м е р. Построить график функции

$$y = -0{,}5x^2 - x + 4.$$

❑ <u>I способ</u>: *отыскание координат вершины параболы по формулам* $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

Здесь $a = -0{,}5$, $b = -1$, $c = 4$. Значит, $x_0 = -\dfrac{-1}{2(-0{,}5)} = -1$; $y_0 = \dfrac{4(-0{,}5)\cdot 4 - 1}{4(-0{,}5)} = 4{,}5$. Итак, $(-1;\ 4{,}5)$ — вершина параболы. Для построения графика найдем координаты еще нескольких точек; например, (0; 4), (1; 2,5), (2; 0). Отметив вершину параболы, полученные точки и точки, симметричные им относительно оси параболы, строим требуемый график (рис. 64).

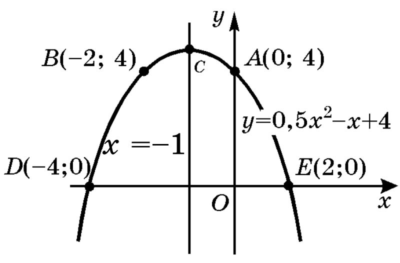


Рис. 64

<u>II способ</u>: *построение параболы по точкам с ординатой, равной свободному члену квадратного трехчлена.*

Найдем точки графика, имеющие ординату, равную свободному члену квадратного трехчлена. Для этого решим уравнение $-0{,}5x^2 - x + 4 = 4$, т. е. $0{,}5x^2 + x = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

Итак, мы нашли две точки графика A (0; 4) и B (– 2; 4).

Так как точки A и B лежат на параболе и имеют одинаковую ординату, то они симметричны относительно оси симметрии параболы, а потому указанная ось проходит перпендикулярно отрезку AB через его середину. Абсцисса точки A равна нулю, а абсцисса точки B равна – 2, поэтому уравнение оси параболы имеет вид $x = -1$. Подставив значение $x = -1$ в равенство $y = -0{,}5x^2 - x + 4$, получим $y = 4{,}5$. Значит, вершина C параболы, т. е. единственная точка параболы, лежащая на ее оси симметрии, имеет координаты $x_0 = -1$, $y_0 = 4{,}5$. Отметив на координатной плоскости точку C (– 1; 4,5), построим параболу, проходящую через три точки A, B, C. Это и есть искомый график (рис. 64).

III способ: *построение параболы по корням квадратного трехчлена.*

Из уравнения $-0{,}5x^2 - x + 4 = 0$ находим $x_1 = -4$, $x_2 = 2$. Поэтому мы знаем две точки искомой параболы: D (– 4; 0) и E (2; 0). Так как ось симметрии параболы перпендикулярна отрезку DE и проходит через его середину, то уравнение этой оси имеет вид $x = -1$. Подставив значение $x = -1$ в равенство $y = -0{,}5x^2 - x + 4$, находим $y = 4{,}5$. Итак, вершиной параболы служит точка C (–1; 4,5). По трем точкам D, E и C строим искомый график (рис. 64). ■

135. Построение графика функции $y = f(kx)$.

Задача I. Построить график функции $y = f(kx)$, где $k > 0$, $k \neq 1$, зная график функции $y = f(x)$.

❑ Пусть $y_0 = f(x_0)$. Поставим вопрос: какое значение аргумента x нужно взять, чтобы функция $y = f(kx)$ приняла значение y_0? Ясно, что это значение x должно удовлетворять условию $kx = x_0$, т. е. $x = x_0 / k$. Таким образом, точка $(x_0; y_0)$, лежащая на графике заданной функции $y = f(x)$, преобразуется в точку $(x_0 / k; y_0)$, лежащую на графике функции $y = f(kx)$. Это преобразование есть ***сжатие*** графика $y = f(x)$ с коэффициентом k к оси Oy (если $0 < k < 1$, то фактически получается ***растяжение*** от оси Oy с коэффициентом $1/k$). ■

На рис. 65 изображены графики функций $y = \arccos x$ и $y = \arccos 2x$, а на рис. 66 — графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{x/3}$.

Задача II. Построить график функции $y = f(-x)$, зная график функции $y = f(x)$.

❑ Пусть $y_0 = f(x_0)$. Для того чтобы функция $y = f(-x)$ приняла значение y_0, значение x должно удовлетворять условию $x_0 = -x$, т. е. $x = -x_0$. Точка $(x_0; y_0)$ графика функции $y = f(x)$ преобразуется в

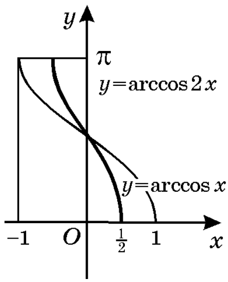


Рис. 65

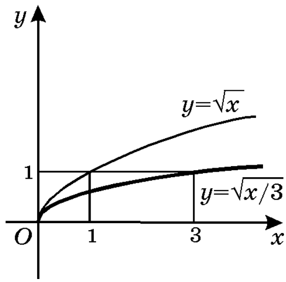


Рис. 66

точку $(-x_0;\ y_0)$ графика функции $y = f(-x)$. Это значит, что график функции $y = f(-x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ ***преобразованием симметрии*** последнего относительно оси Oy. ■

На рис. 67 изображены графики функций $y = \log_3 x$ и $y = \log_3(-x)$.

Задача III. Построить график функции $y = f(kx)$, где $k < 0$, $k \neq -1$, зная график функции $y = f(x)$.

❑ Имеем $f(kx) = f(-|k|\,x)$. Поэтому график функции $y = f(kx)$ можно получить сжатием графика функции $y = f(x)$ с коэффициентом $|k|$ к оси Oy и симметрией полученного графика $y = f(|k|x)$ относительно оси Oy. ■

На рис. 68 изображены графики функций $y = x^{3/2}$ и $y = (-2x)^{3/2}$.

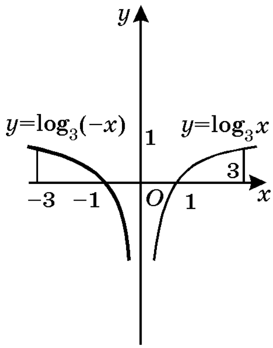


Рис. 67

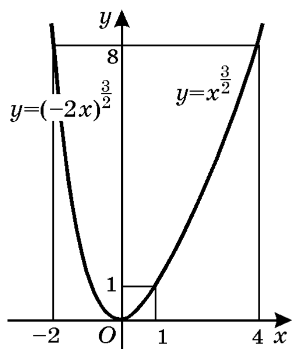


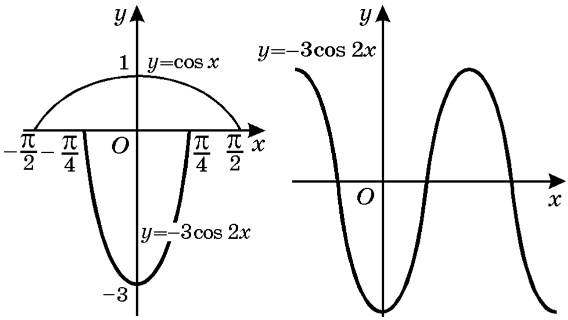
Рис. 68

136. Сжатие и растяжение графиков тригонометрических функций. Здесь речь идет о построении графиков функций вида $y = m\sin kx$, $y = m\cos kx$, $y = m\,\mathrm{tg}\,kx$, $y = m\,\mathrm{ctg}\,kx$.

П р и м е р. Построить график функции

$$y = -3\cos 2x.$$

❑ Построим одну полуволну графика функции $y = \cos x$. Осуществив ее сжатие к оси Oy с коэффициентом 2, получим график функции $y = \cos 2x$. Теперь произведем растяжение построенного графика от оси Ox с коэффициентом 3, а затем преобразование симметрии относительно оси Ox. В результате будет построена полуволна графика функции $y = -3\cos 2x$. На рис. 69, *а* показана одна полуволна искомого графика, а на рис. 69, *б* — весь график. ■



а) *б*)

Рис.69

137. График гармонического колебания $y = A\sin(\omega x + \alpha)$. Тригонометрические функции используются для описания колебательных процессов. Один из наиболее важных процессов такого рода описывается формулой

$$y = A\sin(\omega x + \alpha),$$

которая называется ***формулой гармонических*** (или ***синусоидальных***) ***колебаний***. Величина A называется ***амплитудой колебания***, она характеризует размах колебания. Величина ω называется ***частотой колебания***. Чем больше ω, тем больше число колебаний за единицу времени. Наконец, α называется ***начальной фазой колебания***.

П р и м е р. Построить график функции

$$y = 2\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right).$$

❑ Имеем $y = 2\sin\left(\frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$. Построение графика выполним в несколько этапов.

1. Произведем параллельный перенос системы координат, выбрав в качестве начала новой системы точку $O'(\pi/2;\ 0)$. В системе $x'O'y'$ нам нужно построить график функции $y' = 2\sin(x'/3)$.

2. Строим график функции $y' = \sin x'$.

3. Выполнив сжатие графика к оси $O'y'$ с коэффициентом 1/3 (т. е. растяжение с коэффициентом 3), получим график функции $y' = \sin(x'/3)$.

4. Осуществим растяжение последнего графика от оси $O'x'$ с коэффициентом 2. Полученный график является графиком функции $y = 2\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$ (рис. 70). ■

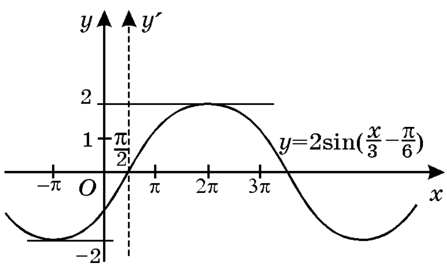


Рис. 70

Раздел IV

УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 14. Уравнения с одной переменной

138. Определение уравнения. Корни уравнения. Равенство с переменной $f(x) = g(x)$ называется ***уравнением с одной переменной*** x, если поставлена задача найти все такие значения переменной x, при которых выражения $f(x)$ и $g(x)$ принимают равные числовые значения. Говорят также, что $f(x) = g(x)$ — ***уравнение с одним неизвестным*** x.

Всякое значение переменной, при котором выражения $f(x)$ и $g(x)$ принимают равные числовые значения, называется ***корнем*** (или ***решением***) ***уравнения***. Решить уравнение — это значит найти все его корни или убедиться в том, что их нет.

Так, уравнение $3x + 2 = 8$ имеет единственный корень $x = 2$, поскольку только при $x = 2$ получается верное равенство $8 = 8$. Уравнение $(x - 1)(x - 3) = 0$ имеет два корня: 1 и 3. Уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

Заметим, что можно говорить и о мнимых корнях уравнений. Например, уравнение $x^2 + 4 = 0$ имеет два мнимых корня: $x_1 = 2i$, $x_2 = -2i$ (см. п. 50). Всюду ниже речь идет только о действительных корнях.

139. Равносильность уравнений. Уравнения, имеющие одни и те же корни, называются ***равносиль-***

ными. Равносильными считаются и уравнения, каждое из которых не имеет корней.

Например, уравнения $x + 2 = 7$ и $2x + 1 = 11$ равносильны, так как каждое из них имеет единственный корень — число 5. Равносильны и уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $2x^2 + 3 = 1$ ни одно из них не имеет корней. Уравнения $x - 6 = 0$ и $x^2 = 36$ неравносильны, поскольку первое имеет только один корень 6, второе имеет два корня: 6 и −6.

Т.4.1. *Если в уравнении какое-нибудь слагаемое перенести из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному.*

Т.4.2. *Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же выражение, имеющее смысл при всех x и ни при каких x не обращающееся в нуль, то получится уравнение, равносильное данному.*

Т.4.3. *Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень или из обеих частей уравнения извлечь корень одной и той же нечетной степени, то получится уравнение, равносильное данному.*

Т.4.4. *Если обе части уравнения неотрицательны при всех x, то после их возведения в одну и ту же четную степень получится уравнение, равносильное данному.*

140. Линейные уравнения. ***Линейным уравнением с одной переменной*** x называют уравнение вида $ax = b$, где a и b — действительные числа; a называют ***коэффициентом при переменной***, b — ***свободным членом***.

Для линейного уравнения $ax = b$ возможны три случая:

1) $a \neq 0$; корень уравнения равен b / a;

2) $a = 0$, $b = 0$; в этом случае уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, что верно при любом x, т. е. корень уравнения — любое действительное число;

3) $a = 0$, $b \neq 0$; в этом случае уравнение принимает вид $0 \cdot x = b$, оно не имеет корней.

Пример. Решить уравнение

$$\frac{2}{3} + \frac{x}{4} + \frac{1-x}{6} = \frac{5x}{12} - 1.$$

❑ Это уравнение сводится к линейному. Умножив обе его части на 12 (наименьшее общее кратное знаменателей 3, 4, 6, 12), получим

$$12\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{4} + \frac{1-x}{6}\right) = 12\left(\frac{5x}{12} - 1\right);$$

$$8 + 3x + 2 - 2x = 5x - 12; \quad 8 + 2 + 12 = 5x - 3x + 2x;$$

$$4x = 22; \; x = 5{,}5. \;\blacksquare$$

141. Квадратные уравнения. Уравнения вида

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

где a, b, c — действительные числа, причем $a \neq 0$, называют ***квадратным***. Если $a = 1$, то квадратное уравнение называют ***приведенным***; если $a \neq 1$ — то ***неприведенным***. Числа a, b, c носят следующие значения: a — ***первый коэффициент***, b — ***второй коэффициент***, c — ***свободный член***.

Корни квадратного уравнения (1) находят по формуле

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (2)$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют ***дискриминантом*** квадратного уравнения (1).

Если $D < 0$, *то уравнение* (1) *не имеет корней*; *если* $D = 0$, *то оно имеет один корень; если* $D > 0$, *то оно имеет два корня*.

В случае, когда $D = 0$, иногда говорят, что *квадратное уравнение имеет два одинаковых корня*.

Используя обозначение $D = b^2 - 4ac$, можно переписать формулу (2) в виде $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Если $b = 2k$, то формула (2) принимает вид

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}, \text{ где } k = \frac{b}{2}. \qquad (3)$$

Формула (3) особенно удобна в тех случаях, когда коэффициент b — четное число.

П р и м е р. Решить уравнение:

а) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;

б) $x^2 - 6x + 9 = 0$;

в) $2x^2 - 3x + 5 = 0$.

❑ а) Здесь $a = 2$, $b = -5$, $c = 2$. Находим дискриминант $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$. Так как

$D > 0$, то уравнение имеет два корня, которые найдем по формуле (2):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}.$$

Итак, $x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$, $x_2 = \frac{5-3}{4} = 0{,}5$, т. е. $x_1 = 2$ и $x_2 = 0{,}5$ — корни заданного уравнения.

б) Здесь $a = 1$, $b = -6$, $c = 9$. По формуле (3) находим $x = 3 \pm \sqrt{9 - 9 \cdot 1} = 3 \pm 0 = 3$, т. е. $x = 3$ — корень уравнения.

в) Здесь $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$. Находим $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -31$. Так как $D < 0$, то уравнение не имеет корней. ■

142. Неполные квадратные уравнения. Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ второй коэффициент b или свободный член c равен нулю, то квадратное уравнение называют ***неполным***. Для отыскания его корней можно не пользоваться формулой корней квадратного уравнения — проще решить уравнение методом разложения его левой части на множители.

Пример. Решить уравнение:

а) $2x^2 - 5x = 0$; б) $4x^2 - 81 = 0$; в) $2x^2 + 5 = 0$.

❑ а) Имеем $x\,(2x - 5) = 0$. Значит $x = 0$, либо $2x - 5 = 0$, т. е. $x = 2{,}5$. Итак, уравнение имеет два корня: 0 и 2,5.

б) Разделив обе части уравнения на 4, получим $x^2 - 20,25 = 0$, т. е. $(x + 4,5)(x - 4,5) = 0$. Значит, $x_1 = -4,5$ и $x_2 = 4,5$ — корни уравнения.

в) Поскольку $2x^2 + 5 > 0$ при любых x, данное уравнение не имеет корней. ■

143. Теорема Виета.

Т.4.5. *Если приведенное квадратное уравнение* $x^2 + px + q = 0$ *имеет корни* x_1 *и* x_2, *то*

$$x_1 + x_2 = -p,\ x_1x_2 = q, \tag{1}$$

т. е. *их сумма равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение равно свободному члену* (***теорема Виета***).

П р и м е р 1. Не решая уравнение $x^2 + px + q = 0$, найти: а) $x_1^2 + x_1^2$; б) $x_1^3 + x_2^3$.

❑ а) Используя формулы (1), получим

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - q.$$

б) Имеем $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2)$. Воспользовавшись формулами (1), получим $x_1^3 + x_2^3 = -p(p^2 - 3q)$. ■

Справедлива теорема, обратная теореме Виета.

Т.4.6. *Если числа* x_1 *и* x_2 *таковы, что* $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, *то* x_1 *и* x_2 *— корни квадратного уравнения* $x^2 + px + q = 0$.

П р и м е р 2. Решить уравнение $x^2 + 3x - 28 = 0$.

❑ Попробуем найти такие два числа x_1 и x_2, чтобы выполнялись равенства $x_1 + x_2 = -3$, $x_1 x_2 = -28$.

Нетрудно заметить, что такими числами являются -7 и 4. Согласно теореме 4.6, они и служат корнями заданного уравнения. ■

144. Системы и совокупности уравнений. Пусть даны два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$. В том случае, когда нужно найти значения переменной, удовлетворяющие обоим данным уравнениям, говорят, что задана ***система уравнений*** и используют для записи фигурную скобку:

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x). \end{cases}$$

П р и м е р 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 1)^2 = 0, \\ ((x - 1)(x - 2))^2 = 0. \end{cases}$$

❑ Корнями первого уравнения служат числа 1 и -1, а корнями второго — числа 1 и 2.

Общим корнем является число 1 — это и есть решение данной системы. ■

В том случае, когда ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является корнем хотя бы одного из данных уравнений, говорят, что задана ***совокупность уравнений*** и используют для записи квадратную скобку:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x). \end{array}\right.$$

П р и м е р 2. Решить совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0, \\ (x-1)(x+2) = 0. \end{array}\right.$$

❑ Корнями первого уравнения являются числа 1 и −1, а корнями второго — числа 1 и −2. Значит, решением данной совокупности служат числа 1, −1 и −2. ■

145. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля.

П р и м е р. Решить уравнение:

а) $|2x - 7| = 3$; б) $|2x - 8| = 3x + 1$.

❑ а) Если $|a| = 3$, то либо $a = 3$, либо $a = -3$. Это значит, что данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $2x - 7 = 3$, $2x - 7 = -3$. Из первого уравнения находим $x_1 = 5$, из второго $x_2 = 2$.

б) Здесь надо рассмотреть два случая: $2x - 8 \geq 0$, $2x - 8 < 0$, поскольку в каждом из них знак модуля раскрывается по своему правилу.

Если $2x - 8 \geq 0$, то $|2x - 8| = 2x - 8$ и данное уравнение примет вид $2x - 8 = 3x + 1$. Отсюда находим $x = -9$. Однако при $x = -9$ неравенство $2x - 8 \geq 0$ не выполняется, значит, $x = -9$ не может быть корнем данного уравнения.

Если $2x - 8 < 0$, то $|2x - 8| = -(2x - 8)$ и данное уравнение примет вид $8 - 2x = 3x + 1$. Отсюда находим $x = 1{,}4$. Неравенство $2 \cdot 1{,}4 - 8 < 0$ верно; значит, $x = 1{,}4$ — корень данного уравнения. ■

Заметим, что уравнения вида $|x - a| = b$ можно решать и геометрически (см. п. 29).

146. Понятие следствия уравнения. Посторонние корни. Пусть даны два уравнения

$$f_1(x) = g_1(x), \tag{1}$$

$$f_2(x) = g_2(x). \tag{2}$$

Если каждый корень уравнения (1) является одновременно и корнем уравнения (2), то уравнение (2) называется ***следствием уравнения*** (1). Заметим, что равносильность уравнений означает, что каждое из уравнений является следствием другого.

В процессе решения уравнения часто приходится применять такие преобразования, которые приводят к уравнению, являющемуся следствием исходного. Уравнению-следствию удовлетворяют все корни исходного уравнения, но, кроме них, уравнение-следствие может иметь и такие решения, которые не являются корнями исходного уравнения, это так называемые ***посторонние корни***. Чтобы выявить и отсеять посторонние корни, обычно поступают так: все найденные корни уравнения-следствия проверяют подстановкой в исходное уравнение.

В случае, когда при решении уравнения оно было заменено его уравнением-следствием, указанная проверка является неотъемлемой частью решения. Поэтому важно знать, при каких преобразованиях данное уравнение переходит в следствие.

Если обе части уравнения умножить на выражение, имеющее смысл при любых значениях x, то получится уравнение, являющееся следствием исходного.

Если обе части уравнения возвести в квадрат (*и вообще в любую четную степень*), *то получится уравнение, являющееся следствием исходного*. Вместе с тем, *возведение обеих частей уравнения в одну и ту же нечетную степень приводит к уравнению, равносильному исходному*.

147. Уравнения с переменной в знаменателе. Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0. \qquad (1)$$

Решение уравнения вида (1) основано на следующем утверждении: *дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля* (на нуль делить нельзя).

Поэтому решение уравнения (1) проводится в два этапа: сначала решают уравнение $p(x) = 0$, а затем для каждого корня выясняют, обращается ли при найденном значении переменной x знаменатель $q(x)$ в нуль. Если $q(x) \neq 0$, то корень уравнения $p(x) = 0$ является и корнем уравнения (1); если же $q(x) = 0$, то корень уравнения $p(x) = 0$ не является корнем уравнения (1).

Таким образом, уравнение $p(x) = 0$ является следствием уравнения (1) (см. п. 146). При переходе от уравнения (1) к уравнению $p(x) = 0$ (этот переход называется ***освобождением от знаменателя***) могут появиться посторонние корни. Их можно отсеять с помощью условия $q(x) \neq 0$ или непосредственной подстановкой каждого корня уравнения $p(x) = 0$ в уравнение (1).

П р и м е р. Решить уравнение $\frac{3x-6}{x^2-x-2}=0.$

❑ Из уравнения $3x - 6 = 0$ находим $x = 2$. Так как при $x = 2$ знаменатель $x^2 - x - 2$ обращается в нуль, то заданное уравнение не имеет корней. ■

148. Область определения уравнения. ***Областью определения уравнения*** $f(x) = g(x)$ называют множество всех тех значений переменной x, при которых и выражение $f(x)$, и выражение $g(x)$ имеют смысл. Область определения уравнения называют иногда ***областью допустимых значений***.

П р и м е р 1. Найти область определения уравнения:

а) $x^2 - 5x = 1 + 2x$;

б) $\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x-2}=3$;

в) $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x-1}=\sqrt[6]{x-2}$;

г) $\log_3(x-3)=\log_3(5-x)$.

❑ а) Выражения $x^2 - 5x$ и $1 + 2x$ определены при всех x. Значит, область определения уравнения — вся числовая прямая.

б) Выражения $\frac{x}{x-1}$ и $\frac{1}{x-2}$ не определены соответственно при $x = 1$ и $x = 2$. Поэтому область определения уравнения можно задать условиями: $x \neq 1$, $x \neq 2$.

в) Корень четной степени имеет смысл лишь при неотрицательных значениях подкоренного выражения. Следовательно, одновременно должны выполняться условия: $x \geq 0$, $x - 1 \geq 0$ и $x - 2 \geq 0$. Все эти неравенства справедливы при $x \geq 2$, т. е. $[2, +\infty)$ — область определения уравнения.

г) Логарифм имеет смысл лишь в случае положительного числа под знаком логарифма. Значит, должны одновременно выполняться два неравенства: $x - 3 > 0$, откуда $x > 3$, и $5 - x > 0$, откуда $x < 5$. Итак, $(3, 5)$ — область определения уравнения. ■

Если в процессе преобразований уравнения его область определения расширилась, то могут появиться посторонние корни. Поэтому все найденные значения переменной надо проверить подстановкой в исходное уравнение или с помощью области определения исходного уравнения.

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$\lg(x - 5) = \lg(2x - 9). \qquad (1)$$

❑ Так как $\lg a = \lg b$, то в силу монотонности логарифмической функции имеем $a = b$ (если $a \neq b$, например $a < b$, то и $\lg a \neq \lg b$, а именно $\lg a < \lg b$). Значит, от заданного уравнения можно перейти к уравнению

$$x - 5 = 2x - 9, \qquad (2)$$

откуда $x = 4$. При переходе от уравнения (1) к уравнению (2) область определения расширилась: в уравнении (1) она задается неравенством $x > 5$, а для уравнения (2) ею служит вся числовая прямая. Поэтому значение $x = 4$, являющееся корнем уравнения (2), может оказаться посторонним корнем для уравнения (1). В данном случае именно это и происходит, поскольку $x = 4$ не удовлетворяет неравенству $x > 5$. Итак , $x = 4$ — посторонний корень, т. е. заданное уравнение не имеет корней. ■

149. Рациональные уравнения. Уравнение $f(x) = g(x)$ называется ***рациональным***, если $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные выражения. При этом если $f(x)$ и $g(x)$ — целые выражения, то уравнение называется ***целым***; если же хотя бы одно из выражений $f(x)$, $g(x)$ является дробным, то рациональное уравнение $f(x) = g(x)$ называется ***дробным.***

Например, целыми являются линейные и квадратные уравнения (см. пп. 140 и 141).

П р и м е р. Решить уравнение

$$\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{x(2-x)}.$$

❑ Общим знаменателем дробей является $2x(2-x)$. Найдем дополнительные множители для каждой дроби и освободимся от знаменателей:

$$\frac{2^{\overset{2x}{\smile}}}{2-x} + \frac{1^{\overset{x(2-x)}{\smile}}}{2} = \frac{4^{\overset{2}{\smile}}}{x(2-x)}; \quad 4x + x(2-x) = 8;$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Из уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$ получим $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Остается проверить, обращают ли найденные корни в нуль выражение $2x(2-x)$, т. е. проверить выполнение условия $2x(2-x) \neq 0$. Заметим, что 2 не удовлетворяет этому условию, а 4 удовлетворяет. Итак, $x = 4$ — единственный корень уравнения. ■

150. Решение уравнения $p\ (x) = 0$ методом разложения его левой части на множители. Суть ***метода разложения на множители*** состоит в следующем. Пусть нужно решить уравнение $p(x) = 0$, где $p\ (x)$ — многочлен степени n. Предположим, что нам удалось разложить многочлен на множители: $p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x)$, где $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ — многочлены более низкой степени, чем n. Тогда вместо уравнения $p(x) = 0$ нужно решить совокупность уравнений $p_1(x) = 0$, $p_2(x) = 0$, $p_3(x) = 0$. Все найденные корни этих уравнений, и только они, будут корнями уравнения $p(x) = 0$.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0.$$

❑ Разложим на множители левую часть уравнения. Имеем $x^2(x + 2) + 3(x + 2) = 0$ откуда $(x + +2)\ (x^2 + 2) = 0$. Значит, либо $x + 2 = 0$, либо $x^2 + + 3 = 0$. Из первого уравнения находим $x = -2$, второе уравнение не имеет корней. ■

Метод разложения на множители применим к любым уравнениям вида $p(x) = 0$, где $p(x)$ — необязательно многочлен.

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$x^2\sqrt{x} - 9\sqrt{x} = 0.$$

❑ Имеем $\sqrt{x}\ (x^2 - 9) = 0$, значит, либо $\sqrt{x} = 0$, либо $x^2 - 9 = 0$. Из уравнения $\sqrt{x} = 0$ находим $x = 0$, из уравнения $x^2 - 9 = 0$ находим $x = \pm 3$. Но $x = -3$ не удовлетворяет исходному уравнению, так как при этом значении не определено выражение $\sqrt{x}$. Это — посторонний корень.

Итак, уравнение имеет два корня: 3; 0. ■

151. Решение уравнений методом введения новой переменной. Суть ***метода введения новой переменной*** поясним на примере.

Пример. Решить уравнение:

а) $(x^2 - 3x)^2 + 3(x^2 - 3x) - 28 = 0$;

б) $\dfrac{24}{x^2 + 2x - 8} - \dfrac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2$.

❑ а) Полагая $x^2 - 3x = y$, придем к уравнению $y^2 + 3y - 28 = 0$, откуда находим $y_1 = -7$, $y_2 = 4$. Теперь получаем совокупность уравнений $x^2 - 3x = -7$; $x^2 - 3x = 4$, т. е. $x^2 - 3x + 7 = 0$; $x^2 - 3x - 4 = 0$. Первое квадратное уравнение не имеет действительных корней, так как его дискриминант отрицателен. Из второго квадратного уравнения находим $x_1 = 4$, $x_2 = -1$. Это корни заданного уравнения.

б) Положим $x^2 + 2x - 3 = y$, тогда $x^2 + 2x - 8 = (x^2 + 2x - 3) - 5 = y - 5$ и исходное уравнение примет вид $\dfrac{24}{y - 5} - \dfrac{15}{y} = 2$. Решив это уравнение (см.

п. 147), получим $y_1 = 12{,}5$ и $y_2 = -3$. Но $y = x^2 + 2x - 3$. Значит, остается решить уравнения

$$x^2 + 2x - 3 = 12{,}5 \quad \text{и} \quad x^2 + 2x - 3 = -3,$$

или $x^2 + 2x - 15{,}5 = 0$ и $x^2 + 2x = 0$. Из первого находим, что $x_1 = 0{,}5(\sqrt{66} - 2)$, $x_2 = -0{,}5(\sqrt{66} + 2)$, а из второго — что $x_3 = 0$, $x_4 = -2$. ■

152. Биквадратные уравнения. ***Биквадратным*** называется уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$. Биквадратное уравнение решают ***методом введения новой переменной***: полагая $x^2 = y$, приходят к квадратному уравнению $ay^2 + by + c = 0$.

П р и м е р. Решить уравнение $x^4 + 4x^2 - 21 = 0$.

❑ Пусть $x^2 = y$; тогда получим квадратное уравнение $y^2 + 4y - 21 = 0$, откуда $y_1 = -7$, $y_2 = 3$. Теперь задача сводится к решению уравнений $x^2 = -7$, $x^2 = 3$. Первое уравнение не имеет корней, из второго находим $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, которые являются корнями заданного биквадратного уравнения. ■

153. Уравнения высших степеней. Кратко остановимся на решении уравнений вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен, степень которого выше второй.

При решении таких уравнений используют ***метод разложения на множители*** и ***метод введения новой переменной.***

Разложение многочлена n-й степени на множители основано на следующем утверждении:

Пусть дан многочлен

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

все коэффициенты которого — целые числа $(a_0 \neq 0)$. *Тогда если целое число* $x = b$ *является корнем многочлена* $P(x)$, *то оно служит делителем свободного члена* a_n.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$x^3 + 4x^2 - 24 = 0. \qquad (1)$$

❑ Попробуем найти целый корень уравнения (1). Для этого выпишем делители его свободного члена: $\pm1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12; \pm 24$. Подставив в уравнение (1) значение $x = 1$, получим $1^3 + 4 \cdot 1^2 - 24 \neq 0$, т. е. $x = 1$ не является корнем. Далее, при $x = -1$ и $x = 2$ имеем: $(-1)^3 + 4(-1)^2 - 24 \neq 0$, $2^3 + 4 \cdot 2^2 - 24 = 0$. Значит, $x_1 = 2$ — корень уравнения (1).

Теперь разделим многочлен $x^3 + 4x^2 - 24$ на двучлен $x - 2$; в частном получим $x^2 + 6x + 12$. Таким образом, $x^3 + 4x^2 - 24 = (x-2)(x^2 + 6x + 12)$, где квадратный трехчлен $x^2 + 6x + 12$ не имеет корней. Итак, $x = 2$ — единственный корень уравнения.■

Пример 2. Решить уравнение

$$21x^3 + x^2 - 5x - 1 = 0.$$

❑ Разделив все члены уравнения на x^3, имеем

$$21 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0.$$

Полагая $\frac{1}{x} = y$, придем к уравнению $21 + y - 5y^2 - y^3 = 0$, т. е.

$$y^3 + 5y^2 - y - 21 = 0. \qquad (2)$$

Как и в примере 1, найдем целый корень уравнения (2): $y_1 = -3$. Затем, разделив многочлен $y^3 + 5y^2 - y - 21$ на $y + 3$, получим квадратный трехчлен $y^2 + 2y - 7$. Его корнями являются числа $-1 + 2\sqrt{2}$ и $-1 - 2\sqrt{2}$. Наконец, возвращаясь к переменной $x = \frac{1}{y}$, находим корни исходного уравнения:

$$x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = \frac{1}{-1 + 2\sqrt{2}} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{7},$$

$$x_3 = \frac{1}{-1 - 2\sqrt{2}} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{7}. \ ■$$

154. Решение задач с помощью уравнений. С помощью уравнений решаются многочисленные задачи, к которым приводят самые разнообразные вопросы физики, механики, экономики и других наук. Общая схема решения таких задач состоит в следующем:

1. Вводят переменные, т. е. буквами x, y, z обозначают неизвестные величины, которые либо требуется найти в задаче, либо они необходимы для отыскания искомых величин.

2. Используя введенные переменные и данные в задаче числа и соотношения, составляют систему уравнений(или одно уравнение).

3. Решают составленную систему уравнений (или уравнение) и из полученных решений отбирают те, которые подходят по смыслу задачи.

4). Если буквами x, y, z обозначены не искомые величины, то, используя полученные решения, находят ответ на вопрос задачи.

Пример 1. Два мастера, работая вместе, выполнили некоторую работу за 6 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 5 ч скорее, чем второй, если последний будет работать отдельно. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу?

❑ Прежде чем решать задачу заметим следующее: производительность труда, т. е. часть работы, выполняемая в единицу времени (обозначим ее через A), и время, необходимое для выполнения всей работы (обозначим его через t), — взаимно обратные величины, т. е. $At = 1$. Поэтому если обозначить через x ч время, необходимое для выполнения всей работы первому мастеру, а через $(x + 5)$ ч — второму, то часть работы, выполняемая первым мастером за 1 ч, равна $\frac{1}{x}$, а часть работы, выполняемая вторым мастером за 1 ч, равна $\dfrac{1}{x+5}$. Согласно условию они, работая вместе, выполнили всю работу за 6 ч. Часть работы, выполненная за 6 ч первым мастером, есть $\dfrac{6}{x}$, а часть работы, выполненная за 6 ч вторым мастером, есть $\dfrac{6}{x+5}$. Так как вместе они выполнили всю работу, т. е. доля выполненной работы равна 1, то получаем уравнение $\dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{x+5}=1$, решив которое найдем $x = 10$. Итак, первый мастер может выполнить всю работу за 10 ч, а второй — за 15 ч. ■

Пример 2. Из сосуда вместимостью 54 л, наполненного кислотой, вылили несколько литров и долили сосуд водой, потом опять вылили столько же литров смеси. Тогда в оставшейся в сосуде смеси оказалось 24 л чистой кислоты. Сколько кислоты вылили в первый раз?

❑ Пусть в первый раз было вылито x л кислоты. Тогда в сосуде осталось $(54 - x)$ л кислоты. Долив сосуд водой, получили 54 л смеси, в которой растворилось $(54 - x)$ л кислоты. Значит, в 1 л смеси содержится $\dfrac{54-x}{54}$ л кислоты (концентрация раствора). Во второй раз из сосуда вылили x л смеси, в этом количестве смеси содержалось $\dfrac{54-x}{54}\cdot x$ л кислоты. Таким образом, в первый раз было вылито

x л кислоты, во второй $\frac{54-x}{54}\cdot x$ л кислоты, а всего за два раза вылито 54 – 24 = 30 л кислоты. В результате приходим к уравнению $x+\frac{54-x}{54}\cdot x=30.$ Решив его, найдем два корня: $x_1 = 90$ и $x_2 = 18$. Ясно, что значение $x = 90$ не удовлетворяет условию задачи. Итак, в первый раз было вылито 18 л кислоты. ■

155. Иррациональные уравнения. ***Иррациональным*** называется уравнение, в котором переменная содержится под знаком радикала или является основанием степени с дробным показателем. Так, иррациональными являются уравнения $\sqrt{x-2}=2x-1$, $x^{0,25}-5=0$ и т. д.

Рассмотрим два метода решения иррациональных уравнений: ***метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень; метод введения новой переменной.***

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6.$$

❑ Преобразуем уравнение к виду

$$\sqrt{2x+6}=6-\sqrt{x-1}$$

и возведем обе части его в квадрат. Получим

$$(\sqrt{2x+6})^2=(6-\sqrt{x-1})^2;$$

$$2x+6=36-12\sqrt{x-1}+x-1;\ \ 12\sqrt{x-1}=29-x.$$

Еще раз возведем обе части уравнения в квадрат: $144(x-1)=(29-x)^2$, т. е. $x^2-202x+985=0$, откуда $x_1=5$, $x_2=197$.

П р о в е р к а. 1) При $x = 5$ имеем $\sqrt{5-1}+\sqrt{2\cdot 5+6}=6$, т. е. $x = 5$ является корнем уравнения.

2) $\sqrt{197-1}+\sqrt{2\cdot 197+6}\neq 6$. Значит, $x = 197$ — посторонний корень. ■

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=1{,}5\,(x+4). \tag{1}$$

❑ Уединение радикала и возведение обеих частей полученного уравнения в квадрат привело бы к громоздким вычислениям. Однако можно заметить, что уравнение (1) легко сводится к квадратному. В самом деле, умножив обе его части на 2, получим

$$2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+12,$$

т. е.

$$2x^2-3x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}-8=0.$$

Пусть $\sqrt{2x^2-3x+2}=y$; тогда $y^2-2y-8=0$, откуда $y_1=4$, $y_2=-2$. Поэтому уравнение (1) равносильно совокупности уравнений: $\sqrt{2x^2-3x+2}=4$, $\sqrt{2x^2-3x+2}=-2$. Из первого уравнения находим $x_1=3{,}5$, $x_2=-2$, а второе не имеет корней. Подстановка найденных значений в уравнение

$\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 4$ показывает, что оба являются корнями указанного, а значит, и исходного уравнения.■

156. Показательные уравнения. ***Показательными*** называются уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, и уравнения, сводящиеся к указанным.

Основой решения показательных уравнений служит следующее свойство: *показательное уравнение* $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ *равносильно уравнению* $f(x) = g(x)$.

Имеются два основных метода решения показательных уравнений: ***метод уравнивания показателей***, т. е. преобразование данного уравнения к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, а затем к виду $f(x) = g(x)$; ***метод введения новой переменной***.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$\frac{0{,}2^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0{,}04^{x-1}.$$

❑ Приведем все степени к одному основанию 0,2. Получим уравнение $(0{,}2)^{x-0{,}5} \cdot (0{,}2)^{0{,}5} = (0{,}2)^{-1} \times$ $\times ((0{,}2)^2)^{x-1}$, которое преобразуем к виду $(0{,}2)^x =$ $= (0{,}2)^{2x-3}$. Последнее уравнение равносильно уравнению $x = 2x - 3$, откуда $x = 3$. ■

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0. \qquad (1)$$

❑ Применим метод введения новой переменной.

Так как $4^x = (2^x)^2$, $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, то уравнение (1) можно переписать в виде

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0. \qquad (2)$$

Введем новую переменную, полагая $2^x = y$. Тогда уравнение (2) сведется к квадратному уравнению $y^2 + 2y - 24 = 0$, корнями которого являются $y_1 = 4$, $y_2 = -6$. Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений: $2^x = 4$; $2^x = -6$.

Из первого уравнения находим $x = 2$. Второе уравнение не имеет корней, так как $2^x > 0$ при любых значениях x. Итак, $x = 2$. ■

157. Логарифмические уравнения. ***Логарифмическими*** называются уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, и уравнения, сводящиеся к указанным.

Имеются два основных метода решения логарифмических уравнений: ***метод уравнивания логарифмируемых выражений***, т. е. преобразования уравнения к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, а затем к виду $f(x) = g(x)$; ***метод введения новой переменной***.

Пример 1. Решить уравнение

$$\lg(x + 4) + \lg(2x + 3) = \lg(1 - 2x).$$

❑ Воспользовавшись тем, что сумма логарифмов равна логарифму произведения (см. п. 75), преобразуем уравнение:

$$\lg((x + 4)(2x + 3)) = \lg(1 - 2x);$$

$$(x+4)(2x+3)=1-2x;$$

$$2x^2+13x+11=0.$$

Из последнего уравнения находим $x_1=-1$, $x_2=-5{,}5$. Остается сделать проверку. Ее можно выполнить с помощью системы неравенств $x+4>0$, $2x+3>0$, $1-2x>0$. Подставив поочередно значения -1 и $-5{,}5$ в эти неравенства, убеждаемся, что -1 удовлетворяет всем неравенствам, а $-5{,}5$ нет, — например, при этом значении не выполняется первое неравенство. Значит, $-5{,}5$ — посторонний корень. Итак, $x=-1$. ■

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$\log_2^2 x+\log_2 x+1=\frac{7}{\log_2(0{,}5x)}. \qquad (1)$$

❑ Так как $\log_2(0{,}5x)=\log_2 x+\log_2 0{,}5=\log_2 x-1$, то уравнение (1) можно переписать в виде

$$\log_2^2 x+\log_2 x+1=\frac{7}{\log_2 x-1}. \qquad (2)$$

Введем новую переменную, полагая $\log_2 x=y$. Тогда уравнение (2) примет вид $y^2+y+1=\dfrac{7}{y-1}$ и далее $(y-1)(y^2+y+1)=7$, $y^3-1=7$, $y^3=8$, $y=2$. Но $y=\log_2 x$, поэтому из уравнения $\log_2 x=2$ находим $x=4$. ■

158. Показательно-логарифмические уравнения.

П р и м е р. Решить уравнение

$$x^{1-\lg x} = 0{,}01. \qquad (1)$$

❑ Найдем область определения уравнения: $x > 0$. В этой области выражения, входящие в обе части уравнения (1), принимают только положительные значения; поэтому, прологарифмировав обе его части по основанию 10, приходим к уравнению

$$\lg x^{1-\lg x} = \lg 0{,}01,$$

равносильному (1). Далее имеем $(1 - \lg x)\lg x = -2$.

Полагая $u = \lg x$, получим $(1 - u)u = -2$, откуда $u_1 = -1$, $u_2 = 2$. Остается решить совокупность уравнений: $\lg x = -1$; $\lg x = 2$. Из этой совокупности находим $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 100$ — корни уравнения (1). ■

Здесь применен ***метод логарифмирования***, заключающийся в переходе от уравнения $f(x) = g(x)$ к уравнению $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

159. Простейшие тригонометрические уравнения. Уравнение $\sin x = a$, где $|a| \le 1$, имеет бесконечно много корней. Например, уравнению $\sin x = \frac{1}{2}$ удовлетворяют следующие значения: $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$,

$x_3 = \frac{\pi}{6} + 2\pi$, $x_4 = \frac{\pi}{6} - 2\pi$ и. т. д. Общая формула, по которой находятся все корни уравнения $\sin x = a$, где $|a| \le 1$, такова:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

Здесь n может принимать любые целые значения, каждому из них соответствует определенный корень уравнения.

Аналогично, решение уравнения $\cos x = a$, где $|a| \le 1$, выражается формулой

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \qquad (2)$$

решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ — формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \qquad (3)$$

а решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ — формулой

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (4)$$

П р и м е р. Решить уравнение:

а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$.

❑ а) По формуле (1) находим

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Так как $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ (см. п. 129), то окончательно получаем $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$

б) Используя формулу (2), имеем

$$3x=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Но $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ (см. п. 129), поэтому $3x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,$ т. е. $x=\pm\frac{\pi}{4}+$ $+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\boldsymbol{Z}.$

в) Согласно формуле (3), имеем

$$x-\frac{\pi}{6}=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Учитывая, что $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3}$ (см. п. 129), получим $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+\pi n,$ т. е. $x=-\frac{\pi}{6}+\pi n,$ $n\in\boldsymbol{Z}.$ ■

Заметим, что в некоторых случаях удобнее пользоваться частными формулами (во всех формулах $n\in\boldsymbol{Z}$):

1) $\sin x=0,\ x=\pi n;$ 2) $\sin x=1,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n;$

3) $\sin x = -1,\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;$

4) $\cos x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n;$

5) $\cos x = 1,\ x = 2\pi n;$

6) $\cos x = -1,\ x = \pi + 2\pi n;$

7) $\operatorname{tg} x = 0,\ x = \pi n;$

8) $\operatorname{ctg} x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n.$

160. Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители. Если тригонометрическое уравнение приведено к виду $f(x) = 0$, где его левая часть разлагается на множители, то следует приравнять нулю все эти множители. В результате получится совокупность уравнений, причем корни каждого из них окажутся корнями данного уравнения, если они входят в область определения каждого из множителей левой части уравнения $f(x) = 0$.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$\cos x(\operatorname{tg} x - 1) = 0. \qquad (1)$$

❑ Данное уравнение сводится к совокупности уравнений: $\cos x = 0;\ \operatorname{tg} x = 1$, откуда находим $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\quad x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n;\ k,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Однако значения $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ — посторонние корни для уравнения (1), поскольку при этих значениях не определен $\operatorname{tg} x$.

Итак, решение уравнения (1) имеет вид $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ■

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1.$$

❑ Перенесем 1 в левую часть и, выполнив преобразования левой части, разложим ее на множители. Применим к $\sin 5x + \sin x$ формулу суммы синусов (см. п. 85) и воспользуемся тем, что $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ (см. п. 83). Тогда уравнение примет вид

$$2\sin 3x \cos 2x + (1 - \cos 2x) - 1 = 0;$$
$$\cos 2x(2\sin 3x - 1) = 0.$$

Теперь задача свелась к решению совокупности уравнений: $\cos 2x = 0$; $2\sin 3x - 1 = 0$.

Из уравнения $\cos 2x = 0$ находим $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, т. е. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Из уравнения $2\sin 3x - 1 = 0$ находим $\sin 3x = \frac{1}{2}$, откуда $3x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$; так как $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, то

$$3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Итак, получаем ответ:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}; \quad k, n \in \boldsymbol{Z}. \ \blacksquare$$

161. Решение тригонометрических уравнений методом введения новой переменной. Суть этого метода заключается в сведении тригонометрического уравнения к алгебраическому.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$2\cos^2 x + 14\cos x = 3\sin^2 x.$$

❑ Так как $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то уравнение можно переписать следующим образом:

$$2\cos^2 x + 14\cos x - 3(1 - \cos^2 x) = 0,$$

$$5\cos^2 x + 14\cos x - 3 = 0.$$

Полагая $\cos x = y$, получим квадратное уравнение $5y^2 + 14y - 3 = 0$. Решив его находим $y_1 = 0{,}2$, $y_2 = -3$. Значит, либо $\cos x = 0{,}2$, откуда $x = \pm \arccos 0{,}2 + 2\pi n$, либо $\cos x = -3$ — это уравнение не имеет решений, так как $|\cos x| \le 1$. Итак, $x = \pm \arccos 0{,}2 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ■

Иногда можно указать правило, облегчающее выбор новой переменной в тригонометрических уравнениях. Обозначим через $R(\sin x,\ \cos x)$ рациональную функцию от $\sin x$ и $\cos x$, т. е. функцию, полученную из $\sin x$ и $\cos x$ и постоянных величин с помощью операций сложения, умножения и деления. Рассмотрим уравнение вида $R(\sin x,\ \cos x) = 0$. *Такое уравнение заменой* $\cos^2 x$ *на* $1 - \sin^2 x$ *сводится к ал-*

гебраическому уравнению относительно $\sin x$, *если* $\cos x$ *входит в уравнение лишь в четных степенях;* аналогично, *заменой* $\sin^2 x$ *на* $1-\cos^2 x$ *оно сводится к алгебраическому уравнению относительно* $\cos x$, *если* $\sin x$ *входит в уравнение лишь в четных степенях*.

Пример 2. Решить уравнение

$$\cos^4 x + 3\sin x - \sin^4 x - 2 - 0.$$

❑ Так как $\cos x$ входит в уравнение лишь в четвертой степени, то, согласно указанному правилу, заменим $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$, т. е. $\cos^4 x$ на $(1-\sin^2 x)^2$. Тогда данное уравнение примет вид

$$(1-\sin^2 x)^2 + 3\sin x - \sin^4 x - 2 = 0.$$

Полагая $\sin x = y$, приходим к алгебраическому уравнению $(1-y^2)^2 + 3y - y^4 - 2 = 0$, т. е. $2y^2 - 3y + {}$ $+1 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = 0{,}5$. Наконец, решив совокупность уравнений $\sin x = 1$, $\sin x = 0{,}5$, получаем $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$; k, $n \in \boldsymbol{Z}$. ■

162. Однородные тригонометрические уравнения. В ряде случаев тригонометрическое уравнение вида $R(\sin x, \cos x) = 0$ можно свести к алгебраическому относительно $\operatorname{tg} x$. Такие уравнения характеризуются тем, что они не меняются при одновременной замене $\sin x$ на $-\sin x$ и $\cos x$ на $-\cos x$. Примерами таких уравнений являются ***однородные уравнения***:

$$a\sin x + b\cos x = 0;$$

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$

(соответственно первой и второй степени).

Рассмотрим случай, когда $a \neq 0$. Разделим обе части первого уравнения на $\cos x$, а обе части второго — на $\cos^2 x$. В результате получим уравнения, алгебраические относительно $\operatorname{tg} x$:

$$a\operatorname{tg} x + b = 0;\ a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg} x + c = 0.$$

Заметим, что при $a \neq 0$ однородному уравнению не удовлетворяют те значения x, при которых $\cos x = 0$. Поэтому деление на $\cos x$ (или $\cos^2 x$) обеих частей однородного уравнения в случае $a \neq 0$ не приводит к потере корней.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

❑ Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$. Далее положим $u = \operatorname{tg} x$, тогда приходим в квадратному уравнению $u^2 + 2u - 3 = 0$, откуда $u_1 = -3$, $u_2 = 1$. Наконец, решив совокупность уравнений $\operatorname{tg} x = -3$, $\operatorname{tg} x = 1$, находим $x = \operatorname{arctg}(-3) + \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$; k, $n \in \boldsymbol{Z}$. ■

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 5.$$

❑ Имеем

$$5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 5(\sin^2 x + \cos^2 x);$$

$$\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 0. \qquad (1)$$

В уравнении (1) отсутствует член вида $a\sin^2 x$, т. е. $a = 0$. Здесь делить обе части уравнения на $\cos^2 x$ нельзя, так как те значения x, при которых $\cos^2 x = 0$, удовлетворяют уравнению (1), а потому деление на $\cos^2 x$ приведет к потере корней. Поступим иначе: разложив левую часть уравнения (1) на множители, получим $\cos x(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 0$.

Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений: $\cos x = 0$; $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$. Из первого уравнения находим $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. Разделив обе части уравнения $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$ на $\cos x$, получим $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x + 1 = 0$, откуда $\mathrm{tg}\,x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n$, т. е. $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Итак, получаем две серии решений:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x = -\frac{\pi}{6} + \pi n;\ k,\ n \in \boldsymbol{Z}. \blacksquare$$

163. Универсальная подстановка. Известно (см. п. 84), что $\sin x$ и $\cos x$ выражаются рационально через $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, а именно:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}, \ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}, \qquad (1)$$

где $x \neq \pi + 2\pi n$. Подстановка $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = u$ называется ***универсальной***. Ее можно использовать при решении любого уравнения вида $R(\sin x, \cos x) = 0$.

Поскольку использование универсальной подстановки возможно лишь при $x \neq \pi + 2\pi n$, нужно проверять, не являются ли числа вида $x = \pi + 2\pi n$ решениями заданного уравнения.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$3\sin x + 4\cos x = 5. \qquad (2)$$

❑ Используя формулы (1) и полагая $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = u$, придем к рациональному уравнению

$$3 \cdot \frac{2u}{1+u^2} + 4 \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2} = 5.$$

Решив его, находим $u = \dfrac{1}{3}$. Далее, из уравнения $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{3}$ следует, что $\dfrac{x}{2} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \pi n$, т. е. $x =$

$= 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ Проверкой убеждаемся, что значения $x = \pi + 2\pi n$ не удовлетворяют уравнению (2). Итак, $x = 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ■

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$3\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0.$$

❑ Воспользуемся универсальной подстановкой. Выразив $\sin 2x$ и $\cos 2x$ через $\mathrm{tg}\,x$ и полагая $\mathrm{tg}\,x = u$, получим рациональное уравнение

$$\frac{6u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2} + 1 = 0,$$

откуда $u = -\dfrac{1}{3}$. Далее, из уравнения $\mathrm{tg}\,x = -\dfrac{1}{3}$ находим $x = \mathrm{arctg}\left(-\dfrac{1}{3}\right) + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

Однако нужно еще проверить, не удовлетворяют ли заданному уравнению те значения x, при которых $2x = \pi + 2\pi n$, т. е. значения $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$. Имеем

$$3\sin(\pi + 2\pi n) + \cos(\pi + 2\pi n) + 1 =$$

$$= 3\sin\pi + \cos\pi + 1 = 3 \cdot 0 - 1 + 1 = 0,$$

т. е. значения $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$ также являются решениями уравнения. Итак, заданное уравнение имеет следующие решения:

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ k,\ n \in \boldsymbol{Z}. \blacksquare$$

164. Метод введения вспомогательного аргумента. Иногда при решении тригонометрических уравнений оказывается полезным заменить выражение $a\cos x + b\sin x$ на $A\cos(x+\varphi)$, где $A = \sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (см. п. 87). В этом случае φ называют ***вспомогательным аргументом.***

П р и м е р. Решить уравнение

$$8\cos x + 15\sin x = 17.$$

❑ Разделив обе части данного уравнения на $\sqrt{8^2+15^2} = 17$, получим

$$\frac{8}{17}\cos x + \frac{15}{17}\sin x = 1. \qquad (1)$$

Так как $\left(\dfrac{8}{17}\right)^2 + \left(\dfrac{15}{17}\right)^2 = 1$, то существует такое φ, что $\dfrac{8}{17} = \sin\varphi$ и $\dfrac{15}{17} = \cos\varphi$. Перепишем уравнение (1) следующим образом: $\sin\varphi\cos x + \sin x\cos\varphi = 1$. Но $\sin\varphi\cos x + \sin x\cos\varphi = \sin(x+\varphi)$. Значит,

$\sin(x + \varphi) = 1$, откуда $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n - \varphi$. Учитывая, что $\varphi = \arcsin\dfrac{8}{17}$, окончательно получаем решение данного уравнения:

$$x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{8}{17} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \ \blacksquare$$

165. Графическое решение уравнений. На практике довольно часто оказывается полезным ***графический метод*** решения уравнений.Он заключается в следующем: для решения уравнения $f(x) = 0$ строят график функции $y = f(x)$ и находят абсциссы точек пересечения графика с осью Ox; эти абсциссы и являются корнями уравнения.

Например, график функции $y = -0{,}5x^2 - x + 4$ (см. рис. 64) пересекает ось Ox в точках $(-4;\ 0)$ и $(2;\ 0)$, значит, уравнение $-0{,}5\ x^2 - x + 4 = 0$ имеет два корня: $x_1 = -4$ и $x_2 = 2$. График функции $y = x^2 - 4x + 5$ не пересекает ось Ox, поэтому уравнение $x^2 - 4x + 5 = 0$ не имеет корней.

Часто уравнение $f(x) = 0$ заменяют равносильным $g(x) = h(x)$, строят графики функций $y = g(x)$ и $y = h(x)$ (если это проще, чем построение графика функции $y = f(x)$) и находят абсциссы точек пересечения построенных графиков.

П р и м е р 1. Решить графически уравнение

$$\sqrt{x} = |x - 2|.$$

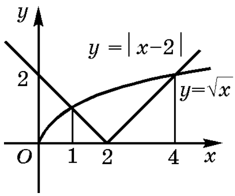


Рис. 71

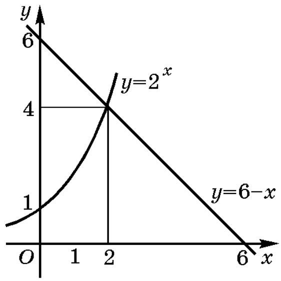


Рис. 72

❑ Построим в одной системе координат графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=|x-2|$ (рис. 71). Они пересекаются в двух точках с абсциссами $x_1=1$, $x_2=4$. Это — два корня данного уравнения. ■

С графическим методом решения уравнения $f(x) = g(x)$ связаны и некоторые функциональные методы, основанные на использовании различных свойств функций $f(x)$ и $g(x)$. Укажем две теоремы, лежащие в основе этих методов.

Т.4.7. *Если одна из функций* $f(x)$, $g(x)$ *убывает, а другая возрастает в области определения уравнения* $f(x) = g(x)$, *то это уравнение либо не имеет корней, либо имеет единственный корень.*

Т.4.8. *Пусть функция* $f(x)$ *возрастает (убывает) на промежутке* X, *число* a *— любое из значений, принимаемых функцией* f *в этом промежутке.*

Тогда уравнение $f(x) = a$ имеет единственный корень в промежутке X.

П р и м е р 2. Решить графически уравнение

$$2^x = 6 - x.$$

❑ Легко заметить, что $x = 2$ — корень уравнения. Так как функция $y = 2^x$ возрастает, а функция $y = 6 - x$ убывает, то других корней это уравнение не имеет (рис. 72). ■

166. Уравнения с параметром. Пусть дано равенство с переменными x, a: $f(x; a) = 0$. Если ставится задача для каждого действительного значения a решить это уравнение относительно x, то уравнение $f(x; a) = 0$ называется ***уравнением*** с переменной x и ***параметром*** a. Решить уравнение с параметром a — это значит для каждого значения a найти значения x, удовлетворяющие этому уравнению.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$2a(a - 2)x = a - 2. \qquad (1)$$

❑ Рассмотрим прежде всего те значения параметра, которые обращают в нуль коэффициент при x (при этих значениях параметра невозможно деление обеих частей уравнения на коэффициент при x, а при остальных значениях параметра такое деление возможно). Такими значениями являются $a = 0$, $a = 2$. При $a = 0$ уравнение (1) принимает вид $0 \cdot x = -2$. Это уравнение не имеет корней. При $a = 2$ уравнение (1) принимает вид $0 \cdot x = 0$, его корнем служит любое действительное число. При $a \neq 0$ и

$a \neq 2$ уравнение (1) можно преобразовать к виду $x = \dfrac{a-2}{2a(a-2)}$, откуда $x = \dfrac{1}{2a}$.

Итак, если $a = 0$, то уравнение не имеет корней; если $a = 2$, то корнем служит любое действительное число; если $a \neq 0$ и $a \neq 2$, то $x = \dfrac{1}{2a}$. ■

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + 4a + 3 = 0. \qquad (2)$$

❑ Выделим особо значение параметра $a = 1$. Дело в том, что при $a = 1$ уравнение (2) не является квадратным, а при $a \neq 1$ оно квадратное. Значит, решать его в каждом из этих случаев надо по-своему. При $a = 1$ уравнение (2) принимает вид $6x + 7 = 0$, откуда находим $x = -7/6$. В случае $a \neq 1$ для квадратного уравнения (2) выделим те значения параметра, при которых дискриминант обращается в нуль. Имеем $0{,}25D = 5a + 4$. Значит, $a = -4/5$ — значение параметра, на которое надо обратить внимание.

Если $a < -4/5$, то $D < 0$, и, следовательно, уравнение не имеет корней; если же $a > -4/5$ и $a \neq 1$, то $D > 0$ и $x = \dfrac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$; наконец, если $a = -4/5$, то $D = 0$ и $x = -\dfrac{2a+1}{a-1}$, т. е. $x = -1/3$.

Итак, если $a < -4/5$, то корней нет; если $a = 1$, то $x = -7/6$; если $a = -4/5$, то $x = -1/3$; если $a > -4/5$ и $a \neq 1$, то $x = \dfrac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$. ■

§ 15. Уравнения с двумя переменными

167. Решение уравнения с двумя переменными. Рассмотрим ***уравнение с двумя переменными*** $f(x, y) = 0$.

Пара значений переменных, обращающая уравнение с двумя переменными в верное равенство, называется ***решением уравнения***. Если дано уравнение с двумя переменными x и y, то принято в записи его решения на первое место ставить значение переменной x, а на второе — значение y.

Так, пары (10; 0), (16; 2), (−2; −4) являются решениями уравнения $x - 3y = 10$, а пара (1; 5) его решением не является.

Это уравнение имеет и другие решения. Для их отыскания удобно выразить одну переменную через другую, например x через y, получив уравнение $x = 10 + 3y$. Выбрав произвольное значение y, вычислим соответствующее значение x. Так, если $y = 7$, то $x = 10 + 3 \cdot 7 = 31$, значит, пара (31; 7) является решением уравнения.

Уравнения с двумя переменными называются ***равносильными***, если они имеют одни и те же решения.

Для уравнений с двумя переменными справедливы теоремы 4.1–4.4 о равносильных преобразованиях уравнения (см. п. 139).

168. График уравнения с двумя переменными. Пусть дано уравнение с двумя переменными $f(x, y) = 0$. Если все его решения изобразить точками на координатной плоскости, то получится некоторое множество точек плоскости. Это множество называется ***графиком уравнения*** $f(x, y) = 0$.

Например, графиком уравнения $y - x^2 = 0$ является парабола $y = x^2$ (см. рис. 15); графиком уравнения $y - x = 0$ является прямая (биссектриса I и III координатных углов; см. рис. 14). Графиком уравнения $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} = 0$ является одна точка (1; 2), так как координаты только этой точки удовлетворяют уравнению.

169. Линейное уравнение с двумя переменными и его график. Уравнение вида $ax + by = c$, где x, y — переменные, а a, b, c — числа, называется ***линейным***; числа a и b называются ***коэффициентами при переменных***, число c — ***свободным членом***.

Графиком любого линейного уравнения $ax + by = c$, у которого хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля, является прямая; если $a = 0$, то она параллельна оси Ox, если $b = 0$, то она параллельна оси Oy (рис. 73).

П р и м е р. Построить график уравнения

$$2x - 3y = -6.$$

❑ Графиком этого линейного уравнения является прямая.Для построения прямой достаточно знать две ее точки. Подставив в уравнение $2x - 3y = -6$ вместо x значение 0, получим $-3y = -6$, откуда $y =$

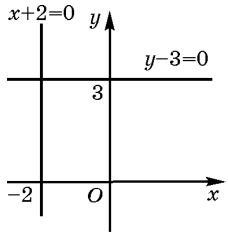


Рис. 73

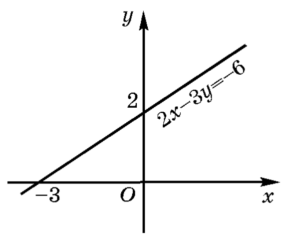


Рис. 74

$= 2$. Подставив в уравнение $2x - 3y = -6$ вместо y значение 0, получим $2x = -6$, откуда $x = -3$.

Итак, мы нашли две точки графика: (0; 2) и (−3; 0). Проведя через них прямую, получим искомый график. ■

§ 16. Системы уравнений

170. Системы двух уравнений с двумя переменными. Равносильные системы. Пусть даны два уравнения с двумя переменными $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$. Если ставится задача найти все общие решения двух уравнений с двумя переменными, то, говорят, что надо решить ***систему уравнений***. Каждая пара значений переменных, обращающая в верное равенство каждое уравнение системы, называется ***решением системы уравнений***. Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

Две системы уравнений называются ***равносильными***, если эти системы имеют одни и те же решения. Если, в частности, обе системы не имеют решений, то они также считаются равносильными.

Т.4.9. *Пусть дана система двух уравнений с двумя переменными. Если одно уравнение системы оставить без изменения, а другое уравнение системы заменить уравнением, ему равносильным, то полученная система будет равносильна заданной.*

Из этой теоремы следует, что *если каждое уравнение системы заменить равносильным уравнением, то получится система, равносильная заданной.*

Т.4.10. *Пусть дана система двух уравнений с двумя переменными. Если одно уравнение системы оставить без изменения, а другое заменить суммой или разностью обоих уравнений системы, то полученная система будет равносильна заданной.*

171. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом подстановки. ***Метод подстановки*** заключается в следующем:

1. Одно из уравнений системы преобразуют к виду, в котором переменная y выражена через x (или x через y).

2. Полученное выражение подставляют вместо y (или вместо x) в другое уравнение. В результате получают уравнение с одной переменной.

3. Находят корни этого уравнения.

4. Воспользовавшись выражением y через x (или x через y), находят соответствующие значения y (или x).

П р и м е р. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - 3y = 10, \\ x^2 - 24y = 100. \end{cases}$$

❑ Из первого уравнения выразим $x = 3y + 10$. Подставив выражение $3y + 10$ вместо x во второе уравнение системы, получим $(3y + 10)^2 - 24y = 100$, откуда $y_1 = 0$, $y_2 = -4$. Соответствующие значения x найдем из уравнения $x = 3y + 10$. Если $y = 0$, то $x = 10$; если $y = -4$, то $x = -2$. Итак, система имеет два решения: $(-2; -4)$ и $(10; 0)$. ■

172. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом сложения. ***Метод сложения*** основан на теоремах 4.9 и 4.10 (см. п.170).

П р и м е р. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x - y = 16. \end{cases} \tag{1}$$

❑ Умножив обе части второго уравнения системы (1) на 3, получим систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 9x - 3y = 48, \end{cases} \tag{2}$$

равносильную данной по теореме 4.9.

Сложим теперь оба уравнения системы (2). По теореме 4.10 система

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ (2x + 3y) + (9x - 3y) = 7 + 48 \end{cases} \tag{3}$$

равносильна системе (2). Система (3), в свою очередь, преобразуется к виду

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 11x = 55. \end{cases}$$

Из уравнения $11x = 55$ находим $x = 5$. Подставив это значение в уравнение $2x + 3y = 7$, получим $y = -1$.

Итак, $(5; -1)$ — решение системы (3), а значит, и решение равносильной ей системы (1). ■

173. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом введения новых переменных. Существуют два варианта использования ***метода введения новых переменных*** при решении систем двух уравнений с двумя переменными: 1) вводят одну новую переменную только для одного уравнения системы; 2) вводят две новые переменные сразу для обоих уравнений.

П р и м е р 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

❑ Положим $x/y = z$, тогда $y/x = 1/z$ и первое уравнение системы примет вид $z + \dfrac{1}{z} = \dfrac{13}{6}$. Относительно новой переменной z получаем уравнение $6z^2 - 13z + 6 = 0$, откуда $z_1 = 2/3$, $z_2 = 3/2$. Таким образом, либо $x/y = 2/3$, т. е. $y = 3x/2$, либо $x/y = 3/2$, т. е. $y = 2x/3$.

Итак, первое уравнение заданной системы распалось на два уравнения: $y = 3x/2$ и $y = 2x/3$. В соответствии с этим нужно решить совокупность двух систем:

$$\begin{cases} y = 3x/2, \\ x + y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x/3, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x = 2$, $y = 3$, из второй $x = 3$, $y = 2$. Итак, (2; 3) и (3; 2) — решения данной системы.■

П р и м е р 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32, \\ xy + 2(x + y) = 26. \end{cases} \qquad (1)$$

❑ Положим $x + y = u$, $xy = v$. Тогда $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$ и система (1) примет вид

$$\begin{cases} u^2 - 2v + u = 32, \\ v + 2u = 26. \end{cases} \qquad (2)$$

Систему (2) решим методом подстановки. Выразив из второго уравнения v через u, получим $v = 26 - 2u$; подставив это выражение в первое уравнение, имеем

$$u^2 - 2(26 - u) + u = 32; \; u^2 + 5u - 84 = 0;$$

$$u_1 = -12, \; u_2 = 7.$$

Соответственно находим $v_1 = 50$, $v_2 = 12$. Итак, найдены два решения системы (2): $u_1 = -12$, $v_1 = 50$ и $u_2 = 7$, $v_2 = 12$.

Возвращаясь к исходным переменным, получим совокупность систем:

$$\begin{cases} x + y = -12, \\ xy = 50; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12, \end{cases}$$

каждую из которых нетрудно решить методом подстановки (выразив, например, y через x из первого уравнения). Первая система не имеет решений, а вторая имеет два решения: (3; 4) и (4; 3). Они и являются решениями исходной системы (1). ■

174. Определители второго порядка. Исследование систем двух линейных уравнений с двумя переменными. В теории систем линейных уравнений удобно использовать понятие определителя. ***Определителем второго порядка*** называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называют ***элементами*** определителя; при этом элементы a_{11} и a_{22} образуют ***главную диагональ***, а элементы a_{12} и a_{21} — ***побочную диагональ***. Таким образом, *определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.*

Например,

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -2 \cdot 8 - 3 \cdot 7 = -37.$$

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \qquad (1)$$

1^0. *Если определитель системы* $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, *то система* (1) *имеет единственное решение, которое находится по* ***формулам Крамера:***

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \ y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \qquad (2)$$

Здесь Δ_x *и* Δ_y — *определители, получающиеся из определителя системы* Δ *заменой столбцов коэффициентов при соответствующем неизвестном столбцом свободных членов.*

2^0. *Если* $\Delta = 0$, *но* $\Delta_x \neq 0$ (*или* $\Delta_y \neq 0$), *то система* (1) *не имеет решений* (*система несовместная*).

3^0. *Если* $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, *то система* (1) *имеет бесконечное множество решений* (*система неопределенная*).

П р и м е р. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5x - 2y = 7, \\ 10x + 7y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x - 2y = 4, \\ 35x - 14y = 200; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0{,}2x + 3{,}1y = -2{,}3, \\ x + 15{,}5y = -11{,}5. \end{cases}$

❑ а) Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} = 35 + 20 = 55.$$

Заменив теперь в нем первый столбец столбцом свободных членов, получим

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 49 + 6 = 55.$$

Аналогично имеем

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 70 = -55.$$

Теперь по формуле (2) находим $x = \dfrac{55}{55} = 1$, $y = \dfrac{-55}{55} = -1$, т. е. (1; −1) — решение системы. Геометрически это означает, что прямые, задающие уравнения системы, пересекаются в точке (1; −1).

б) Найдем определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 35 & -14 \end{vmatrix} = -70 + 70 = 0.$$

Теперь вычислим Δ_x; имеем

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 200 & -14 \end{vmatrix} = -56 + 400 \neq 0.$$

Отсюда следует, что система несовместна. Этот вывод можно было сделать без помощи определителей, если заметить, что в данной системе коэффициенты при x и y пропорциональны, а свободные члены им не пропорциональны: $5 : 35 = (-2) : (-14) \neq 4 : 200$. Геометрически это означает, что данные прямые параллельны.

в) Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0{,}2 & 3{,}1 \\ 1 & 15{,}5 \end{vmatrix} = 3{,}1 - 3{,}1 = 0.$$

Далее находим

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2{,}3 & 3{,}1 \\ -11{,}5 & 15{,}5 \end{vmatrix} = -35{,}65 + 35{,}65 = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 0{,}2 & -2{,}3 \\ 1 & -11{,}5 \end{vmatrix} = -2{,}3 + 2{,}3 = 0.$$

Значит, система является неопределенной (это видно и из того, что все коэффициенты системы пропорциональны: второе уравнение системы получается из первого умножением на 5). Геометрически это означает, что данные прямые совпадают. ■

175. Симметрические системы. Многочлен $P(x,\ y)$ называется ***симметрическим***, если при замене x на y и y на x выражение $P(x,\ y)$ не изменяется. Например, многочлены $P_1(x,\ y) = x^3 + 3xy + y^3$ и $P_2(x,\ y) = x^2 + y^2 + 4x + 4y$ являются симметрическими.

Система уравнений называется ***симметрической***, если оба ее уравнения — симметрические. Симметрическую систему можно решить методом замены переменных, если в качестве новых переменных выбрать ***основные симметрические многочлены***, т. е. $x + y$ и xy.

П р и м е р. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$$

❑ Это — симметрическая система. Положим $x + y = u$, $xy = v$. Так как $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)\,((x+y)^2 - 3xy) = u\,(u^2 - 3v) = u^3 -$

$-3uv$, то заданная система примет вид

$$\begin{cases} u^3 - 3uv + v^3 = 17, \\ u + v = 5. \end{cases}$$

Из этой системы, которую легко решить методом подстановки, находим $u_1 = 3$, $v_1 = 2$ и $u_2 = 2$, $v_2 = 3$.

Остается решить совокупность систем

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 3. \end{cases}$$

Первая имеет решения (1; 2) и (2; 1), а вторая не имеет решений. Итак, (1; 2), (2; 1) — решения данной системы. ■

176. Графическое решение систем двух уравнений с двумя переменными. Чтобы графически решить систему двух уравнений с двумя переменными, нужно в одной системе координат построить графики уравнений и найти координаты точек пересечения этих графиков.

П р и м е р. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$$

❑ Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 25$ является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 5. Графиком уравнения $xy = 12$ явля-

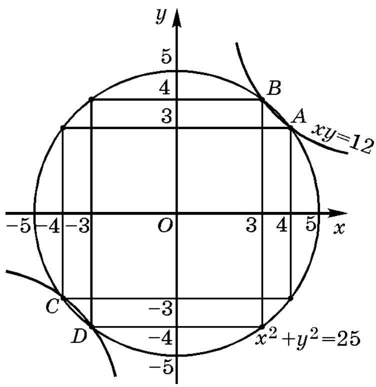


Рис. 75

ется гипербола $y = \dfrac{12}{x}$ (см. п. 75). Построив графики в одной системе координат (рис. 75), найдем координаты точек пересечения окружности и гиперболы: A (4; 3), B (3; 4), C (−4; −3), D (−3; −4). Значит, (4; 3), (3; 4), (−4; −3), (−3; −4) — решения данной системы. ■

177. Системы трех уравнений с тремя переменными. Рассмотрим ***систему трех уравнений с тремя переменными***

$$\begin{cases} f(x,\ y,\ z) = 0, \\ g(x,\ y,\ z) = 0, \\ h(x,\ y,\ z) = 0. \end{cases}$$

Решением такой ***системы*** называется всякая тройка чисел, удовлетворяющая каждому уравнению системы.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 9. \end{cases}$$

❑ Применим метод подстановки. Выразим из первого уравнения x через y и z и подставим результат во второе и третье уравнения. Имеем

$$\begin{cases} x = 2 - y - z, \\ 2(2 - y - z) + 3y + z = 1, \\ (2 - y - z)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 - y - z, \\ y - z = -3, \\ y^2 + z^2 + yz - 3z = 0. \end{cases}$$

Последние два уравнения полученной системы в свою очередь образуют систему двух уравнений с двумя переменными. Решим эту систему методом подстановки. Имеем

$$\begin{cases} y = z - 3, \\ (z - 3)^2 + z^2 + z(z - 3) - 3z = 0, \end{cases} \begin{cases} y = z - 3, \\ z^2 - 4z + 3 = 0. \end{cases}$$

Решив уравнение $z^2 - 4z + 3 = 0$, находим $z_1 = 1$, $z_2 = 3$. Из уравнения $y = z - 3$ получаем соответственно $y_1 = -2$, $y_2 = 0$, а из уравнения $x = 2 - y - z$ находим $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

Итак, получили следующие решения: (3; −2; 1), (−1; 0; 3). ■

П р и м е р 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} -x + 4y + z = 4, \\ 2x + y - z = 7, \\ 3x + 2y + 2z = 1. \end{cases}$$

❑ Умножив первое уравнение системы на 2 и сложив результат со вторым уравнением системы, придем к уравнению

$$9y + z = 15. \tag{1}$$

Умножив первое уравнение системы на 3 и сложив результат с третьим уравнением системы, придем к уравнению

$$14y + 5z = 13. \tag{2}$$

В уравнениях (1) и (2) отсутствует переменная x, мы ее исключили. Рассмотрим эти уравнения относительно переменных y, z. Умножив уравнение (1) на 14, уравнение (2) — на 9 и вычтя второй результат из первого, придем к уравнению $14(9y + z) - 9(14y + 5z) = 15 \cdot 14 - 13 \cdot 9$, т. е. $-31z = 93$, откуда

$$z = -3. \tag{3}$$

Теперь, как видно, исключена переменная y.

Перепишем первое уравнение исходной системы в виде $x - 4y - z = -4$, уравнение (1) — в виде

$y + \frac{1}{9}z = \frac{15}{9}$, а уравнение (3) оставим без изменения. Получим «треугольную» систему

$$\begin{cases} x - 4y - z = -4, \\ y + \frac{1}{9}z = \frac{15}{9}, \\ z = -3, \end{cases}$$

которая легко решается последовательными подстановками «снизу вверх»: так как $z = -3$, то из второго уравнения находим $y - \frac{3}{9} = \frac{15}{9}$, т. е. $y = 2$. Наконец, из первого уравнения «треугольной» системы находим $x - 8 + 3 = -4$, т. е. $x = 1$.

Итак, $(1; 2; -3)$ — решение данной системы. ■

Описанный метод последовательного исключения неизвестных называется ***методом Гаусса***.

178. Определители третьего порядка. Исследование систем трех линейных уравнений с тремя переменными. ***Определителем третьего порядка*** называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{matrix} \quad (1)$$

Таким образом, каждый член определителя третьего порядка представляет собой произведение трех его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Эти произведения берутся с определенными знаками: со знаком «+» — три члена, состоящие из элементов главной диагонали и из элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком «−» три члена, расположенные аналогичным образом относительно побочной диагонали.

Указанное правило, называемое ***правилом треугольников***, иллюстрирует схема, изображенная на рис. 76.

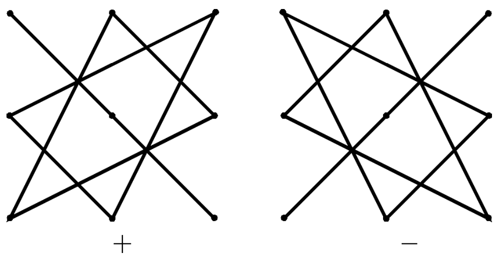


Рис. 76

Например, используя формулу (1), получим

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} 2\cdot 3\cdot 3 + 4\cdot 5\cdot 4 + 1\cdot(-1)\cdot(-1) - \\ -1\cdot 3\cdot 4 - 2\cdot 5(-1) - 4(-1)\cdot 3 = 109. \end{array}$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} определителя называется число A_{ik}, представляющее собой определитель второго порядка, получающийся из исходного определителя вычеркиванием i-й строки и k-го столбца и взятый со знаком «+», если сумма номеров вычеркнутых строки и столбца четная, и со знаком «−» в противном случае.

Например, для определителя (1) имеем

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

*Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения (**разложение определителя по элементам какой-либо строки или столбца**).*

Вычислим, например, данный выше определитель разложением по элементам первой строки.

Имеем

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 14 - 4(-23) + 1\cdot(-11) = 109,$$

что совпадает с результатом, полученным по формуле (1) (см. с. 239).

Для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (2)$$

справедливо утверждение, аналогичное утверждению приведенному в п. 174, а именно: *если определитель* Δ *системы* (2) *отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое находится по* ***формулам Крамера***:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \qquad \textbf{(3)}$$

где Δ_x, Δ_y, Δ_z *— определители, получающиеся из определителя* Δ *заменой столбцов коэффициентов при соответствующих неизвестных столбцом свободных членов.*

При $\Delta = 0$ *система* (2) *либо вообще не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений.*

П р и м е р. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = -3, \\ -x + 3y + 5z = 7, \\ 4x - y + 3z = -5. \end{cases}$$

❑ Определитель системы был найден ранее: $\Delta = 109$. Находим определители Δ_x, Δ_y, Δ_z :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -218,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 7 & 5 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & 7 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 109,$$

откуда по формуле (3) получаем $x = -2$, $y = 0$, $z = 1$. ■

179. Системы показательных и логарифмических уравнений. При решении систем показательных и логарифмических уравнений используются обычные приемы решения логарифмических и показательных уравнений (см. пп. 156, 157) и обычные приемы решения систем уравнений (см. пп. 171–174).

П р и м е р. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4, \\ 3^{x^2} = 9 \cdot 3^{15y+2}. \end{cases}$$

❑ Рассмотрим первое уравнение системы. Воспользуемся тем, что $\log_2 x = \log_{2^2} x^2 = \log_4 x^2$ (см. п. 75). Тогда уравнение можно записать в виде $\log_4 x^2 + \log_4 y = 4$ и далее $\log_4(x^2 y) = 4$, откуда $x^2 y = 4^4$, т. е. $x^2 y = 256$.

Теперь рассмотрим второе уравнение системы. Имеем $3^{x^2} = 3^2 \cdot 3^{15y+2}$, $x^2 = 15y + 4$. Задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} x^2 y = 256, \\ x^2 = 15y + 4. \end{cases}$$

Подставим $15y + 4$ вместо x^2 в первое уравнение:

$$(15y + 4)y = 256;\ 15y^2 + 4y - 256 = 0;$$

$$y_1 = 4,\ y_2 = -\frac{64}{15}.$$

Если $y = 4$, то $x^2 = 15y + 4 = 15 \cdot 4 + 4 = 64$, т. е. $x^2 = 64$, откуда $x_1 = 8$, $x_2 = -8$. Если $y = -\frac{64}{15}$, то

$x^2 = 15y + 4 = 15 \cdot \left(-\frac{64}{15}\right) + 4 = -60$, т. е. $x^2 = -60$ — это уравнение не имеет корней.

Итак, мы нашли две пары значений переменных: $x_1 = 8$, $y_1 = 4$; $x_2 = -8$, $y_2 = 4$. Так как заданная система содержит выражения $\log_2 x$, $\log_4 y$, то должны выполняться условия $x > 0$, $y > 0$. Поэтому вторая пара исходной системе не удовлетворяет. Итак, (8; 4) — решение системы. ■

180. Системы тригонометрических уравнений. При решении систем тригонометрических уравнений используют обычные приемы решения систем уравнений и формулы тригонометрии.

П р и м е р. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1{,}5, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1{,}25. \end{cases}$$

❑ Положим $\sin x = u$, $\cos y = v$. Тогда получим систему $\begin{cases} u + v = 1{,}5, \\ u^2 + v^2 = 1{,}25. \end{cases}$ Из первого уравнения выразим v: $v = 1{,}5 - u$. Подставим найденное выражение вместо v во второе уравнение системы:

$u^2 + (1{,}5 - u)^2 = 1{,}25$; $2u^2 - 3u + 1 = 0$; $u_1 = 1$, $u_2 = 0{,}5$.

Если $u = 1$, то $v = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$; если же $u = 0{,}5$, то $v = 1{,}5 - 0{,}5 = 1$. Итак, мы нашли две пары решений:

$u_1 = 1$, $v_1 = 0{,}5$; $u_2 = 0{,}5$, $v_2 = 1$. Так как $u = \sin x$, $v = \cos y$, то остается решить две системы уравнений:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos y = 0{,}5 \end{cases} \quad (1) \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin x = 0{,}5, \\ \cos y = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Из уравнения $\sin x = 1$ находим $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Из уравнения $\cos y = 0{,}5$ находим $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Значит, решения системы (1) имеют вид $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $k, n \in \boldsymbol{Z}$.

Из уравнения $\sin x = 0{,}5$ находим $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Из уравнения $\cos y = 1$ находим $y = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Значит, решения системы (2) имеют вид $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $y = 2\pi n$; $k, n \in \boldsymbol{Z}$. ■

Раздел V

НЕРАВЕНСТВА

§ 17. Решение неравенств

181. Основные понятия, связанные с решением неравенств. Пусть дано неравенство $f(x) > g(x)$, которое будем называть ***неравенством с одной переменной.*** Всякое значение переменной, при котором данное неравенство обращается в верное числовое равенство, называется ***решением неравенства.*** Решить неравенство с переменной — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Два неравенства с одной переменной называются ***равносильными***, если решения этих неравенств совпадают; в частности, неравенства равносильны, если оба не имеют решений.

Т.5.1. *Если в неравенстве какое-нибудь слагаемое перенести из одной части в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.*

Т.5.2. *Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное данному.*

Т.5.3. *Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.*

Например, неравенства $-6x < 12$ и $x > -2$ равносильны (обе части неравенства $-6x < 12$ мы разделили на отрицательное число -6, изменив при этом знак $<$ исходного неравенства на знак $>$).

Т.5.4. *Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же выражение, принимающее при всех значениях переменной положительные значения, то получится неравенство, равносильное данному.*

Т.5.5. *Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же выражение, принимающее при всех значениях переменной отрицательные значения, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.*

182. Графическое решение неравенств с одной переменной. Для графического решения неравенства $f(x) > g(x)$ нужно построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и выбрать те промежутки оси абсцисс, на которых график функции $y = f(x)$ расположен выше графика функции $y = g(x)$.

П р и м е р. Решить графически неравенство

$$\log_2 x > \frac{2}{x}.$$

❑ Построим в одной системе координат графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \dfrac{2}{x}$ (рис. 77). Из рисунка видно, что график функции $y = \log_2 x$ расположен выше графика функции $y = \dfrac{2}{x}$ при $x > 2$. Итак, $(2, +\infty)$ — решение неравенства. ■

183. Линейные неравенства с одной переменной. Здесь речь идет о неравенствах вида $ax > b$ или $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$. Если $a > 0$, то неравенство $ax > b$ равносильно неравенству $x > \dfrac{b}{a}$, т. е. множество решений неравенства есть промежуток $\left(\dfrac{b}{a}, +\infty\right)$. Если же $a < 0$, то неравенство $ax > b$ равносильно неравенству $x < \dfrac{b}{a}$, поэтому множеством

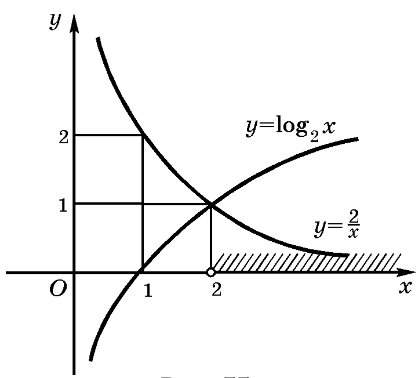


Рис. 77

решений неравенства является промежуток $\left(-\infty, \dfrac{b}{a}\right)$.
Наконец, если $a = 0$, то неравенство принимает вид $0 \cdot x > b$, т. е. оно не имеет решений в случае, когда $b \geq 0$, и верно при любых x в случае, когда $b < 0$.

П р и м е р. Решить неравенство

$$2(x-3)+5(1-x) \geq 7(2x-5).$$

❑ Раскрыв скобки и упрощая, имеем

$$-2x-6+5-5x \geq 14x-35;\ -3x-14x \geq -35+1;$$

$$-17x \geq -34. \qquad (1)$$

Это неравенство равносильно заданному. Разделив теперь обе части неравенства (1) на отрицательное число -17 и изменив знак неравенства, получим неравенство $x \leq 2$, равносильное (1). Итак, $(-\infty, 2]$ — множество решений заданного неравенства. ■

184. Системы неравенств с одной переменной. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют ***систему***, если ставится задача найти все общие решения заданных неравенств. Значение переменной, при которой каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство, называется ***решением системы неравенств***.

П р и м е р. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 5x+2 > 3x-1, \\ 3x+1 > 7x-4. \end{cases}$$

❑ Первое неравенство системы преобразуется в равносильное ему неравенство $x > -1{,}5$, а второе — в неравенство $x < 1{,}25$. Таким образом, задача сводится к решению системы $\begin{cases} x > -1{,}5, \\ x < 1{,}25. \end{cases}$ С помощью координатной прямой (рис. 78) находим, что искомое множество есть интервал $(-1{,}5;\ 1{,}25)$. ■

185. Совокупности неравенств с одной переменной. Говорят, что несколько неравенств с одной переменной образуют ***совокупность***, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является решением хотя бы одного из данных неравенств. Значение переменной, при котором хотя бы одно из неравенств, образующих совокупность, обращается в верное числовое неравенство, называется ***решением совокупности неравенств***.

П р и м е р. Решить совокупность неравенств

$$\frac{2x-3}{5} > \frac{3x-10}{2};\ \frac{x}{4} + 1 > \frac{3x}{2}.$$

❑ Преобразовав каждое из неравенств, получим совокупность, равносильную заданной: $x < 4$; $x < 0{,}8$. С помощью координатной прямой (рис. 79) устанавливаем, что решением заданной совокупности служит промежуток $(-\infty,\ 4)$. ■

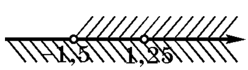


Рис. 78

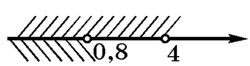


Рис. 79

186. Дробно-линейные неравенства. Здесь речь идет о неравенствах вида $\frac{ax+b}{cx+d}>0$ или $\frac{ax+b}{cx+d}<0$, где $a \neq 0$, $c \neq 0$.

П р и м е р. Решить неравенство $\frac{3x+7}{2x-7}>5$.

❑ Имеем

$$\frac{3x+7}{2x-7}-5>0,\ \frac{3x+7-10x+35}{2x-7}>0,\ \frac{-7x+42}{2x-7}>0.$$

Умножив обе части последнего неравенства на -1 и изменив при этом знак неравенства, получим

$$\frac{7x-42}{2x-7}<0.$$

Дробь отрицательна в двух случаях: 1) если числитель отрицателен, а знаменатель положителен; 2) если числитель положителен, а знаменатель отрицателен. Значит, получается совокупность систем неравенств

$$\begin{cases}7x-42<0,\\2x-7>0;\end{cases}\quad\begin{cases}7x-42>0,\\2x-7<0.\end{cases}$$

Из первой находим $x<6$, $x>3{,}5$, т. е. $3{,}5<x<6$. Из второй находим $x>6$, $x<3{,}5$, т. е. система не имеет решений. Значит, множество решений данного неравенства есть интервал $(3{,}5;\ 6)$. ■

187. Неравенства второй степени. Здесь речь идет о неравенствах вида $ax^2+bx+c>0$ или ax^2+bx+ $+c<0$, где $a \neq 0$.

Т.5.6. *Если дискриминант* $D = b^2 - 4ac$ *квадратного трехчлена* $ax^2 + bx + c$ *отрицателен, а старший коэффициент а положителен, то при всех значениях х выполняется неравенство* $ax^2 + bx + c > 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $D \geq 0$. Для решения неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ (или $ax^2 + bx + c < 0$) нужно разложить квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ на множители по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (см. п. 60), затем разделить обе части неравенства $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$ (или $a(x - x_1)(x - x_2) < 0$)на число a, сохранив знак неравенства, если $a > 0$, и изменив знак неравенства на противоположный, если $a < 0$ (см. п.181), т. е. перейти к неравенству $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ (или $(x - x_1)(x - x_2) < 0$). Теперь остается воспользоваться тем, что произведение двух чисел положительно (отрицательно), если множители имеют одинаковые (разные) знаки.

П р и м е р. Решить неравенство:

а) $2x^2 + 5x + 2 > 0$; б) $5 - 3x \geq 2x^2$.

❑ а) Найдем корни квадратного трехчлена $2x^2 + 5x + 2$. Из уравнения $2x^2 + 5x + 2 = 0$ получаем $x_1 = -2$, $x_2 = -0{,}5$. Поэтому, $2x^2 + 5x + 2 =$

$= 2(x+2)(x+0{,}5)$, и мы приходим к неравенству $2(x+2)(x+0{,}5) > 0$, откуда $(x+2)(x+0{,}5) > 0$. Значит, выражения $x+2$ и $x+\dfrac{1}{2}$ должны иметь одинаковые знаки, т. е.

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x+0{,}5>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+2<0, \\ x+0{,}5<0. \end{cases}$$

Из первой системы находим, что $x > -0{,}5$, а из второй — что $x < -2$. Ответ можно записать так: $(-\infty,\ -2) \cup (-0{,}5;\ +\infty)$.

б) Преобразуем неравенство к виду $2x^2+3x-5 \le 0$. Корни квадратного трехчлена $2x^2+3x-5$ таковы: $x_1 = -2{,}5$, $x_2 = 1$. Разложив трехчлен на множители, получим неравенство $2(x+2{,}5)\ (x-1) \le 0$, т. е. $(x+2{,}5)(x-1) \le 0$. От последнего неравенства переходим к совокупности систем:

$$\begin{cases} x+2{,}5 \le 0, \\ x-1 \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2{,}5 \ge 0, \\ x-1 \le 0. \end{cases}$$

Первая не имеет решений, а из второй находим $-2{,}5 \le x \le 1$. ■

188. Графическое решение неравенств второй степени. Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, ветви которой направлены вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$. При этом возможны три случая: парабола пересекает ось Ox

(т. е. уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня); парабола имеет вершину на оси Ox (т. е. уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень); парабола не пересекает ось Ox (т. е. уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней). Таким образом, возможны шесть положений параболы, служащей графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси Ox, — они представлены на рис. 80 и 81.

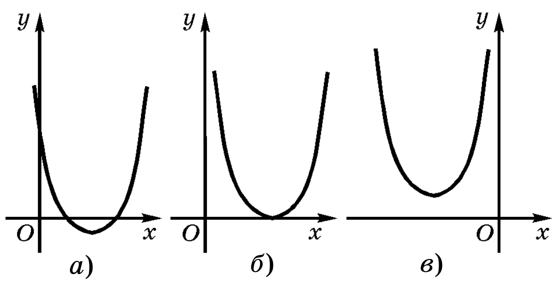


Рис. 80

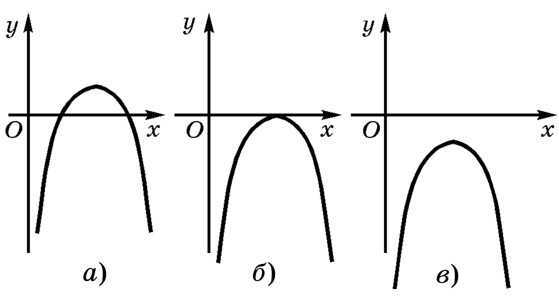


Рис. 81

П р и м е р. Решить графически неравенство:

а) $2x^2 - 5x + 2 > 0$; б) $-x^2 + 4x - 4 > 0$.

❑ Уравнение $2x^2 - 5x + 2 = 0$ имеет два корня: $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 2$. Парабола, служащая графиком функции $y = 2x^2 - 5x + 2$, имеет вид, изображенный на рис. 80, *а*. Неравенство $2x^2 - 5x + 2 > 0$ выполняется при тех значениях x, при которых точки параболы лежат выше оси Ox: это будет при $x < x_1$ или $x > x_2$, т. е. при $x < 0{,}5$ или при $x > 2$. Значит, решения неравенства таковы: $x < 0{,}5$, $x > 2$.

б) Уравнение $-x^2 + 4x - 4 = 0$ имеет один корень $x = 2$. Парабола, служащая графиком функции $y = -x^2 + 4x - 4$, имеет вид, изображенный на рис. 81, *б*.

Неравенство $-x^2 + 4x - 4 > 0$ выполняется при тех значениях, при которых точки параболы лежат выше оси Ox. Таких точек нет, значит, неравенство не имеет решений. ■

189. Неравенства с модулями. При решении неравенств, содержащих переменные под знаком модуля, используется определение модуля:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Иногда полезно использовать геометрическую интерпретацию модуля действительного числа (см. п. 29).

Кроме того, можно использовать ***метод возведения в квадрат*** обеих частей неравенства, основанный на следующей теореме:

Т.5.7. *Если выражения $f(x)$ и $g(x)$ при любых x принимают только неотрицательные значения, то неравенства $f(x) > g(x)$ и $(f(x))^2 > (g(x))^2$ равносильны.*

П р и м е р 1. Решить неравенство $|x-1| < 2$.

❑ I способ. Величину $|x-1|$ можно рассматривать как расстояние на координатной прямой между точками x и 1. Значит, нам нужно указать все точки x, которые удалены от точки 1 меньше чем на 2 единицы. С помощью координатной прямой устанавливаем, что множество решений неравенства есть интервал $(-1, 3)$.

II способ. Возведя обе части данного неравенства в квадрат, получим равносильное ему неравенство $(x-1)^2 < 4$. Решив последнее неравенство, получим $x^2 - 2x - 3 < 0$, откуда находим, что $-1 < x < 3$ (см. п.187 или п.188).

III способ. По определению,

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{если } x-1 \ge 0, \\ -(x-1), & \text{если } x-1 < 0. \end{cases}$$

Поэтому данное неравенство можно заменить совокупностью двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x-1 \ge 0, \\ x-1 < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 < 0, \\ -(x-1) < 2. \end{cases}$$

Из первой системы следует, что $1 \le x < 3$, а из второй — что $-1 < x < 1$. Объединив эти решения, получим промежуток $(-1, 3)$. ■

П р и м е р 2. Решить неравенство:

а) $|2x + 4| \le 3x + 2$; б) $|1 - 2x| > 8 - x$.

❑ а) Если $2x + 4 \ge 0$, то $|2x + 4| = 2x + 4$, и, следовательно, неравенство примет вид $2x + 4 \le 3x + 2$. Если же $2x + 4 < 0$, то $|2x + 4| = -(2x + 4)$, и неравенство принимает вид $-(2x + 4) \le 3x + 2$. Таким образом, данное неравенство можно заменить совокупностью двух систем:

$$\begin{cases} 2x + 4 \ge 0, \\ 2x + 4 \le 3x + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 4 < 0, \\ -(2x + 4) \le 3x + 2. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x \ge 2$, а вторая не имеет решений. Значит, множество решений неравенств — луч $[2, +\infty)$.

б) Если $1 - 2x \ge 0$, то $|1 - 2x| = 1 - 2x$, т. е. неравенство примет вид $1 - 2x > 8 - x$. Если же $1 - 2x < 0$, то $|1 - 2x| = 2x - 1$, т. е. неравенство примет вид $2x - 1 > 8 - x$. Значит, от данного неравенства переходим к совокупности двух систем:

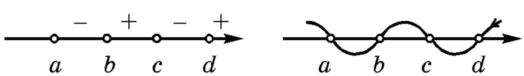
$$\begin{cases} 1 - 2x \ge 0, \\ 1 - 2x > 8 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - 2x < 0, \\ 2x - 1 > 8 - x. \end{cases}$$

Из первой системы следует, что $x < -7$, а из второй — что $x > 3$. Ответ можно записать как объединение двух промежутков: $(-\infty, -7) \cup (3, +\infty)$. ■

190. Решение рациональных неравенств методом промежутков. Решение рациональных неравенств вида $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$ (вместо знака $>$ может быть любой другой знак неравенства), где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены, основано на следующем рассуждении.

Рассмотрим функцию $h(x) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$, где $a < b < c < d$. Если $x > d$, то каждый из множителей $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$ положителен, и, следовательно, на промежутке $(d, +\infty)$ имеем $h(x) > 0$. Если $c < x < d$, то $x - d < 0$, а остальные множители по-прежнему положительны. Значит, на интервале (c, d) имеем $h(x) < 0$. Аналогично на интервале (b, c) получим $h(x) > 0$ и т. д. (рис. 82, *а*).

Изменение знаков функции $h(x)$ удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой (ее называют ***кривой знаков***), которую чертят справа налево, начиная сверху (рис. 82, *б*). Эту иллюстрацию



а) *б*)

Рис. 82

нужно понимать так: на тех промежутках, где эта кривая проходит выше координатной прямой, выполняется неравенство $h(x) > 0$, на тех же промежутках, где кривая проходит ниже прямой, — неравенство $h(x) < 0$.

Для проведенного выше рассуждения несущественно количество линейных множителей в числителе и знаменателе, а также взаимное расположение корней числителя и знаменателя дроби на координатной прямой. Поэтому оно применимо и для функции вида

$$f(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_k)},$$

где числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_k$ попарно различны. Изменение знаков функции $f(x)$ также иллюстрируют с помощью кривой знаков, которую чертят справа налево, начиная сверху, и проводят через все отмеченные на координатной прямой точки $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_k$. На этом основан ***метод промежутков,*** который применяется для решения рациональных неравенств.

П р и м е р. Решить неравенство:

а) $\dfrac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{(2x-3)(4x+5)} < 0$; б) $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} \le 1$.

❑ а) Преобразуем левую часть неравенства:

$$\frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{2\left(x-1{,}5\right)\cdot 4\left(x+1{,}25\right)} < 0$$

и умножим обе части неравенства на 8; получим неравенство $\dfrac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{(x-1{,}5)\ (x+1{,}25)} < 0$, равносильное данному.

Изменение знаков функции

$$f(x) = \frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{(x-1{,}5)\ (x+1{,}25)}$$

иллюстрируем с помощью кривой знаков (рис. 83). Значения x, при которых $f(x) < 0$ (соответствующие промежутки заштрихованы), удовлетворяют следующим неравенствам: $x < -5$; $-\sqrt{2} < x < -1{,}25$; $1{,}5 < x < \sqrt{3}$. Это решения исходного неравенства.

б) Имеем $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} - 1 \le 0$; $\dfrac{x+5}{(x-1)(x+1)} \ge 0$.

Начертим кривую знаков для функции $f(x) = \dfrac{x+5}{(x-1)(x+1)}$ (рис. 84). С ее помощью находим решения неравенства: $-5 \le x < -1$; $x > 1$. ■

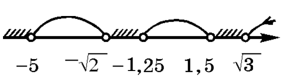


Рис. 83

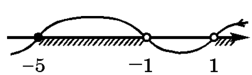


Рис. 84

191. Показательные неравенства. При решении неравенств вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ следует учитывать, что показательная функция $y = a^x$ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$ (см. п. 114). Значит, в случае, когда $a > 1$, от неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ переходят к неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$. В случае же, когда $0 < a < 1$, от неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ переходят к неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$.

П р и м е р. Решить неравенство:

а) $2^{3x+7} < 2^{2x-1}$; б) $(0{,}04)^{5x-x^2-8} \leq 625$.

❑ Здесь основание степени больше 1, поэтому, сравнивая показатели, запишем неравенство того же смысла: $3x + 7 < 2x - 1$. Решив его, получим $x < -8$.

б) Поскольку $625 = 25^2 = (0{,}04)^{-2}$, запишем данное неравенство в виде $(0{,}04)^{5x-x^2-8} \leq (0{,}04)^{-2}$. Так как $0 < 0{,}04 < 1$, то, сравнивая показатели, запишем неравенство противоположного смысла: $5x - x^2 - 8 \geq -2$. Имеем

$$-x^2 + 5x - 6 \geq 0,\ x^2 - 5x + 6 \leq 0,\ (x-2)(x-3) \leq 0.$$

Решив последнее неравенство (см. п. 190 или п. 187), получим $2 \leq x \leq 3$.

Итак, множество решений заданного неравенства есть отрезок [2, 3]. ■

192. Логарифмические неравенства. При решении неравенств вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ следует учитывать, что логарифмическая функция $y = \log_a x$ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$ (см. п. 116). Поэтому в случае, когда $a > 1$, от исходного неравенства переходят к неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$. В случае же, когда $0 < a < 1$, от исходного неравенства переходят к неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$. При этом необходимо помнить, что логарифмическая функция определена лишь на множестве положительных чисел. Значит, должны выполняться неравенства $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$.

В итоге от неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ переходят к системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad (1) \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \quad (2)$$

Заметим, что в системе (1) (при $a > 1$) неравенство $f(x) > 0$ можно опустить; аналогично, в системе (2) (при $0 < a < 1$) можно опустить неравенство $g(x) > 0$.

П р и м е р. Решить неравенство:

а) $\log_{0,5}(2x + 59) > -2$; б) $\lg(x + 2) < 2 - \lg(2x - 6)$.

❑ а) Так как $-2 = \log_{0,5} 4$, то неравенство можно переписать в виде $\log_{0,5}(2x + 59) > \log_{0,5} 4$. Далее имеем

$$\begin{cases} 2x + 59 > 0, \\ 2x + 59 < 4, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x > -29{,}5, \\ x < -27{,}5, \end{cases}$$

откуда $-29{,}5 < x < -27{,}5$.

б) Чтобы все логарифмы имели смысл, должны выполняться неравенства $x + 2 > 0$ и $2x - 6 > 0$. Используя свойства логарифмов, преобразуем заданное неравенство:

$$\lg(x + 2) + \lg(2x - 6) < 2,$$

$$\lg((x + 2)(2x - 6)) < \lg 100.$$

Таким образом, заданное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x + 2 > 0, \\ 2x - 6 > 0, \\ (x + 2)(2x - 6) < 100, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x > -2, \\ x > 3, \\ x^2 - x - 56 < 0. \end{cases}$$

Далее имеем

$$\begin{cases} x > 3, \\ (x + 7)(x - 8) < 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x > 3, \\ -7 < x < 8. \end{cases}$$

С помощью координатной прямой (рис. 85) устанавливаем, что множеством решений последней системы, а значит, и заданного неравенства является интервал (3, 8). ■

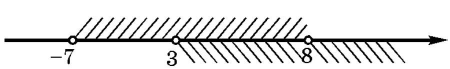


Рис. 85

193. Иррациональные неравенства. При решении иррациональных неравенств используется следующее утверждение:

Т.5.8. *Если обе части неравенства на некотором множестве X принимают только неотрицательные значения, то при возведении обеих частей неравенства в квадрат* (*или в любую четную степень*) *и сохранении знака исходного неравенства получится неравенство, равносильное данному* (*на множестве X*). *Возведение обеих частей неравенства в одну и ту же нечетную степень* (*с сохранением знака неравенства*) *всегда является равносильным преобразованием неравенства*.

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2, \end{cases}$$

а неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$$

П р и м е р. Решить неравенство:

а) $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$; б) $\sqrt{x^2 - 4x + 2} > x + 3$.

❑ а) Это неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0, \\ x > 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим $x \geq 4$.

б) Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + 3 < 0, \\ x^2 - 4x + 2 \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ x^2 - 4x + 2 \geq 0, \\ x^2 - 4x + 2 > (x + 3)^2. \end{cases}$$

Второе неравенство второй системы можно опустить как следствие третьего неравенства.

Решив первую систему, получим $x < -3$, из второй системы имеем $-3 \leq x < -0{,}7$. Объединив эти решения, находим $x < -0{,}7$. ■

194. Тригонометрические неравенства. Рассмотрим пример графического решения простейших тригонометрических неравенств, т. е. неравенств вида $f(x) > a$ (или $f(x) < a$), где $f(x)$ — одна из тригонометрических функций.

П р и м е р. Решить неравенство $\cos x < 0{,}5$.

❑ Построим график функции $y = \cos x$ и проведем прямую $y = 0{,}5$. Нас интересуют те значения аргумента x, которым соответствуют точки графика, лежащие ниже прямой $y = 0{,}5$. Одним из нужных промежутков является интервал $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ (рис. 86).

Воспользовавшись периодичностью функции $y = \cos x$, запишем ответ:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}. \ \blacksquare$$

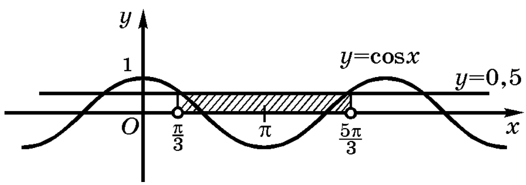


Рис. 86

195. Неравенства и системы неравенств с двумя переменными. Рассмотрим неравенство $f(x, y) > g(x, y)$, которое будем называть ***неравенством с двумя переменными***. ***Решением*** такого ***неравенства*** называется пара значений переменных, обращающая неравенство в верное числовое неравенство. Известно, что пара действительных чисел $(x; y)$ однозначно определяет точку координатной плоскости. Это дает возможность изобразить решения неравенства или системы неравенств с двумя переменными геометрически, в виде некоторого множества точек координатной плоскости.

П р и м е р. Изобразить на координатной плоскости множество решений системы неравенств

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ \ xy > 4,\ \ x + y < 5.$$

❑ Геометрическим изображением решений системы неравенств $x \geq 0$, $y \geq 0$ является множество точек I координатного угла. Далее, изображением решений неравенства $x + y < 5$ или $y < 5 - x$ является множество точек, лежащих ниже прямой $y = 5 - x$. Наконец, изображением решений неравенства $xy > 4$ или, поскольку $x > 0$, неравенства $y > \frac{4}{x}$, является множество точек, лежащих выше ветви гиперболы $y = \frac{4}{x}$. В итоге получаем множество точек координатной плоскости, лежащих в I координатном угле ниже прямой $y = 5 - x$ и выше гиперболы $y = \frac{4}{x}$ (рис. 87). ■

§ 18. Доказательство неравенств

196. Метод оценки знака разности. Суть этого метода заключается в следующем: для того чтобы установить справедливость неравенства $f(x, y, z) > g(x, y, z)$ составляют разность $f(x, y, z) - g(x, y, z)$ и доказывают, что она положительна.

П р и м е р. Доказать, что если $x \geq 0$, $y \geq 0$, то $\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$ (*среднее арифметическое двух нео-*

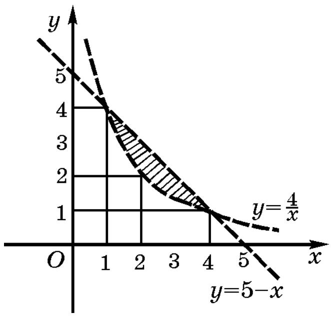


Рис. 87

трицательных чисел не меньше их среднего геометрического; это неравенство называется ***неравенством Коши***).

❑ Составим разность $\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}$. Имеем

$$\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}.$$

Неравенство $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$ верно при любых неотрицательных значениях x и y. Значит, $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, причем равенство имеет место лишь в случае $x = y$.■

Из неравенства Коши, в частности, следует неравенство $x+\frac{1}{x} \geq 2$, справедливое для всех $x > 0$.

197. Синтетический метод доказательства неравенств. Суть этого метода заключается в следующем: с помощью ряда преобразований выводят требуемое неравенство из некоторых известных (***опорных***) неравенств. Опорными неравенствами являются, например, такие: 1) $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, где $x \geq 0$, $y \geq 0$ (неравенство Коши); 2) $x + \frac{1}{x} \geq 2$, где $x > 0$; 3) $|x + a| \leq |x| + |a|$ (***неравенство треугольника***); 4) $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$; 5) $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$;

П р и м е р. Доказать, что $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$, где a, b, c, d — неотрицательные числа.

❑ Используем здесь в качестве опорного неравенство Коши, составленное для неотрицательных чисел $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{c+d}{2}$. Имеем

$$x = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}}.$$

Применив теперь неравенство Коши к числам a и b, а также к числам c и d, получим

$$\sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}}.$$

Но $\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$. Итак,

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

Равенство имеет место в случае, когда $a = b = c = d$. ■

198. Доказательство неравенств методом от противного. Суть этого метода заключается в следующем. Пусть нужно доказать истинность неравенства

$$f(x,\ y,\ z) > g(x,\ y,\ z). \qquad (1)$$

Предполагают противное, т. е. что хотя бы для одного набора переменных справедливо неравенство

$$f(x,\ y,\ z) \leq g(x,\ y,\ z). \qquad (2)$$

Используя свойства неравенств, выполняют преобразования неравенства (2). Если в результате этих преобразований получается ложное неравенство, то это означает, что предположение о справедливости неравенства (2) неверно, а потому верно неравенство (1).

П р и м е р. Доказать справедливость неравенства

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) \leq \cos^2\alpha.$$

❑ Предположим противное, т. е. будем считать, что существуют такие α и β, для которых выполняется неравенство $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) > \cos^2\alpha$.

Воспользовавшись формулами $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-$ $-\beta) = \dfrac{\cos 2\beta + \cos 2\alpha}{2}$ (см. п. 87) и $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ (см. п. 84), получим $\dfrac{\cos 2\beta + \cos 2\alpha}{2} > \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, откуда $\cos 2\beta > 1$. Так как на самом деле $\cos 2\beta \leq 1$ при любых значениях β, то мы получили противоречие. Значит, сделанное предположение неверно, а поэтому справедливо исходное неравенство. ■

199. Использование неравенств при решении уравнений. Пусть нужно решить уравнение $f(x) =$ $= g(x)$ и пусть существует такое число A, которое представляет собой одновременно наибольшее значение функции $y = f(x)$ и наименьшее значение функции $y = g(x)$. Тогда корнями уравнения $f(x) = g(x)$ являются общие корни уравнений $f(x) = A$, $g(x) = A$, и только они. Этот метод служит частным случаем функционального метода решения уравнений (см. п. 165).

П р и м е р. Решить уравнение

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 - (x-1)^4.$$

❑ С одной стороны, $x^2 + \dfrac{1}{x^2} \geq 2$ при всех $x \neq 0$ (см. п. 196). С другой, при всех x выполняется неравенство $2-(x-1)^4 \le 2$. Значит, корнями данного уравнения являются общие корни уравнений $x^2+\frac{1}{x^2}=2$ и $2-(x-1)^4=2$ (если, конечно, такие общие корни есть). Из уравнения $x^2+\frac{1}{x^2}=2$ находим $x_1=1$, $x_2=-1$; из уравнения $2-(x-1)^4=2$ находим $x=1$. Общий корень этих уравнений — значение $x=1$, которое и является единственным корнем заданного уравнения. ■

Раздел VI

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

§ 19. Размещения, перестановки, сочетания

200. Размещения. ***Размещениями*** из n различных элементов по k элементов называются всевозможные комбинации, содержащие k элементов, взятых из данных n элементов, и отличающиеся друг от друга либо составом элементов, либо их порядком.

Существуют два вида размещений:

а) ***без повторений*** — каждый входящий в комбинацию элемент представлен единственным экземпляром (например, размещения без повторений из $n = 3$ элементов a, b, c по $k = 2$ элемента таковы: ab, ba, ac, ca, bc, cb);

б) ***с повторениями*** — каждый входящий в комбинацию элемент может быть представлен более чем одним экземпляром (например, размещения с повторениями из $n = 3$ элементов a, b, c по $k = 2$ элемента таковы: aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc; размещения с повторениями из $n = 2$ элементов a, b по $k = 3$ элемента таковы: aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb).

Число размещений без повторений из n элементов по k элементов выражается формулой

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1), \text{ где } k \le n, \quad (1)$$

а число размещений с повторениями из n элементов по k элементов — формулой

$$\tilde{A}_n^k = n^k. \quad (2)$$

Символ $n!$ (читается «эн ***факториал***») — это сокращенное обозначение произведения $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$.

Пример 1. Комиссия состоит из председателя, заместителя и еще четырех человек. Сколькими способами члены комиссии могут распределить между собой обязанности председателя и заместителя?

❑ При выборе председателя и его заместителя из данных шести человек имеет значение не только то, какие два человека выбраны, но и то, как распределены должности между ними (т. е. важен и состав, и порядок следования выбранных элементов). Таким образом, речь идет о размещениях (без повторений) из шести элементов по два. Используя формулу (1), находим $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$ (способов). ■

Пример 2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

❑ Каждое трехзначное число, составленное из указанных цифр, можно рассматривать как размещение с повторениями, составленное из трех цифр, взятых из данных семи цифр. Количество таких чисел найдем по формуле (2): $\tilde{A}_7^3 = 7^3 = 343$. ■

201. Перестановки. ***Перестановками*** из n различных элементов называются всевозможные комбинации из этих n элементов, отличающиеся друг от друга только порядком расположения элементов.

Перестановки можно считать частным случаем размещений (а именно, размещениями из m элементов по m).

Существуют два вида перестановок:

а) ***без повторений*** — каждый входящий в комбинацию элемент представлен единственным экземпляром (например, перестановки без повторений из $n = 3$ элементов a, b, c таковы: abc, acb, bac, bca, cab, cba);

б) ***с повторениями*** — каждый входящий в комбинацию элемент может быть представлен более чем одним экземпляром (запишем, например, все перестановки с повторениями из элементов a и b такие, что элемент a повторяется трижды, а элемент b — дважды: $aaabb$, $aabab$, $aabba$, $abaab$, $ababa$, $abbaa$, $baaab$, $baaba$, $babaa$, $bbaaa$).

Число перестановок без повторений из n элементов находится по формуле

$$P_n = n!, \tag{1}$$

а число перестановок из n элементов с повторениями, содержащих k_1 элементов первого типа, k_2 элементов второго типа,..., k_n элементов n-го типа, — по формуле

$$P(k_1,\ k_2,\ldots,k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1!\ k_2!\ldots k_n!}, \tag{2}$$

где $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = n$.

Пример 1. Найти количество различных четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, если каждая цифра в изображении числа встречается один раз.

❑ Каждое четырехзначное число, составленное из указанных цифр, можно рассматривать как перестановку из цифр 0, 1, 2, 3, в которой первая цифра отлична от нуля. Так как число перестановок из четырех цифр равно $P_4 = 4!$ и среди них $P_3 = 3!$ перестановок начинаются с нуля, то искомое количество равно $4! - 3! = 3 \cdot 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$. ■

Пример 2. Сколькими способами можно нанизать на нить 4 зеленых, 5 синих и 6 красных бус?

❑ Здесь речь идет об отыскании числа перестановок с повторениями, которые можно составить из $k_1 = 4$ элементов первого типа (зеленых бус), $k_2 = 5$ элементов второго типа (синих бус) и $k_3 = 6$ элементов третьего типа (красных бус). Используя формулу (2), находим

$$P(4, 5, 6) = \frac{(4+5+6)!}{4!\ 5!\ 6!} = \frac{15!}{4!\ 5!\ 6!} = 630\,630. \ ■$$

202. Сочетания и их свойства. Треугольник Паскаля. ***Сочетаниями*** из n различных элементов по k элементов называются всевозможные комбинации, содержащие k элементов, взятых из данных n элементов, и отличающиеся друг от друга по крайней мере одним элементом.

Существуют два вида сочетаний:

а) ***без повторений*** — каждый элемент, входящий в комбинацию, представлен единственным экземпляром (например, сочетания без повторений из $n = 4$ элементов a, b, c, d по $k = 2$ элемента таковы: ab, ac, ad, bc, bd, cd);

б) ***с повторениями*** — каждый элемент, входящий в комбинацию, может быть представлен более чем одним экземпляром (например, сочетания с повторениями из $n = 4$ элементов a, b, c, d по $k = 2$ элемента таковы: aa, ab, ac, ad, bb, bc, bd, cc, cd, dd; сочетания с повторениями из $n = 2$ элементов a, b по $k = 4$ элемента таковы: $aaaa$, $abab$, $abbb$, $bbbb$).

Число сочетаний без повторений из n элементов по k элементов находится по формуле

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\ k!}, \text{ где } k \le n,\ C_n^0 = 1, \qquad (1)$$

а число сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов — по формуле

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!\ (n-1)!}.$$

Справедливы следующие свойства числа сочетаний без повторений:

$$C_n^k = C_n^{n-k}; \qquad (3)$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}. \qquad (4)$$

П р и м е р 1. Сколькими способами из десяти человек можно избрать комиссию, состоящую из четырех членов?

❑ Искомое количество способов равно числу сочетаний без повторений, которые можно составить из десяти элементов по два. Используя формулу (1), получим $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{6!\ 4!} = 210.$ ■

П р и м е р 2. В кондитерском отделе продаются три сорта пирожных: безе, эклеры и бисквиты. Сколько можно составить различных наборов по 9 пирожных в каждом?

❑ Здесь нужно найти число всевозможных комбинаций по 9 элементов, которые можно составить из трех данных элементов, причем эти элементы в каждой комбинации могут повторяться, а сами комбинации отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Значит, речь идет об отыскании числа сочетаний с повторениями из трех элементов по 9. Количество возможных наборов найдем по формуле (2):

$$\tilde{C}_3^9 = C_{11}^9 = C_{11}^2 = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55. \ \blacksquare$$

С помощью равенства (4) можно составить таблицу для нахождения числа сочетаний (без повторений) C_n^k при $n = 2, 3, 4, \ldots$. Прежде всего заметим, что $C_0^0 = 1$, а $C_n^0 = C_n^n = 1$. Далее, используя формулу (4), находим

$$C_2^0 = 1,\ C_2^1 = C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2,\ C_2^2 = 1;$$

$$C_3^0 = 1,\ C_3^1 = C_2^0 + C_2^1 = 1 + 2 = 3,$$

$$C_2^2 = C_2^1 + C_2^2 = 2 + 1 = 3,\ C_3^3 = 1.$$

Расположим найденные числа в виде треугольной таблицы, которую составим следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & C_0^0 & & & \\ & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\ & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\ C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \end{array}\text{, т. е. }\quad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Ясно, что следующая строка этой таблицы содержит числа C_4^0, C_4^1, C_4^2, C_4^3, C_4^4. Крайние члены этой строки равны 1, а каждый из остальных членов равен сумме двух расположенных над ним членов предыдущей строки. Точно так же получаются и остальные строки. В результате получим треугольную таблицу, которая называется ***треугольником Паскаля***:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

При этом n-я строка таблицы состоит из чисел C_n^0, C_n^1, C_n^2, …, C_n^n.

§ 20. Формула бинома Ньютона

203. Бином Ньютона. Ранее (см. п. 62) уже была приведена формула бинома Ньютона. Здесь мы рассмотрим ее более подробно. Запишем выражения для $(a+b)^n$ при $n = 1, 2, 3, 4$:

$(a+b)^1 = a + b;$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 =$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Подмечаем следующую закономерность: при возведении бинома в степень n в правой части формулы получается сумма $n + 1$ слагаемых, причем каждое из них содержит множители a и b в степенях, сумма показателей которых равна степени бинома . Показатели при a последовательно убывают от n до нуля, а показатели при b последовательно возрастают от нуля до n. Коэффициенты при степенях a и b в разложении $(a + b)^n$ называются ***биномиальными***. Легко заметить, что биномиальные коэффициенты разложения $(a + b)^n$ представляют собой числа сочетаний из n элементов соответственно по нулю, одному, двум, ..., n элементам (например, в разложении $(a + b)^4$ имеем $C_4^0 = 1$, $C_4^1 = 4$, $C_4^2 = 6$, $C_4^3 = 4$, $C_4^4 = 1$). Можно доказать справедливость общей формулы бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots$$
$$\ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n. \qquad (1)$$

П р и м е р. Записать разложение $\left(\frac{1}{x} + 2x^2\right)^5$.

❑ Согласно формуле (1), при $a = \frac{1}{x}$, $b = 2x^2$, $n = 5$ получим

$$\left(\frac{1}{x} + 2x^2\right)^5 = \left(\frac{1}{x}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{x}\right)^4 \cdot 2x^2 + 10\left(\frac{1}{x}\right)^3 \cdot (2x^2)^2 +$$

$$+10\left(\frac{1}{x}\right)^2(2x^2)^3+5\cdot\frac{1}{x}(2x^2)^4+(2x^2)^5=$$

$$=\frac{1}{x^5}+\frac{10}{x^2}+40x+80x^4+80x^7+32x^{10}. \blacksquare$$

204. Свойства формулы бинома Ньютона.

1^0. Число всех слагаемых разложения равно $n+1$.

2^0. Общий член разложения имеет вид

$$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k, \qquad (1)$$

где $k=0, 1, 2,\ldots, n$.

3^0. Коэффициенты членов, равноудаленных от концов разложения, равны между собой.

4^0. Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n.

5^0. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

П р и м е р 1. Найти наибольший коэффициент разложения $(a+b)^n$, если сумма всех биномиальных коэффициентов равна 4096.

❑ Согласно свойству 4^0, сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n, откуда получаем уравнение $2^n=4096$, т. е. $2^n=2^{12}$. Значит, $n=12$. Так как показатель степени бинома, равный 12, — четное число, то наибольшим биномиальным коэффициентом является коэффициент при среднем (т. е. 6-м) члене. Итак, этот коэффициент равен

$$C_{12}^{6}=\frac{12!}{6!(12-6)!}=\frac{12!}{6!6!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=924. \blacksquare$$

П р и м е р 2. В разложении $\left(\sqrt{z}-\frac{2}{\sqrt[3]{z}}\right)^{15}$ найти член, не содержащий z.

❑ Используя равенство (1), запишем общий член разложения

$$T_{k+1}=C_{15}^{k}\left(z^{\frac{1}{2}}\right)^{15-k}\left(-2z^{-\frac{1}{3}}\right)^{k}=C_{15}^{k}(-2)^{k}z^{\frac{15-k}{2}-\frac{k}{3}}.$$

Приравняв нулю показатель при z в выражении T_{k+1}, найдем k:

$$\frac{15-k}{2}-\frac{k}{3}=0;\ 45-3k-2k=0;\ k=9.$$

Итак, z не содержит 10-й член разложения; он равен

$$T_{9+1}=C_{15}^{9}(-2)^{9}=-5005\cdot 512=-2\,562\,560. \blacksquare$$

П р и м е р 3. Найти наибольший биномиальный коэффициент разложения $\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}$, если произведение четвертого от начала и четвертого от конца слагаемых равно 14 400.

❑ Четвертое слагаемое от начала имеет вид $T_4 = C_n^3 n^{n-3}\cdot\frac{1}{n^3}$, а четвертое от конца — вид $T_{n-2} =$

$= C_n^{n-3} n^3 \dfrac{1}{n^{n-3}}$. Поэтому $T_4 T_{n-2} = C_n^3 C_n^{n-3} = (C_n^3)^2 =$ $= 14\,400$, откуда $C_n^3 = 120$. Далее имеем $n(n-1) \times$ $\times (n-2) = 720$; $n(n-1)(n-2) = 10 \cdot 9 \cdot 8$, откуда $n = 10$. Итак, наибольший биномиальный коэффициент, входящий в слагаемое, одинаково удаленное от концов разложения, есть $C_{10}^5 = \dfrac{10!}{5!\,5!} = 252$. ■

Раздел VII

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

§ 21. Числовые последовательности

205. Определение последовательности. Пусть каждому натуральному числу поставлено в соответствие определенное действительное число: числу 1 соответствует число a_1, числу 2 — число a_2, ..., числу n — число a_n и т. д. Тогда говорят, что задана ***числовая последовательность***, и пишут: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Иначе можно записать (a_n). Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются ***членами числовой последовательности***.

Например, для любой бесконечной десятичной дроби можно построить последовательность ее десятичных приближений по недостатку или по избытку. Так, для числа $e = 2{,}71828\ldots$ последовательность десятичных приближений по недостатку имеет вид

$$2;\ 2{,}7;\ 2{,}71;\ 2{,}718;\ 2{,}7182;\ 2{,}71828;\ \ldots\ .$$

206. Способы задания последовательности. Имеется три основных способа задания последовательности.

1. ***Аналитический*** — последовательность задается формулой n-го члена.

П р и м е р 1. Формулой $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ задается последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, у которой

$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$; $a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}, \ldots,$ т. е. последовательность $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$.

2. ***Рекуррентный*** — любой член последовательности, начиная с некоторого, выражается через предшествующие члены. При этом способе задания последовательности указывают ее первый член (или несколько начальных членов) и формулу, позволяющую определить любой член последовательности по известным предшествующим членам.

Пример 2. Пусть $a_1=1$, $a_2=1$, $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$. Тогда $a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$; $a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$; $a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5$; $a_6 = a_4 + a_5 = 3 + 5 = 8$; ... .

В итоге получаем последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,... . Каждый ее член, кроме первых двух, равен сумме двух предшествующих ему членов.

3. ***Словесный*** — задание последовательности описанием. Такова, например, последовательность десятичных приближений по недостатку числа e (см. п. 205).

207. Возрастающие и убывающие последовательности. Последовательность (a_n) называется ***возрастающей***, если каждый ее член меньше следующего за ним, т. е. если $a_n < a_{n+1}$ для любого n. Последовательность (a_n) называется ***убывающей***, если каждый ее член больше следующего за ним, т. е. если $a_n > a_{n+1}$ для любого n. Возрастающие и убывающие последовательности называются ***монотонными***.

П р и м е р. а) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ — возрастающая последовательность.

б) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ — убывающая последовательность.

в) $-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ 6, \ldots, (-1)^n \cdot n, \ldots$ — эта последовательность не является монотонной.

г) 3, 3, 3, 3, ..., 3, ... — ***постоянная*** (или стационарная) последовательность.

208. Определение арифметической прогрессии. Последовательность (a_n), каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называется ***арифметической прогрессией***. Число d называется ***разностью прогрессии***. Таким образом, арифметическая прогрессия есть последовательность, заданная рекуррентно равенством $a_{n+1} = a_n + d$.

Если $d > 0$, то арифметическая прогрессия возрастает, если $d < 0$, то она убывает.

П р и м е р 1. Последовательность 9, 7, 5, 3, ... — это убывающая арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 9$, $d = -2$.

П р и м е р 2. Пусть $a_1 = -1$, $d = 0{,}5$. Этими условиями задается арифметическая прогрессия, у которой $a_2 = -1 + 0{,}5 = -0{,}5$; $a_3 = -0{,}5 + 0{,}5 = 0$; $a_4 = 0 + 0{,}5 = 0{,}5; \ldots$.

Итак, получаем возрастающую арифметическую прогрессию: $-1;\ -0{,}5;\ 0;\ 0{,}5;\ \ldots$.

Иногда рассматривают не всю последовательность, являющуюся арифметической прогрессией, а лишь ее первые несколько членов. В этом случае говорят о ***конечной арифметической прогрессии***.

Для указания того, что последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, используют обозначение

$$\div\, a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n,\ \ldots\ .$$

209. Свойства арифметической прогрессии.

1^0. Формула n-го члена:

$$a_n = a_1 + d\,(n-1). \qquad (1)$$

2^0. Формулы суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \qquad (2)$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d\,(n-1)}{2} \cdot n. \qquad (3)$$

Здесь $S_1 = a_1$, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

3^0. ***Характеристическое свойство***: *последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого* (*и последнего в случае конечной арифметической прогрессии*), *равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов*:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

П р и м е р. Спортсмен за первую минуту пробежал 400 м, а в каждую следующую минуту пробегал на 5 м меньше, чем в предыдущую. Какой путь пробежал он за 1 ч?

❑ За первую минуту спортсмен пробежал 400 м, за вторую — 395 м, за третью — 390 м и т. д. Числа 400, 395, 390, ... образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 400$, $d = -5$. Путь, который пробежит спортсмен за 1 ч, т. е. за 60 мин, равен сумме первых 60 членов прогрессии. Применив формулу (3), получим

$$S_{60} = \frac{2 \cdot 400 + d \cdot 59}{2} \cdot 60 = \frac{800 - 59 \cdot 5}{2} = 15\,150,$$

т. е. за 1 ч он пробежит 15 км 150 м. ■

210. Определение геометрической прогрессии. Последовательность (b_n), первый член которой отличен от нуля и каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же отличное от нуля число q, называется ***геометрической прогрессией***. Число q называется ***знаменателем прогрессии***. Таким образом, геометрическая прогрессия есть последовательность, заданная рекуррентно равенством $b_{n+1} = b_n q$, где $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$.

Если $q > 1$ и $b_1 > 0$, то геометрическая прогрессия возрастает; если $0 < q < 1$ и $b_1 > 0$, то она убывает; при $q < 0$ она не является монотонной.

Пример 1. Последовательность 30; 9; 2,7; 0,81; ... есть убывающая геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 30$, $q = 0{,}3$.

Пример 2. Пусть $b_1 = 2$, $q = -3$. Указанными условиями задается геометрическая прогрессия, у которой $b_2 = 2 \cdot (-3) = -6$; $b_3 = (-6) \cdot (-3) = 18$; $b_4 = 18 \cdot (-3) = -54$; $b_5 = (-54) \cdot (-3) = 162$; ... . Эта прогрессия не является монотонной.

Иногда рассматривают не всю последовательность, являющуюся геометрической прогрессией, а лишь ее первые несколько членов. В этом случае говорят о ***конечной геометрической прогрессии.***

Для указания того, что последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, используют обозначение

$$\div\!\div\, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots .$$

211. Свойства геометрической прогрессии.

1^0. Формула n-го члена:

$$b_n = b_1 q^{n-1}. \tag{1}$$

2^0. Формулы суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}; \tag{2}$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}. \tag{3}$$

Здесь $S_1 = b_1$, $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$, $q \neq 1$; если $q = 1$, то $S_n = nb_1$.

3^0. ***Характеристическое свойство:*** *последовательность является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого (и последнего в случае конечной геометрической прогрессии), связан с предыдущим и последующим членами формулой*

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

П р и м е р 1. Найти 8-й член геометрической прогрессии, у которой $b_1 = 3$, $b_n = 96$, $S_n = 189$.

❑ Согласно формуле (1), получаем $96 = 3q^{n-1}$, т. е. $q^{n-1} = 32$, откуда $q^n = 32q$.

С другой стороны, используя формулу (3), имеем

$189 = \dfrac{3(q^n - 1)}{q - 1}$, или

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = 63. \qquad (4)$$

Учитывая, что $q^n = 32q$, и подставив это выражение в равенство (4), получим

$$\frac{32q - 1}{q - 1} = 63;\ 32q - 1 = 63q - 63,\ q = 2.$$

Зная b_1 и q, найдем $b_8 = b_1 q^7 = 3 \cdot 2^7 = 384$. ■

П р и м е р 2. Три числа образуют конечную геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то новая тройка чисел составит конечную арифметическую прогрессию. Если же третье число этой новой тройки увеличить на 9, то снова получится геометрическая прогрессия. Найти первую тройку чисел.

❑ Пусть b_1, b_2, b_3 — искомые три числа. Тогда заданные условия запишутся так:

$$1)\ \div\div\, b_1, b_2, b_3;\ 2)\ \div\, b_1, b_2 + 2, b_3;\ 3)\ \div\div\, b_1, b_2 + 2, b_3 + 9.$$

Используя характеристические свойства арифметической и геометрической прогрессий, получим:

$$1)\ b_2^2 = b_1 b_3;\ 2)\ b_2 + 2 = \frac{b_1 + b_3}{2};\ 3)\ (b_2 + 2)^2 = b_1(b_3 + 9).$$

Далее, так как $b_2 = b_1q$, $b_3 = b_1q^2$, то записанные равенства примут следующий вид:

1) $b_1^2q^2 = b_1 \cdot b_1q^2$; 2) $b_1q + 2 = \dfrac{b_1 + b_1q^2}{2}$;

3) $(b_1q + 2)^2 = b_1(b_1q^2 + 9)$.

Первое условие как тождественное равенство можно опустить. Тогда придем к системе двух уравнений с двумя переменными b_1 и q:

$$\begin{cases} 2(b_1q + 2) = b_1 + b_1q^2, \\ (b_1q + 2)^2 = b_1(b_1q^2 + 9), \end{cases} \text{т. е.} \begin{cases} b_1(1 + q^2 - 2q) = 4, \\ b_1(9 - 4q) = 4. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим $b_1 = \dfrac{4}{9 - 4q}$. Подставив это выражение в первое уравнение, имеем $\dfrac{1 + q^2 - 2q}{9 - 4q} = 1$, откуда находим $q_1 = 2$, $q_2 = -4$. Значит, $b_1 = 4$ при $q = 2$ и $b_1 = \dfrac{4}{25}$ при $q = -4$.

Итак, условию удовлетворяют две тройки чисел:

а) 4, 8, 16 (при $b_1 = 4$, $q = 2$);

б) $\dfrac{4}{25}$, $-\dfrac{16}{25}$, $\dfrac{64}{25}$ (при $b_1 = \dfrac{4}{25}$, $q = -4$). ■

212. Понятие о пределе последовательности. Число b называется ***пределом последовательности*** (a_n), если, какое бы положительное число ε ни взять, найдется номер N, начиная с которого (т. е. при $n \geq N$) отличие a_n от b по модулю будет меньше ε, т. е. $|a_n - b| < \varepsilon$. В этом случае пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, или $a_n \to b$ при $n \to \infty$. Говорят, что последовательность (a_n) ***сходится*** к b.

Геометрический смысл предела последовательности: если b — предел последовательности (a_n), то, какую бы окрестность точки b ни выбрать, вся последовательность, начиная с некоторого номера N, будет изображаться точками, лежащими в этой окрестности; ***окрестность точки*** b — это интервал с центром в точке b.

П р и м е р. а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Чем больше номер члена последовательности, тем меньше этот член отличается от числа 0. Эта последовательность сходится, ее предел равен нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

б) $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \ldots, \frac{1}{3^n}, \ldots$. Эта последовательность сходится, ее предел равен нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$.

в) 2, 0, 3, 2, 0, 3, 2, 0, 3, ... Эта последовательность не имеет предела.

г) Постоянная последовательность $a, a, a, \ldots, a, \ldots$ сходится к пределу a, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$.

213. Вычисление пределов последовательностей. Для вычисления пределов последовательностей используют следующие утверждения:

1^0. Последовательность $\frac{1}{n}$ сходится к числу 0 (см. пример а) из п. 212): $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2^0. Последовательность q^n, где $|q| < 1$, сходится к числу 0 (см. пример б) из п. 212), где $q = \frac{1}{3}$): $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$.

3^0. $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$ (см. пример г) из п. 212).

Кроме того, часто используют следующую теорему:

Т.7.1. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и а* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *то*:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *при условии* $b \neq 0$

(***теорема об арифметических операциях над пределами***).

П р и м е р. Вычислить:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n+2}{2n^2-n-1}$.

❑ а) Так как $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$, а $\frac{1}{n} \to 0$, то $\frac{1}{n^2} \to 0\cdot 0 = 0$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Аналогично устанавливается, что $\frac{1}{n^k} \to 0$ для любого натурального k.

б) Разделим почленно и числитель, и знаменатель данной дроби на наивысшую (из имеющихся) степень переменной, т. е. на n^2. Тогда получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}.$$

Воспользовавшись теперь тем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$, и теоремой 7.1, находим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+2}{2n^2-n-1} = \frac{1+0+2\cdot 0}{2-0-0} = \frac{1}{2}. \ ■$$

214. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$. Пусть $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ — бесконечная геометрическая прогрессия, у которой $|q| < 1$. Рассмотрим сумму ее первых n членов: $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$. Имеем $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ (см. п. 211). Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Используя утверждения, приведенные в п.213, получим

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1}{q - 1}(q^n - 1) =$$

$$= \frac{b_1}{q - 1}(0 - 1) = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Итак, для бесконечной геометрической прогрессии, у которой $|q| < 1$, существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, где $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$.

Этот предел называют ***суммой бесконечной геометрической прогрессии*** и обозначают S:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}. \tag{1}$$

П р и м е р. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, у которой $|q| < 1$, равна 9, а сумма квадратов ее членов равна 40,5. Найти сумму первых шести членов прогрессии.

❑ Пусть $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ — заданная прогрессия. По условию ее сумма равна 9, т. е. $\frac{b_1}{1-q} = 9$. Рассмотрим последовательность $b_1^2, b_2^2, b_3^2, \ldots, b_n^2, \ldots$. Каждый ее член получается из предыдущего умножением на q^2, откуда следует, что это геометрическая прогрессия $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n, \ldots$, у которой первый член равен b_1^2, т. е. $B_1 = b_1^2$, а знаменатель Q равен q^2, т. е. $Q = q^2$. Так как $\left|q^2\right| < 1$, то $|Q| < 1$, а сумма новой прогрессии равна $\frac{B_1}{1-Q}$. Согласно условию эта сумма равна 40,5. Значит, мы приходим к системе

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 9, \\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2} = 40{,}5. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим $b_1 = 9(1-q)$; подставив это выражение во второе уравнение, получим $\frac{81(1-q)^2}{1-q^2} = \frac{81}{2}$, откуда $\frac{1-q}{1+q} = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{3}$. Тогда $b_1 = 9(1-q) = 9\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6$. Теперь можно найти сумму первых шести членов прогрессии:

$$S_6 = \frac{b_1(q^6-1)}{q-1} = \frac{6\left(\left(\frac{1}{3}\right)^6 - 1\right)}{\frac{1}{3}-1} = 8\frac{80}{81}. \ \blacksquare$$

§ 22. Предел функции

215. Предел функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$. Горизонтальная асимптота. Число b называется ***пределом функции*** **$y = f(x)$ при стремлении x к** $+\infty$, если, какое бы число $\varepsilon > 0$ ни взять, найдется число $M > 0$ такое, что для всех $x > M$ выполняется неравенство $\left|f(x) - b\right| < \varepsilon$. При этом пишут: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, или $f(x) \to b$ при $x \to +\infty$.

Геометрически это означает, что график функции $y = f(x)$ при выборе достаточно больших значений x безгранично приближается к прямой $y = b$ (рис. 88), т. е. расстояние от точки графика до прямой $y = b$ по мере удаления точки в бесконечность может быть сделано меньше любого числа $\varepsilon > 0$. Прямая $y = b$ называется в этом случае ***горизонтальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$. Так, горизонтальной асимптотой графика функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ при $x \to +\infty$ является прямая $y = 0$, т. е. ось Ox (см. рис. 38).

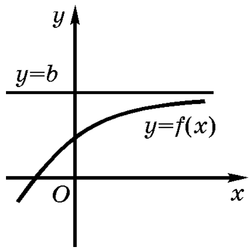


Рис. 88

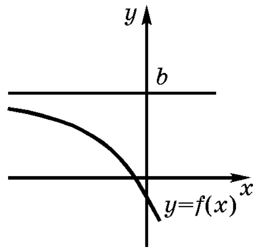


Рис. 89

Прямая $y = b$ может служить горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ и при выборе достаточно больших по модулю, но отрицательных значений аргумента (рис. 89). Тогда говорят, что число b есть ***предел функции*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ ***при стремлении*** $\boldsymbol{x}$ ***к*** $\boldsymbol{-\infty}$, и пишут: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, или $f(x) \to b$ при $x \to -\infty$. Например, $\lim\limits_{x \to -\infty} (3 + 2^x) = 3$, т. е. прямая $y = 3$ — горизонтальная асимптота графика функции $f(x) = 3 + 2^x$ при $x \to -\infty$. Наконец, прямая $y = b$ может являться горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$. Так, прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота графика функции $y = 1/x$ (см. рис. 24). В этом случае говорят, что число b есть ***предел функции*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ ***при стремлении*** $\boldsymbol{x}$ ***к*** ∞, и пишут: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, или $f(x) \to b$ при $x \to \infty$.

216. Вычисление пределов функций при $x \to \infty$. Для вычисления пределов функций при $x \to \infty$ используют следующие теоремы об операциях над пределами:

Т.7.2. *Если* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = b$, *то* $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) + g(x)) = a + b$ (***теорема о пределе суммы***).

Т.7.3. *Если* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, *то* $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x)\, g(x)) = ab$ (***теорема о пределе произведения***).

Т.7.4. *Если* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, *то* $\lim\limits_{x \to \infty} kf(x) = ka$ (***теорема о вынесении постоянного множителя за знак предела***).

Т.7.5. *Если* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = b$ *и* $b \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$ (***теорема о пределе частного***).

П р и м е р. Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^3 + 4}$.

❑ Разделив числитель и знаменатель почленно на x^3, имеем

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}}{1 + \dfrac{4}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3 - 2\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} + 3\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}{1 + 4\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ (см. п. 215), то воспользовавшись теоремами 7.2 — 7.5, получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + x + 3}{x^3 + 4} = \frac{3 - 2\cdot 0 + 0\cdot 0 + 3\cdot 0\cdot 0\cdot 0}{1 + 4\cdot 0\cdot 0\cdot 0} = 3. \blacksquare$$

217. Предел функции в точке. Непрерывные функции. Рассмотрим функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ и $y = h(x)$, графики которых изображены на рис. 90. Это разные функции, они отличаются своим поведением в точке $x = a$. Если же $x \neq a$, то $f(x) = g(x) = h(x)$. Во всех трех случаях замечаем, что чем ближе x к a, тем меньше отличается значение функции

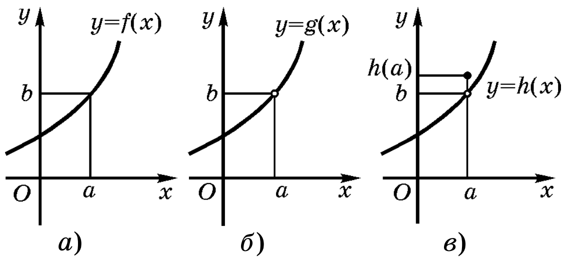


Рис. 90

$f(x)$, или $g(x)$, или $h(x)$ от числа b — это отличие характеризуется соответственно выражением $|f(x)-b|$, $|g(x)-b|$, $|h(x)-b|$. Для любой из рассматриваемых функций говорят, что предел функции при стремлении x к a равен b; пишут соответственно: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} h(x)=b$. Подчеркнем еще раз, что при этом значение функции в самой точке a (и даже сам факт существования или несуществования этого значения) не принимаются во внимание.

Сформулируем определение предела функции в точке: число b называется ***пределом функции*** $\boldsymbol{y=f(x)}$ ***при стремлении*** $\boldsymbol{x}$ ***к*** $\boldsymbol{a}$, если, какое бы число $\varepsilon>0$ ни взять, для всех достаточно близких к a значений x, т. е. для всех x из некоторой окрестности точки a, исключая, быть может, саму эту точку, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Вернемся к рис. 90. Замечаем, что для функции $y=f(x)$, график которой изображен на рис. 90 *а*, выполняется равенство $b=f(a)$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=$ $=f(a)$. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, то функция называется ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{a}$. Функция, непрерывная в каждой точке интервала (a, b), называется ***непрерывной на*** этом ***интервале***. Если функция непрерывна на интервале (a, b), определена в точках a и b и при стремлении точки x, принадлежащей интервалу (a, b), к точкам a и b значения функции $y=f(x)$ стремятся соответственно к значениям $f(a)$ и $f(b)$, то функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[a, b]$.

Вместо записи $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ используют также запись $f(x) \to b$ при $x \to a$. В частности, определение функции, непрерывной в точке a, записывают так: $f(x) \to f(a)$ при $x \to a$. Смысл понятия непрерывности функции в точке состоит в следующем: *малым изменениям аргумента (при отходе от точки a) соответствуют малые изменения функции.*

Отметим два правила предельного перехода:

<u>Правило 1</u>. *Если функция f непрерывна в точке a, то $\Delta f \to 0$ при $x \to a$* (см. п. 220).

<u>Правило 2</u>. *Если $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ при $x \to a$, то $f(x) + g(x) \to A + B$, $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to$ $\to \dfrac{A}{B}$ (в случае $B \neq 0$) при $x \to a$.*

218. Вертикальная асимптота. График функции $y = f(x)$, изображенный на рис. 91, обладает следующей особенностью: какое бы число $p > 0$ ни взять, можно указать такую окрестность точки a, что для любого x из этой окрестности $(x \neq a)$ соответствующая ордината графика по модулю будет больше p, т. е. $|f(x)| > p$. Говорят, что прямая $x = a$ есть ***вертикальная асимптота*** графика функции $y = f(x)$, и пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

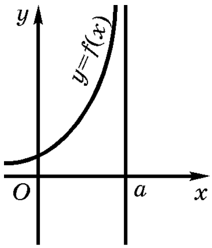


Рис. 91

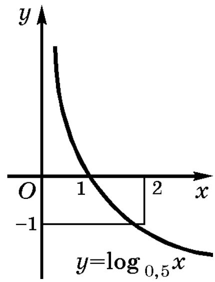


Рис. 92

Например, график функции $y = 1/x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$ (см. рис. 24); график функции $y = \operatorname{tg} x$ имеет вертикальные асимптоты $x = \pi/2$, $x = -\pi/2$, $x = 3\pi/2$, $x = -3\pi/2$ и т. д. (см. рис. 50); график функции $y = \log_{0,5} x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ (рис. 92).

219. Вычисление предела функции в точке. Для вычисления пределов функции в точке основными являются следующие факты:

1) *любая элементарная функция*, т. е. функция, заданная аналитически рациональным, иррациональным, трансцендентным выражением или выражением, составленным из перечисленных с помощью конечного числа арифметических операций, *непрерывна в любой внутренней точке области определения функции* (т. е. в любой точке, принадлежащей области определения функции вместе с некоторой

своей окрестностью); *если* $x = a$ — *внутренняя точка области определения сложной функции* $f(g(x))$ (см. п. 224), *то и сложная функция* $f(g(x))$ *непрерывна в точке* a;

2) *если функция* $y = f(x)$ *непрерывна в точке* $x = a$, *то* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

П р и м е р. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} + x^2}{2x + 1}$; б) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 9}{x^2 - 5x - 6}$;

в) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$; г) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{\sqrt{7 - x} + 3}$.

❑ а) Так как $x = 4$ — внутренняя точка области определения функции $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + x^2}{2x + 1}$, то функция непрерывна в этой точке. Имеем $f(4) = \dfrac{\sqrt{4} + 4^2}{2 \cdot 4 + 1} = 2.$

Значит, $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} + x^2}{2x + 1} = 2.$

б) Функция $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x^2 - 5x + 6}$ не определена в точке $x = 3$, поскольку в этой точке знаменатель дроби обращается в нуль. Так как числитель $x^2 + 9$ отличен от нуля в точке $x = 3$, то $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 9}{x^2 - 5x + 6} = \infty$

(см. п. 216); прямая $x = 3$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = \dfrac{x^2+9}{x^2-5x+6}$.

в) Здесь в отличие от предыдущего примера и числитель, и знаменатель обращаются в нуль при $x = 3$. В подобных случаях для вычисления предела необходимы тождественные преобразования выражения, задающего функцию. Имеем $\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}$. Поскольку при $x \to 3$ значение функции в самой точке $x = 3$ во внимание не принимается (см. п. 217), дробь можно сократить на $x - 3$, и тогда получим $\dfrac{x+3}{x-2}$. Итак,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2} = \frac{3+3}{3-2} = 6.$$

г) При $x = -2$ и числитель, и знаменатель обращаются в нуль. Выполним следующие преобразования заданного выражения:

$$\frac{x+2}{\sqrt{7-x}-3} = \frac{(x+2)(\sqrt{7-x}+3)}{(\sqrt{7-x}-3)(\sqrt{7-x}+3)} =$$

$$= \frac{(x+2)(\sqrt{7-x}+3)}{(\sqrt{7-x})^2-3^2} = \frac{(x+2)(\sqrt{7-x}+3)}{-(x+2)} = -(\sqrt{7-x}+3).$$

Итак,

$$\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{7-x}-3}=\lim_{x\to-2}(-\sqrt{7-x}-3)=$$

$$=-(\sqrt{7+2}+3)=-6.\ \blacksquare$$

§ 23. Производная

220. Приращение аргумента. Приращение функции. Пусть функция $y=f(x)$ определена в точках x и x_1. Разность x_1-x называется ***приращением аргумента***, а разность $f(x_1)-f(x)$ — ***приращением функции*** при переходе от значения аргумента x к значению аргумента x_1.

Приращение аргумента обозначают Δx; значит,

$$\Delta x=x_1-x,\ \text{т. е.}\ x_1=x+\Delta x.$$

Приращение функции обозначают Δf или Δy; значит,

$$\Delta f=f(x_1)-f(x)=f(x+\Delta x)-f(x).$$

П р и м е р 1. Найти приращение функции $y=x^3$ при переходе от значения аргумента x к значению $x+\Delta x$.

❑ Имеем $f(x)=x^3$, $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3$. Поэтому

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^3-x^3=x^3+3x^3\cdot\Delta x+$$

$$+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3.$$

Итак, $\Delta f = (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x$. ■

По этой формуле можно вычислять значение Δf для любых заданных x и Δx. Например, при $x = 1$, $\Delta x = -0{,}2$ получаем

$$\Delta f = f(0{,}8) - f(1) =$$

$$= (3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \cdot (-0{,}2) + (-0{,}2)^2) \cdot (-0{,}2) = -0{,}488.$$

П р и м е р 2. Доказать, что для линейной функции $y = kx + b$ справедливо равенство $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

❑ Имеем $f(x) = kx + b$, $f(x + \Delta x) = k(x + \Delta x) + b$. Значит,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (k(x + \Delta x) + b) - (kx + b) = k\Delta x,$$

откуда получаем $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k$. ■

221. Определение производной. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и в некоторой окрестности этой точки. Пусть, далее, Δx — приращение аргумента, причем такое, что точка $x + \Delta x$ принадлежит указанной окрестности точки x, а Δf — соответствующее приращение функции, т. е. $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$. Если существует предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx при условии $\Delta x \to 0$, то функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой в точке*** x, а этот предел называется ***значением производной функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** x и обозначается $f'(x)$ или y'. Итак,

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Отметим, что $f'(x)$ — это новая функция, определенная во всех таких точках x, в которых существует указанный выше предел; ее называют ***производной*** функции $y = f(x)$.

П р и м е р 1. Найти $f'(2)$, если $f(x) = x^2$.

❑ Имеем $f(2) = 2^2 = 4$, $f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2$, $\Delta f = f(2 + \Delta x) - f(2) = (2 + \Delta x)^2 - 4 = 4\Delta x + (\Delta x)^2$. Тогда

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4.$$

Значит, $f'(2) = 4$. ■

Используя определение, можно рекомендовать следующее <u>правило отыскания производной функции $y = f(x)$:</u>

1. Фиксируют значение x и находят $f(x)$.

2. Дают аргументу x приращение Δx и находят $f(x + \Delta x)$.

3. Вычисляют приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$.

4. Составляют отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

5. Находят предел отношения $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ называют ***разностным отношением***. Оно выражает *среднюю скорость изменения функции* f на промежутке с концами в точках x и $x + \Delta x$. Можно сказать, что ***производной*** функции f в точке x называется число, к которому стремится разностное отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Иногда вместо Δx пишут h, и тогда определение производной записывается следующим образом:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Иногда вместо $x + \Delta x$ пишут x_1, и тогда определение производной записывается так:

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Пример 2. Найти производную функции x^3.

❑ Используя правило отыскания производной, последовательно находим:

1. $f(x) = x^3$.

2. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$.

3. $\Delta f = f\ (x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 =$

$= (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x$.

4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$

5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) =$

$= 3x^2 + 3x \cdot 0 + 0^2 = 3x^2.$

Итак, $(x^3)' = 3x^2$. ■

222. Формулы дифференцирования. Таблица производных. Операцию отыскания производной называют ***дифференцированием***. В п. 221 получена одна из формул дифференцирования: $(x^3)' = 3x^2$. По такому же плану можно вывести формулы, которые приведены в следующей таблице производных:

1. $C' = 0.$
2. $(kx + b)' = k.$
3. $(x^r)' = rx^{r-1}.$
4. $(e^x)' = e^x.$
5. $(a^x)' = a^x \ln a.$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}.$
8. $(\sin x)' = \cos x.$
9. $(\cos x)' = -\sin x.$
10. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}.$
15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}.$

Например:

$(2x-3)'=2$ (по формуле 2);

$(x^{10})'=10x^9$, $\left(\frac{1}{x^2}\right)'=(x^{-2})'=-2x^{-3}$,

$(x^{\frac{3}{5}})'=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$ (по формуле 3);

$(6^x)'=6^x\ln 6$ (по формуле 5);

$(\lg x)'=\frac{1}{x\ln 10}$ (по формуле 7).

223. Дифференцирование суммы, произведения, частного. Во всех приведенных ниже теоремах будем считать заданные функции u и v дифференцируемыми в точке x.

Т.7.6. *Производная суммы двух функций вычисляется по формуле*

$$(u+v)'=u'+v'$$

(***теорема о дифференцировании суммы***).

Т.7.7. *Постоянный множитель можно вынести за знак производной*:

$$(Cu)'=Cu'$$

(***теорема о вынесении постоянного множителя за знак производной***).

Т.7.8. *Производная произведения двух функций вычисляется по формуле*

$$(uv)' = u'v + uv'$$

(***теорема о дифференцировании произведения***).

Т.7.9. *Производная частного двух функций вычисляется по формуле*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \textit{при условии } v(x) \neq 0$$

(***теорема о дифференцировании частного***).

П р и м е р 1. Найти производную функции:

а) $y = 2\sin x - 0{,}7\cos x + 5$; б) $x^{0,4}\log_3 x$.

❑ а) Используя теоремы 7.6 и 7.7, имеем

$$(2\sin x - 0{,}7\cos x + 5)' = (2\sin x)' + (-0{,}7\cos x)' + 5' =$$

$$= 2(\sin x)' - 0{,}7(\cos x)' + 5'.$$

Остается применить соответствующие формулы дифференцирования (см. п. 222). Тогда получим

$$2\cos x - 0{,}7(-\sin x) + 0 = 2\cos x + 0{,}7\sin x.$$

б) Согласно теореме 7.8, находим

$$(x^{0,4}\log_3 x)' = (x^{0,4})'\log_3 x + x^{0,4}(\log_3 x)'.$$

Теперь применим формулы дифференцирования и получим

$$0{,}4x^{-0,6}\log_3 x + x^{0,4}\cdot\frac{1}{x\ln 3} = \frac{0{,}4\ln x + 1}{x^{0,6}\cdot\ln 3}.$$ ■

П р и м е р 2. Вычислить $f'(0)$, если

$$f(x) = \frac{2^x}{x^2 + 1}.$$

❑ Сначала найдем $f'(x)$. Воспользовавшись теоремой 7.9, получим

$$f'(x) = \frac{(2^x)'(x^2 + 1) - 2^x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{2^x \ln 2 \cdot (x^2 + 1) - 2^x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Теперь вычислим

$$f'(0) = \frac{2^0 \ln 2 \cdot (0^2 + 1) - 2^0 \cdot 2 \cdot 0}{(0^2 + 1)^2} = \ln 2. \blacksquare$$

224. Сложная функция и ее дифференцирование. Рассмотрим функцию $y = \sin x^2$. Чтобы найти значение этой функции в фиксированной точке x, нужно: 1) вычислить x^2; 2) найти значение синуса при полученном значении x^2. Иными словами, сначала надо найти значение функции $g(x) = x^2$, а затем найти $\sin g(x)$. В подобных случаях говорят, что задана ***сложная функция*** $f(g(x))$. В данном случае $u = g(x) = x^2$, а $f(u) = \sin u$.

П р и м е р 1. Из каких функций составлена сложная функция $y = \operatorname{tg}^5(2x+1)$?

❑ Эта функция состоит из трех функций: $g(x) = 2x + 1$, $h(u) = \operatorname{tg} u$, $f(z) = z^5$. В самом деле,

$f(h(g(x))) = (\operatorname{tg}(g(x)))^5 = (\operatorname{tg}(2x+1))^5 = \operatorname{tg}^5(2x+1)$. ■

Пусть $y = f(g(x))$ — сложная функция, причем функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке u. Тогда функция $y = f(g(x))$ дифференцируема в точке x, причем

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Запись $f'(g(x))$ означает, что производная вычисляется по формуле для $f'(x)$, но вместо x нужно подставить $g(x)$.

П р и м е р 2. Найти $((3x+5)^4)'$.

❑ Здесь $g(x) = 3x + 5$, $f(u) = u^4$, $f(g(x)) = (3x+5)^4$. Значит,

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 4(3x+5)^3 \cdot (3x+5)' =$$

$$= 4(3x+5)^3 \cdot 3 = 12(3x+5)^3. \ ■$$

Отметим частный случай правила дифференцирования сложной функции:

$$(f(kx+b))' = kf'(kx+b).$$

Так, $(\sin 3x)' = 3\cos 3x$; $(\sqrt{5-7x})' = -\dfrac{7}{2\sqrt{5-7x}}$.

225. Физический смысл производной. Скорость произвольно движущейся точки является векторной величиной, она определяется с помощью вектора — перемещения точки за промежуток времени. Однако если точка движется по прямой, то ее положение, перемещение, скорость, ускорение можно задать числами, т. е. считать скалярными величинами. Пусть $s = s(t)$ — скалярный закон прямолинейного движения, тогда $s'(t)$ *выражает скорость движения в момент* t (*мгновенную скорость*), т. е. $v = s'(t)$.

Например, закон свободного падения тела выражается зависимостью $s = 0{,}5gt^2$. Тогда скорость падения в момент t такова:

$$v = s' = (0{,}5gt^2)' = 0{,}5g \cdot (t^2)' = 0{,}5g \cdot 2t = gt.$$

Пусть теперь точка A движется по криволинейной траектории. Обозначим координаты точки A в момент времени t через $x\ (t)$ и $y\ (t)$. Эти координаты зависят от t и являются функциями от t. Рассмотрим мгновенную скорость движущейся точки A в момент времени t.Вектор мгновенной скорости $\bar{v}$ направлен по касательной к траектории в точке A. Координаты вектора $\bar{v}$ также зависят от времени t: они равны соответственно $x'(t)$ и $y'(t)$, где x' и y' — производные функций x и y в точке t.

Вообще, *производная функции* f *в точке* X *выражает скорость изменения функции в точке* X, т. е. скорость протекания процесса, описываемого зависимостью $y = f(x)$. В этом состоит <u>*физический смысл*</u>

<u>*производной*</u>. Например, если дана функция $y = x^2$, то $f'(x) = 2x$; при $x = 2$ находим $f'(2) = 4$, а при $x = 3$ имеем $f'(3) = 6$. Это значит, что в точке $x = 2$ функция изменяется в 4 раза быстрее аргумента, а в точке $x = 3$ — в 6 раз быстрее.

226. Вторая производная и ее физический смысл. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$. Это новая функция, которая в свою очередь может иметь производную. Производная функции $f'(x)$ называется ***второй производной*** функции $y = f(x)$ и обозначается $f''(x)$ или y''.

Пример 1. Найти y'', если $y = x^{10}$.

❑ Имеем $(x^{10})' = 10x^9$, а $(10x^9)' = 90x^8$. Итак, $(x^{10})'' = 90x^8$. ■

Пусть $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения. Тогда *вторая производная выражает скорость изменения скорости этого движения, т. е. ускорение* $a = s''(t)$. В этом состоит <u>*физический смысл второй производной*</u>.

Пример 2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s = \dfrac{1}{2t-1}$. Доказать, что сила, действующая на тело, пропорциональна кубу пройденного пути.

❑ Согласно второму закону Ньютона $F = ma$, где F — сила, действующая на тело, a — ускорение,

m — масса; $a = s''$. Имеем

$$s' = ((2t-1)^{-1})' = -(2t-1)^{-2} \cdot (2t-1)' = -2(2t-1)^{-2};$$

$$s'' = (-2(2t-1)^{-2})' = -2 \cdot (-2) \cdot (2t-1)^{-3} \cdot (2t-1)' =$$

$$= 8(2t-1)^{-3} = \frac{8}{(2t-1)^3}.$$

Значит, $F = ma = \dfrac{8}{(2t-1)^3} = 8ms^3$, т. е. сила F пропорциональна s^3. ■

227. Касательная к графику функции. Рассмотрим график функции $y = f(x)$, дифференцируемой в точке a, выделим на нем точку $M(a; f(a))$ и проведем секущую MP_2, где P_2 — точка графика, соответствующая значению аргумента $a + \Delta x$ (рис. 93, *а*).

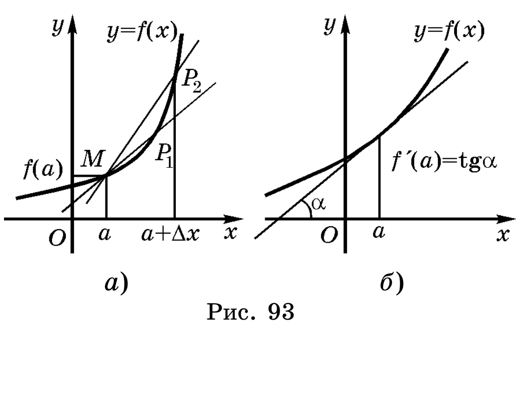


Рис. 93

Угловой коэффициент прямой MP_2 вычисляется по формуле $k_{\text{сек}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (см. п. 220).

Если точка P движется по графику, приближаясь к точке M, то прямая MP начнет поворачиваться вокруг точки M. Чаще всего в этом процессе секущая MP стремится занять некоторое предельное положение. Оно представляет собой прямую, с которой практически сливается график функции $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки a; эта прямая и есть касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$. Угловой коэффициент такой предельной прямой (обозначим его k) получается из углового коэффициента секущей в процессе предельного перехода от P к M: $k = \lim\limits_{P \to M} k_{\text{сек}}$. Условие $P \to M$ можно заменить условием $\Delta x \to 0$, а вместо $k_{\text{сек}}$ написать $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. В итоге получаем $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ — это значение производной функции $y = f(x)$ в фиксированной точке $x = a$, т. е. $f'(a)$ (см. п. 221).

Итак, $k = f'(a)$, т. е. *значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$* (рис.93, *б*). В этом состоит *геометрический смысл производной*.

Таким образом, ***касательную*** к графику функции f, дифференцируемой в точке a, можно истолковать: как предельное положение секущей при $\Delta x \to 0$; как прямую, проходящую через точку $(a; f(a))$, с отрезком которой практически сливается график функции f при значениях x, близких к a; наконец, как прямую, проходящую через точку $(a; f(a))$ и имеющую угловой коэффициент, равный $f'(a)$.

Если функция f дифференцируема в точке $x = a$, то в этой точке к графику можно провести касательную; верно и обратное: *если в точке $x = a$ к графику функции f можно провести невертикальную касательную, то функция дифференцируема в точке $x = a$.*

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеет вид

$$y = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{1}$$

П р и м е р. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 4$.

❑ Имеем $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $a = 4$, $f(a) = \sqrt{4} = 2$, $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = 0{,}25$. Подставив значения a, $f(a)$ и $f'(a)$ в уравнение (1), получим

$$y = 2 + 0{,}25(x - 4), \quad \text{т. е.} \quad y = 0{,}25x + 1. \ \blacksquare$$

228. Формула Лагранжа.

Т.7.10. *Если функция* f *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и дифференцируема в интервале* (a, b), *то найдется такая точка* $c \in (a, b)$, *что*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (1)$$

Формула (1) называется ***формулой Лагранжа***, а теорема 7.10 — ***теоремой Лагранжа***.

Геометрический смысл формулы Лагранжа состоит в следующем: если дуга AB представляет собой график непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f, причем в любой точке дуги к ней можно провести касательную, то на дуге AB найдется точка C с абсциссой $x = c$ такая, что касательная к кривой в точке C (ее угловой коэффициент равен $f'(c)$) будет параллельна прямой AB (ее угловой коэффициент равен $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$; прямые параллельны, если их угловые коэффициенты равны). Геометрическая иллюстрация формулы Лагранжа представлена на рис. 94.

§ 24. Применения производной

229. Приближенные вычисления с помощью производной. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда для аргументов x, достаточно близких к x_0, справедлива приближенная формула

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x)(x - x_0). \qquad (1)$$

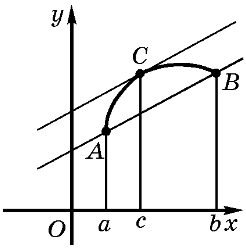


Рис. 94

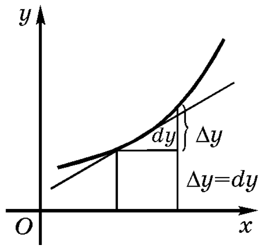


Рис. 95

П р и м е р. Используя формулу (1), найти приближенное значение $\sqrt[3]{8{,}12}$.

❑ Положим $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$, $x = 8{,}12$. Тогда $f(x_0) = \sqrt[3]{8} = 2$, $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, и, значит, $f'(x_0) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \dfrac{1}{12}$. По формуле (1), находим

$$\sqrt[3]{8{,}12} \approx 2 + \frac{1}{12}(8{,}12 - 8), \text{ т. е. } \sqrt[3]{8{,}12} \approx 2{,}01. \ ■$$

Из формулы (1), в частности, получается приближенная формула

$$(1 + \Delta x)^r \approx 1 + r\Delta x,$$

справедливая для любого рационального числа r и для достаточно малых значений Δx.

230. Дифференциал. ***Дифференциалом*** функции называют произведение ее производной на приращение аргумента. Для функции $y = f(x)$ дифференциал обозначают dy или df. Таким образом, $dy = f'(x)\Delta x$. Поскольку для функции $y = x$ имеем $dy = 1 \cdot \Delta x$, т. е. $dx = \Delta x$, дифференциал функции f обычно записывают в форме

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Из этой записи получается одно из обозначений производной $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, которое можно трактовать как отношение дифференциалов.

Отметим следующие два свойства дифференциала:

1^0. *Дифференциал функции — это линейная функция приращения аргумента.*

2^0. *Дифференциал функции — это главная часть приращения функции, т. е.* $\Delta y \approx dy$ (рис. 95).

Понятие дифференциала является основой разнообразных физических приложений производной.

Рассмотрим, например, работу, которую совершает заданная сила F при перемещении по отрезку оси Ox. Если сила постоянна, то работа A равна произведению F на длину пути. Если же сила меняется, то ее можно рассматривать как функцию от x, т. е. $F = F(x)$. Приращение работы ΔA на отрезке $[x, x + dx]$ нельзя точно вычислить как произведение $F(x)\,dx$, но при достаточно малых dx можно считать, что сила меняется незначительно и указанное произведение представляет собой главную часть ΔA, т. е.

является дифференциалом работы $dA = F(x)\,dx$. Итак, *силу можно считать производной работы по перемещению*.

Рассуждая аналогично и используя понятие дифференциала, легко установить, что:

силу тока можно считать производной заряда по времени;

теплоемкость можно считать производной теплоты по температуре.

231. Применение производной к исследованию функций на возрастание (убывание). Во многих случаях производная позволяет сравнительно просто исследовать функцию на монотонность. Это достигается с помощью следующих двух теорем:

Т.7.11. *Пусть функция f определена и непрерывна на промежутке X и во всех внутренних точках этого промежутка имеет положительную производную* $(f'(x) > 0)$. *Тогда функция возрастает на X.*

Т.7.12. *Пусть функция f определена и непрерывна на промежутке X и во всех внутренних точках этого промежутка имеет отрицательную производную* $(f'(x) < 0)$. *Тогда функция убывает на X.*

Отметим, что обе теоремы сохраняют силу и тогда, когда внутри промежутка X соответственно $f'(x) \geq 0$ или $f'(x) \leq 0$, но равенство $f'(x) = 0$ выполняется лишь в конечном числе точек этого промежутка. Так, для функции $y = x^3$ производная $f'(x) = 3x^2$ всюду неотрицательна, причем обращается в нуль лишь в одной точке $x = 0$. Значит, функция $y = x^3$ возрастает на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

П р и м е р. Исследовать на монотонность функцию:

а) $y = x^5 + x^3 + 1$; б) $y = 0{,}5x^2 - 3\ln(x-2)$.

❑ а) Находим $y' = 5x^4 + 3x^2$. Справедливо неравенство $5x^4 + 3x^2 \geq 0$, причем знак равенства имеет место лишь в одной точке $x = 0$. Значит, по теореме 7.11 функция $y = x^5 + x^3 + 1$ возрастает на всей числовой прямой.

б) Имеем

$$y' = \frac{1}{2}\cdot 2x - 3\cdot\frac{1}{x-2} = x - \frac{3}{x-2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 3}{x-2} = \frac{(x-3)(x+1)}{x-2}.$$

Знаки полученного выражения меняются так, как показано на рис. 96. Но область определения исследуемой функции задается неравенством $x > 2$. Поэтому из отмеченных на рисунке четырех промежутков нас интересуют только два: промежуток $(2, 3)$ — на нем $y' < 0$, значит, функция здесь убывает, и про-

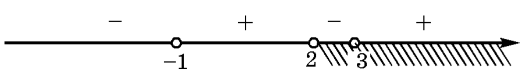


Рис. 96

межуток $(3, +\infty)$ — на нем $y' > 0$, значит, функция здесь возрастает. ■

232. Применение производной к исследованию функций на экстремум. Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет ***максимум*** (***минимум***) в точке $x = a$, если существует окрестность этой точки, в которой $f(x) < f(a)$ (соответственно $f(x) > f(a)$) для $x \neq a$. Так, функция, график которой изображен на рис. 97, имеет максимум в точках x_1 и x_3 и минимум в точках x_2 и x_4.

Точки максимума и минимума объединяются общим термином — ***точки экстремума***.

Обратимся снова к рис. 97. Замечаем, что в точках x_1 и x_4 к графику функции можно провести касательные, причем эти касательные параллельны оси Ox, а значит, угловой коэффициент каждой из касательных равен нулю; итак, $f'(x_1) = 0$, $f'(x_4) = 0$. В точках x_2 и x_3 касательную к графику провести нельзя, значит, в этих точках производная функции $f(x)$ не существует. Таким образом, в точках экст-

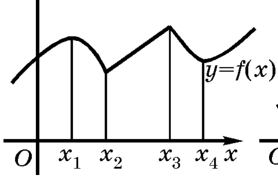


Рис. 97

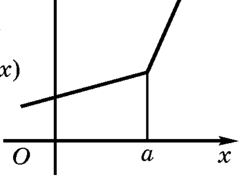


Рис. 98

ремума на рис. 97 производная либо равна нулю, либо не существует. Это — общее положение, подтверждаемое следующей теоремой:

Т.7.13. *Если функция* $y = f(x)$ *имеет экстремум в точке* $x = a$, *то либо* $f'(a) = 0$, *либо* $f'(a)$ *не существует* (***необходимое условие экстремума***).

Точки, в которых $f'(a) = 0$ или $f'(a)$ не существует и которые принадлежат области определения функции, называются ***критическими***. Теорема 7.13 означает, что экстремумы функций могут достигаться только в критических точках. Обратная теорема, однако, неверна: *не во всякой критической точке функция имеет экстремум*. Так, функция $y = x^3$ имеет одну критическую точку $x = 0$ (в этой точке $y' = 3x^2 = 0$), но в ней функция не имеет ни максимума, ни минимума (см. рис. 27). Функция, график которой изображен на рис. 98, имеет критическую точку $x = a$ — это точка излома, в ней y' не существует, но в этой точке нет ни минимума, ни максимума.

Как узнать, когда критическая точка функции является точкой экстремума? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Т.7.14. *Пусть* $x = a$ — *критическая точка функции* $y = f(x)$ *и пусть существует интервал* (b, c), *содержащий точку a внутри себя и такой, что на каждом из интервалов* (b, a) *и* (a, c) *производная* $f'(x)$ *существует и сохраняет постоянный знак. Тогда:*

1) *если на* $(b,\ a)$ *производная* $y' > 0$, *а на* $(a,\ c)$ *производная* $y' < 0$, *то* $x = a$ *— точка максимума функции* $y = f(x)$;

2) *если на* $(b,\ a)$ *производная* $y' < 0$, *а на* $(a,\ c)$ *производная* $y' > 0$, *то* $x = a$ *— точка минимума функции* $y = f(x)$;

3) *если и на* $(b,\ a)$, *и на* $(a,\ c)$ *производная* $y' < 0$ *или* $y' > 0$, *то* $x = a$ *не является точкой экстремума функции* $y = f(x)$

(***достаточное условие экстремума***).

Из теорем 7.13 и 7.14 вытекает следующее правило исследования функции $y = f(x)$ на экстремум:

1. Находят область определения функции.

2. Находят $f'(x)$.

3. Находят точки, в которых выполняется равенство $f'(x) = 0$.

4. Находят точки, в которых $f'(x)$ не существует.

5. Отмечают на координатной прямой все критические точки и область определения функции $y = f(x)$; получают промежутки области определения функции, на каждом из которых производная функции $y = f(x)$ сохраняет постоянный знак.

6. Определяют знак y' на каждом из промежутков, полученных в п. 5.

7. Делают выводы о наличии или отсутствии экстремума в каждой из критических точек в соответствии с теоремой 7.14.

П р и м е р. Исследовать на экстремум функцию:

а) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$; б) $y = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x - 1}$.

❑ а) 1. Функция определена при всех x.

2. Имеем $y' = 6x^2 - 30x + 36$.

3. Из уравнения $6x^2 - 30x + 36 = 0$ получим $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

4. Производная y' существует при всех x.

5. Отметим точки $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ на координатной прямой.

6. Имеем $y' = 6(x - 2)(x - 3)$. Знаки производной на полученных промежутках отмечены на рис. 99.

7. При переходе через точку $x = 2$ слева направо производная y' меняет знак с «+» на «−», значит, $x = 2$ — точка максимума; при переходе через точку $x = 3$ производная меняет знак с «−» на «+», значит, $x = 3$ — точка минимума. В точке $x = 2$ имеем $y_{\max} = 29$, в точке $x = 3$ имеем $y_{\min} = 28$.

б) 1. Область определения: $x \neq 1$.

2. Имеем

$$y' = \frac{(x^2 - 6x + 9)'(x - 1) - (x^2 - 6x + 9)(x - 1)'}{(x - 1)^2} =$$

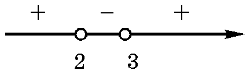


Рис. 99

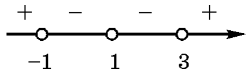


Рис. 100

$$= \frac{(2x-6)(x-1)-(x^2-6x+9)\cdot 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(x-3)(2(x-1)-(x-3))}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}.$$

3. Производная $y' = 0$ при $x = 3$ или при $x = -1$.

4. Производная y' не существует при $x = 1$, но эта точка не принадлежит области определения функции.

5. Отметим на координатной прямой критические точки $x = -1$, $x = 3$ и точку $x = 1$.

6. Знаки производной в полученных промежутках отмечены на рис. 100.

7. Итак, $x = -1$ — точка максимума, $y_{\max} = -8$. $x = 3$ — точка минимума, $y_{\min} = 0$. ■

233. Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке. Говорят, что функция $y = f(x)$, определенная на промежутке X, достигает на нем своего ***наибольшего*** (***наименьшего***) ***значения***, если существует точка c, принадлежащая этому промежутку такая, что для всех x из X выполняется неравенство $f(x) \le f(c)$ (соответственно $f(x) \ge f(c)$).

Т.7.15. *Функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений.*

Наибольшее значение M и наименьшее значение m непрерывной функции могут достигаться как внутри отрезка, так и на его концах. Если наибольшего (наименьшего) значения функция достигает во внутренней точке отрезка, то эта точка является точкой экстремума; впрочем, для практики достаточно того, что эта точка критическая. Наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ обозначаются так: $y_{\text{наиб}}$, $y_{\text{наим}}$ или $\max\limits_{[a,b]} f(x)$, $\min\limits_{[a,b]} f(x)$.

Правило отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

1. Находят $f'(x)$.

2. Находят точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, и отбирают из них те, что лежат внутри отрезка $[a, b]$.

3. Вычисляют значения функции $y = f(x)$ в точках, полученных в п. 2, и на концах отрезка, а затем выбирают из них наибольшее и наименьшее; они и будут соответственно наибольшим и наименьшим значениями функции f на отрезке $[a, b]$.

П р и м е р. Найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x$ на отрезке $[0, 6]$.

❑ 1. Находим $y' = 3x^2 - 6x - 45$.

2. Производная y' существует при всех x. Найдем точки, в которых $y' = 0$: $3x^2 - 6x - 45 = 0$,

$x^2 - 2x - 15 = 0$, откуда $x_1 = 5$, $x_2 = -3$. Отрезку $[0, 6]$ принадлежит лишь точка $x = 5$.

3. Вычислим значения функции в точках $x = 0$, $x = 5$, $x = 6$. Соответственно получим $y = 0$, $y = -175$, $y = -162$. Наибольшим из этих значений является число 0, наименьшим — число -175. Итак, $y_{\text{наиб}} = 0$, $y_{\text{наим}} = -175$. ■

234. Отыскание наибольшего или наименьшего значения непрерывной функции на незамкнутом промежутке. Задача отыскания наибольшего (наименьшего) значения непрерывной функции на незамкнутом промежутке, например на интервале (a, b), решается по тому же правилу, что и для отрезка $[a, b]$ (см. п.233) с тем отличием, что на третьем этапе вместо вычисления значений функции на концах отрезка находят пределы функции при стремлении x к концам интервала. Отметим, что указанная задача не всегда имеет решение, как это имеет место в случае отрезка.

Иногда для отыскания наибольшего или наименьшего значения непрерывной функции $y = f(x)$ в промежутке (a, b) оказываются полезными два утверждения:

1^0. *Если функция $y = f(x)$ имеет в промежутке X только одну точку экстремума $x = c$, причем это точка максимума, то $f(c)$ — наибольшее значение функции в промежутке X.*

2^0. *Если функция $y = f(x)$ имеет в промежутке X только одну точку экстремума $x = c$, причем это точка минимума, то $f(c)$ — наименьшее значение функции в промежутке X.*

235. Задачи на отыскание наибольших или наименьших значений величин. Такие задачи удобно решать, используя следующую общую схему.

1. Выявляют оптимизируемую величину (т. е. величину, наибольшее или наименьшее значение которой требуется найти) и обозначают ее буквой y (или S, p, r, R и т. д. в зависимости от условий задачи).

2. Одну из неизвестных величин (сторону, угол и т. д.) принимают за независимую переменную и обозначают буквой x; устанавливают реальные границы изменения x в соответствии с условиями задачи.

3. Исходя из конкретных условий задачи, выражают y через x и известные величины.

4. Для полученной на предыдущем этапе функции $y = f(x)$ находят наибольшее или наименьшее значение (в зависимости от требований задачи) в промежутке реального изменения x, найденном в п.2.

5. Интерпретируют результат п. 4 для данной конкретной задачи.

Пример. Через фиксированную точку M внутри угла провести прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади (рис. 101).

❑ 1. Оптимизируемая величина — площадь S треугольника AOB.

2. Проведем $DM \parallel OB$, $MK \parallel OA$. Положим $KB = x$; реальные границы изменения x таковы: $0 < x < +\infty$.

3. Поскольку M — фиксированная точка, отрезки DM и KM также фиксированы; положим $DM = a$, $KM = b$ и выразим S через x, a, b.

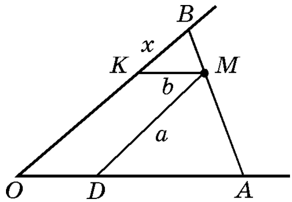


Рис. 101

Рассмотрим треугольники MKB и AOB, они подобны, значит, $\dfrac{MK}{AO} = \dfrac{KB}{OB}$, т. е. $\dfrac{b}{AO} = \dfrac{x}{a + x}$. Отсюда находим $AO = \dfrac{b(a + x)}{x}$.

Далее имеем $S = 0{,}5AO \cdot OB \cdot \sin\alpha$, где $\alpha = \angle AOB$ (см. п. 277). Поэтому

$$S = 0{,}5 \cdot \frac{b(a + x)}{x} \cdot (a + x)\sin\alpha = 0{,}5b\sin\alpha \cdot \frac{(a + x)^2}{x}.$$

4. Рассмотрим функцию $S = k \cdot \dfrac{(a + x)^2}{x}$, $0 < x < +\infty$. где $k = 0{,}5b\sin\alpha$. Найдем ее наименьшее значение.

а) Имеем

$$S' = k \cdot \frac{2(a + x)x - (a + x)^2}{x^2} = k \cdot \frac{(a + x)(x - a)}{x^2}.$$

б) Производная не существует в точке $x = 0$, а обращается в нуль в точках $x = -a$, $x = a$. Из этих трех точек промежутку $(0, +\infty)$ принадлежит лишь точка $x = a$.

в) При переходе через точку a производная S' меняет знак с «$-$» на «$+$», значит, $x = a$ — единственная в промежутке $(0, +\infty)$ точка экстремума, причем это точка минимума, и рассматриваемая функция S достигает в этой точке своего наименьшего значения (см. утверждение 2^0 из п. 234).

5. Вернемся к исходной геометрической задаче. Так как $x = KB = a$ и $OK = a$, то MK — средняя линия ΔAOB, значит, M — середина AB. Таким образом, чтобы от сторон угла отсечь треугольник наименьшей площади, надо провести через точку M прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между сторонами угла, делился в точке M пополам. ■

236. Применение производной для доказательства тождеств. Доказательство тождеств с помощью производной основано на следующей теореме:

Т.7.16. *Для того чтобы непрерывная на промежутке X функция была постоянна на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы ее производная во внутренних точках промежутка X была равна нулю* (***условие постоянства функции***).

П р и м е р. Доказать тождество

$$\sin^2 x + \cos(x - 60^\circ)\cos(x + 60^\circ) = 0{,}25.$$

❑ Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sin^2 x + \cos(x - 60^\circ)\cos(x + 60^\circ)$$

и найдем ее производную. Имеем

$$f'(x) = 2\sin x\cos x - \sin(x - 60^\circ)\cos(x + 60^\circ) -$$

$$-\cos(x - 60^\circ)\sin(x + 60^\circ) = \sin 2x -$$

$$-\sin((x - 60^\circ) + (x + 60^\circ)) = \sin 2x - \sin 2x = 0.$$

Значит, $f'(x) = 0$ при всех x, а потому $f(x)$ — постоянная функция, $f(x) = C$. Остается найти значение постоянной C. Для этого достаточно вычислить значение $f(x)$ при любом значении x, например при $x = 0$. Находим

$$f(0) = \sin^2 0 + \cos(-60^\circ)\cos 60^\circ = 0 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25.$$

Итак, $f(0) = 0{,}25$, т. е. $C = 0{,}25$. Тем самым справедливость доказываемого тождества установлена.■

237. Применение производной для доказательства неравенств.

П р и м е р. Доказать, что если $\alpha < \beta$, то

$$\alpha + \cos\alpha < \beta + \cos\beta.$$

❑ Рассмотрим функцию $f(x) = x + \cos x$ и найдем ее производную $f'(x) = 1 - \sin x$. Замечаем, что $f'(x) \geq 0$, т. е. функция $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой. Значит, из $\alpha < \beta$ вытекает $f(\alpha) < f(\beta)$, т. е. $\alpha + \cos\alpha < \beta + \cos\beta$. ■

238. Общая схема построения графика функции. Пусть требуется построить график функции

$y = f(x)$. Для этого полезно придерживаться следующей общей схемы:

1. Находят область определения функции.

2. Находят точки, в которых $f(x) = 0$ (это точки пересечения графика с осью абсцисс).

3. Отмечают на оси Ox точки, найденные в п. 2, и точки, в которых функция не определена, найденные в п. 1; эти точки разбивают ось абсцисс на несколько промежутков, на каждом из которых функция сохраняет постоянный знак. Устанавливают знак функции в каждом из промежутков.

4. Исследуют функцию на четность и нечетность (в случае четности или нечетности функции можно ограничиться исследованием и построением графика при $x \geq 0$, а затем воспользоваться симметрией графика).

5. Находят вертикальные и горизонтальные асимптоты (см. пп. 218 и 215).

6. Исследуют функцию на экстремумы.

7. Находят несколько дополнительных контрольных точек и строят график.

Для периодических функций полезно с самого начала найти основной период T (см. п. 96), с тем чтобы, исследовав функцию и построив ветвь графика на промежутке $[-0{,}5T,\ 0{,}5T]$, затем, воспользовавшись периодичностью, построить весь график.

Если выполнение каких-либо шагов предложенной схемы сопряжено с техническими трудностями, то их можно опустить.

П р и м е р . Построить график функции

$$y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}.$$

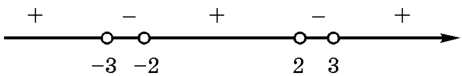


Рис. 102

❑ 1. Находим область определения: $x \neq \pm 2$.

2. Решив уравнение $\dfrac{x^2-9}{x^2-4}=0$, находим $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

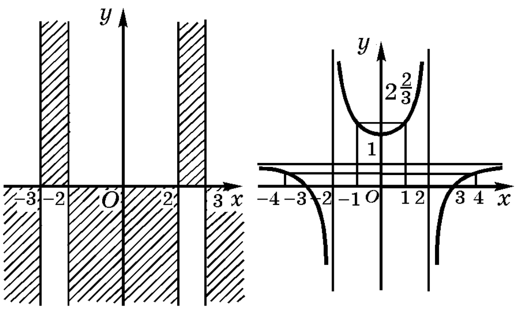
3. Точки 2, –2, 3 и –3 разбивают ось абсцисс на пять промежутков. Изменение знаков функции по промежуткам представлено на рис. 102; соответствующая иллюстрация на координатной плоскости дана на рис. 103, *а* (заштрихованы те полуполосы, где графика не будет).

4. Функция четная, так как $f(-x) = f(x)$. Значит, ее график симметричен относительно оси ординат.

5. Прямые $x = 2$, $x = -2$ — вертикальные асимптоты (см. п. 218).

Чтобы найти горизонтальную асимптоту, вычислим $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-9}{x^2-4}$. Для этого числитель и знаменатель дроби разделим почленно на x^2 (см. п. 216). Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-9}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{9}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{9}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x^2}}=\frac{1-0}{1+0}=1.$$



а) *б*)

Рис. 103

Отсюда следует, что $y = 1$ — горизонтальная асимптота графика (см. п. 215).

6. Находим

$$y' = \frac{(x^2-9)'(x^2-4)-(x^2-9)(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2-4)-(x^2-9)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3-8x-2x^3+18x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{10x}{(x^2-4)^2}.$$

Производная обращается в нуль в точке $x = 0$ и не существует в точках $x = \pm 2$. Но последние не принадлежат области определения функции, значит, функция имеет лишь одну критическую точку $x = 0$. При переходе через нее производная меняет знак с «−»

на «+», поэтому $x = 0$ — точка минимума: $y_{\min} = f(0) = 2{,}25$.

7. В качестве дополнительных возьмем точки $x = \pm 1$, $x = \pm 4$. Имеем $f(1) = f(-1) = \dfrac{8}{3}$, $f(4) = f(-4) = \dfrac{7}{12}$.

Использовав найденные точки, строим график (рис. 103, *б*). ■

§ 25. Первообразная и интеграл

239. Первообразная. Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на промежутке X, если для любого x из X выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

П р и м е р 1. Пусть $f(x) = x^3$. Тогда первообразная имеет вид $F(x) = 0{,}25x^4$, так как $F'(x) = (0{,}25x^4)' = (0{,}25x)' = x^3 = f(x)$.

Это не единственное решение задачи. Так, в качестве первообразной можно было взять и функцию $F_1(x) = 0{,}25x^4 + 3$, и функцию $F_2(x) = 0{,}25x^4 - 5$ и вообще любую функцию вида $0{,}25x^4 + C$.

Т.7.17. *Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X, то у функции $f(x)$ бесконечно много первообразных, и все эти первообразные имеют вид $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная* (***основное свойство первообразной***).

П р и м е р 2. Найти общий вид первообразных для функции $f(x) = x^r$, где $r \neq -1$.

❑ Одной из первообразных является функция $F(x) = \dfrac{x^{r+1}}{r+1}$, поскольку

$$F'(x) = \left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)' = \frac{1}{r+1} \cdot (r+1)x^r = x^r = f(x).$$

Значит, $\dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C$ — общий вид первообразных.■

240. Таблица первообразных. Учитывая, что отыскание первообразной есть операция, обратная дифференцированию, и используя таблицу производных (см. п. 222), получаем следующую таблицу первообразных (для простоты в ней приведена одна первообразная $F(x)$, а не общий вид первообразных $F(x) + C$):

Функция	Первообразная	Функция	Первообразная
$f(x) = k$	$F(x) = kx$	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
$f(x) = x^r$	$F(x) = \dfrac{x^{r+1}}{r+1}$	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
$(r \neq -1)$		$f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert$	$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \operatorname{tg} x$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x$
$f(x) = a^x$	$F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a}$	$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \operatorname{arctg} x$

241. Правила вычисления первообразных. Пусть нужно найти первообразную функции $y = f(x)$. Иногда это можно сделать с помощью таблицы первообразных из п. 240; например, для функции $f(x) = x^{0,6}$ по соответствующей формуле таблицы находим $F(x) = \frac{x^{0,6+1}}{0,6+1}$, т. е. $F(x) = \frac{5}{8}x^{1,6}$, а общий вид первообразных таков: $\frac{5}{8}x^{1,6} + C$. Однако чаще, прежде чем воспользоваться таблицей, приходится применять следующие правила вычисления первообразных.

1^0. *Если* $F(x)$ *— первообразная для* $f(x)$, *а* $H(x)$ *— первообразная для* $h(x)$, *то* $F(x) + H(x)$ *— первообразная для* $f(x) + h(x)$.

Иными словами, *первообразная суммы равна сумме первообразных*.

2^0. *Если* $F(x)$ *— первообразная для* $f(x)$ *и* k *— постоянная, то* $kF(x)$ *— первообразная для* $kf(x)$.

Иными словами, *постоянный множитель можно вынести за знак первообразной*.

3^0. *Если* $F(x)$ *— первообразная для* $f(x)$ *и* k, b *— постоянные, причем* $k \neq 0$, *то* $\frac{1}{k}F(kx+b)$ *— первообразная для* $f(kx+b)$.

П р и м е р. Найти общий вид первообразных для функции $f(x) = 4\sin^2 2x$.

❑ Воспользуемся тем, что $4\sin^2 2x = 2(1 - \cos 4x)$ (см. п. 83). Тогда $f(x) = 2 - 2\cos 4x$. Для функции $f_1(x) = 2$ первообразная есть $2x$, а для функции $f_2(x) = \cos 4x$ согласно правилу 3^0 первообразной является $0{,}25\sin 4x$. Тогда для функции $f(x) = f_1(x) - 2f_2(x)$ в силу правил 1^0 и 2^0 первообразная имеет вид $2x - 2 \cdot 0{,}25\sin 4x$, т. е. $2x - 0{,}5\sin 4x$. Итак, $2x - 0{,}5\sin 4x + C$ — это общий вид первообразной для данной функции.■

242. Интеграл. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на n частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$: для однородности обозначений положим $a = x_0$, $b = x_n$. Введем обозначения: $x_1 - x_0 = \Delta x_0$, $x_2 - x_1 = \Delta x_1$, $x_3 - x_2 = \Delta x_2$, ..., $x_n - x_{n-1} = \Delta x_{n-1}$ и рассмотрим сумму

$$f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}. \quad (1)$$

Она называется ***интегральной суммой*** для функции $y = f(x)$ по отрезку $[a, b]$.

На практике удобнее делить отрезок $[a, b]$ на n равных частей. Тогда $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$ и сумма (1) принимает вид

$$\frac{b-a}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right).$$

Значение суммы зависит только от числа n, поэтому обозначим ее S_n.

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ имеет предел, который называют ***интегралом*** функции f от a до b и обозначают $\int\limits_a^b f(x)dx$ (читается: «интеграл от a до b эф от икс дэ икс»):

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Числа a и b называют соответственно ***нижним*** и ***верхним пределами интегрирования***, знак $\int$ — ***знаком интеграла***, функцию $f(x)$ — ***подынтегральной функцией***, а переменную x — ***переменной интегрирования***.

П р и м е р. Найти $\int\limits_0^1 xdx$.

❑ Составим интегральную сумму S_n для функции $f(x) = x$ на отрезке $[0, 1]$. Для этого разобьем указанный отрезок на n равных частей точками $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ (рис. 104). Имеем $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n}$, $f\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{3}{n}, \ldots, f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}$. Интеграль-

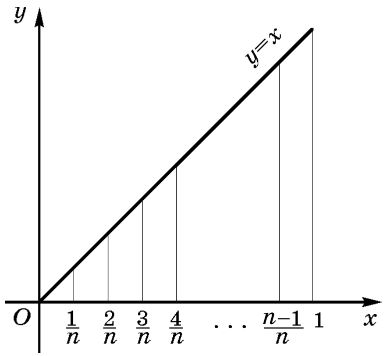


Рис. 104

ная сумма S_n имеет вид

$$S_n = \frac{1}{n}\left(0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)}{n^2}.$$

В числителе содержится сумма первых $(n - 1)$ членов арифметической прогрессии, у которой первый член равен 1, а $(n - 1)$-й равен $n - 1$. Тогда сумма членов числителя вычисляется по формуле (2) из п. 209:

$$\frac{1 + (n-1)}{2}(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

В итоге получаем

$$S_n = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

Далее имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$. Итак,

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}. \blacksquare$$

243. Связь между интегралом и первообразной (формула Ньютона — Лейбница). *Если* $F(x)$ *— первообразная для* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{1}$$

(***формула Ньютона–Лейбница***).

На практике в формуле (1) вместо $F(b) - F(a)$ пишут $F(x)\Big|_a^b$.

Иногда формулу Ньютона–Лейбница принимают за определение интеграла, т. е. ***интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называют разность $F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$.

П р и м е р. Вычислить $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$.

❑ Для функции $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$ первообразной является $F(x) = 0{,}5 \ln |2x+3|$. Значит,

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x+3} = 0{,}5 \ln |2x+3| \Big|_1^2 = 0{,}5(\ln 7 - \ln 5) = \frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}. \blacksquare$$

244. Правила вычисления интегралов.

1^0. *Интеграл суммы равен сумме интегралов*:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

2^0. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла*:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

П р и м е р. Вычислить $\displaystyle\int_{-2}^{1} (2x^3 + 3x - 4)dx$.

❑ Используя правила 1^0 и 2^0, получим

$$\int_{-2}^{1} (2x^3 + 3x - 4)dx = \int_{-2}^{1} 2x^3 dx + \int_{-2}^{1} 3x dx + \int_{-2}^{1} (-4)dx =$$

$$= 2\int_{-2}^{1} x^3 dx + 3\int_{-2}^{1} x dx - \int_{-2}^{1} 4dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_{-2}^{1} + 3 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-2}^{1} - 4x\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - 16) + \frac{3}{2}(1 - 4) - 4(1 + 2) = -24. \blacksquare$$

245. Использование интеграла для вычисления площадей плоских фигур. Рассмотрим плоскую фигуру Φ, представляющую собой множество точек координатной плоскости xOy, лежащее в полосе между прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и ограниченное сверху

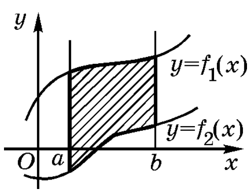


Рис. 105

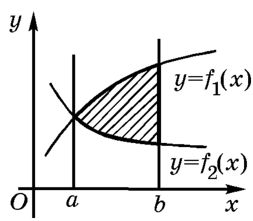


Рис. 106

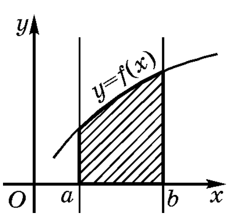


Рис. 107

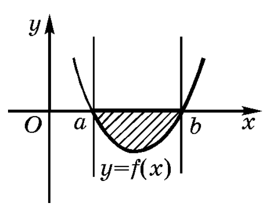


Рис. 108

и снизу графиками непрерывных на $[a, b]$ функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ таких, что для всех x из $[a, b]$ справедливо неравенство $f_1(x) \geq f_2(x)$. Примеры таких фигур представлены на рис. 105–110. В частности, фигура, изображенная на рис. 107, ограничена сверху графиком функции $y = f(x)$, а снизу — прямой $y = 0$. Такая фигура называется ***криволинейной трапецией***.

Площадь S фигуры Φ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx. \tag{1}$$

Отсюда следует, что для площади криволинейной трапеции, изображенной на рис. 107, справедлива формула

$$S = \int_a^b f(x)dx, \tag{2}$$

а для площади фигуры, изображенной на рис. 108, — формула

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

П р и м е р. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: а) $y = 4 - x^2$, $y = 0$; б) $y = x - 2$, $y = x^2 - 4x + 2$; в) $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$.

❑ а) Фигура, площадь которой надо найти, изобра-

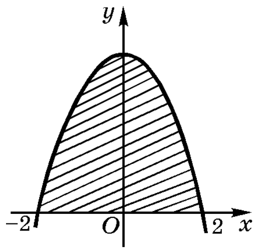


Рис. 109

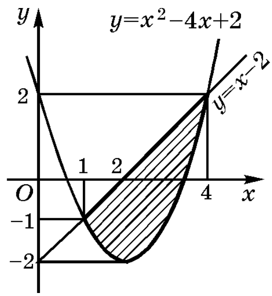


Рис. 110

жена на рис. 109. Используя формулу (2), получим

$$S = \int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = \int_{-2}^{2}4dx - \int_{-2}^{2}x^2dx =$$

$$= 4x\Big|_{-2}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = 4(2+2) - \frac{1}{3}(8+8) = \frac{32}{3}.$$

б) Построив прямую $y = x - 2$ и параболу $y = x^2 - 4x + 2$, получим фигуру, площадь которой требуется вычислить (рис. 110). Ее площадь найдем по формуле (1), где $f_1(x) = x - 2$, $f_2(x) = x^2 - 4x + 2$, а пределы интегрирования a и b — абсциссы точек пересечения параболы и прямой. Для отыскания этих абсцисс решим уравнение $f_1(x) = f_2(x)$, т. е. $x - 2 = x^2 - 4x + 2$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Итак,

$$S = \int_1^4 ((x-2) - (x^2 - 4x + 2))\,dx =$$

$$= \int_1^4 (5x - x^2 - 4)\;dx = 5\cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^4 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^4 - 4x\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{5}{2}(16-1) - \frac{1}{3}(64-1) - 4(4-1) = 4{,}5.$$

в) Фигура, площадь которой нужно найти, изображена на рис. 111. Проведем прямую $x = 2$. Тогда площадь S интересующей нас фигуры равна сумме $S_1 + S_2$, где S_1 и S_2 — площади криволинейных трапеций отмеченных на рис. 111 соответственно горизонтальной и вертикальной штриховкой. Имеем

$$S_1 = \int_1^2 (\sqrt{x} - (2-x))\,dx = \int_1^2 (x^{0,5} + x - 2)\,dx =$$

$$= \left.\frac{x^{1,5}}{1{,}5}\right|_1^2 + \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 - 2x\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{2}(4-1) - 2(2-1) = \frac{8\sqrt{2} - 7}{6};$$

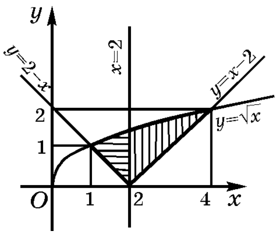


Рис. 111

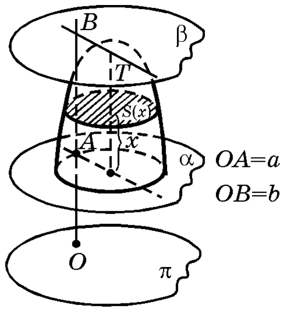


Рис. 112

$$S_2 = \int_2^4 (\sqrt{x} - (x-2))\,dx = \int_2^4 (x^{0,5} - x + 2)\,dx =$$

$$= \frac{x^{1,5}}{1,5}\bigg|_2^4 - \frac{x^2}{2}\bigg|_2^4 + 2x\bigg|_2^4 =$$

$$= \frac{2}{3}(8 - 2\sqrt{2}) - \frac{1}{2}(16 - 4) + 2(4 - 2) = \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3}.$$

Окончательно получим

$$S = S_1 + S_2 = \frac{8\sqrt{2} - 7}{6} + \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3} = \frac{13}{6}. \blacksquare$$

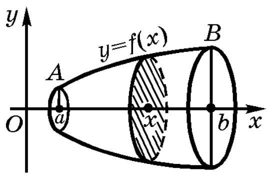


Рис. 113

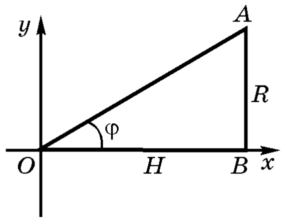


Рис. 114

246. Вычисление объемов тел с помощью интеграла. Пусть задано тело T (рис. 112), обладающее следующими свойствами:

1) тело расположено между двумя плоскостями α и β, параллельными заданной плоскости π и удаленными от нее на расстояния соответственно a и b, $(a < b)$, причем и в плоскости α, и в плоскости β есть точки тела T;

2) если $a < x < b$ и плоскость γ параллельна плоскости π и удалена от нее на расстояние x, то в пересечении плоскости γ и тела T образуется сечение, площадь которого выражается функцией $S(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$.

Тогда объем V тела T вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (1)$$

Отсюда, в частности, следует, что если T — тело, образованное вращением криволинейной трапеции вокруг оси абсцисс (рис. 113), то объем такого тела вращения выражается формулой

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx = \pi\int_a^b y^2 dx. \qquad (2)$$

П р и м е р. Найти объем конуса, радиус которого равен R, а высота равна H.

❑ Конус можно рассматривать как тело, образованное вращением прямоугольного треугольника с катетами H и R вокруг катета H (рис. 114). Составим уравнение прямой OA. Угловой коэффициент k этой прямой, т. е. $\operatorname{tg}\varphi$, равен $\frac{AB}{OB} = \frac{R}{H}$, т. е. $k = \frac{R}{H}$. Значит, уравнение прямой OA имеет вид $y = kx$, т. е. $y = \frac{R}{H}x$ (см. п. 99).

Воспользовавшись для вычисления объема формулой (2), получим $V = \pi\int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx$. Остается выполнить вычисления:

$$V = \frac{\pi R^2}{H^2}\int_0^H x^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^H =$$

$$= \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\left(\frac{H^3}{3} - 0\right) = \frac{1}{3}\pi R^2 H. \ ■$$

247. Физические приложения интеграла. Понятие интеграла лежит в основе его разнообразных физических приложений. Пусть, например, тело движется по оси Ox, в каждой точке которой приложена некоторая сила $F = F(x)$ (считаем, что вектор силы направлен по оси или в противоположную сторону, т. е. фактически, что сила здесь не векторная, а скалярная величина). Тогда работа A, которая совершается при перемещении тела из точки a в точку b, вычисляется по формуле $A = \int\limits_a^b F(x)dx.$ Таким образом, *работа является интегралом от силы*.

Рассуждая аналогично и используя понятие интеграла, легко установить, что:

перемещение тела является интегралом от его скорости;

масса стержня является интегралом от его линейной плотности;

электрический заряд является интегралом от силы тока.

§ 26. Понятие о дифференциальном уравнении

248. Определение дифференциального уравнения и его решения. ***Дифференциальным уравнением первого порядка*** называется уравнение, содержащее производную искомой функции, саму функцию и ее аргумент. Общий вид дифференциального уравнения первого порядка $F(x, y, y') = 0$, причем уравнение может быть и неполным (не содержащим

x или y). Если дифференциальное уравнение имеет вид $F(x, y, y', y'') = 0$, то оно называется ***дифференциальным уравнением второго порядка***.

Например:

$y' + y - x = 0$, $y' = \cos x$, $y' = 2y$ — дифференциальные уравнения первого порядка;

$y'' + 2y' - x - y = 0$, $y'' = x^2 - 1$, $y'' = \omega^2 y$ — дифференциальные уравнения второго порядка.

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция, при подстановке которой в уравнение оно обращается в тождество.

Пример 1. Доказать, что всякая функция вида $y = Ce^{kx}$ является решением уравнения $y' = ky$.

❑ Имем $y = Ce^{kx}$, откуда $y' = Cke^{kx}$. Замечаем, что y и y' связаны соотношением $y' = ky$. ■

Пример 2. Доказать, что всякая функция вида $y = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x$ является решением уравнения $y'' + \omega^2 y = 0$.

❑ Имеем:

$$y = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x,$$

$$y' = C_1 \omega \cos \omega x - C_2 \omega \sin \omega x,$$

$$y'' = -C_1 \omega^2 \sin \omega x - C_2 \omega^2 \cos \omega x.$$

Тогда

$$y'' + \omega^2 y = -\omega^2 (C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x) +$$

$$+ \omega^2 (C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x) = 0.$$

Итак, функция $y = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x$ обращает уравнение $y'' + \omega^2 y = 0$ в тождество. ■

П р и м е р 3. Решить уравнение $y' = \sin x$.

❑ Нам нужно найти функцию, производная которой равна $\sin x$, т. е. найти первообразную для функции $\sin x$. Таковой является $-\cos x$, а точнее, любая функция вида $-\cos x + C$. Значит, $y = -\cos x + {}$ ${}+C$ — решение заданного дифференциального уравнения. ■

Решение дифференциального уравнения определяется не однозначно, а с точностью до постоянной C — в случае дифференциального уравнения первого порядка (см. примеры 1 и 3) или с точностью до постоянных C_1 и C_2 — в случае дифференциального уравнения второго порядка (см. пример 2). Иногда к дифференциальному уравнению добавляют условия (их называют ***начальными условиями***), с помощью которых можно найти значения постоянных.

П р и м е р 4. Решить уравнение $y' = \sin x$, если $y(\pi) = 3$.

❑ В примере 3 мы нашли, что $y = -\cos x + C$. Так как $y(\pi) = 3$, то $3 = -\cos \pi + C$, т. е. $3 = 1 + C$, откуда $C = 2$. Значит, $y = -\cos x + 2$. ■

249. Дифференциальные уравнения показательного роста и показательного убывания. Часто бывает, что скорость изменения некоторой величины пропорциональна значению этой величины в данный момент времени. Например, скорость радиоактивного распада пропорциональна наличной массе вещества; прирост денег по вкладу в банке пропорционален величине вклада и т. д.

Так как скорость изменения величины y пропорциональна самой величине y, то выполняется равенство

$$y' = ky. \qquad (1)$$

Коэффициент k положителен, если величина y увеличивается с течением времени (например, вклад в банке), и отрицателен, если y уменьшается (например, масса вещества при радиоактивном распаде). Во втором случае уравнение (1) обычно записывают в виде $y' = -ky$, считая, что $k > 0$. Уравнение $y' = ky$ называют ***дифференциальным уравнением показательного роста***, а уравнение $y' = -ky$ — ***дифференциальным уравнением показательного убывания***.

Любая функция вида Ce^{kx} является решением уравнения (1) (см. пример 1 из п. 248), причем иных решений это уравнение не имеет. Число C имеет простой физический смысл: оно равно значению y при $x = 0$, т. е. начальному значению y. В самом деле, при $x = 0$ получаем $y = Ce^{k \cdot 0} = Ce^0 = C$.

П р и м е р 1. Уравнение радиоактивного распада записывается в виде $m' = -km$ (m — масса). Его решение есть $m = Ce^{-kt}$ (поскольку здесь аргументом является время, используем привычное обозначение t). Как отмечено выше, C — начальное количество вещества, т. е. $C = m_0$. Поэтому закон радиоактивного распада имеет вид

$$m = m_0 e^{-kt}. \qquad (2)$$

На практике встречается и дифференциальное уравнение несколько более сложного вида, чем (1):

$$y' = k(y - a).$$

Его решение имеет вид $y = a + Ce^{kx}$. В самом деле,

$$y' = (a + Ce^{kx})' = Cke^{kx} = k(Ce^{kx} + a - a) = k(y - a).$$

П р и м е р 2. Скорость остывания тела пропорциональна разности температуры T этого тела и температуры T_0 окружающей среды. Это значит, что

$$T' = -k(T - T_0).$$

Решение этого уравнения имеет вид $T = T_0 + Ce^{-kt}$. Если сначала (при $t = 0$) температура тела была равна T_1, то $T_1 = T_0 + C$ и потому $C = T_1 - T_0$, т. е. $T = T_0 + (T_1 - T_0)e^{-kt}$. С течением времени e^{-kt} стремится к нулю, и в пределе температура тела сравняется с температурой T_0 окружающей его среды.

250. Уравнение гармонических колебаний. На практике часто встречаются процессы, которые периодически повторяются, например колебательные движения маятника, струны, пружины и т. д.; процессы, связанные с переменным электрическим током, магнитным полем и т. д. Решение многих таких задач сводится к решению дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = 0, \tag{1}$$

где ω — заданное положительное число. Решениями уравнения (1) являются любые функции вида $y = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x$ (см. пример 2 из п. 248), где C_1 и C_2 — постоянные, определяемые условиями конкретной задачи. Уравнение (1) называют ***дифференциальным уравнением гармонических колебаний***.

Выражение $C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x$ можно преобразовать к виду $A \sin(\omega x + \varphi)$ (см. п. 87). Поэтому обычно решение уравнения (1) записывают в виде

$$y(t) = A \sin(\omega x + \varphi).$$

Это закон гармонических колебаний; здесь A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза. Графиком гармонического колебания служит синусоида (см. п. 137).

ГЕОМЕТРИЯ

Раздел VIII

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИИ

§ 27. Точка, прямая, плоскость. Фигуры и тела

251. Точка,прямая, луч, отрезок. Уравнение прямой на плоскости. Некоторые простейшие понятия геометрии, такие как ***точка***, ***прямая***, ***плоскость***, не определяются с помощью иных понятий при изложении геометрии. В дальнейшем будем обозначать точки прописными, а прямые — строчными буквами латинского алфавита (прямые также часто обозначаются двумя прописными буквами).

Точка M, лежащая на прямой a, разбивает ее на две части, каждая из которых называется ***полупрямой*** (или ***лучом***). Точка M является началом каждого из этих лучей (MP и MQ на рис. 115). Часть прямой, заключенная между двумя ее точками, называется ***отрезком*** (MN на рис. 115).

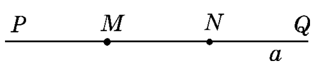


Рис. 115

Отметим следующие свойства прямой:

1^0. Через две различные точки проходит единственная прямая.

2^0. Две различные прямые имеют не более одной общей точки; если прямые имеют одну общую точку, то говорят, что они ***пересекаются*** в этой точке; если же прямые не имеют общих точек, то они называются ***параллельными***.

Уравнение прямой на плоскости — это уравнение первой степени с двумя переменными и произвольными коэффициентами. В общем случае оно имеет вид

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

При этом $\overline{n} = \{A;\ B\}$ — вектор, перпендикулярный прямой (***нормаль к прямой***).

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (1):

1. Если $C = 0$, то прямая проходит через начало координат.
2. Если $A = 0$, то прямая параллельна оси Ox.
3. Если $B = 0$, то прямая параллельна оси Oy.

Например $x = y$ — уравнение прямой, проходящей через начало координат; $y = 2$ — уравнение прямой, параллельной оси Ox; $x = 1$ — уравнение прямой, параллельной оси Oy (рис. 116).

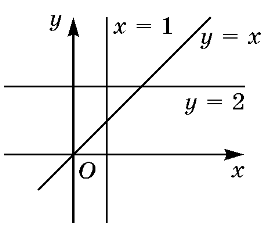


Рис. 116

Если в уравнении (1) $B \neq 0$, то его можно записать в виде $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Полагая $-\frac{A}{B} = k$, $-\frac{C}{B} = b$, получим

$$y = kx + b. \qquad (2)$$

Это уравнение прямой с угловым коэффициентом k. Здесь число k — угловой коэффициент прямой (см. п. 100), который равен тангенсу угла α между данной прямой и положительным направлением оси Ox. При $k > 0$ угол α — острый (рис. 117, *а*), а при $k < 0$ — тупой (рис. 117, *б*).

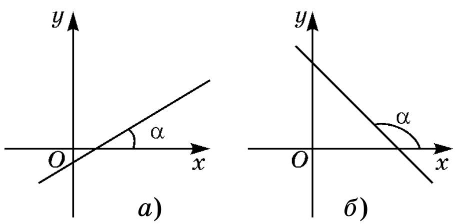


Рис. 117

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M\ (x_0;\ y_0)$ и имеющей заданный угловой коэффициент k, записывается в виде

$$y - y_0 = k\,(x - x_0). \qquad (3)$$

П р и м е р 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M (1; 2) и имеющей угловой коэффициент $k = 3$.

❑ Согласно уравнению (3) , получим

$$y - 2 = 3(x - 1),\ \text{откуда}\ 3x - y - 1 = 0.\ ■$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1\ (x_1;\ y_1)$ и $M_2\ (x_2;\ y_2)$, имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (4)$$

П р и м е р 2. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $M_1\ (1;\ 2)$ и $M_2\ (-3;\ 4)$.

❑ Используя уравнение (4) при $x_1 = 1,\ y_1 = 2,$ $x_2 = -3,\ y_2 = 4,$ получим

$$\frac{y - 2}{4 - 2} = \frac{x - 1}{-3 - 1},\ \text{откуда}\ x + 2y - 5 = 0.\ ■$$

252. Плоскость. Уравнение плоскости в пространстве. Фигуры и тела. Плоскость — это простейшая поверхность. Обычно плоскости обозначаются тремя прописными буквами латинского алфавита, а иногда — одной строчной буквой греческого алфавита (α, β, γ и т. д).

Отметим основные свойства плоскости:

1^0.Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

2^0. Прямая, две точки которой лежат в плоскости, целиком лежит в этой плоскости.

Отсюда следует, что если прямая не лежит в плоскости, то она либо имеет с ней одну общую точку (это точка пересечения прямой и плоскости), либо не имеет с ней общих точек (в этом случае прямая параллельна плоскости; см. п. 304).

3^0. Через прямую и точку, не лежащую на ней, можно провести плоскость, и притом только одну.

4^0. Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.

5^0. Через две параллельные прямые можно провести плоскость, и притом только одну.

6^0. Если две плоскости имеют общую точку, то они либо имеют и общую прямую, проходящую через эту точку (эта прямая — линия пересечения двух плоскостей), либо совпадают целиком.

Любая прямая, лежащая в плоскости, делит плоскость на две части, каждая из которых называется ***полуплоскостью***.

Уравнение плоскости в пространстве (аналогично уравнению прямой на плоскости) — это уравнение первой степени с тремя переменными и произвольными коэффициентами. В общем случае оно имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (1)$$

При этом $\overline{n} = \{A;\ B;\ C\}$ — вектор, перпендикулярный плоскости (***нормаль к плоскости***).

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (1):

1. Если $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат.
2. Если $A = 0$, то плоскость параллельна оси Ox.
3. Если $B = 0$ или $C = 0$, то плоскость параллельна оси Oy или Oz соответственно.
4. Если $A = 0$ и $B = 0$, то плоскость параллельна координатной плоскости xOy.
5. Если $A = 0$ и $C = 0$ или $B = 0$ и $C = 0$, то плоскость параллельна координатной плоскости xOz или yOz соответственно.

Например, $x - 2y - 5z = 0$ — уравнение плоскости, проходящей через начало координат; $3x + 4z -$

$-8=0$ — уравнение плоскости, параллельной оси Oy; $3y-7=0$ — уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости xOz.

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M\,(x_0;\,y_0;\,z_0)$ и перпендикулярной вектору $\overline{n}=\{A;\,B;\,C\}$, имеет вид

$$A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)+C\,(z-z_0)=0. \qquad (2)$$

П р и м е р 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M (1; 2; 3) и перпендикулярной вектору $\overline{n}=\{4;\,5;\,-2\}$.

❑ Согласно уравнению (2), при $A=4$, $B=5$, $C=-2$, $x_0=1$, $y_0=2$, $z_0=3$ получим

$$4\,(x-1)+5\,(y-2)-2\,(z-3)=0,$$

откуда

$$4x+5y-2z-8=0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1\,(x_1;\,y_1;\,z_1)$, $M_2\,(x_2;\,y_2;\,z_2)$, $M_3\,(x_3;\,y_3;\,z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (3)$$

П р и м е р 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (1; 2; 3), M_2 (2; –1; 4), M_3 (3; 2; –3).

❑ Имеем

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2-1 & -1-2 & 4-3 \\ 3-1 & 2-2 & -3-3 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, разлагая определитель по элементам первой строки, находим

$$18(x-1)+8(y-2)+6(z-3)=0,$$

или

$$9x + 4y + 3z - 26 = 0.$$

Будем называть ***фигурой*** некоторое сочетание определенным образом расположенных точек, лучей, прямых, отрезков. При этом мы будем рассматривать только плоские фигуры, т. е. такие фигуры, все элементы которых лежат в одной плоскости. Например, фигурой является квадрат.

Телом обычно называют часть пространства, ограниченную какой-либо замкнутой поверхностью. Например, куб — это тело, ограниченное шестью квадратными гранями.

253. Угол. ***Углом*** называется часть плоскости, ограниченная двумя лучами с общим началом. При этом лучи называются ***сторонами*** угла, а их общее начало — ***вершиной*** угла. Углы обычно обозначаются или тремя прописными латинскими буквами (где вершина пишется в середине), или одной прописной

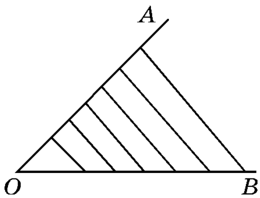


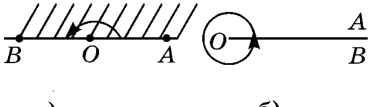
Рис. 118

латинской буквой — вершиной ($\angle AOB$ или $\angle O$ на рис. 118), или одной строчной греческой буквой. Заметим, что под углом AOB можно понимать как заштрихованную часть плоскости, так и остальную ее часть (рис. 118).

Возможно, что лучи OA и OB лежат на одной прямой. При этом если они продолжают друг друга (рис. 119, *а*), то каждый из образуемых ими углов занимает полуплоскость; в этом случае угол AOB называется ***развернутым***. Если же OA и OB сливаются (рис. 119, *б*), то один из углов AOB называтся ***нулевым***, а второй занимает всю плоскость и называется ***полным***.

Обычно под углом между двумя лучами OA и OB понимают тот угол, который лежит внутри развернутого угла, т. е. заштрихованный угол на рис. 118.

Рассмотрим развернутый угол AOB (рис. 120). Проведем луч OC. Углы AOC и COB, на которые



а) *б*)

Рис. 119

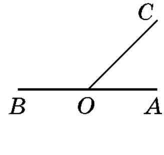
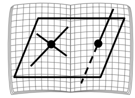


Рис. 120



полуплоскость разбивается лучом OC, называются ***смежными***. Сторона OC для этих углов общая, стороны OA и OB продолжают друг друга. Можно сказать, что смежные углы дополняют друг друга до развернутого. Такие углы называются ***дополнительными***.

Рассмотрим две пересекающиеся прямые AB и CD. Пусть O — точка их пересечения (рис. 121). При этом стороны углов AOC и BOD, а также стороны углов COB и DOA продолжают друг друга. Такие углы называются ***вертикальными***. Таким образом, углы AOC и BOD — одна пара вертикальных углов,а углы COB и DOA — вторая пара вертикальных углов (рис. 121).

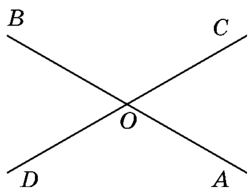


Рис. 121

Можно сказать, что вертикальные углы — это углы, смежные с одним и тем же углом (на рис. 121 углы AOC и BOD смежные, например, с углом COB).

Т.8.1. *Вертикальные углы равны.*

254. Градусная и радианная меры углов. Углы принято измерять в градусах и радианах. За единицу градусного измерения, т. е. за угол в один ***градус*** (обозначение: 1°), принята $\dfrac{1}{180}$ часть развернутого угла. Таким образом, развернутый угол равен 180°. Угол, равный 90°, называется ***прямым***. Иногда прямой угол обозначают d. Отсюда следует, что развернутый угол равен $2d$, а полный угол равен $4d$. Две прямые, образующие прямой угол, называются ***взаимно перпендикулярными***. Угол, меньший 90°, называется ***острым***; угол, больший прямого, но меньший развернутого, называется ***тупым***. Градус делится делится на ***минуты*** (одна минута обозначается $1'$) и ***секунды*** (одна секунда обозначается $1''$), а именно: $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

Биссектрисой угла называется луч, который исходит из его вершины и делит угол пополам.

Пример 1. Найти угол, образованный биссектрисами смежных углов.

❑ Рассмотрим смежные углы AOB и BOC и их биссектрисы OM и ON (рис. 122). Имеем

$$\angle MON = \angle MOB + \angle BON = 0{,}5\angle AOB + 0{,}5\angle BOC =$$
$$= 0{,}5(\angle AOB + \angle BOC) = 90^\circ,$$

поскольку $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$.

Таким образом, *биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны*. ■

Рассмотрим окружность с центром O. Угол, вершина которого находится в точке O, называется ***центральным*** (рис. 123). Дуги окружности можно измерять в градусах. При этом *градусная мера дуги равна градусной мере соответствующего ей центрального угла*.

Например, градусная мера дуги AB равна 90° ($\cup AB = 90^\circ$), так как соответствующий ей централь-

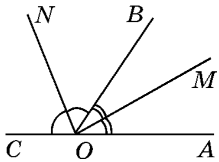


Рис. 122

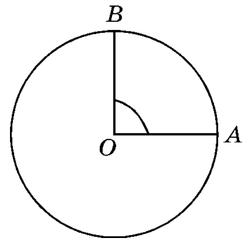


Рис. 123

ный угол — прямой (рис. 123). Тогда градусная мера полуокружности равна 180° (соответствующий центральный угол — развернутый), а градусная мера всей окружности равна 360° (соответствующий центральный угол — полный).

Перейдем теперь к радианной мере углов и дуг. Рассмотрим центральный угол, соответствующий дуге, длина которой равна радиусу. Такой угол называется углом в один ***радиан*** (обозначение: 1). Так как длина окружности равна $2\pi R$ (см. п. 290), то полный угол равен $2\pi = 6{,}283\ldots$ радиана, развернутый угол равен π, прямой угол равен $\frac{\pi}{2}$. Значит, угол в 1° содержит $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}0174\ldots$ радиана, а угол в один радиан равен примерно $57^\circ17'45''$.

Между градусной и радианной мерами существует зависимость, которая позволяет переходить от одной меры к другой. Пусть α° и α — соответственно градусная и радианная мера одного и того же угла. Тогда $\alpha^\circ : \alpha = 180^\circ : \pi$. Отсюда следует, что

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi}; \quad \alpha = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}.$$

П р и м е р 2. Найти величины смежных углов, если $\frac{1}{3}$ одного из них равна 0,2 другого.

❑ Пусть x — выраженная в градусах величина одного из смежных углов; тогда $180 - x$ — величина другого угла. По условию, $\frac{x}{3} = \frac{180 - x}{5}$, откуда $8x = 540$, т. е. $x = 67{,}5$, $180 - x = 112{,}5$. Итак, искомые углы составляют $67^\circ 30'$ и $112^\circ 30'$. ■

П р и м е р 3. Выразить в радианах углы $\alpha_1 = 30^\circ$ и $\alpha_2 = 45^\circ$. Найти градусную меру угла $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

❑ Имеем

$$\alpha_1 = \frac{\pi \cdot 30^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}; \quad \alpha_2 = \frac{\pi \cdot 45^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{4};$$

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ \cdot \frac{\pi}{3}}{\pi} = 60^\circ. \ ■$$

255. Ломаная. Многоугольник. Фигура, образованная отрезками, расположенными так, что конец предыдущего отрезка является началом следующего, называется ***ломаной*** (при этом считается, что два соседних отрезка не лежат на одной прямой; рис. 124). Эти отрезки называются ***звеньями*** ломаной

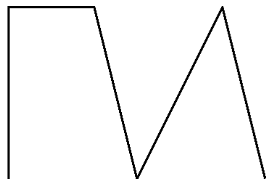
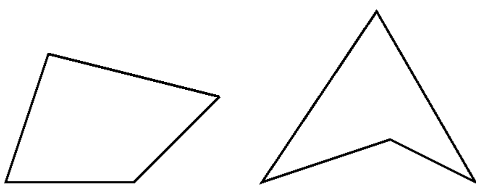


Рис. 124

(или ее ***сторонами***). Если начало первого отрезка совпадает с концом последнего, то ломаная называется ***замкнутой***.

Замкнутая ломаная, состоящая из n звеньев, называется ***n-угольником*** (или ***многоугольником***). Многоугольник называется ***выпуклым***, если он целиком расположен по одну сторону от прямых, на которых лежат его стороны. На рис. 125, *а* изображен выпуклый четырехугольник, а на рис. 125, *б* — невыпуклый. Звенья ломаной, образующие многоугольник, называются его ***сторонами***, концы этих звеньев — ***вершинами*** многоугольника. Отрезки, соединяющие несоседние вершины многоугольника, называются его ***диагоналями***. Углы,



а) *б*)

Рис. 125

образованные парами сторон, исходящими из одной вершины, называются ***внутренними углами*** многоугольника, а смежные с ними — ***внешними углами*** многоугольника. Так, на рис. 126 $\angle BAD$, $\angle ADC$, $\angle DCB$, $\angle CBA$ — внутренние углы, а смежные с ними (они обозначены дугами) — внешние углы четырехугольника $ABCD$.

Т.8.2. *Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна* $180^\circ(n-2)$.

Так, сумма внутренних углов выпуклого пятиугольника равна 540°, а сумма внутренних углов выпуклого шестиугольника равна 720°.

П р и м е р 1. Найти внутренние углы выпуклого пятиугольника, если

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4 : \alpha_5 = 2 : 2 : 2 : 3 : 6.$$

❑ Пусть $\alpha_1 = 2x$. Учитывая, что сумма внутренних углов выпуклого пятиугольника равна 540°, имеем $2x + 2x + 2x + 3x + 6x = 540$, $15x = 540$, $x = 36$. Итак, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 72^\circ$, $\alpha_4 = 108^\circ$, $\alpha_5 = 216^\circ$. ■

Т.8.3. *Сумма внешних углов выпуклого n-угольника равна* 360° (*т. е. не зависит от числа сторон*).

Сформулируем признаки равенства и подобия многоугольников (см. также пп. 274 и 278):

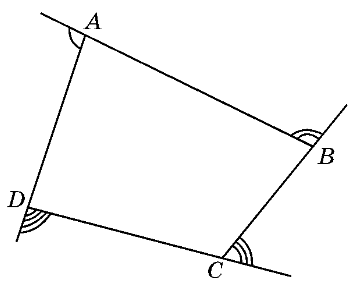
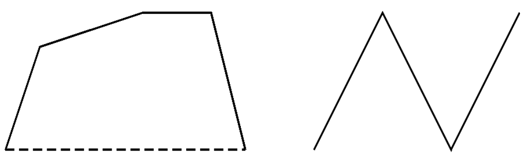


Рис. 126

Т.8.4. *Если у двух многоугольников равны соответственные стороны и углы, заключенные между этими сторонами, то такие многоугольники равны.*

Т.8.5. *Если у двух многоугольников соответственные стороны пропорциональны, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие многоугольники подобны.*

Незамкнутая ломаная называется ***выпуклой***, если ее можно дополнить замыкающим звеном до выпуклого многоугольника. Например, на рис. 127, *а* изображена выпуклая ломаная, а на рис. 127, *б* — невыпуклая.



а) *б*)

Рис. 127

Рассмотрим две ломаные, соединяющие какие-либо две точки A и B (рис. 128). Если при этом одна из ломаных целиком лежит внутри другой, то внутренняя ломаная называется ***объемлемой***, а внешняя — ***объемлющей***. Справедлива следующая теорема:

Т.8.6. *Объемлющая ломаная длиннее всякой выпуклой объемлемой ломаной.*

П р и м е р 2. Длины отрезков AC, CD и DB равны соответственно 2, 4 и 3 (см. рис. 128). Можно

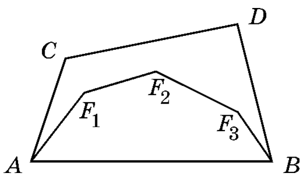


Рис. 128

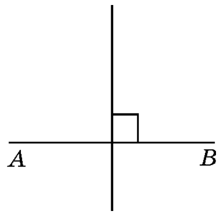


Рис. 129

ли построить такую выпуклую ломаную $AF_1F_2F_3B$, чтобы ее длина была равна 10?

❑ Длина объемлющей линии $L = 2 + 4 + 3 = 9$, следовательно, нельзя построить объемлемую выпуклую ломаную, длина которой равна 10. ■

256. Геометрическое место точек. ***Геометрическим местом точек*** называется множество всех точек, обладающих каким-либо свойством.

П р и м е р 1. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек A и B, — это перпендикуляр, проходящий через середину отрезка AB (рис. 129); его называют ***серединным перпендикуляром*** к отрезку AB.

П р и м е р 2. Геометрическое место точек, удаленных от данной прямой на расстояние l, — это две прямые, параллельные данной и отстоящие от нее на расстояние l (рис. 130).

П р и м е р 3. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, состоит из двух биссектрис углов, образованных этими прямыми (рис. 131).

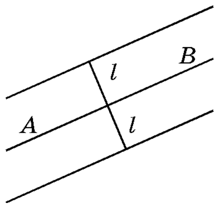


Рис. 130

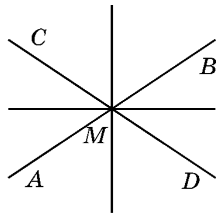


Рис. 131

П р и м е р 4. Найти геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

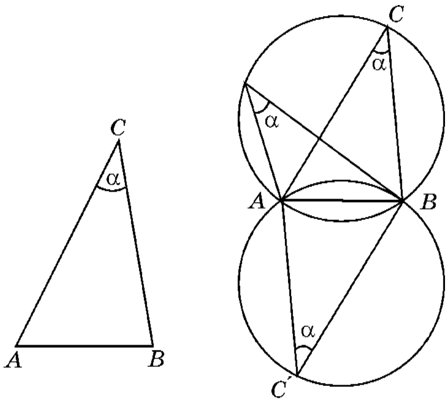
❑ Углом α, под которым виден данный отрезок AB, называется угол при вершине треугольника ABC, где AB является основанием (рис. 132, *а*). Искомым геометрическим местом служит дуга ACB, опирающаяся на отрезок AB, в которую вписан угол α, и симметричная ей относительно отрезка AB дуга $AC'B$ (рис. 132, *б*). ■

П р и м е р 5. На данной прямой l найти точку, равноудаленную от двух заданных точек A и B.

❑ Так как геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и B, — это серединный перпендикуляр к отрезку AB (см. пример 1), то искомая точка M есть пересечение этого перпендикуляра и прямой l (рис. 133). ■

257. Симметрия. Различают понятия симметрии относительно точки и относительно прямой.

Пусть даны фиксированная точка O и некоторая точка M. Точка M' называется ***симметричной точке M относительно точки O***, если точки M, O и M' лежат на одной прямой и $MO = OM'$ (рис. 134).



а) *б*)

Рис. 132

Если фигура состоит из точек, симметричных относительно точки *O*, то такая фигура называется ***симметричной относительно точки O***, а точка *O* — ***центром симметрии***.

Например, параллелограмм является симметричным относительно точки пересечения его диагоналей (рис. 135).

Симметрия относительно точки называется ***центральной симметрией***.

Пусть даны фиксированная прямая l и некоторая точка M. Точка M' называется ***симметричной точке M относительно прямой*** l, если $MM' \perp l$ и $MO = OM'$, где O — точка пересечения прямых MM' и l (рис. 136).

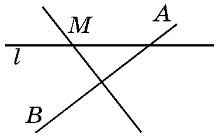


Рис. 133

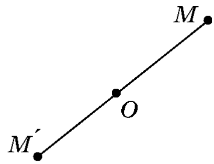


Рис. 134

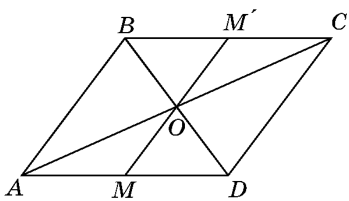


Рис. 135

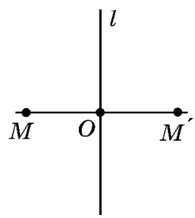


Рис. 136

Если фигура состоит из точек, симметричных относительно прямой l, то эта фигура называется ***симметричной относительно прямой*** l.

Такая симметрия называется ***осевой***, а прямая l — ***осью симметрии***.

Например, биссектриса угла является его осью симметрии. Прямоугольник имеет две оси симметрии — это прямые, проходящие через точку пересечения его диагоналей и параллельные сторонам прямоугольника (рис. 137). Осью симметрии окружнос-

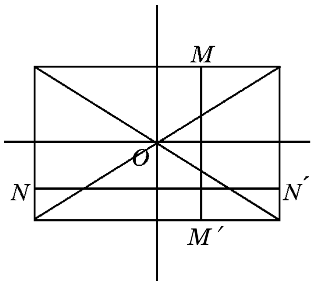


Рис. 137

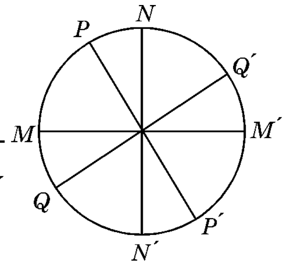


Рис. 138

ти является любой ее диаметр, т. е. окружность имеет бесконечно много осей симметрии (рис. 138).

§ 28. Перпендикулярные и параллельные прямые

258. Перпендикуляр и наклонная. *Через произвольную точку плоскости можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной.* Если при этом точка не лежит на прямой, то говорят «опустить перпендикуляр», если же лежит — «восставить перпендикуляр». Точка, в которой перпендикуляр пересекает данную прямую, называется ***основанием перпендикуляра***.

Пусть из точки M опущен перпендикуляр на данную прямую. Длина этого перпендикуляра называется ***расстоянием от точки до прямой***. Любая другая прямая, проходящая через точку M и пересекающая данную, называется ***наклонной*** (наклонной также называется отрезок от точки M до пересечения с данной прямой). Точка, в которой наклонная пересекает данную прямую, называется ***основанием наклонной***, а отрезок между основаниями перпендикуляра и наклонной — ***проекцией наклонной***. Так, на рис. 139 изображены: MA — перпендикуляр, MB — наклонная, AB — проекция наклонной. При этом пишут $MA \perp AB$.

Отметим некоторые свойства наклонных:

1^0. Если из данной точки к одной и той же прямой проведены перпендикуляр и наклонная, то наклонная длиннее перпендикуляра.

2^0. Если из данной точки к одной и той же прямой проведены две наклонные, то из них длиннее та, у которой проекция больше.

3^0. Если две различные наклонные, проведенные из данной точки к одной и той же прямой, равны, то их основания одинаково удалены от основания перпендикуляра (и лежат по разные стороны от него).

4^0. Если через точку, из которой к данной прямой проведены две равные наклонные, и середину отрезка между их основаниями провести прямую, то она является перпендикуляром к данной прямой.

Отметим, что все точки серединного перпендикуляра к отрезку одинаково удалены от концов этого

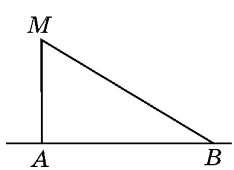


Рис. 139

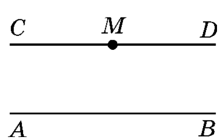


Рис. 140

отрезка. Обратно, если известно, что некоторая точка одинаково удалена от концов отрезка, то такая точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку. Значит, верно следующее утверждение:

Т.8.7. *Серединный перпендикуляр к отрезку есть геометрическое место точек, одинаково удаленных от концов отрезка.*

259. Параллельные прямые. Прямые, лежащие в одной плоскости, называются ***параллельными***, если они не пересекаются. При этом пишут $AB \parallel CD$ (рис. 140).

Через произвольную точку плоскости, не лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, параллельную данной. Отсюда следует, что *если две прямые в плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой.*

Отметим, что *прямая, перпендикулярная одной из параллельных прямых, перпендикулярна и остальным*. Так, если $AB \parallel CD$ и $MN \perp AB$, то $MN \perp CD$ (рис. 141).

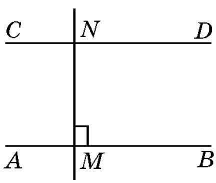


Рис. 141

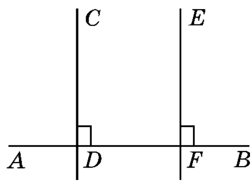


Рис. 142

Два перпендикуляра, проведенные к одной и той же прямой, параллельны между собой. Например, если $CD \perp AB$ и $EF \perp AB$, то $CD \parallel EF$ (рис. 142).

260. Признаки параллельности прямых. Рассмотрим углы, образованные при пересечении двух прямых третьей (рис. 143). Они имеют специальные названия:

углы α и α_1, β и β_1, γ и γ_1, δ и δ_1 называются ***соответственными***:

углы δ_1 и β, γ_1 и α — ***внутренними накрест лежащими;***

углы α_1 и γ, β_1 и δ — ***внешними накрест лежащими;***

углы α и δ_1, β и γ_1 — ***внутренними односторонними;***

углы α_1 и δ, β_1 и γ — ***внешними односторонними.***

Справедливы следующие утверждения:

Т.8.8. *Если соответственные углы равны, то прямые параллельны.*

Т.8.9. *Если внутренние* (*или внешние*) *накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.*

Т.8.10. *Если сумма внутренних* (*или внешних*) *односторонних углов равна* 180°, *то прямые параллельны.*

Справедливо также утверждение, обратное теоремам 8.8—8.10:

Т.8.11. *Если две параллельные прямые пересечены третьей, то соответственные углы равны; внутренние* (*и внешние*) *накрест лежащие углы рав-*

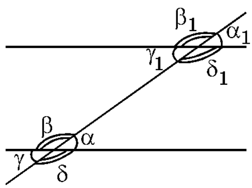


Рис. 143

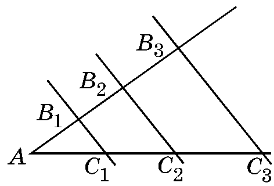


Рис. 144

ны; сумма внутренних (*и внешних*) *односторонних углов равна* 180°.

Отметим следующее свойство параллельных прямых:

Т.8.12. *Параллельные прямые, пересекающие стороны угла* (рис. 144), *отсекают от этих сторон пропорциональные отрезки*, т. е.

$$\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{B_2B_3}{C_2C_3}.$$

В частности, справедливо такое утверждение:

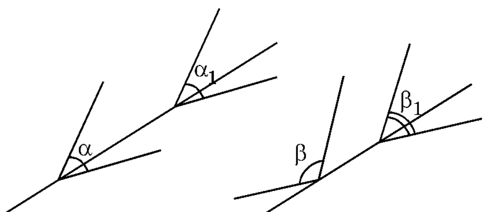
Т.8.13. *Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне* (***теорема Фалеса***).

261. Углы с параллельными и перпендикулярными сторонами. Рассмотрим углы, стороны которых параллельны или перпендикулярны. Справедливы следующие утверждения:

Т.8.14. *Если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы* *либо равны, либо дополняют друг друга до* 180° (рис. 145, *а* и *б*).

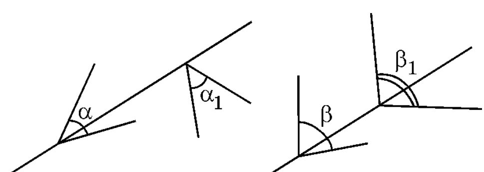
Т.8.15. *Если стороны одного угла соответственно перпендикулярны сторонам другого угла, то такие углы либо равны, либо дополняют друг друга до* 180° (рис. 146, *а* и *б*).

Очевидно, что равенство углов получается в том случае, когда они либо оба острые, либо оба тупые. Если же один из углов острый, а другой тупой, то они дополняют друг друга до 180° (прямые углы, конечно, и равны, и дополняют друг друга до 180°).



а) *б*)

Рис. 145



а) *б*)

Рис. 146

§ 29. Простейшие задачи на построение

Во всех задачах, рассматриваемых в данном параграфе, используются только два чертежных инструмента — линейка и циркуль.

262. Деление отрезка пополам.

Задача I. Разделить данный отрезок пополам.

❑ 1. Проводим дуги окружностей одного и того же радиуса (большего половины AB) с центрами в заданных точках A и B (рис. 147).

2. Через точки C и D (точки пересечения этих дуг) проводим прямую. Она пересекает отрезок AB в его середине F. ■

Это же построение используется для решения следующей задачи.

Задача II. Восставить перпендикуляр в середине данного отрезка.

Прямая CD и есть искомый перпендикуляр.

263. Построение перпендикуляров.

Задача III. Опустить перпендикуляр из данной точки на данную прямую.

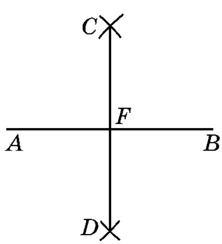


Рис. 147

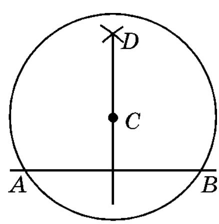


Рис. 148

❑ 1. Проводим окружность с центром в заданной точке C, пересекающую данную прямую в точках A и B (рис. 148).

2. Проводим дуги окружностей одного и того же радиуса (большего половины AB) с центрами A и B. Пусть они пересекаются в точке D.

3. Прямая CD и есть искомый перпендикуляр. ■

Задача IV. Восставить перпендикуляр к данному отрезку в его конце.

❑ 1. Проводим окружность, которая проходит через заданный конец A, а ее центром является произвольная точка C, лежащая вне данной прямой. Пусть эта окружность пересекает данный отрезок (или его продолжение) в точке F (рис. 149).

2. Проводим диаметр, проходящий через точки F и C. Пусть D — второй конец этого диаметра. Тогда DA — искомый перпендикуляр ($\angle DAB$ — прямой, так как он опирается на диаметр). ■

264. Построение углов.

Задача V. Построить угол, равный данному.

❑ 1. Проводим дугу произвольного радиуса с центром в вершине A данного угла, пересекающую его стороны в точках B и C (рис. 150).

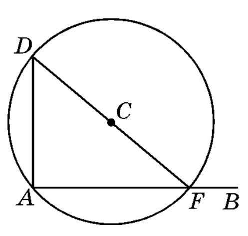


Рис. 149

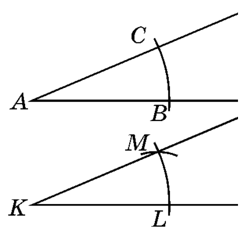


Рис. 150

2. Проводим произвольную прямую, фиксируем на ней точку K и проводим дугу того же радиуса, что и в п. 1, с центром K. Пусть эта дуга пересекает прямую в точке L.

3. Проводим дугу радиуса BC с центром L. Пусть эта дуга пересекает первую дугу в точке M. Тогда угол MKL и есть искомый. ■

Задача VI. Разделить данный угол пополам.

❑ 1. Проводим дугу произвольного радиуса с центром в вершине A данного угла, пересекающую его стороны в точках B и C (рис. 151).

2. Проводим дуги одного и того же радиуса (большего половины BC) с центрами B и C. Пусть они пересекаются в точке D.

3. Проводим AD. Тогда $\angle BAD = \angle DAC$. ■

265. Построение прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку.

Задача VII. Через данную точку, не принадлежащую данной прямой, провести прямую, ей параллельную.

❑ 1. Проводим окружность с центром в заданной точке A и радиусом, бóльшим, чем расстояние от точки A до данной прямой. Пусть эта окружность пересекает прямую в точках B и C (рис. 152).

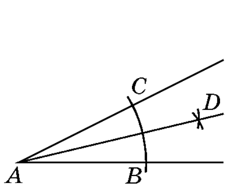


Рис. 151

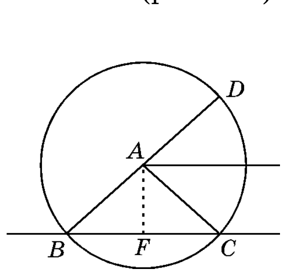


Рис. 152

2. Проводим радиус CA и диаметр BD.

3. Разделим угол DAC пополам (см. задачу VI): его биссектриса и есть искомая прямая.

Действительно, пусть $AF \perp BC$; тогда AF — биссектриса угла BAC, а биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны, откуда и следует требуемая параллельность. ■

266. Построение пропорциональных отрезков.

Задача VIII. Разделить отрезок на пропорциональные части.

Для определенности разделим отрезок AB в отношении 1 : 2 : 3.

❑ 1. Через один из концов заданного отрезка (например, A) проводим произвольный луч (рис. 153).

2. На этом луче от точки A откладываем в произвольном масштабе отрезки заданной пропорциональности, т. е. $AK : KL : LM = 1 : 2 : 3$.

3. Соединяем точки B и M.

4. Через концы отрезков, лежащие на луче AM, проводим прямые, параллельные BM. Отрезок AB разделен на требуемые части: $AC : CD : DB = 1 : 2 : 3$.

В частности, если на луче отложить равные отрезки, то и отрезок AB разделится на равные части.■

Задача IX. Построить четвертый пропорциональный отрезок.

Даны три отрезка длиной a, b и c. Требуется построить такой отрезок длины x, чтобы $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, или $x = \frac{bc}{a}$.

❑ Это частный случай задачи VIII.

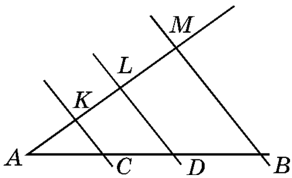


Рис. 153

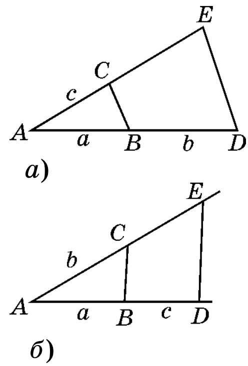


Рис. 154

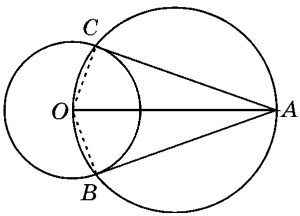


Рис. 155

1. Строим произвольный угол (рис. 154, *а*).

2. На одной стороне угла откладываем отрезки $AB = a$ и $BD = b$.

3. На другой стороне угла откладываем отрезок $AC = c$.

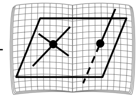
4. Соединяем точки B и C и проводим $DE \parallel BC$.

Отрезок CE — искомый, т. е. $CE = \dfrac{BD \cdot AC}{AB}$.

Заметим, что длина CE не изменится, если отложить $AB = a$, $BD = c$, $AC = b$ (рис. 154, *б*). ■

267. Построение касательной к окружности.

Задача X. Из данной точки, лежащей вне окружности, провести к ней касательную (если точка лежит на окружности, то задача сводится к построению перпендикуляра в конце отрезка).



❑ 1. Соединим данную точку A с центром O окружности (рис. 155).

2. На OA как на диаметре строим окружность, пересекающую заданную в точках B и C.

3. Проводим прямые AB и AC, которые и являются искомыми касательными (углы ABO и ACO — прямые, так как они опираются на диаметр). ■

268. Построение вписанной и описанной окружностей для треугольника.

Задача XI. Вписать окружность в данный треугольник.

❑ 1. Проводим биссектрисы двух любых углов треугольника (рис. 156).

2. Из точки O пересечения биссектрис опускаем перпендикуляр на какую-либо сторону треугольника.

3. Проводим окружность с центром O и радиусом, равным длине перпендикуляра. ■

Задача XII. Описать окружность около данного треугольника.

❑ 1. Проводим перпендикуляры через середины каких-либо сторон треугольника (рис. 157). Пусть они пересекаются в точке O.

2. Проводим окружность с центром O и радиусом, равным OA. ■

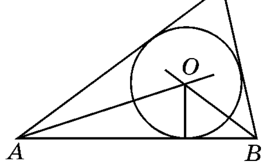


Рис. 156

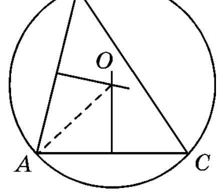


Рис. 157

Раздел IX

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ НА ПЛОСКОСТИ

§ 30. Треугольник

269. Стороны и углы треугольника. Длины сторон треугольника не могут быть заданы произвольно: *во всяком треугольнике длина любой стороны меньше суммы длин двух других сторон, но больше их разности.*

Например, существует треугольник с длинами сторон 3, 4 и 5, но не существует треугольника со сторонами 3, 4 и 8 (поскольку $8 > 3 + 4$).

Таким образом, если AB, BC и AC — длины сторон треугольника ABC, то выполняется неравенство $AC < AB + BC$, которое называется ***неравенством треугольника***.

Отметим, что *в треугольнике против большей стороны лежит больший угол и обратно, против большего угла лежит большая сторона.*

Если длины всех сторон треугольника равны между собой, то такой треугольник называется ***равносторонним*** (или ***правильным***); если же равны две стороны, то треугольник называется ***равнобедренным***. Обычно у равнобедренного треугольника его равные стороны называют ***боковыми сторонами***, а третью сторону — ***основанием***. Например, в равнобедренном треугольнике ABC (рис. 158) AC — основание, а AB и BC — боковые стороны.

В равностороннем треугольнике все углы равны; в равнобедренном треугольнике равны углы при основании.

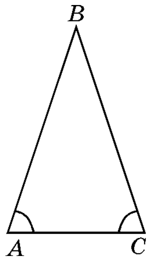


Рис. 158

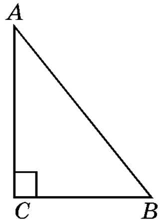


Рис. 159

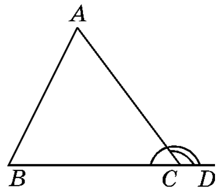


Рис. 160

Т.9.1. *Сумма углов любого треугольника равна* 180° (*двум прямым углам*).

Отсюда следует, что может существовать треугольник с тремя острыми углами, но прямой или тупой угол в треугольнике может быть только один.

Треугольник, у которого все три угла острые, называется ***остроугольным***; треугольник, имеющий тупой угол, — ***тупоугольным***. Треугольник, имеющий прямой угол, называется ***прямоугольным***. Его сторона, лежащая против прямого угла, называется ***гипотенузой***, а стороны, образующие прямой угол, — ***катетами***. Так, в прямоугольном треугольнике ABC (рис. 159) AB — гипотенуза, а AC и BC — катеты.

Внешним углом треугольника при данной вершине называется угол, смежный с внутренним углом треугольника при этой вершине (например, на рис. 160 ACD — внешний угол при вершине C, смежный с внутренним углом ACB).

Т.9.2. *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, с ним не смежных.*

270. Биссектриса треугольника. Окружность, вписанная в треугольник. ***Биссектрисой*** треугольника называется любая из биссектрис внутренних углов треугольника.

Т.9.3. *Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

Окружность называется ***вписанной*** в треугольник, если она касается всех его сторон.

Т.9.4. *В любой треугольник можно вписать окружность; ее центром является точка пересечения биссектрис.*

Так, на рис. 161 изображены треугольник и вписанная в него окружность; ее центром O является точка пересечения биссектрис AK, BL и CM.

Вписанная в треугольник окружность единственна, но существуют еще окружности, касающиеся всех трех прямых, на которых лежат стороны треугольника (рис. 162). Такие окружности называются ***внешне вписанными***.

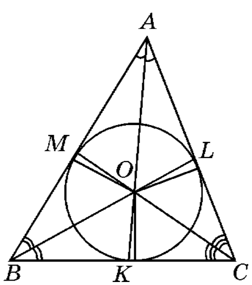


Рис. 161

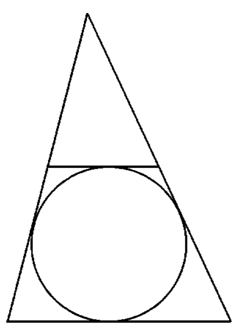


Рис. 162

Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, а l_c — длина биссектрисы, проведенной к стороне c. Тогда справедлива формула

$$l_c = \frac{\sqrt{ab\,(a+b+c)\,(a+b-c)}}{a+b}. \tag{1}$$

П р и м е р 1. В равнобедренном треугольнике ABC основание $BC = 5$ см, а боковая сторона $AB = 20$ см. Найти длину биссектрисы угла при основании (рис. 163).

❑ Здесь $a = 5$ см, $b = c = 20$ см. Используя формулу (1), находим

$$l_c = \frac{\sqrt{100 \cdot 45 \cdot 5}}{25} = \frac{10 \cdot 15}{25} = 6 \text{ (см).} \ \blacksquare$$

Отметим следующее свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника.

Т.9.5. *Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, т. е.*

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}, \tag{2}$$

где a и b — длины сторон треугольника, a_1 и b_1 — длины прилежащих к ним отрезков стороны c (рис. 164).

П р и м е р 2. В треугольнике из примера 1 найти отрезки, на которые биссектриса угла при основании делит боковую сторону.

❑ Имеем (см. рис. 163) $a = BC = 5$, $b = AC = 20$, $a_1 = BD$, $b_1 = AD$. Согласно формуле (2), получим $a_1 : b_1 = 5 : 20 = 1 : 4$, откуда находим $BD = 4$ см, $AD = 16$ см. ■

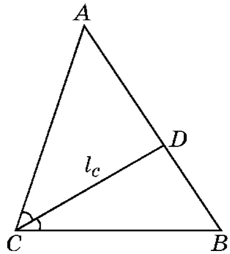


Рис. 163

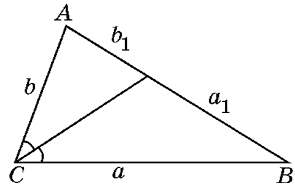


Рис. 164

Аналогичным свойством обладает и биссектриса внешнего угла треугольника, если $AB \neq BC$ (рис. 165), а именно: отрезки AN и CN от вершин A и C до точки N ее пересечения со стороной AC пропорциональны сторонам треугольника, т. е. $AN : CN = AB : BC$.

Для длины биссектрисы внутреннего угла треугольника справедлива также формула

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1}, \qquad (3)$$

где a_1 и b_1 — длины отрезков, на которые биссектриса делит сторону c (см. рис. 164).

Так, в ΔABC из примера 1 (см. рис. 163) имеем $a = BC = 5$ см, $b = AC = 20$ см, $a_1 = BD = 4$ см, $b_1 = AD = 16$ см, откуда по формуле (3) находим $CD = \sqrt{5 \cdot 20 - 4 \cdot 16} = \sqrt{36} = 6$ (см).

271. Медиана треугольника. Средняя линия треугольника. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется ***медианой*** треугольника.

Т.9.6. *Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении* 2 : 1, *считая от вершины треугольника.*

Точка пересечения медиан является центром масс треугольника (если считать треугольник тонкой однородной пластинкой).

Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, а m_c — длина медианы, проведенной к стороне c. Тогда справедлива формула

$$m_c = 0{,}5\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}. \qquad (1)$$

Пример 1. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $BC = 3$ см и $AC = 4$ см найти длины медиан AE и CD (рис. 166).

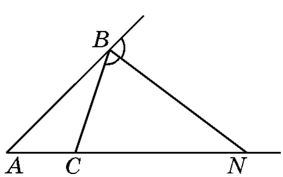


Рис. 165

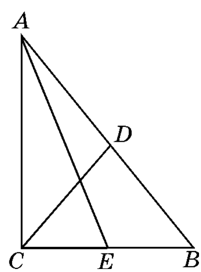


Рис. 166

❑ Здесь $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (см). Используя формулу (1), находим

$$AE = 0{,}5\sqrt{2(4^2 + 5^2) - 3^2} = 0{,}5\sqrt{73} \text{ (см)};$$

$$CD = 0{,}5\sqrt{2(3^2 + 4^2) - 5^2} = 2{,}5 \text{ (см)}$$

(как и должно быть, поскольку в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, т. е. радиусу описанной окружности; см. п. 273). ■

Определим еще одно понятие. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется ***средней линией***. Справедлива следующая теорема:

Т.9.7. *Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.*

П р и м е р 2. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная его боковой стороне, равна 3 см. Найти стороны треугольника, если его периметр равен 17 см.

❑ Так как FE = 3 см (рис. 167), то BC = 6 см, а значит, и AB = 6 см. Остается найти AC = 17 − − 12 = 5 (см). ■

272. Высота треугольника. ***Высотой*** треугольника называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на противоположную сторону. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, h_c — высота, проведенная к стороне c. Тогда справедлива формула

$$h_c = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}, \qquad (1)$$

где $p = 0{,}5(a + b + c)$ — полупериметр. Отсюда сле-

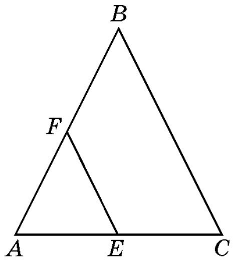


Рис. 167

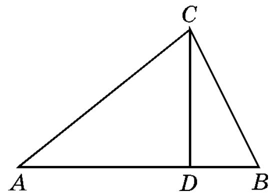


Рис. 168

дует, что $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$, т. е. *длины высот треугольника обратно пропорциональны длинам сторон, к которым проведены эти высоты.*

П р и м е р. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $a = BC = 3$ и $b = AC = 4$ найти длину высоты CD (рис. 168).

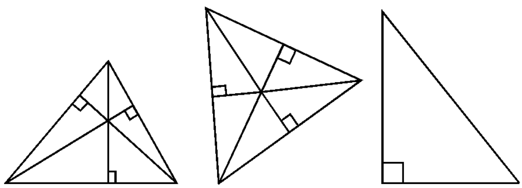
❑ Имеем $c = AB = 5$, $p = 0{,}5\,(3 + 4 + 5) = 6$, $p - a = 3$, $p - b = 2$, $p - c = 1$. Теперь по формуле (1) находим

$$h_c = \frac{2\sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{5} = \frac{12}{5}. \ \blacksquare$$

Заметим, что в *равнобедренном треугольнике биссектриса, медиана и высота, проведенные к основанию, совпадают.*

Т.9.8. *Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.*

Эта точка называется ***ортоцентром***. В остроугольном треугольнике ортоцентр лежит внутри, в тупоугольном — вне треугольника (рис. 169, *а* и *б*). В прямоугольном треугольнике ортоцентр совпадает с вершиной прямого угла (рис. 169, *в*).



а) *б*) *в*)

Рис. 169

273. Окружность, описанная около треугольника. Замечательные точки треугольника. Окружность называется ***описанной*** около треугольника, если она проходит через все его вершины.

Т.9.9. *Три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка является центром окружности, описанной около треугольника.*

На рис. 170 изображены треугольник ABC и описанная около него окружность; ее центром O является точка пересечения серединных перпендикуляров MO, KO и LO к сторонам треугольника.

В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности — это середина гипотенузы (рис. 171).

Точку пересечения биссектрис (центр вписанной окружности), точку пересечения медиан (центр масс), точку пересечения высот (ортоцентр) и точку пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности) называют ***замечательными точками треугольника***.

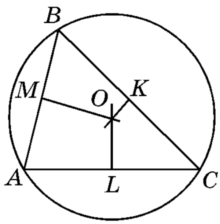


Рис. 170

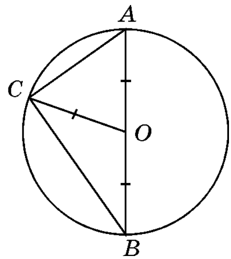


Рис. 171

В равностороннем треугольнике все четыре замечательные точки совпадают (рис. 172).

274.Равенство треугольников. Справедливы следующие признаки равенства треугольников:

Т.9.10. *Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны* (по двум сторонам и углу).

Т.9.11. *Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны* (по стороне и двум углам).

Т.9.12. *Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны* (по трем сторонам).

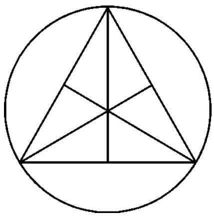


Рис. 172

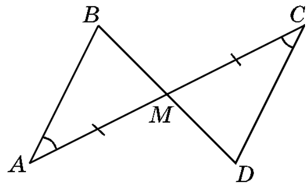


Рис. 173

П р и м е р. Отрезки AC и BD пересекаются в точке M (рис. 173). Доказать, что треугольники BAM и DCM равны, если известно, что $AM = CM$ и что $\angle BAM = \angle DCM$.

❑ Ясно, что $\angle BMA = \angle CMD$ как вертикальные углы. Поэтому в треугольниках BAM и DCM равны стороны AM и CM, а также прилежащие к этим сторонам углы ($\angle BAM = \angle DCM$, $\angle BMA = \angle CMD$). Согласно теореме 9.11, эти треугольники равны. ■

Отметим признаки равенства прямоугольных треугольников:

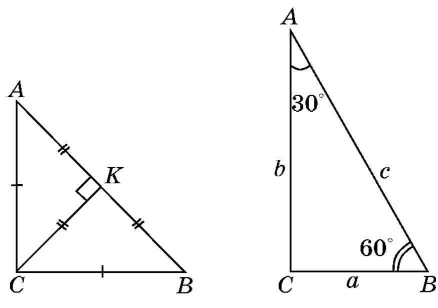
Т.9.13. *Если гипотенуза и катет одного треугольника равны соответственно гипотенузе и катету другого треугольника, то такие треугольники равны* (по гипотенузе и катету).

Т.9.14. *Если катет и противолежащий ему острый угол одного треугольника равны соответственно катету и противолежащему ему ост-*

рому углу другого треугольника, то такие треугольники равны (по катету и противолежащему углу).

Т.9.15. *Если гипотенуза и острый угол одного треугольника равны соответственно гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны* (по гипотенузе и острому углу).

275. Свойства прямоугольного треугольника. Выделим два специальных вида прямоугольных треугольников: равнобедренный (острые углы равны 45°) и треугольник с острыми углами 30° и 60°. Высота первого из них, проведенная из вершины прямого угла, делит исходный треугольник на два равнобедренных прямоугольных треугольника (ΔAKC и ΔBKC на рис. 174, *а*). Во втором треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы



а) *б*)

Рис. 174

(так, для ΔABC, изображенного на рис. 174, *б*, имеем $BC = 0{,}5AB$).

Т.9.16. *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов* (***теорема Пифагора***): $c^2 = a^2 + b^2$.

Верна и обратная теорема: *если в треугольнике квадрат стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то такой треугольник прямоугольный*.

Например, треугольник со сторонами 5, 12 и 13 является прямоугольным, так как $13^2 = 5^2 + 12^2$.

В прямоугольном треугольнике имеем $a : c = \sin\alpha$, $b : c = \cos\alpha$ (рис. 175), поэтому тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ — это теорема Пифагора, записанная для прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной 1.

Отметим еще некоторые свойства прямоугольного треугольника.

Т.9.17. *Каждый катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу* (рис. 176), т. е.

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}; \quad \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}. \tag{1}$$

П р и м е р. В прямоугольном треугольнике ABC известны катет $AC = 20$ и высота $CD = 12$ (рис. 177). Найти катет BC и гипотенузу AB.

❑ Сначала из ΔADC найдем $AD = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$. Теперь воспользуемся вторым из равенств (1);

имеем $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$, откуда $AB = \dfrac{AC^2}{AD}$, т. е. $AB = \dfrac{400}{16} = 25$. Значит, $BC = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$. ■

Т.9.18. *Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу* (см. рис. 176), т. е.

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}. \tag{2}$$

Например, в рассмотренном выше $\Delta\, ABC$ (см. рис. 177) имеем $CD = 12$, $AD = 16$, $BD = AB - AD = 9$, так что соотношение (2) выполняется ($16 : 12 = 12 : 9$).

276. Теорема косинусов. Теорема синусов. Для произвольного треугольника верна ***теорема косинусов***, которую можно рассматривать как обобщение теоремы Пифагора.

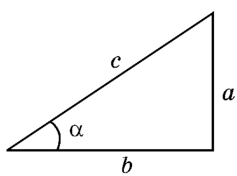


Рис. 175

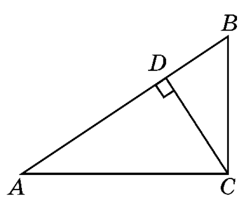


Рис. 176

Т.9.19. *В любом треугольнике квадрат стороны равен сумме квадратов двух других сторон минус их удвоенное произведение на косинус угла, заключенного между ними*:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \qquad (1)$$

Убедимся в справедливости этой теоремы, например, для равностороннего треугольника. Имеем $c^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = 2a^2 - 2a^2 \cdot 0{,}5 = a^2$, т. е. третья сторона треугольника также равна a.

Заметим, что стороны и углы треугольника связаны ***теоремой синусов***.

Т.9.20. *Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов* (рис. 178), т. е.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \qquad (2)$$

где R — радиус описанной окружности.

Убедимся в справедливости этой теоремы, например, для прямоугольного треугольника ABC с остры-

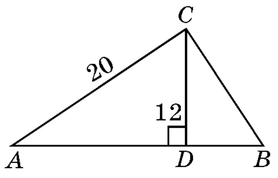


Рис. 177

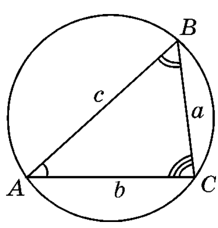


Рис. 178

ми углами $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$ и со сторонами $c = 8$, $a = 4$ и $b = 4\sqrt{3}$ (см. рис. 174, *б*). По формуле (2) имеем

$$\frac{4}{\sin 30°} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 60°} = \frac{8}{\sin 90°} = \frac{4}{0{,}5} = \frac{4\sqrt{3}}{0{,}5\sqrt{3}} = \frac{8}{1} = 8,$$

как и должно быть, поскольку в прямоугольном треугольнике гипотенуза равна диаметру описанной окружности.

277. Площадь треугольника. Приведем важнейшие формулы для вычисления площади треугольника.

1. *Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне*:

$$S = 0{,}5ah_a. \tag{1}$$

П р и м е р 1. Пусть сторона треугольника равна 10, а высота, проведенная к этой стороне, равна 8; тогда $S = 0{,}5 \cdot 10 \cdot 8 = 40$.

Заметим, что площади всех треугольников, имеющих равные основания и равные высоты, одинаковы. Так, на рис. 179 изображены треугольники ABC и ADC, имеющие общее основание AC и равные высоты; значит, $S_{\Delta\, ABC} = S_{\Delta\, ADC}$.

2. *Площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними*:

$$S = 0{,}5\, bc \sin\alpha. \tag{2}$$

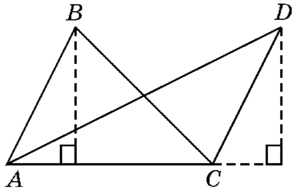


Рис. 179

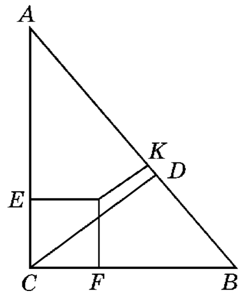


Рис. 180

П р и м е р 2. Пусть стороны треугольника равны $\sqrt{3}$ и 4, а угол между ними равен 60°. Тогда $S = 0{,}5\sqrt{3} \cdot 4 \sin 60^\circ = 0{,}5\sqrt{3} \cdot 4 \cdot 0{,}5\sqrt{3} = 3$.

3. *Площадь треугольника со сторонами a, b и c выражается* ***формулой Герона***:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad (3)$$

где $p = 0{,}5(a+b+c)$ *– полупериметр треугольника.*

П р и м е р 3. Пусть $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$; тогда $p = 0{,}5\,(13 + 14 + 15) = 21$, $p - a = 8$, $p - b = 7$, $p - c = 6$ и по формуле Герона находим

$$S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84.$$

4. *Площадь треугольника равна его полупериметру, умноженному на радиус вписанной окружности*:

$$S = pr. \qquad \textbf{(4)}$$

5. *Площадь треугольника равна произведению трех его сторон, деленному на учетверенный радиус описанной окружности*:

$$S = \frac{abc}{4R}. \qquad \textbf{(5)}$$

6. *Площадь треугольника с вершинами* $A\ (x_1; y_1)$, $B\ (x_2;\ y_2)$ *и* $C\ (x_3;\ y_3)$ *равна половине абсолютной величины определителя* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$, т. е.

$$S = 0{,}5|\Delta|. \qquad \textbf{(6)}$$

П р и м е р 4. Пусть $A(1;\ 5)$, $B(4;\ 1)$, $C(-1;\ 1)$ — координаты вершин треугольника. Тогда, разлагая определитель по элементам первой строки, имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 + 1) - 1 \cdot (1 + 5) + 1 \cdot (1 - 20) = -20,$$

откуда по формуле (6) находим $S = 0{,}5\,|-20| = 10.$

7. *Площадь треугольника, построенного на векторах* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$, *равна половине модуля векторного произведения векторов* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ (см. п. 301).

8. *Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов*:

$$S = 0{,}5ab. \tag{7}$$

9. *Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его гипотенузы на высоту, проведенную к ней*:

$$S = 0{,}5\,ch_c. \tag{8}$$

П р и м е р 5. Найти площадь прямоугольного треугольника с катетами $a = 3$, $b = 4$ по формулам (7) и (8), а также по общим формулам (4) и (5) (рис. 180).

❑ По формуле (7): $S = 0{,}5\,ab = 0{,}5 \cdot 3 \cdot 4 = 6.$

По формуле (8): $S = 0{,}5\,ch_c$, где $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $h_c^2 = CD^2 = AD \cdot BD$ (согласно теореме 9.18). Но $BD = \dfrac{BC^2}{AB}$ (в силу теоремы 9.17), т. е. $BD = \dfrac{9}{5} = 1{,}8$ и, значит, $AD = 3{,}2$. Отсюда $h_c = \sqrt{1{,}8 \cdot 3{,}2} = 2{,}4$ и

$$S = 0{,}5 \cdot 5 \cdot 2{,}4 = 6.$$

По формуле (4): $S = pr$, где $p = 0{,}5\,(a + b + c) = 0{,}5\,(3 + 4 + 5) = 6$, а для нахождения r воспользуемся тем, что $BF = BK = a - r$ (отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны) и аналогично $AE = AK = b - r$. Тогда $a - r + b - r = c$, откуда $r = 0{,}5\,(a + b - c) = 0{,}5\,(3 + 4 - 5) = 1$ и, следовательно, $S = 6 \cdot 1 = 6.$

По формуле (5): $S = \dfrac{abc}{4R}$, где $R = \dfrac{c}{2}$ (в прямоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы). Таким образом,

$$S = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 2{,}5} = 6. \;\blacksquare$$

10. *Площадь правильного треугольника со стороной a находится по формуле*

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \tag{9}$$

П р и м е р 6. Найти площадь правильного треугольника, если известен радиус r вписанной в него окружности.

❑ Известно, что в правильном треугольнике ABC (рис. 181) центром вписанной окружности является точка O пересечения медиан (см. п. 273), а каждая медиана делится точкой пересечения в отношении $BO : OM = 2 : 1$ (см. п. 271). Поэтому если a — сторона $\Delta\, ABC$, то $BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, т. е. $OM = r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, откуда $a = \dfrac{6r}{\sqrt{3}}$.

Теперь по формуле (9) находим

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}r^2}{3 \cdot 4} = 3\sqrt{3}r^2. \;\blacksquare$$

278. Признаки подобия треугольников. ***Подобием*** называется такое преобразование фигуры F_1 в фигуру F_2, при котором расстояния между любыми

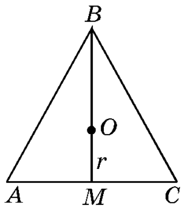


Рис. 181

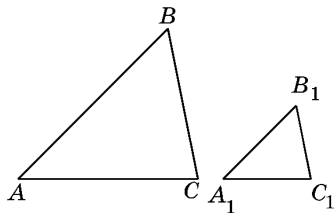


Рис. 182

двумя точками изменяются в одно и то же число раз. Это число называется ***коэффициентом подобия***. Для обозначения подобия используется знак ~. У подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны. В частности, если $\Delta\, ABC \sim \Delta\, A_1B_1C_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B =$

$$= B_1,\ \angle C = C_1,\quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$ (рис. 182).

Справедливы следующие <u>признаки подобия треугольников</u>:

Т.9.21. *Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны* (по двум углам).

П р и м е р 1. В $\Delta\, ABC$ проведены средняя линия DF и медианы AF и CD (рис. 183). Убедиться в том, что медианы делятся точкой их пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины.

❑ Так как $\Delta AOC \sim \Delta ODF$, то $AO : OF = CO : OD = AC : DF$. Но $AC : DF = \dfrac{1}{2}$ (по теореме 9.7), следовательно, медианы делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины, что и утверждается в теореме 9.6. ■

Т.9.22. *Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны* (по двум сторонам и углу между ними).

Т.9.23. *Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны* (по трем сторонам).

Пример 2. Точки K, L и M являются серединами сторон ΔABC (рис. 184). Во сколько раз длина окружности, описанной около ΔABC, больше длины окружности, описанной около ΔKLM?

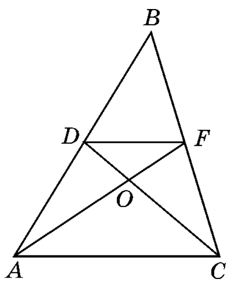


Рис. 183

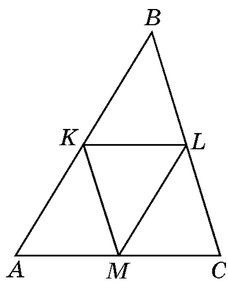


Рис. 184

❑ Так как KL, LM и KM — средние линии в $\Delta\, ABC$, то $\dfrac{AB}{LM} = \dfrac{BC}{KM} = \dfrac{AC}{KL} = 2$ и $\Delta\, ABC \sim \Delta\, KLM$, а в подобных треугольниках все соответствующие отрезки пропорциональны. Значит, один из радиусов вдвое больше другого, откуда следует, что бо́льшая окружность вдвое длиннее. ■

Заметим, что для подобия прямоугольных треугольников достаточно, чтобы у них было по одному равному острому углу.

Отметим, еще что *периметры подобных треугольников относятся как соответствующие стороны, а площади — как квадраты этих сторон*. Таким образом, если $\Delta\, ABC \sim \Delta\, A_1B_1C_1$, то

$$\frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1},$$

$$\frac{S_{\Delta\, ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2}.$$

П р и м е р 3. Периметр треугольника $p = 10$ см, а его площадь $S = 3$ см^2. Определить периметр подобного треугольника, имеющего площадь 27 см^2.

❑ Обозначим искомый периметр через x. Так как площади подобных треугольников относятся как квадраты периметров, то $\dfrac{x^2}{p^2} = \dfrac{27}{3} = 9$, откуда $x^2 = 900$ и $x = 30$ (см). ■

§ 31. Четырехугольники

279. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат. ***Параллелограммом*** называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны (рис. 185). Иногда какие-нибудь две параллельные стороны параллелограмма называют ***основаниями***, тогда две другие называют ***боковыми сторонами***. Заключенный между двумя параллельными сторонами параллелограмма отрезок прямой, перпендикулярный этим сторонам, называется ***высотой*** параллелограмма. На рис. 185 изображен параллелограмм $ABCD$, у которого высота h_1 проведена к сторонам BC и AD, а высота h_2 — к сторонам AB и CD.

Для произвольного параллелограмма справедливы следующие свойства:

1^0. Противоположные стороны параллелограмма равны.

2^0. Противоположные углы параллелограмма равны.

3^0. Соседние углы параллелограмма, т. е. углы, прилежащие к одной стороне, составляют в сумме 180°.

4^0. Диагонали параллелограмма делятся в точке пересечения пополам.

Каждое из перечисленных свойств является характеристическим, т. е. всякий четырехугольник, обладающий хотя бы одним из этих свойств, представляет собой параллелограмм.

Отметим еще одно свойство параллелограмма.

5^0. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

П р и м е р 1. Стороны параллелограмма $ABCD$ относятся как $7 : 9$, а его периметр равен 64. Найти диагонали AC и BD, если известно, что периметр $\Delta\, ABD$ равен 52 (рис. 186).

❑ Пусть $AB = 7x$, тогда $AD = 9x$ и по условию $P_{ABCD} = 2 \cdot 16x = 64$, $P_{\Delta\, ABD} = 16x + BD = 52$. Значит, $x = 2$, откуда находим $AB = 14$, $AD = 18$, $BD = 20$. Для отыскания диагонали AC воспользуемся свойством 5^0; имеем $2(AB^2 + AD^2) = BD^2 + AC^2$, откуда $AC^2 = 2(196 + 324) - 400 = 640$, т. е. $AC = 8\sqrt{10}$. ■

Параллелограмм, смежные стороны которого взаимно перпендикулярны, называется ***прямоугольником*** (рис. 187). Таким образом, прямоугольник — это четырехугольник, все углы которого прямые. Отметим следующее важное свойство прямоугольника: *его диагонали равны*.

Параллелограмм, все стороны которого равны, называется ***ромбом*** (рис. 188). Заметим, что четырехугольник, все стороны которого равны, является ромбом.

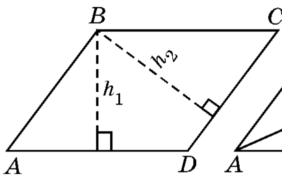


Рис. 185

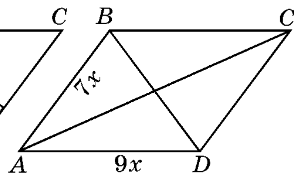


Рис. 186

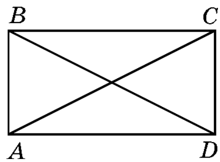


Рис. 187

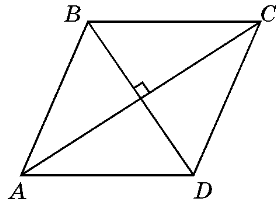


Рис. 188

Отметим следующие свойства ромба:

1^0. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

2^0. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

Верны и такие утверждения:

Параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны, есть ромб.

Параллелограмм, диагонали которого являются биссектрисами его углов, есть ромб.

П р и м е р 2. Периметр ромба равен 32, а высота ромба равна 4. Найти углы ромба и его бо́льшую диагональ.

❑ Так как сторона ромба равна 8, а его высота равна 4, то в ΔAHB (рис. 189), отсеченном от ромба его высотой BH, проведенной из вершины тупого угла, катет BH равен половине гипотенузы AB и, значит, $\angle BAD = 30^\circ$. Тогда $\angle ADC = 150^\circ$.

Остается найти диагональ AC. Из ΔADC по теореме косинусов получим $AC^2 = 64 + 64 - 2 \cdot 8 \times$

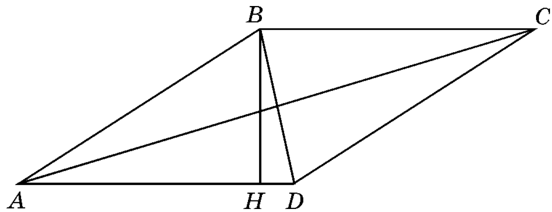


Рис. 189

$\times 8\cos 150^\circ = 128 + 64\sqrt{3} = 64(2+\sqrt{3})$, откуда $AC =$
$= 8\sqrt{2+\sqrt{3}}$. ■

Прямоугольник, стороны которого равны, называется ***квадратом*** (рис. 190). Следовательно, квадрат является также и ромбом с прямыми углами. Можно сказать, что квадрат — это параллелограмм, являющийся одновременно и ромбом, и прямоугольником.

Таким образом, квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, ромба и прямоугольника.

Пример 3. Диагональ данного квадрата служит стороной треугольника, у которого угол, противолежащий этой стороне, равен 150°. Доказать, что радиус окружности, описанной около треугольника, равен диагонали квадрата.

❑ Пусть a — сторона данного квадрата; тогда его диагональ, равная $a\sqrt{2}$, является основанием треу-

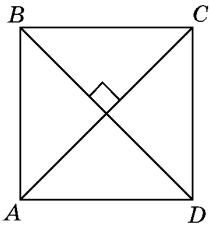


Рис. 190

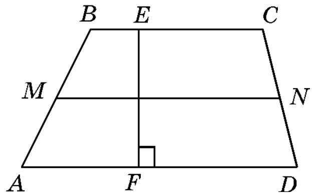


Рис. 191

гольника. Радиус R описанной около этого треугольника окружности найдем с помощью теоремы синусов; имеем $\dfrac{a\sqrt{2}}{\sin 150^\circ} = 2R$, откуда $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\sin 150^\circ} = a\sqrt{2}$, т. е. этот радиус равен диагонали квадрата.■

280. Трапеция. ***Трапецией*** называется четырехугольник, имеющий только одну пару параллельных сторон (рис. 191). При этом параллельные стороны называются ее ***основаниями***, а непараллельные — ***боковыми сторонами***. Одно из оснований трапеции называется ***б óльшим***, а другое — ***меньшим***. Из свойств параллельных прямых (см. п. 259) следует, что *сумма углов, прилежащих к каждой из боковых сторон трапеции, равна* 180°. Отрезок прямой, перпендикулярный основаниям и заключенный между ними, называется ***высотой*** трапеции (отрезок EF на рис. 191). Трапеция, одна из сторон которой перпендикулярна основаниям, называется

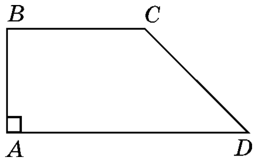


Рис. 192

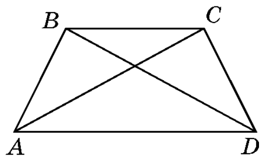


Рис. 193

прямоугольной (рис. 192). Трапеция, у которой равны боковые стороны, называется ***равнобочной*** (иногда ее называют также ***равнобокой*** или ***равнобедренной***). На рис. 193 изображена равнобочная трапеция $ABCD$.

Отметим некоторые свойства равнобочной трапеции:

1^0. Углы, прилежащие к каждому из оснований трапеции, равны.

2^0. Диагонали равнобочной трапеции равны.

3^0. Если продолжить боковые стороны равнобочной трапеции до их пересечения, то вместе с большим основанием они образуют равнобедренный тре́угольник.

Каждое из перечисленных свойств выделяет равнобочную трапецию из всех других трапеций.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон произвольной трапеции, называется ***средней линией*** трапеции (отрезок MN на рис. 191).

Справедлива следующая теорема:

Т.9.24. *Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.*

П р и м е р 1. Длина большего основания трапеции равна 24. Найти длину ее меньшего основания, если расстояние между серединами диагоналей трапеции равно 4.

❑ В трапеции $ABCD$ известно, что $AD = 24$, $AE = EC$, $BF = FD$, $EF = 4$ (рис. 194). Пусть $BC = x$. Тогда $KE = 0{,}5x$, $FL = 0{,}5x$ (так как KE и FL — средние линии в ΔABC и ΔDBC). Значит, $KL = KE + EF + FL = x + 4$. С другой стороны, KL — средняя линия трапеции $ABCD$, т. е. $KL = 0{,}5(x + 24)$. Решив уравнение $x + 4 = 0{,}5(x + 24)$, найдем $x = 16$. ■

П р и м е р 2. Меньшее основание равнобочной трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне (рис. 195). Найти углы трапеции.

❑ По условию, в трапеции $ABCD$ имеем $AB = CD = BC$, $AC \perp CD$. Пусть $\angle BCA = x$; тогда

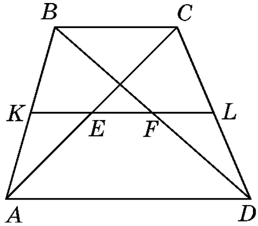


Рис. 194

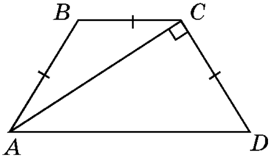


Рис. 195

$\angle BAC = x$ (как углы при основании равнобедренного треугольника ABC), $\angle BCD = x + 90°$, а $\angle CDA = 180° - (x + 90°) = 90° - x$ (поскольку сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна $180°$). Отсюда следует, что $\angle CAD = 90° - \angle CDA = x$, и, значит, $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 2x$.

Используя равенство углов BAD и CDA, прилежащих к основанию AD равнобочной трапеции, имеем $2x = 90° - x$, откуда $x = 30°$. Итак, углы трапеции равны $60°$ и $120°$. ■

281. Площади четырехугольников. Приведем важнейшие формулы для вычисления площадей четырехугольников.

1. *Площадь квадрата равна квадрату его стороны или половине квадрата его диагонали* (рис. 196):

$$S = a^2; \tag{1}$$

$$S = 0{,}5d^2. \tag{2}$$

2. *Площадь прямоугольника равна произведению его сторон или половине произведения квадрата его диагонали на синус угла между диагоналями* (рис. 197):

$$S = ab; \tag{3}$$

$$S = 0{,}5d^2 \sin\varphi. \tag{4}$$

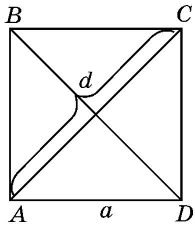


Рис. 196

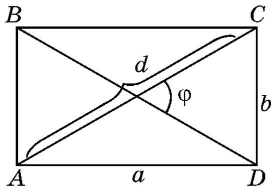


Рис. 197

Пример 1. Пусть диагональ прямоугольника равна 5, а синус угла между диагоналями равен 0,96. Тогда $S = 0{,}5 \cdot 25 \cdot 0{,}96 = 12$.

3. *Площадь ромба равна произведению его стороны на высоту, проведенную к ней, либо произведению квадрата его стороны на синус угла между смежными сторонами* (рис. 198, *а*), *либо половине произведения его диагоналей* (рис. 198, *б*):

$$S = ah_a; \tag{5}$$

$$S = a^2 \sin\alpha; \tag{6}$$

$$S = 0{,}5 d_1 d_2. \tag{7}$$

4. *Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту, либо произведению его смежных сторон на синус угла между ними*

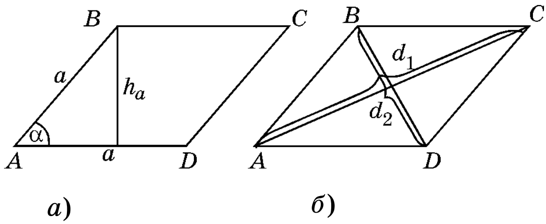


Рис. 198

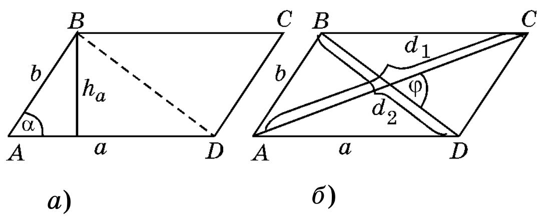


Рис. 199

(рис. 199, *а*), *либо половине произведения его диагоналей на синус угла между ними* (рис. 199, *б*):

$$S = ah_a; \tag{8}$$

$$S = ab\sin\alpha; \tag{9}$$

$$S = 0{,}5d_1d_2\sin\varphi. \tag{10}$$

Заметим, что площаль треугольника с таким же основанием a и такой же высотой h_a, как у параллелограмма, равна половине площади этого параллелограмма, например $S_{\Delta ABD} = 0{,}5S_{ABCD}$ (см. рис. 199, *а*).

Отметим еще, что *площадь параллелограмма, построенного на векторах* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *, равна модулю векторного произведения векторов* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ (см. п. 301).

П р и м е р 2. Найти площадь ромба со стороной $a = 6$ и углом в 30° между его смежными сторонами (рис. 200), используя формулы (5), (6) и (7).

❑ По формуле (6): $S = a^2 \sin\alpha = 36 \cdot \sin 30° = 18$.

По формуле (5): $S = ah_a = AD \cdot BK$, где $BK = 0{,}5AB = 3$ (так как $\angle BAD = 30°$). Значит, $S = 6 \cdot 3 = 18$.

По формуле (7): $S = 0{,}5d_1d_2 = 0{,}5AC \cdot BD$, где BD найдем по теореме косинусов из ΔBAD, а AC — по той же теореме из ΔABC. Имеем $BD^2 = 36 + 36 - 2 \times 36\cos 30° = 72(1 - \cos 30°) = 36(2 - \sqrt{3})$, $AC^2 = 36 + 36 - 2 \cdot 36\cos 150° = 72(1 + \cos 30°) = 36(2 + \sqrt{3})$.

Поэтому $S = 0{,}5 \cdot 6 \cdot 6\sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 18$. ■

П р и м е р 3. Найти площадь параллелограмма, диагонали которого равны 5 и 3, а синус угла между ними равен 0,8 (рис. 201), используя формулы (8), (9) и (10).

❑ По формуле (10):

$$S = 0{,}5d_1d_2\sin\varphi = 0{,}5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 0{,}8 = 6.$$

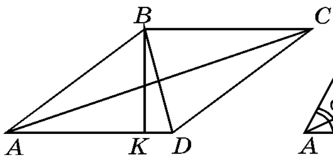


Рис. 200

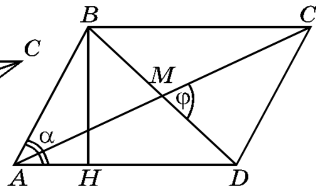


Рис. 201

По формуле (9): $S = ab\sin\alpha$, где $a = AD$, $b = CD$ и $\sin\alpha$ надо найти. Так как $\sin\varphi = 0{,}8$, то $\cos\varphi = \sqrt{1 - 0{,}8^2} = 0{,}6$ и в ΔCMD по теореме косинусов имеем $CD^2 = MC^2 + MD^2 - 2MC \cdot MD\cos\varphi$, или $CD^2 = 2{,}5^2 + 1{,}5^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}6 = 4$, т. е. $CD = 2$. Но $AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + CD^2)$, или $25 + 9 = 2AD^2 + 2 \cdot 4$, откуда $AD = \sqrt{13}$. Теперь применим теорему косинусов к ΔBAD: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD\cos\alpha = 4 + 13 - 2 \cdot 2\sqrt{13}\cos\alpha$, или $9 = 17 - 4\sqrt{13}\cos\alpha$, откуда $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$. Поэтому $\sin\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{4}{13}} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$ и, значит, $S = 2\sqrt{13} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{13}} = 6$.

По формуле (8): $S = ah_a$, где сторона $a = AD = \sqrt{13}$ была найдена ранее, а высоту $h_a = BH$ найдем из ΔAHB. Имеем $BH = AB\sin\alpha = 2\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$ и, следовательно, $S = \sqrt{13}\cdot\frac{6}{\sqrt{13}} = 6$. ■

5. *Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту или произведению ее средней линии на высоту*:

$$S = \frac{a+b}{2}\cdot h; \tag{11}$$

$$S = lh. \tag{12}$$

П р и м е р 4. Найти площадь прямоугольной трапеции, если ее острый угол равен $60°$, меньшее основание равно 6, а большая боковая сторона равна 8.

❑ В трапеции $ABCD$ проведем $BH \perp AD$ (рис. 202). Тогда $\angle ABH = 30°$ и $AH = 0{,}5AB = 4$, $BH = 0{,}5\sqrt{3}AB = 4\sqrt{3}$, $AD = AH + HD = 10$. Значит,

$$S = 0{,}5\,(10+6)\cdot 4\sqrt{3} = 32\sqrt{3}. \ ■$$

6. *Площадь любого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними*:

$$S = 0{,}5d_1d_2\sin\varphi. \tag{13}$$

П р и м е р 5. В равнобочной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 5

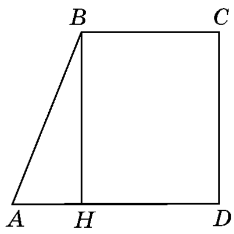


Рис. 202

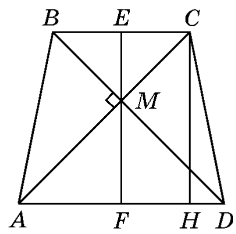


Рис. 203

(рис. 203). Найти площадь трапеции, используя формулу (12) или общую формулу (13).

❑ По формуле (12): $S = lh$, где $h = EF = EM + MF = BE + AF = 0{,}5(a+b) = l$ ($a = BC$ и $b = AD$ — основания трапеции). Значит, $S = l^2 = 25$.

По формуле (13): $S = 0{,}5d^2$ (так как $\varphi = 90^\circ$). Проведем $CH \perp AD$; ранее мы установили, что $CH = 0{,}5(a+b) = 5$. В ΔAMD имеем $\angle MAD = 45^\circ$. Тогда из ΔCHA следует, что $AH = CH = 5$. Поэтому $d^2 = AC^2 = 2CH^2 = 50$, откуда $S = 25$. ■

Заметим, что площадь произвольного четырехугольника можно найти, разбив его на треугольники.

П р и м е р 6. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, в котором $\angle BAD = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 2$, $CD = 5$, $AD = 4$ (рис. 204).

❑ Разобьем заданный четырехугольник на треугольники BAD и BCD. Имеем $S_{\Delta BAD} = 6$ (половина произведения катетов). По теореме Пифагора из ΔBAD найдем $BD = 5$. Теперь в ΔBCD известны три стороны. По формуле Герона находим $S_{\Delta BCD} = \sqrt{6 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1} = 2\sqrt{6}$. Итак, $S_{ABCD} = 6 + 2\sqrt{6}$. ■

7. *Если около четырехугольника можно описать окружность, то его площадь S выражается формулой*

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \qquad (14)$$

где a, b, c, d — стороны четырехугольника, $p = 0{,}5(a+b+c+d)$ — полупериметр.

8. *Если в четырехугольник можно вписать окружность, то его площадь равна полупериметру, умноженному на радиус вписанной окружности:*

$$S = pr. \qquad (15)$$

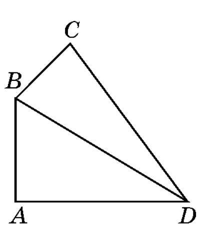


Рис. 204

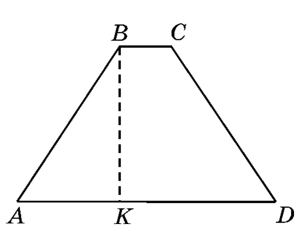


Рис. 205

Пример 7. Основания трапеции равны 4 и 16 см. Известно, что существуют окружности, вписанная в эту трапецию и описанная около нее. Используя формулы (14) и (15), найти площадь трапеции.

❑ Так как около трапеции $ABCD$ (рис. 205) можно описать окружность, то трапеция должна быть равнобочной, т. е. $AB = CD$. Далее, так как в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, то сумма оснований трапеции должна быть равна сумме ее боковых сторон, т. е. $AD + BC = AB + CD = 2AB$, откуда следует, что $AB = 0{,}5\,(AD + BC) = 10$. Проведем $BK \perp AD$ и из $\Delta\, AKB$, где $AB = 10$, $AK = 0{,}5\,(16 - 4) = 6$, найдем $BK = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Значит, $r = 0{,}5BK = 4$.

По формуле (14): $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где $p = 20$, $p - a = 16$, $p - b = 4$, $p - c = 10$, $p - d = 10$. Тогда $S = \sqrt{16 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 10} = 80$.

По формуле (15): $S = pr = 20 \cdot 4 = 80$. ■

§ 32. Окружность

282. Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная и секущая. ***Окружностью*** называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки O, называемой ***центром*** окружности (рис. 206). Расстояние от точки окружности до ее центра называется ***радиусом*** окружности (отрезок OA на рис. 206).

Окружность делит плоскость на две части: внутреннюю по отношению к окружности и внешнюю. Внутренняя часть, включая и контур, ее ограничивающий, т. е. окружность, называется ***кругом***. Все точки круга удалены от центра на расстояние, не большее, чем радиус окружности. Внешняя часть состоит из точек, удаленных от центра на расстояние, превышающее радиус.

Прямая, лежащая в той же плоскости, что и окружность, может не иметь с окружностью общих точек, может пересекать окружность в двух точках (такая прямая называется ***секущей***; MN на рис. 206) и может иметь с окружностью одну общую точку (такая прямая называется ***касательной***; KL на рис. 206).

Т.9.25. *Прямая, проходящая через точку окружности, тогда и только тогда является касательной к этой окружности, когда она перпендикулярна радиусу, проведенному в данную точку.*

283. Хорда и диаметр. Сектор и сегмент. Отрезок секущей, заключенный внутри окружности, на-

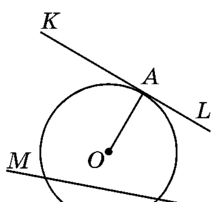


Рис. 206

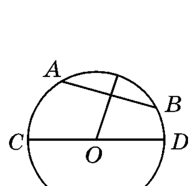


Рис. 207

зывается ***хордой*** (отрезок AB на рис. 207). Перпендикуляр, опущенный на хорду из центра окружности, делит эту хорду пополам.

Хорда, проходящая через центр окружности, называется ***диаметром*** (отрезок CD на рис. 207). Все диаметры равны между собой и равны удвоенному радиусу.

Хорда разбивает круг на две части, называемые ***сегментами*** (на рис. 208 — это сегменты *I* и *II*).

Если хорда совпадает с диаметром, то эти сегменты превращаются в ***полукруги***.

Часть круга, ограниченная двумя его радиусами OA и OB и дугой окружности, соединяющей концы этих радиусов, называется ***сектором*** (на рис. 209 — это секторы *I* и *II*).

Справедливы следующие утверждения:

1^0. Равные хорды стягивают равные дуги.

2^0. Равные дуги стягиваются равными хордами.

3^0. Хорды, одинаково удаленные от центра, равны.

4^0. Равные хорды одинаково удалены от центра.

5^0. Всякий диаметр является осью симметрии окружности и делит ее на две равные полуокружности.

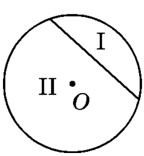


Рис. 208

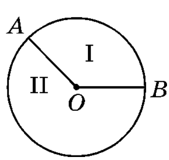


Рис. 209

284. Уравнение окружности. Уравнение окружности с центром C $(a;b)$ и радиусом R в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (1)$$

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение (1) примет вид

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (2)$$

П р и м е р. Составить уравнение окружности:

а) с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{7}$;
б) с центром C (2;–6) и радиусом 9;
в) с центром C (–3;4), причем окружность проходит через начало координат.

❑ а) Используя формулу (2), получим $x^2+y^2=7$.

б) Согласно формуле (1), имеем $(x-2)^2+(y+6)^2=81$.

в) Воспользуемся формулой (1) и запишем $(x+3)^2+(y-4)^2=R^2$ — это уравнение окружности с данным центром и неизвестным пока радиусом R.

Так как окружность проходит через начало координат, то значения $x=0$, $y=0$ удовлетворяют ее уравнению; подставив эти значения в полученное уравнение, имеем $3^2+(-4)^2=R^2$, т. е. $R^2=25$. Итак, $(x+3)^2+(y-4)^2=25$ — искомое уравнение.■

285. Взаимное расположение двух окружностей. Рассмотрим возможные случаи расположения двух окружностей.

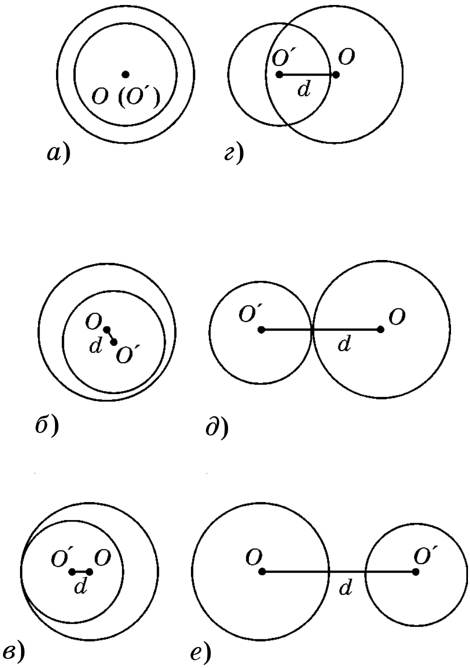


Рис. 210

1. Пусть центры окружностей совпадают (такие окружности называются ***концентрическими***). Если их радиусы не равны, то одна окружность лежит внутри другой (рис. 210, *а*). Если же радиусы равны, то окружности совпадают.

2. Пусть центры окружностей не совпадают. Прямая, проходящая через центры окружностей, назы-

вается ***линией центров***. Взаимное расположение окружностей зависит от соотношения между длиной d отрезка, соединяющего центры, и величинами радиусов окружностей R и $r\,(R > r)$:

$d < R - r$ — одна из окружностей лежит внутри другой (рис. 210, *б*);

$d = R - r$ — окружности касаются внутренним образом (рис. 210, *в*);

$R - r < d < R + r$ — окружности пересекаются в двух точках, симметричных относительно линии центров (рис. 210, *г*);

$d = R + r$ — окружности касаются внешним образом (рис. 210, *д*);

$d > R + r$ — окружности не имеют общих точек, каждая окружность целиком лежит вне другой (рис. 210, *е*).

Если радиусы окружностей равны, то возможны только три последних случая: пересечение, внешнее касание, внешнее расположение.

§ 33. Углы и пропорциональные отрезки в круге

286. Углы с вершиной на окружности. Угол, составленный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности, называется ***вписанным*** (рис. 211).

Т.9.26. *Угол, вписанный в окружность, измеряется половиной дуги, на которую он опирается.*

Например, если дуга, на которую опирается вписанный угол, равна 60°, то этот угол равен 30° (рис. 212).

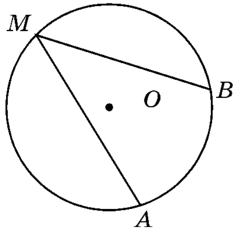


Рис. 211

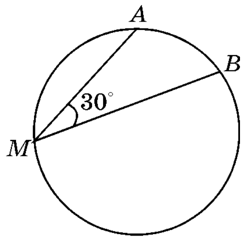


Рис. 212

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой, поскольку дуга, стягиваемая диаметром, равна 180° (рис. 213).

Ранее (см. п. 256) мы установили, что геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α , — это дуга, в которую вписан угол α (и дуга, симметричная с ней относительно AB). Отрезок AB является хордой, стягивающей эту дугу (см. рис. 132, *б*).

П р и м е р 1. Хорда делит окружность на две дуги, одна из которых составляет 125% другой. Найти величины вписанных углов, опирающихся на эту хорду.

❑ Пусть меньшая дуга содержит x°, тогда большая дуга содержит $\frac{5}{4}x^\circ$, что в сумме дает $\frac{9}{4}x^\circ$.

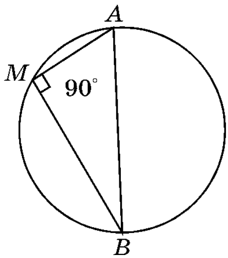


Рис. 213

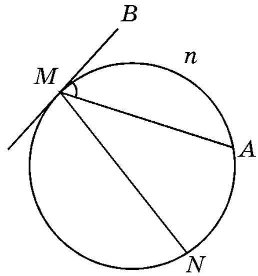


Рис. 214

С другой стороны, сумма этих дуг равна 360°, поэтому меньшая из них равна $\frac{4}{9}\cdot 360^\circ = 160^\circ$, а бóльшая равна 200°. Отсюда,используя теорему 9.26, находим искомые величины вписанных углов: 80° и 100°. ■

Т.9.27. *Угол между касательной к окружности в некоторой ее точке и хордой, проходящей через ту же точку, измеряется половиной дуги окружности, лежащей внутри этого угла.*

Так, угол BMA (рис. 214) измеряется половиной дуги AnM.

П р и м е р 2. Через точку, лежащую на окружности, проведены хорда и касательная. Найти острый угол между ними, если центральный угол, опирающийся на эту хорду, равен 140° (рис. 215).

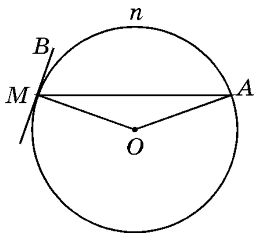


Рис. 215

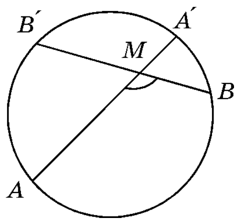


Рис. 216

❑ Согласно теореме 9.27, острый угол BMA между касательной BM и хордой AM измеряется половиной дуги AnM. Но центральный угол AOM измеряется дугой AnM, поэтому искомый угол BMA вдвое меньше угла AOM, т. е. он равен 70°. ■

287. Углы с вершиной внутри и вне круга. Рассмотрим угол, который образован двумя хордами, пересекающимися внутри круга (на рис. 216 это угол AMB).

Т.9.28. *Угол, образованный двумя хордами, пересекающимися внутри круга, измеряется полусуммой дуг, лежащих внутри данного угла и угла с ним вертикального.*

Так, угол AMB измеряется полусуммой дуг AB и $A'B'$ (рис. 216).

П р и м е р 1. Диаметр FE и хорда HG пересекаются в точке K, причем дуга FH содержит 120°, а дуга GE — 98°. Найти угол FKG (рис. 217).

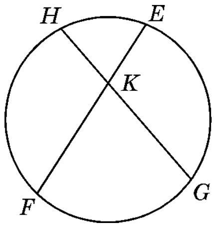


Рис. 217

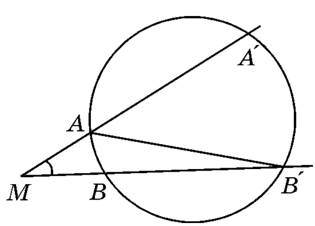


Рис. 218

❑ Дуги FH и GE в сумме содержат 218°, поэтому дуги HE и FG дают в сумме 142°. Согласно теореме 9.28, угол FKG измеряется половиной этой величины, т. е. он равен 71°. ■

Рассмотрим теперь угол, образованный двумя секущими, проведенными из точки, лежащей вне круга (на рис. 218 — это угол $A'MB'$).

Т.9.29. *Угол, образованный двумя секущими, проведенными из внешней точки, измеряется полуразностью дуг, лежащих внутри него.*

Так, угол $A'MB'$ измеряется полуразностью дуг $A'B'$ и AB (рис. 218).

Теорема 9.28 остается верной и в том случае, когда одна из сторон угла или обе являются касательными к окружности.

П р и м е р 2. Из точки M, лежащей вне круга (рис. 219), проведены секущие MDA и MEC, образующие угол AMC, равный 33°. Сколько градусов содержат дуги AC и DE, если первая из них в 2,5 раза больше второй?

❑ Согласно теореме 9.29, угол AMC измеряется полуразностью дуг AC и DE, откуда следует, что разность дуг AC и DE равна 66°. Пусть дуга DE содержит x°, значит дуга AC содержит $2{,}5x^\circ$, а их разность равна $1{,}5x^\circ$. Тогда получаем уравнение $1{,}5x = 66$, откуда $x = 44$, $2{,}5x = 110$. Итак, $\smile AC = 110^\circ$, $\smile DE = 44^\circ$.■

288. Четырехугольники, вписанные в окружность и описанные около нее. Как известно, во всякий треугольник можно вписать окружность и около всякого треугольника можно описать окружность. В случае четырехугольников это не так, а именно, для вписанных четырехугольников справедливо утверждение:

Т.9.30. *Если четырехугольник вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна* 180°.

Отсюда следует, что из всех параллелограммов окружность можно описать только около прямоугольника, а из всех трапеций — только около равнобочной трапеции.

Отметим еще одно свойство вписанного четырехугольника. Пусть в произвольном вписанном четырехугольнике проведены диагонали. Тогда *произведения отрезков, на которые диагонали разбиваются точкой их пересечения, равны* (см. теорему 9.33 в п. 289). Например, для вписанного четырехугольника $ABCD$ (рис. 220) выполняется равенство

$$AF \cdot FC = BF \cdot FD.$$

Наконец, справедливо следующее свойство (***теорема Птолемея***): *во вписанном четырехугольнике*

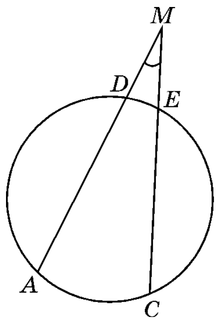


Рис. 219

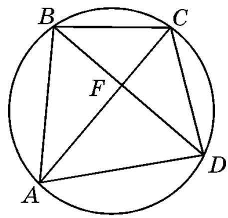


Рис. 220

произведение диагоналей равно сумме произведений его противоположных сторон (рис. 220), т. е.

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

П р и м е р 1. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC служит диаметром описанной около него окружности, а диагональ BD — хордой, составляющей с AC угол 30°. Точка P пересечения хорды и диаметра делит AC на отрезки $AP = 16$ см, $PC = 6$ см. Найти отрезки DP и PB, если площадь четырехугольника равна 110 см^2 (рис. 221).

❑ Имеем $S = 0{,}5AC \cdot BD \sin 30^\circ$ (см. п. 277), или $110 = 0{,}5 \cdot 22 \cdot 0{,}5BD$, откуда $BD = 20$ (см). Теперь положим $DP = x$, $PB = 20 - x$ и воспользуемся тем, что во вписанном четырехугольнике $AP \cdot PC = DP \cdot PB$. Тогда $16 \cdot 6 = x(20 - x)$, откуда находим $DP = 12$ см, $PB = 8$ см. ■

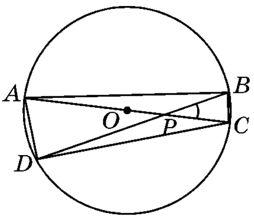


Рис. 221

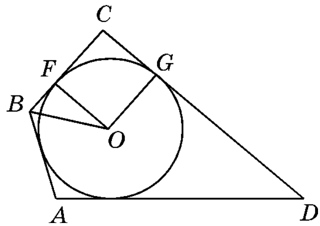


Рис. 222

Для описанного четырехугольника справедливо утверждение:

Т.9.31. *Если четырехугольник описан около окружности, то суммы длин его противоположных сторон равны.*

Отсюда следует, что из всех параллелограммов окружность можно вписать только в ромб, а из всех трапеций — только в такую равнобочную трапецию, у которой сумма длин оснований равна сумме длин боковых сторон.

Например, в равнобочную трапецию с основаниями 2 и 12 и с боковой стороной 7 можно вписать окружность, а в равнобочную трапецию с теми же основаниями и с боковой стороной 5 — нельзя (хотя около нее можно описать окружность).

Пример 2. Около окружности описан четырехугольник $ABCD$ (рис. 222), в котором $\angle C = 90°$, $AD = 14$ см, $BF = 2$ см и $S_{\Delta OFB} = 0{,}25 S_{OFCG}$, где OF и OG — радиусы окружности, проведенные в точки касания. Найти S_{ABCD}.

❑ Пусть $OF = x$; тогда площадь квадрата $OFCG$ равна x^2, что по условию составляет $4S_{\Delta OFB} =$

$= 4 \cdot 0{,}5OF \cdot BF = 2 \cdot 2x$, откуда $x = 4$ (см). Значит, $BC = BF + FC = 6$ (см). Так как четырехугольник вписан в окружность, то $AB + CD = AD + BC = 20$ см. Искомую площадь находим по формуле $S = pr$ (см. п. 277), где $p = 20$ см, $r = 4$ см. Итак, $S_{ABCD} = 80$ см^2. ■

289. Пропорциональные отрезки в круге. Пусть из одной точки, лежащей вне круга, проведены секущая AB и касательная AT (рис. 223). Будем называть отрезок между точкой A и ближайшей к ней точкой пересечения с окружностью ***внешней частью секущей*** (отрезок AC на рис. 223). Тогда справедливо такое утверждение:

Т.9.32. *Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть,* т. е. $AB \cdot AC = AT^2$.

Отсюда следует, что *касательная равна среднему геометрическому между секущей, проведенной из той же точки, и внешней частью этой секущей.*

Отметим, что *для любой секущей, проходящей через данную точку, произведение длины секущей на ее внешнюю часть постоянно*: $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$ (рис. 224).

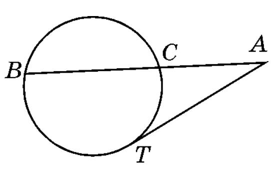


Рис. 223

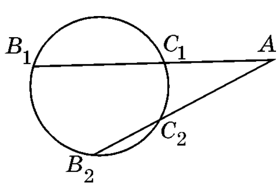


Рис. 224

П р и м е р 1. Из точки, лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая. Касательная меньше секущей на m и больше внешней части секущей на n. Найти длину касательной.

❑ Используя обозначения, приведенные на рис. 223, имеем: $AB - AT = m$, $AT - AC = n$. Пусть $AT = x$; тогда $AB = m + x$, $AC = x - n$. Согласно теореме 9.32, $AB \cdot AC = AT^2$, т. е. $(m + x)(x - n) = x^2$, откуда $x = \dfrac{mn}{m - n}$. ■

Рассмотрим теперь хорды, пересекающиеся внутри круга. Справедливо следующее утверждение:

Т.9.33. *Если две хорды пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.*

Например, хорды AB и CD (рис. 225) пересекаются в точке M и выполняется равенство $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Другими словами, *для данной точки произведение отрезков, на которые она разбивает любую проходящую через нее хорду, постоянно*.

П р и м е р 2. Через точку P диаметра данной окружности проведена хорда AB, образующая с диаметром угол 60°. Найти радиус окружности, если $AP = 6$, $BP = 4$ (рис. 226).

❑ Пусть O — центр окружности, а MN — диаметр, проходящий через точку P. Проведем $OK \perp AB$; тогда $BK = 0{,}5AB = 5$, $PK = 1$. В $\triangle OKP$ имеем $\angle KOP = 30^\circ$, поэтому $OP = 2PK = 2$, $MP = x + 2$, $PN = x - 2$, где x — искомый радиус. Согласно теореме 9.33, $MP \cdot PN = AP \cdot PB$, или $(x + 2)(x - 2) = 24$, откуда $x^2 = 28$, т. е. $x = 2\sqrt{7}$. ■

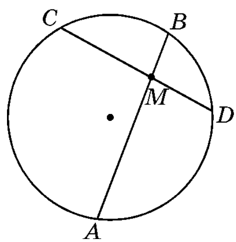


Рис. 225

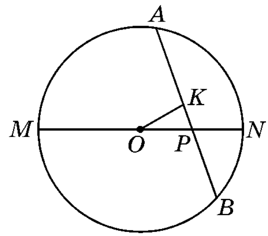


Рис. 226

290. Длина окружности. ***Длиной окружности*** называется общий предел, к которому стремятся периметры вписанных и описанных правильных многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон.

Справедлива формула

$$C = 2\pi R, \qquad (1)$$

где C — длина окружности, R — ее радиус, π — иррациональное число, равное отношению длины окружности к ее диаметру: $\pi = 3{,}14159...$.

П р и м е р 1. Найти длину окружности, описанной около прямоугольного треугольника, катеты которого равны a и $3a$.

❑ Найдем длину гипотенузы: $\sqrt{a^2 + 9a^2} = a\sqrt{10}$. Так как центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы, то $R = 0{,}5a\sqrt{10}$. Теперь по формуле (1) получим $C = 2\pi \cdot 0{,}5a\sqrt{10} = \pi a\sqrt{10}$. ■

Приведем теперь формулу для вычисления длины l произвольной дуги окружности радиуса R. Пусть эта дуга соответствует центральному углу $\alpha°$ (в градусной мере) или α (в радианной мере). Тогда

$$l = \frac{\pi R\alpha°}{180°}; \tag{2}$$

$$l = R\alpha. \tag{3}$$

Из последней формулы видно, что *длина дуги окружности равна произведению ее радиуса на центральный угол, выраженный в радианах*.

П р и м е р 2. Найти длину дуги в одну минуту на экваторе Земли, считая экваториальный радиус Земли равным 6300 км.

❑ Используя формулу (3), находим

$$l = R\alpha = 6300 \cdot \frac{2\pi}{360 \cdot 60} \approx 1830\,(\text{м}). \ ■$$

291. Площадь круга и его частей. ***Площадью круга*** называется общий предел, к которому стремятся площади вписанных и описанных правильных многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон.

Площадь круга находится по формуле

$$S_{\text{круга}} = \pi R^2, \tag{1}$$

т. е. *она равна половине произведения длины его окружности на радиус*.

Если вместо радиуса R взять диаметр $D = 2R$, то для площади круга получим формулу

$$S_{\text{круга}} = \frac{\pi D^2}{4}. \qquad (2)$$

П р и м е р 1. Найти площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, катеты которого равны 20 и 21 см.

❑ Гипотенуза треугольника равна $\sqrt{20^2 + 21^2} = 29$ (см), его полупериметр $p = 0{,}5\ (20 + 21 + 29) = 35$ (см), а площадь треугольника равна $0{,}5 \cdot 20 \cdot 21 = 210$ (см^2). Теперь по формуле $r = \dfrac{S}{p}$ найдем $r = \dfrac{210}{35} = 6$ (см). Наконец, согласно формуле (1) получим $S_{\text{круга}} = 36\pi$ (см^2). ■

Площадь сектора с центральным углом α° и радиусом R выражается формулой

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2 \alpha^\circ}{360^\circ}. \qquad (3)$$

Если же угол выражен в радианах, то получим формулу

$$S_{\text{сект}} = 0{,}5 R^2 \alpha, \qquad (4)$$

т. е. *площадь сектора равна половине произведения квадрата радиуса на центральный угол, выраженный в радианах*.

П р и м е р 2. В круге радиуса 36 см найти площадь сектора, соответствующего центральному углу: а) 40°; б) $\dfrac{\pi}{2}$.

❑ а) По формуле (3) находим

$$\mathrm{S}_{\text{сект}} = \frac{\pi \cdot 36^2 \cdot 40^\circ}{360^\circ} = 144\pi \ \ (\text{см}^2).$$

б) По формуле (4) имеем

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi \cdot 36^2}{2 \cdot 2} = 324\pi \ \ (\text{см}^2). \ \blacksquare$$

Рассмотрим теперь сегмент круга радиуса R, соответствующий центральному углу α, выраженному в радианной мере (рис. 227). Площадь такого сегмента (на рисунке он заштрихован) равна разности площадей сектора OAB и треугольника AOB и выражается формулой

$$S_{\text{сегм}} = 0{,}5R^2(\alpha - \sin\alpha). \tag{5}$$

Эта же формула верна и для сегмента, соответствующего центральному углу α, большему развернутого (сегмента, дополняющего заштрихованный на рис. 227 до полного круга).

П р и м е р 3. Найти площадь части круга радиуса R, расположенной вне вписанного в него правильного треугольника (рис. 228).

❑ Искомая площадь равна сумме площадей трех сегментов, заштрихованных на рис. 228. Найдем пло-

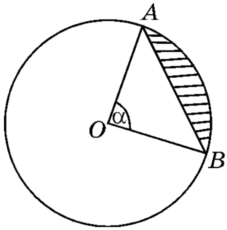


Рис. 227

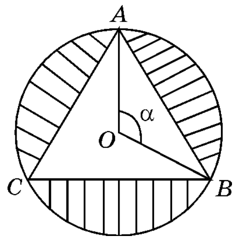


Рис. 228

щадь одного такого сегмента: $S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект.}OAB} - S_{\triangle OAB}$, где $S_{\text{сект.}OAB} = \frac{1}{2}R^2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi R^2}{3}$ согласно формуле (4), а $S_{\triangle OAB} = \frac{R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. Значит, $S_{\text{сегм}} = R^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4})$, откуда искомая площадь

$$S = 3R^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}) = R^2(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}). \quad \blacksquare$$

§ 34. Правильные многоугольники

292. Основные определения и свойства. Многоугольник называется ***правильным***, если все его стороны и все углы равны. Среди треугольников таким условиям удовлетворяет правильный треугольник, среди четырехугольников правильным является только квадрат.

Существуют правильные многоугольники с произвольным числом сторон.

Отметим ряд свойств правильных многоугольников:

1^0. Два правильных многоугольника с одинаковым числом сторон подобны.

2^0. Два правильных многоугольника равны, если равны их стороны.

3^0. Около всякого правильного многоугольника можно описать окружность.

4^0. В любой правильный многоугольник можно вписать окружность.

Очевидно, что эти вписанная и описанная окружности имеют общий центр. Он называется ***центром*** правильного многоугольника. Радиус описанной окружности называется ***радиусом*** правильного многоугольника, а радиус вписанной окружности — его ***апофемой***. Ясно, что апофема всегда меньше радиуса.

293. Соотношения между стороной, радиусом и апофемой в правильном многоугольнике. Соотношения между стороной, радиусом и апофемой правильного многоугольника зависят только от числа его сторон n. Обозначим сторону, радиус и апофему правильного многоугольника соответственно через a_n, R_n и r_n (рис. 229).

Имеем $R_n^2 = r_n^2 + \frac{a_n^2}{4}$. Угол между радиусами, проведенными в соседние вершины многоугольника,

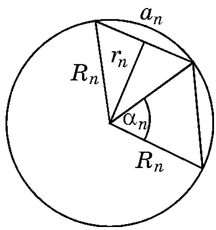


Рис. 229

равен $\alpha_n = \dfrac{360^\circ}{n}$. Справедливы следующие выражения r_n и a_n через R_n:

$$r_n = R_n \cos\frac{180^\circ}{n},\ a_n = 2R_n \sin\frac{180^\circ}{n}. \qquad (1)$$

Выразим, в частности, через радиус R стороны и апофемы правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника. Имеем

$$a_3 = R\sqrt{3},\ r_3 = \frac{R}{2}; \qquad (2)$$

$$a_4 = R\sqrt{2},\ r_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}; \qquad (3)$$

$$a_6 = R,\ r_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}. \qquad (4)$$

Стороны правильного пятиугольника и правильного десятиугольника выражаются через радиус так:

$$a_5 = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}};\ a_{10} = R\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \qquad (5)$$

П р и м е р 1. В окружность радиуса 4 вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Чему равен радиус окружности, вписанной в этот квадрат?

❑ Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 4, выражается первой из формул (2): $a_3 = 4\sqrt{3}$. Это длина стороны квадрата, описанного около окружности искомого радиуса r_4. Согласно первой из формул (3), $4\sqrt{3} = R_4\sqrt{2}$, откуда $R_4 = 4\sqrt{3} : \sqrt{2} = 2\sqrt{6}$. Наконец, используя вторую из формул (3), получим $r_4 = 2\sqrt{6} \cdot 0{,}5\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$. ■

Приведем формулу, связывающую стороны a_n и b_n вписанного в окружность радиуса R и описанного около нее правильных n-угольников:

$$b_n = \frac{Ra_n}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}. \tag{6}$$

П р и м е р 2. Найти сторону правильного шестиугольника, описанного около окружности радиуса R.

❑ Учитывая, что сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R, равна радиусу этой окружности, и используя формулу (6), получим

$$b_6 = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}}} = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}R}{3}. \ ■$$

Выражения для радиусов вписанной и описанной окружностей через сторону a_n правильного многоугольника имеют вид

$$R_n = \frac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}},\ r_n = \frac{a_n}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}. \qquad (7)$$

Отсюда получаются выражения для радиуса R окружности, описанной около правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника, через стороны этих фигур:

$$R = \frac{a_3\sqrt{3}}{3} = \frac{a_4\sqrt{2}}{2} = a_6. \qquad (8)$$

Апофемы правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника выражаются через стороны этих фигур так:

$$r_3 = \frac{a_3\sqrt{3}}{6},\ r_4 = \frac{a_4}{2},\ r_6 = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}. \qquad (9)$$

Справедлива формула, связывающая длины сторон правильного n-угольника и правильного $2n$-угольника, вписанных в одну и ту же окружность радиуса R (***формула удвоения***):

$$a_{2n} = R\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4R^2}}}. \qquad (10)$$

Апофему такого $2n$-угольника можно выразить через сторону соответствующего n-угольника:

$$r_{2n} = \frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{a_n^2}{4R^2}}}. \tag{11}$$

П р и м е р 3. Найти сторону правильного восьмиугольника, вписанного в окружность радиуса R.

❑ Так как сторона квадрата, вписанного в окружность радиуса R, равна $a_4 = R\sqrt{2},$ то, используя формулу удвоения, получим

$$a_8 = R\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{2R^2}{4R^2}}} = R\sqrt{2-2\sqrt{\frac{1}{2}}} = R\sqrt{2-\sqrt{2}}. \ \blacksquare$$

294. Периметр и площадь правильного *n*-угольника. Пусть P_n — периметр правильного n-угольника. Тогда справедлива формула

$$P_n = na_n = 2nR_n \sin\frac{180^\circ}{n}. \tag{1}$$

Площадь S_n правильного n-угольника выражается через его сторону a_n и радиус R_n по формулам

$$S_n = \frac{1}{4}na_n^2 \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2}nR_n^2 \sin\frac{360^\circ}{n}. \tag{2}$$

Найдем, например, площадь правильного шестиугольника со стороной a:

$$S_6 = \frac{3}{2}a^2 \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

Кроме того, как и для площади произвольного описанного многоугольника, имеет место формула

$$S_n = pr_n,$$

где p — полупериметр, а r_n — апофема правильного n-угольника.

П р и м е р. Найти отношение площадей правильных восьмиугольников, один из которых вписан в некоторую окружность, а другой описан около нее.

❑ Пусть R — радиус вписанного восьмиугольника. Он является апофемой описанного восьмиугольника. Обозначив через R_1 радиус последнего, заключаем, что $\dfrac{R}{R_1} = \cos\dfrac{180^\circ}{8} = \cos 22^\circ 30'$. Таким образом, искомое отношение

$$\frac{S}{S_1} = \frac{R^2}{R_1^2} = \cos^2 22^\circ 30' = \frac{1+\cos 45^\circ}{2} =$$

$$= \frac{1+0{,}5\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}. \ ■$$

Раздел X

ВЕКТОРЫ. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 35. Понятие вектора

295. Вектор. Длина вектора. Координаты вектора. ***Вектор*** — это направленный отрезок. Часто вектор обозначают строчными латинскими буквами со стрелкой или чертой над буквой (вектор $\overline{a}$, вектор $\overline{b}$). На рисунке направление вектора отмечают стрелкой. Если началом вектора является точка A, а концом — точка B, то вектор обозначается $\overline{AB}$ (рис. 230). Длина отрезка, изображающего вектор, называется ***длиной*** (или ***модулем***) вектора и обозначается $|\overline{a}|$ или $|\overline{AB}|$.

Введем в пространстве (или на плоскости) прямоугольную декартову систему координат (см. п. 22). Пусть известны координаты начала и конца вектора: $A(X_1;Y_1;Z_1)$ и $B(X_2;Y_2;Z_2)$. Тогда числа X_2-X_1, Y_2-Y_1, Z_2-Z_1 называются ***координатами вектора*** $\overline{AB}$. Значит, *чтобы найти координаты вектора, надо из координат конца вектора вычесть координаты его начала*. В отличие от координат точки, которые записываются в круглых скобках, координаты вектора будем записывать в фигурных скобках. Полагая $X_2-X_1=X$, $Y_2-Y_1=Y$, $Z_2-Z_1=Z$, запишем $\overline{AB}=\{X;\ Y;\ Z\}$.

Пусть, например, даны точки $A\ (1;\ -1;\ 5)$ и $B\ (3;\ 2;\ -1)$; тогда $\overline{AB} = \{2;\ 3;\ -6\}$.

Координаты вектора можно рассматривать как проекции вектора на соответствующие оси координат.

Длина вектора $\overline{AB} = \{X;\ Y;\ Z\}$ находится по формуле

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad (1)$$

т. е. *длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат*.

Например, длина вектора $\overline{AB} = \{-4;\ 3;\ -12\}$ равна $\sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-12)^2} = \sqrt{16 + 9 + 144} = 13$.

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным вектором*** (или ***ортом***).

Если начало и конец вектора совпадают, то вектор называется ***нулевым*** (обозначение: $\overline{0}$). Длина нулевого вектора равна нулю; направления нулевой вектор не имеет.

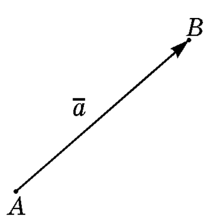


Рис. 230

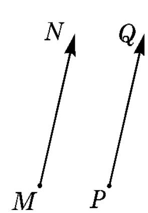


Рис. 231

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ находится по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2)$$

Так, расстояние между точками A (3; −4; 6) и B (1; 2; 3) равно $\sqrt{(1-3)^2 + (2+4)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7$.

Сопоставляя формулы (1) и (2), заключаем, что *расстояние между точками A и B равно длине вектора* $\overline{AB}$.

П р и м е р. Найти геометрическое место точек, удаленных от данной точки C (a; b; c) на расстояние R.

❑ Пусть $M(x; y; z)$ — точка, принадлежащая искомому геометрическому месту. Тогда $R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, откуда

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

— это уравнение сферы с центром C и радиусом R. ■

Используя векторы, можно доказать (см. п. 298), что координаты середины отрезка с концами $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ находятся по формулам

$$x = 0{,}5(x_1 + x_2),\ y = 0{,}5(y_1 + y_2),\ z = 0{,}5(z_1 + z_2), \quad (3)$$

т. е. *координаты середины отрезка равны полусуммам соответствующих координат его концов.*

Например, если дан отрезок AB, где A (3; −2; 5), B (−1; 2; 3), то координаты его середины таковы: $x = 0{,}5(3-1) = 1$, $y = 0{,}5(-2+2) = 0$, $z = 0{,}5(5+3) = 4$.

296. Равенство векторов. Угол между векторами. Два вектора называются ***равными***, если их можно совместить параллельным переносом (рис. 231), т. е. равные векторы равны по длине и одинаково направлены.

Так, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, направленные вдоль сторон параллелограмма $ABCD$ (рис. 232), равны, а векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ не равны (хотя они равны по длине, но имеют противоположные направления).

Т.10.1. *Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их координаты.*

П р и м е р. Даны точки A (1; 1; 1), B (2; 0; −1), C (0; 2; 6), D (1; 1; 4). Требуется: а) проверить, что $\overline{AB} = \overline{CD}$; б) найти такую точку E, что $\overline{BC} = \overline{ED}$.

❑ а) Имеем $\overline{AB} = \{1; -1; -2\}$, $\overline{CD} = \{1; -1; -2\}$, т. е. $\overline{AB} = \overline{CD}$.

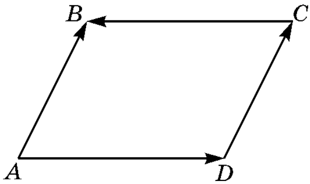


Рис. 232

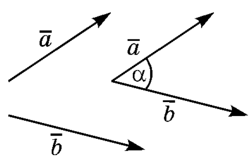


Рис. 233

б) Пусть E $(x;\ y;\ z)$ — искомая точка. Тогда $\overline{ED} = \{1 - x;\ 1 - y;\ 4 - z\}$, а $\overline{BC} = \{-2; 2; 7\}$. Приравняв друг другу соответствующие координаты этих векторов, получим $1 - x = -2$, $1 - y = 2$, $4 - z = 7$, откуда $x = 3$, $y = -1$, $z = -3$. Итак, E $(3; -1; -3)$. ■

Для векторов определено только отношение равенства. Отношения «больше» и «меньше» для них не определены.

Углом между двумя векторами называется угол между векторами, равными данным и имеющими общее начало (рис. 233). Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ будем обозначать так: $(\widehat{\overline{a},\ \overline{b}}) = \varphi$. Если угол между векторами равен 90°, то такие векторы называют ***перпендикулярными*** (или ***ортогональными***) и пишут $\overline{a} \perp \overline{b}$.

Рассмотрим, например, вектор $\overline{AB} = \{1; -1; -2\}$. Здесь $X = 1$, $Y = -1$, $Z = -2$. Это означает, что вектор $\overline{AB}$ образует с осью Ox острый угол, а с осями Oy и Oz — тупые углы.

§ 36. Операции над векторами

297. Сложение векторов. ***Суммой*** двух ***векторов*** $\overline{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ и $\overline{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = \{X_1 + X_2;\ Y_1 + Y_2;\ Z_1 + Z_2\}$. Векторы можно складывать, используя ***правило параллелограмма.*** Пусть надо сложить векторы $\overline{AB} = \overline{a}$ и

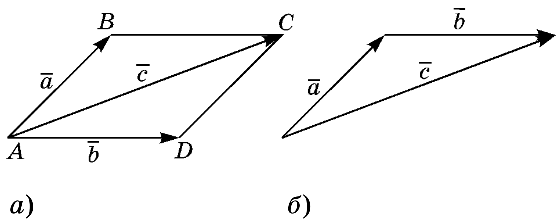


Рис. 234

$\overline{AD} = \overline{b}$; тогда $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ — диагональ $\overline{AC}$ параллелограмма $ABCD$ (рис. 234, *а*). Если в качестве вектора $\overline{b}$ взять вектор $\overline{BC}$, то мы получим ***правило треугольника*** для сложения векторов, а именно, строим вектор $\overline{a}$ и совмещаем с его концом начало вектора $\overline{b}$. Тогда $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ — это вектор, идущий из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$ (рис. 234, *б*).

Сложение произвольного количества векторов осуществляют последовательно. Например, пусть надо сложить векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ (рис. 235). Имеем $\overline{a} + \overline{b} = \overline{p}$, $\overline{p} + \overline{c} = \overline{q}$, $\overline{q} + \overline{d} = \overline{r}$. Итак, $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d} = \overline{r}$ (очевидно, что это построение можно было провести сразу, совмещая начало следующего слагаемого с концом предыдущего). Для простоты мы расположили все векторы-слагаемые в одной плоскости, но это несущественно, поскольку два вектора (или равные им)

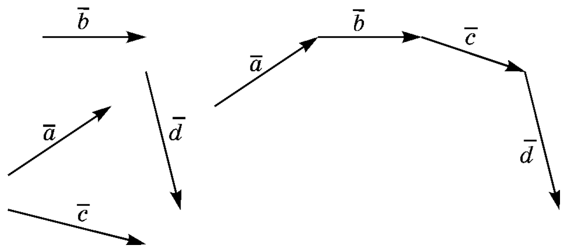


Рис. 235

всегда лежат в одной плоскости, а в каждой операции сложения участвуют только два слагаемых.

Заметим, что при сложении ненулевых векторов их сумма может оказаться равной нулевому вектору (рис. 236).

Операция сложения векторов обладает следующими свойствами ($\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — любые векторы):

1^0. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ (***переместительный закон***).

2^0. $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ (***сочетательный закон***).

298. Умножение вектора на число. ***Произведением вектора $\overline{a}=\{X;Y;Z\}$ на число λ*** называется вектор $\overline{b}=\{\lambda X;\lambda Y;\lambda Z\}$ (обозначение: $\overline{b}=\lambda\overline{a}$ или $\overline{b}=\overline{a}\lambda$). При этом выполняется равенство $|\overline{b}|=|\lambda||\overline{a}|$,

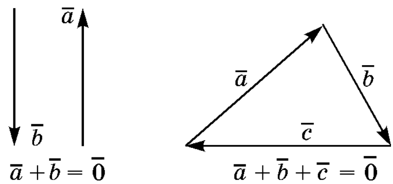


Рис. 236

вектор $\overline{b}$ коллинеарен вектору $\overline{a}$ (см. п. 299), а направление вектора $\overline{b}$ совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$. Заметим, что $0 \cdot \overline{a} = \overline{0}$ для любого вектора $\overline{a}$.

На рис. 237 изображены векторы $\overline{a}$, $2\overline{a}$ и $-0{,}5\overline{a}$.

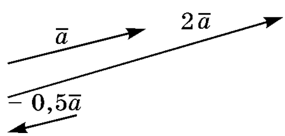
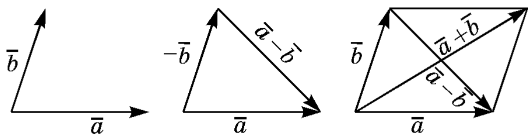


Рис. 237

П р и м е р 1. Найти разность векторов $\overline{a}-\overline{b}$.

❑ Так как $-\overline{b}=(-1)\cdot\overline{b}$, то $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b})$. Отсюда, применяя правило треугольника к векто-



а)   *б*)

Рис. 238

рам $\overline{a}$ и $-\overline{b}$, находим искомую разность $\overline{a}-\overline{b}$ (рис. 238, *а*). Заметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, диагональ, выходящая из их общего начала, равна $\overline{a}+\overline{b}$, а вторая диагональ равна $\overline{a}-\overline{b}$, причем вектор-разность направлен из конца вычитаемого в конец уменьшаемого (рис. 238, *б*). ■

Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами (λ, μ — любые числа; $\overline{a}, \overline{b}$ — любые векторы):

1^0. $(\lambda\mu)\overline{a}=\lambda(\mu\overline{a})$ (***сочетательный закон***).

2^0. $(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$ (***распределительный закон по отношению к числовому множителю***).

3^0. $\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$ (***распределительный закон по отношению к векторному множителю***).

П р и м е р 2. Вывести формулы (3) из п. 295, т. е. найти координаты середины отрезка *AB*, если известны координаты его концов $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$.

❑ Пусть точка $M(x; y; z)$ — середина отрезка AB. Тогда $\overline{AM} = 0{,}5\overline{AB}$ (рис. 239). Соединим точки A и M с началом координат O. Имеем $\overline{OA} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\overline{OM} = \{x; y; z\}$ и $\overline{AB} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$. Так как $\overline{AM} = \overline{OM} - \overline{OA} = \{x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1\}$ и $\overline{AM} = 0{,}5\overline{AB} = \{0{,}5(x_2 - x_1);\ 0{,}5(y_2 - y_1);\ 0{,}5(z_2 - z_1)\}$, то, приравняв друг другу соответствующие координаты, имеем $x - x_1 = 0{,}5(x_2 - x_1)$, $y - y_1 = 0{,}5(y_2 - y_1)$, $z - z_1 = 0{,}5(z_2 - z_1)$. Отсюда получаем известные формулы для координат середины отрезка:

$$x = 0{,}5\,(x_1 + x_2),\ y = 0{,}5(y_1 + y_2),\ z = 0{,}5(z_1 + z_2).\ ■$$

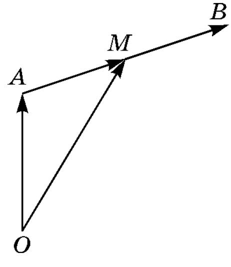


Рис. 239

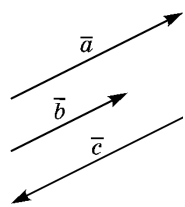


Рис. 240

299. Коллинеарность и компланарность векторов. Векторы называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой (или параллельны одной и той же прямой). Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, изображенные на рис. 240, коллинеарны, причем $\overline{a}$ и $\overline{b}$ направлены одинаково, а $\overline{b}$ и $\overline{c}$ (или $\overline{a}$ и $\overline{c}$) — противоположно.

Если $\overline{a} \neq 0$ и вектор $\overline{b}$ коллинеарен $\overline{a}$, то $\overline{b} = \lambda \overline{a}$. Отсюда вытекает следующее утверждение:

Т.10.2. *Два вектора* $\overline{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ *и* $\overline{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны,* т. е.

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \qquad (1)$$

(***признак коллинеарности векторов***).

Так, векторы $\overline{a} = \{1; 2; 3\}$ и $\overline{b} = \{-2; -4; -6\}$ коллинеарны и противоположно направлены, поскольку $\overline{b} = -2\overline{a}$.

П р и м е р 1. При каких значениях m и n векторы $\{m; -2; 5\}$ и $\{1; n; -4\}$ коллинеарны?

❑ Чтобы данные векторы были коллинеарны, должно выполняться условие (1), т. е. $\frac{m}{1} = \frac{-2}{n} = \frac{5}{-4}$.

Значит, $m = -1{,}25$, $n = 1{,}6$. ■

П р и м е р 2. Лежат ли точки $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(4;\ 5;\ 6)$ и $C(2;\ 3;\ 4)$ на одной прямой?

❑ Если точки A, B и C лежат на одной прямой, то векторы $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ коллинеарны. Имеем $\overline{AC} = \{1;\ 1;\ 1\}$, $\overline{BC} = \{-2;\ -2;\ -2\}$. Следовательно, $(-2) : 1 = (-2) : 1 = (-2) : 1$, т. е. точки A, B, C лежат на одной прямой. ■

Векторы называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости (или параллельны одной и той же плоскости). Нулевой вектор компланарен любым векторам.

Справедливо следующее утверждение:

Т.10.3. *Три вектора* $\overline{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$, $\overline{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$ *и* $\overline{c} = \{X_3; Y_3; Z_3\}$ *и компланарны тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0$$

(***признак компланарности векторов***).

Это означает, что смешанное произведение векторов (см. п. 302) $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ равно нулю.

П р и м е р 3. Проверить компланарность векторов $\overline{a} = \{3; 2; 1\}$, $\overline{b} = \{1; -1; 0\}$ и $\overline{c} = \{5; 0; 1\}$.

❑ Имеем

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 - 3 - 2 = 0,$$

т. е. векторы компланарны (здесь определитель разложен по элементам третьего столбца). ■

Введем на осях координат Ox, Oy, Oz единичные векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$. Они имеют следующие координаты: $\bar{i} = \{1; 0; 0\}$, $\bar{j} = \{0; 1; 0\}$, $\bar{k} = \{0; 0; 1\}$. Эти векторы некомпланарны, так как условие компланарности для них не выполняется: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

Пусть заданы какие-либо векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Если вектор $\bar{d}$ представлен в виде $\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$, то говорят, что вектор $\bar{d}$ ***разложен по векторам*** $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, причем α, β, γ называются ***коэффициентами разложения***. Справедливо следующее утверждение:

Т.10.4. *Для любого вектора существует единственное разложение по трем данным некомпланарным векторам.*

П р и м е р 4. Даны три вектора, выходящие из одной вершины призмы: $\overline{AA_1} = \bar{p}$, $\overline{AB} = \bar{q}$, $\overline{AC} = \bar{r}$ (рис. 241). Разложить вектор $\overline{AM}$, где M — середина отрезка CB_1, по векторам $\bar{p}$, $\bar{q}$ и $\bar{r}$.

❑Имеем $\overline{AM} = 0{,}5(\overline{AC} + \overline{AB_1})$ (см. п. 298), т. е. $\overline{AM} = 0{,}5(\bar{r} + \overline{AB_1})$. Согласно правилу треугольника, $\overline{AB_1} = \overline{AB} + \overline{BB_1} = \bar{q} + \bar{p}$. Значит, $\overline{AM} = 0{,}5(\bar{r} + \bar{q} + \bar{p})$. ■

Возьмем в качестве трех некомпланарных векторов единичные векторы координатных осей $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

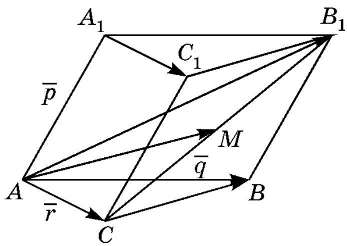


Рис. 241

Тогда любой вектор $\overline{a}$ можно представить в виде $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, причем числа x, y, z являются его координатами. Например, вектор $\overline{a} = \{2;\ 5;\ -1\}$ можно записать как $\overline{a} = 2\overline{i} + 5\overline{j} - \overline{k}$, а запись $\overline{b} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + 5\overline{k}$ означает, что $\overline{b} = \{3; -2;\ 5\}$.

300. Скалярное произведение векторов. Скалярное произведение определяется для двух векторов. Пусть $\overline{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$ и $\overline{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$. Тогда ***скалярным произведением*** векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число $X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$. Скалярное произведение обозначается так: $\overline{a}\,\overline{b}$ или **(**$\overline{a}$, $\overline{b}$**)**.

Например, если $\overline{a} = \{2;\ 1;\ -1\}$ и $\overline{b} = \{1;\ 3;\ 2\}$, то

$$\overline{a}\,\overline{b} = 2 + 3 - 2 = 3.$$

Скалярное произведение $\overline{a}\,\overline{b}$ можно вычислить по формуле

$$\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi, \qquad (1)$$

где φ — угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Отсюда вытекает формула для нахождения косинуса угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\,\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}. \qquad (2)$$

П р и м е р 1. Дано: $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}| = 6$. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если угол φ между ними равен: а) $45°$; б) $90°$; в) $120°$.

❑ Согласно формуле (1), имеем:

а) $\overline{a}\,\overline{b} = 5 \cdot 6\cos 45° = 15\sqrt{2}$;

б) $\overline{a}\,\overline{b} = 5 \cdot 6\cos 90° = 0$;

в) $\overline{a}\,\overline{b} = 5 \cdot 6\cos 120° = -15$. ■

П р и м е р 2. Найти угол между векторами $\overline{a} = \{2;\ 0;\ 2\}$ и $\overline{b} = \{1;\ 1;\ 0\}$.

❑ Используя формулу (2), получаем

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\,\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{2}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$ откуда $\varphi = 60°$. ■

Отметим свойства скалярного произведения векторов ($\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — любые векторы, λ — любое число):

1^0. $\overline{a}\,\overline{a} \geq 0$, причем $\overline{a}^2 > 0$, если $\overline{a} \neq 0$.

2^0. $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{b}\,\overline{a}$ (***переместительный закон***).

3^0. $(\overline{a} + \overline{b})\overline{c} = \overline{a}\,\overline{c} + \overline{b}\,\overline{c}$ (***распределительный закон***).

4^0. $(\lambda\overline{a})\overline{b} = \lambda(\overline{a}\,\overline{b})$ (***сочетательный закон***).

Свойства скалярного произведения позволяют производить со скалярными произведением те же преобразования, что и с многочленами в алгебре.

Если $\overline{a}\,\overline{b} = 0$, то $\overline{a} \perp \overline{b}$ и обратно, если $\overline{a} \perp \overline{b}$, то $\overline{a}\,\overline{b} = 0$. Таким образом, *необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух ненулевых векторов является равенство нулю их скалярного произведения*.

Пусть векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами, т. е. $\overline{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ и $\overline{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$; тогда условие перпендикулярности примет вид

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0. \qquad (3)$$

Нулевой вектор считается ортогональным любому вектору.

П р и м е р 3. Доказать, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

❑ Пусть O — точка пересечения двух высот в ΔABC (рис. 242): $OA \perp BC$ и $OB \perp AC$. Покажем, что $OC \perp AB$. Рассмотрим векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$. Найдем $\overline{OC} \cdot \overline{AB}$. Учитывая, что $\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC}$, $\overline{AB} = \overline{BC} + \overline{CA}$, получим

$$\overline{OC} \cdot \overline{AB} = (\overline{OB} + \overline{BC})(\overline{BC} + \overline{CA}) = \overline{OB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{BC} +$$
$$+ \overline{OB} \cdot \overline{CA} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} = \overline{OB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA},$$

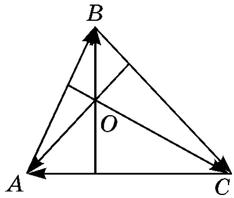


Рис. 242

так как $\overline{OB} \cdot \overline{AC} = 0$ в силу перпендикулярности векторов. Далее имеем $\overline{OC} \cdot \overline{AB} = \overline{BC}\,(\overline{OB} + \overline{BC} + \overline{CA})$. Но $\overline{OB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{OA}$ (рис. 242). Значит, $\overline{OC} \cdot \overline{AB} = \overline{BC} \cdot \overline{OA} = 0$, поскольку $\overline{BC} \perp \overline{OA}$. Отсюда следует, что и $\overline{OC} \perp \overline{AB}$. ■

П р и м е р 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A\,(4; -1; 2)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = \{3; 2; 1\}$.

❑ Возьмем на искомой плоскости произвольную точку $M\,(x; y; z)$ (рис. 243). Тогда $\overline{AM} \perp \overline{n}$ и $\overline{n} \cdot \overline{AM} = 0$. Отсюда получим

$$3\,(x - 4) + 2\,(y + 1) + 1 \cdot (z - 2) = 0,$$

или

$$3x + 2y + z - 12 = 0. \;■$$

П р и м е р 5. Даны ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Найти все векторы $\overline{c}$, удовлетворяющие условию $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{a}\,\overline{c}$ (заметим, что для чисел a, b, c, отличных от нуля, из $ab = ac$ следует $b = c$).

❑ Имеем $\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi_1$, $\overline{a}\,\overline{c} = |\overline{a}||\overline{c}|\cos\varphi_2$ (рис. 244). Но $|\overline{b}|\cos\varphi_1$ — проекция вектора $\overline{b}$ на вектор $\overline{a}$. Значит, в качестве вектора $\overline{c}$ можно взять любой вектор, имеющий ту же проекцию на вектор $\overline{a}$, что и вектор $\overline{b}$. ■

301. Векторное произведение векторов. ***Векторным произведением*** вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется такой вектор $\overline{c}$, что его длина равна произве-

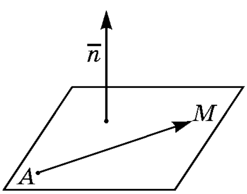


Рис. 243

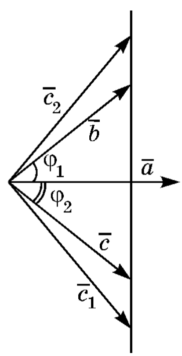


Рис. 244

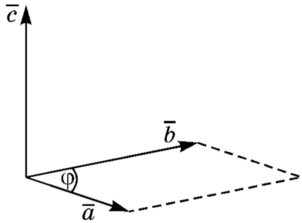


Рис. 245

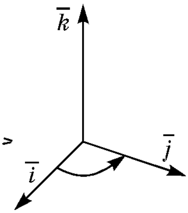


Рис. 246

дению длин векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на синус угла между ними, т. е. $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$, а направление перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, причем поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ на наименьший угол виден из конца вектора $\bar{c}$ происходящим против часовой стрелки (рис. 245).

Векторное произведение $\bar{a}$ на $\bar{b}$ обозначается так: $\bar{a} \times \bar{b}$ или $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Так как $|\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$ — это площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то длина вектора $\bar{c}$ численно равна площади этого параллелограмма.

Найдем, например, $\bar{c} = \bar{i} \times \bar{j}$ (рис. 246). Так как параллелограмм, построенный на перемножаемых векторах, — это квадрат со стороной 1, то $|\bar{c}| = 1$.

Вектор $\bar{c}$ направлен перпендикулярно плоскости xOy, в которой лежат векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$, как указано на рис. 246. Значит, $\bar{c}$ — это единичный вектор, направление которого совпадает с направлением оси Oz, т. е. вектор $\bar{k}$. Итак, $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$. Аналогично получим $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$, $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$.

Заметим, что векторное произведение коллинеарных векторов равно нулевому вектору (так, $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$).

Пусть $\bar{a} = \{X_1;\, Y_1;\, Z_1\}$, $\bar{b} = \{X_2;\, Y_2;\, Z_2\}$. Тогда векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ можно найти по формуле

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

П р и м е р 1. Найти площадь треугольника с вершинами $M(-3;-2;-4)$, $N(-1;-4;-7)$ и $P(1;-2;2)$.

❑ Площадь треугольника MNP равна половине площади параллелограмма $MNQP$ (рис. 247), построенного на векторах $\overline{MN} = \bar{a} = \{2;-2;-3\}$ и $\overline{MP} = \bar{b} = \{4;0;6\}$. Согласно формуле (1), имеем

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\bar{i} - 24\bar{j} + 8\bar{k},$$

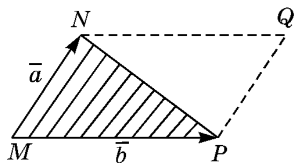


Рис. 247

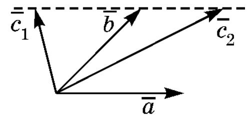


Рис. 248

откуда $\quad S_{\Delta MNP} = 0{,}5\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = 0{,}5\sqrt{144 + 576 + 64} =$
$= 0{,}5 \cdot 28 = 14$ (кв.ед). ■

Отметим свойства векторного произведения ($\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — любые векторы, λ — любое число):

1^0. $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$, т. е. при перемене мест сомножителей векторное произведение меняет знак. Таким образом, векторное произведение не подчиняется переместительному закону.

2^0. $(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$ (***распределительный закон***).

3^0. $(\lambda\,\overline{a}) \times \overline{b} = \lambda\,(\overline{a} \times \overline{b})$ (***сочетательный закон***).

П р и м е р 2. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, равна 10 кв. ед. Найти площадь параллелограмма, построенного на его диагоналях.

❑ Искомая площадь равна модулю векторного произведения $(\overline{a}+\overline{b})\times(\overline{a}-\overline{b})$ (см. рис. 238, *б*). Имеем $(\overline{a}+\overline{b})\times(\overline{a}-\overline{b})=\overline{a}\times\overline{a}+\overline{b}\times\overline{a}-\overline{a}\times\overline{b}-\overline{b}\times\overline{b}$. Но $\overline{a}\times\overline{a}=\overline{b}\times\overline{b}=\overline{0}$, $\overline{b}\times\overline{a}=-\overline{a}\times\overline{b}$, откуда $(\overline{a}+\overline{b})\times(\overline{a}-$ $-\overline{b})=2(\overline{b}\times\overline{a})$. Итак, искомая площадь равна 20 кв. ед. ■

П р и м е р 3. Даны ненулевые векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Найти все векторы $\overline{c}$, удовлетворяющие условию $\overline{a}\times\overline{b}=\overline{a}\times\overline{c}$.

❑ Имеем $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\varphi_1$, $\left|\overline{a}\times\overline{c}\right|=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{c}\right|\sin\varphi_2$ (рис. 248), т. е. площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, должна быть равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{c}$. Так как эти параллелограммы имеют общее основание $\overline{a}$, то у них должны быть равные высоты. Итак, в качестве вектора $\overline{c}$ можно взять любой вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a}$, а конец лежит на прямой, проходящей через конец вектора $\overline{b}$ параллельно вектору $\overline{a}$. ■

302. Смешанное произведение векторов. ***Смешанным произведением*** векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, которое обозначается $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ или $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$, называется число, равное скалярному произведению вектора $\overline{a}$ на векторное произведение $\overline{b}\times\overline{c}$ или скалярному произведению векторного произведения $\overline{a} \times \overline{b}$ на вектор $\overline{c}$, т. е. $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \overline{a}\,(\overline{b} \times \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b})\,\overline{c}$.

Пусть $\overline{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$, $\overline{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$, $\overline{c} = \{X_3;\ Y_3;\ Z_3\}$. Тогда справедлива формула

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_2 & Z_3 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Отметим свойства смешанного произведения ($\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ — любые векторы, λ — любое число):

1^0. $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a} = \overline{c}\,\overline{a}\overline{b} = -(\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c}) = -(\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}) = -(\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{b})$, т. е. смешанное произведение не меняется при круговой перестановке сомножителей и меняет знак при перестановке двух сомножителей.

2^0. $(\overline{a} + \overline{b})\,\overline{c}\,\overline{d} = \overline{a}\,\overline{c}\,\overline{d} + \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d}$ (***распределительный закон***).

3^0. $(\lambda\,\overline{a})\,\overline{b}\,\overline{c} = \lambda\,(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c})$ (***сочетательный закон относительно скалярного множителя***).

Абсолютная величина смешанного произведения векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ равна объему параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях.

П р и м е р 1. Найти объем пирамиды с вершинами в точках A (1; 1; 1), B (2; 4; 3), C (2; 3; 2), D (0; 2; 2).

❑ Очевидно, что искомый объем равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$,

$\overline{AD}$ (рис. 249). Находим $\overline{AB}=\{1;3;2\}$, $\overline{AC}=$ $=\{1;2;1\}$, $\overline{AD}=\{-1;1;1\}$. Согласно формуле (1), имеем

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}1&3&2\\1&2&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1&2\\-1&1\end{vmatrix}=$$

$$=1-3\cdot2+2\cdot3=1.$$

Итак, $V_{DABC}=\dfrac{1}{6}$ (куб. ед). ■

Пример 2. Прямая m проходит через точку M (2; 1; 3) параллельно вектору $\overline{a}=\{1;-1;2\}$; прямая n проходит через точку $N\,(3;4;2)$ параллельно вектору $\overline{b}=\{2;1;2\}$. Установить, пересекаются ли эти прямые или скрещиваются (см. п. 303).

❑ Если эти прямые пересекаются, то векторы $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{MN}$ компланарны, т. е. $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{MN}=0$. Имеем

$$\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&1&2\\1&3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\3&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&2\\1&-1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=-7-4+10=-1\neq0,$$

следовательно, данные прямые скрещиваются. ■

Пример 3. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми, заданными в примере 2.

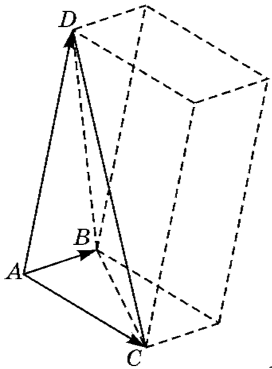


Рис. 249

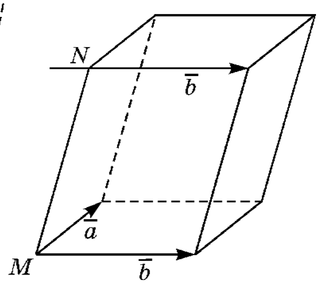


Рис. 250

❑ Искомое расстояние — это высота параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{MN}$ (рис. 250). Так как $V = Sh$, то $h = \dfrac{V}{S}$, где $V = 1$ (абсолютная величина смешанного произведения, найденного в примере 2), а $S = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$. Имеем

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k},$$

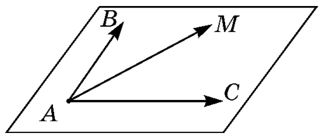


Рис. 251

откуда $S = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \sqrt{16 + 4 + 9} = \sqrt{29}.$

Итак, $h = \dfrac{1}{\sqrt{29}}$. ■

П р и м е р 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A (1; 2; 3), B (3; 2; 1) и C (5; −2; −3).

❑ Возьмем на искомой плоскости произвольную точку $M\,(x; y; z)$ (рис. 251). Тогда векторы $\overline{AM}, \overline{AB}$, $\overline{AC}$ компланарны и $\overline{AM} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$. Отсюда

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$-8\,(x-1) + 4\,(y-2) \ \ -8\,(z-3),$$

т. е.

$$2x - y + 2z - 6 = 0.$$ ■

§ 37. Взаимное расположение прямых и плоскостей

303. Параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые. Две прямые в пространстве называются ***параллельными***, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются ***скрещивающимися***. Итак, возможны три случая взаимного расположения двух прямых в пространстве: 1) они пересекаются; 2) они параллельны; 3) они скрещиваются. В первых двух случаях прямые лежат в одной плоскости, в третьем — в разных плоскостях.

Например, в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 252) ребра AB и A_1B_1 или AD и A_1D_1 и т. д. параллельны; ребра AA_1 и A_1B_1 или BC и CD и т. д. пересекаются; ребра AA_1 и CD или AA_1 и B_1C_1 и т. д. скрещиваются.

Отметим, что в пространстве, как и на плоскости, справедливы следующие утверждения:

две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой (при этом все три прямые могут и не лежать в одной плоскости; например, через параллельные прямые AB, CD и A_1B_1, изображенные на рис. 252, нельзя провести плоскость);

углы с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между двумя прямыми, параллельными данным и проходящими через произвольную точку M.

Перпендикуляром, опущенным из данной точки

M на прямую, называется прямая, образующая с данной угол 90° и пересекающая ее (перпендикуляром называется также длина отрезка MN от точки M до точки N пересечения прямых; рис. 253). Если точка M лежит вне прямой, то такой перпендикуляр единственный. Если же точка M лежит на прямой, то можно провести бесконечно много прямых, проходящих через M и перпендикулярных данной прямой.

Существует только один перпендикуляр, общий для двух скрещивающихся прямых. Его длина называется ***расстоянием между скрещивающимися прямыми***. Для построения этого перпендикуляра проведем через одну из скрещивающихся прямых плоскость, параллельную другой прямой (на рис. 254 плоскость P проведена через прямую m и параллельна прямой n), затем через вторую прямую (n) проведем плоскость, перпендикулярную первой плоскости ($P \perp Q$). Пусть плоскость Q пересекает прямую m в точке A. Тогда перпендикуляр к прямой m в точке A и есть искомый.

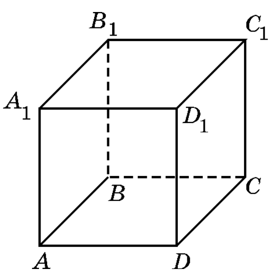


Рис. 252

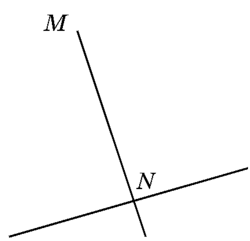


Рис. 253

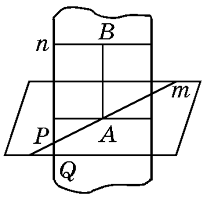


Рис. 254

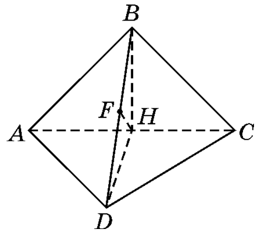
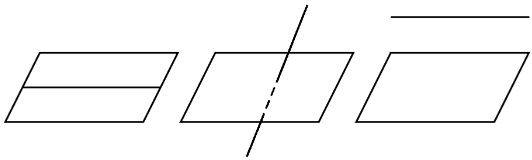


Рис. 255

Например, в кубе (см. рис. 252) общим перпендикуляром к скрещивающимся прямым AA_1 и CD является ребро AD.

П р и м е р. Два равнобедренных прямоугольных треугольника ABC и ADC расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях и имеют общую гипотенузу (рис. 255). Найти кратчайшее расстояние между прямыми AC и BD, если каждый катет равен 4.

❑ Проведем высоты BH и DH. Тогда получим ΔBHD — равнобедренный и прямоугольный. Проведем в нем высоту HF. Так как $AC \perp BH$ и $AC \perp DH$, то AC — перпендикуляр к плоскости BHD (см. теорему 10.7 в п. 304). Отсюда $AC \perp HF$. Значит, $HF \perp AC$ и $HF \perp BD$, т. е. HF и есть искомое расстояние. Имеем $BH = 0{,}5\sqrt{2}BC = 2\sqrt{2}$, $HF = 0{,}5\sqrt{2}BH = 2$. ■



а) *б*) *в*)

Рис. 256

304. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Прямая и плоскость называются ***параллельными***, если они не пересекаются. Таким образом, возможны три случая расположения прямой относительно плоскости: 1) она лежит в плоскости; 2) она пересекает плоскость; 3) она параллельна плоскости (рис. 256, *а*, *б*).

Справедливы следующие утверждения:

Т.10.5. *Прямая параллельна плоскости тогда и только тогда, когда она не лежит в этой плоскости и параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости* (***признак параллельности прямой и плоскости***).

Так, если прямая b параллельна прямой a, лежащей в плоскости λ (рис. 257), то она параллельна этой плоскости.

Т.10.6. *Если прямая параллельна плоскости* λ *и через эту прямую проведена плоскость, пересекающая* λ, *то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой* (рис. 258).

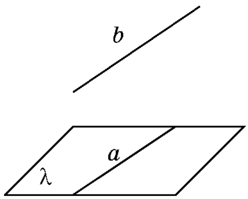


Рис. 257

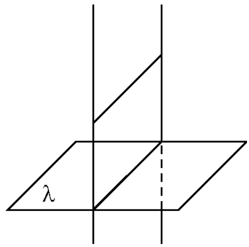


Рис. 258

Определим понятие перпендикуляра к плоскости. Прямая называется ***перпендикуляром к плоскости***, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Перпендикуляром к плоскости называется также отрезок этой прямой от какой-либо точки M до точки M_0 пересечения прямой и плоскости (рис. 259). Точка M_0 называется ***основанием перпендикуляра***.

Т.10.7. *Прямая, перпендикулярная двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, перпендикулярна этой плоскости* (***признак перпендикулярности прямой и плоскости***).

Пусть из точки M проведен перпендикуляр к плоскости (рис. 259). Длина отрезка MM_0 называется ***расстоянием*** от точки M до плоскости. Соединив точку M с какой-либо точкой плоскости, отличной от основания перпендикуляра M_0, получим ***наклонную*** MA. Любая наклонная длиннее перпендикуляра, проведенного из той же точки. Отрезок M_0A называется ***проекцией наклонной***.

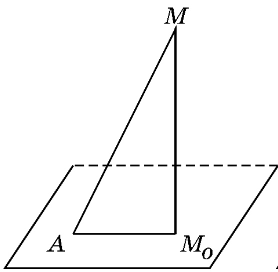


Рис. 259

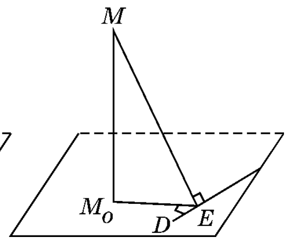


Рис. 260

Отметим, что *из двух наклонных больше та, у которой проекция больше; равные наклонные имеют равные проекции.*

Т.10.8. *Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной* (***теорема о трех перпендикулярах***).

Верно и обратное:

Т.10.9. *Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно этой наклонной, перпендикулярна и ее проекции.*

Пусть, например, MM_0 — перпендикуляр к плоскости, ME — наклонная (рис. 260). Тогда, если прямая DE перпендикулярна M_0E (проекции наклонной ME), то она перпендикулярна и самой наклонной ME. Если же известно, что прямая DE перпендикулярна наклонной ME, то она перпендикулярна и ее проекции M_0E.

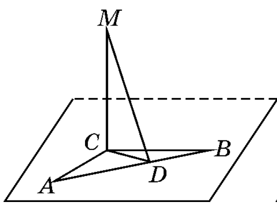


Рис. 261

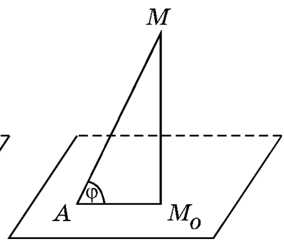


Рис. 262

П р и м е р 1. В прямоугольном треугольнике ABC известны катеты $AC = 6$, $BC = 8$. Из вершины прямого угла C к плоскости треугольника восставлен перпендикуляр $CM = 2$ (рис. 261). Найти расстояние от точки M до гипотенузы.

❑ Проведем $MD \perp AB$. Так как MC — перпендикуляр к плоскости, MD — наклонная, CD — ее проекция, то $CD \perp AB$ (по теореме 10.9). Из $\Delta\, ABC$ находим $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. Чтобы найти высоту CD, воспользуемся двумя формулами для отыскания площади $\Delta\, ABC$. Имеем $S_{\Delta\, ABC} = 0{,}5AC \cdot BC = 0{,}5AB \cdot CD$, откуда $CD = \dfrac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$. Теперь из $\Delta\, MCD$ находим искомое расстояние: $MD = \sqrt{2^2 + 4{,}8^2} = 5{,}2$. ■

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость (угол φ на рис. 262). Если прямая параллельна плоскости, то угол между ними считается равным нулю; если прямая перпендикулярна плоскости, то он равен 90°.

П р и м е р 2. Под каким углом пересекает плоскость данная прямая, если проекция любой ее наклонной равна длине перпендикуляра, проведенного из той же точки, что и наклонная?

❑ В прямоугольном треугольнике MM_0A (см. рис. 259) имеем $AM_0 = MM_0$, т .е. треугольник равнобедренный и угол $\varphi = 45°$. ■

Отметим, что *из всех углов, которые образованы данной прямой, пересекающей плоскость, и всевозможными прямыми, лежащими в плоскости, угол между данной прямой и ее проекцией является наименьшим*. Так, для углов, изображенных на рис. 263, имеем $\angle MAM_0 < \angle MAB$.

П р и м е р 3. Из точки M к данной плоскости проведены перпендикуляр MM_0 и две наклонные MA и MB (рис. 264). Проекции наклонных перпендикулярны друг другу, а длина каждой из проекций равна MM_0. Найти угол MAB.

❑ По условию, $M_0A = M_0B = MM_0$ и $M_0A \perp M_0B$, $MM_0 \perp M_0A$, $MM_0 \perp M_0B$; з н а ч и т, $\Delta MM_0A = \Delta MM_0B = \Delta AM_0B$ (по двум катетам). Отсюда следует, что ΔAMB — правильный, т. е. $\angle MAB = 60°$ (заметим, что $\angle MAB > \angle MAM_0 = 45°$). ■

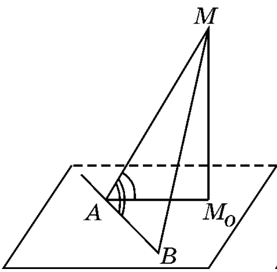


Рис. 263

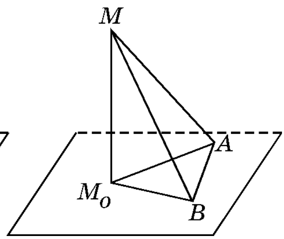


Рис. 264

305. Взаимное расположение двух плоскостей. Свойства параллельных прямых и плоскостей. Две плоскости называются ***параллельными***, если они не пересекаются. Таким образом, две плоскости либо пересекаются (в этом случае они имеют общую прямую; рис. 265, *а*), либо параллельны (в этом случае они не имеют общих точек; рис. 265, *б*).

Т.10.10. *Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны* (***признак параллельности двух плоскостей***).

П р и м е р. Доказать, что через две скрещивающиеся прямые можно провести параллельные плоскости.

❑ Пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые (рис. 266). Через произвольную точку прямой a проведем прямую $b' \| b$, а через произвольную точку прямой b — прямую $a' \| a$. Далее проведем две плос-

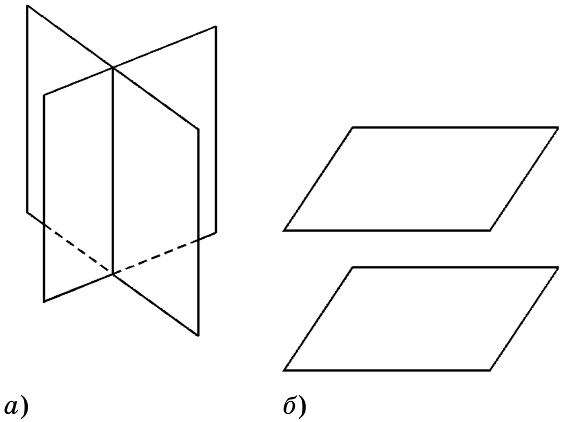


Рис. 265

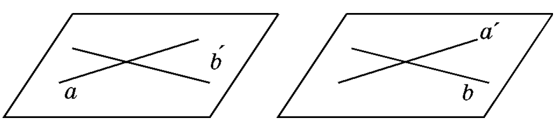


Рис. 266

кости: одну через прямые a и b', другую — через b и a'. Согласно теореме 10.10, эти плоскости параллельны, причем прямая a лежит в одной из них, а прямая b — в другой. ■

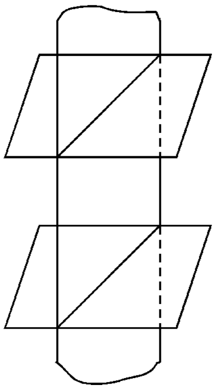


Рис. 267

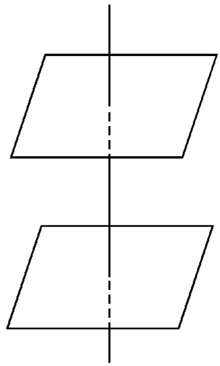


Рис. 268

Отметим следующие свойства параллельных плоскостей:

1^0. Через любую точку, лежащую вне данной плоскости, можно провести единственную плоскость, параллельную данной.

2^0. Если две плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой.

3^0. Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии пересечения параллельны между собой (рис. 267).

4^0. Две плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны (рис. 268).

5^0. Плоскости, перпендикулярные параллельным прямым, параллельны (рис. 269).

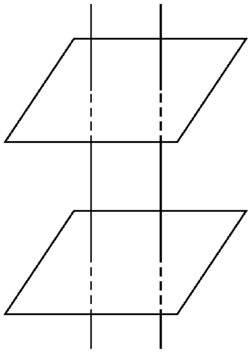


Рис. 269

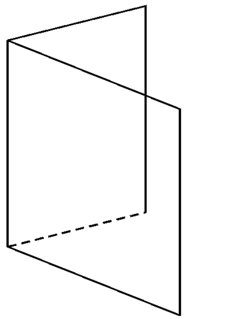


Рис. 270

Отметим также свойства параллельных прямых:

1^0. Прямая, параллельная двум пересекающимся плоскостям, параллельна линии их пересечения (рис. 270).

2^0. Если две плоскости пересекаются по прямой a, то в каждой из них параллельными друг другу являются прямые, параллельные прямой a, и только они (рис. 271).

3^0. Перпендикуляры, проведенные к параллельным прямым, параллельны.

4^0. Проекции параллельных прямых на параллельные плоскости параллельны (рис. 272).

5^0. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны (рис. 273).

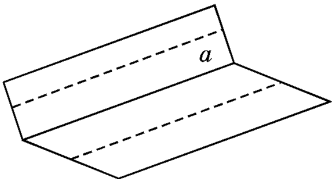


Рис. 271

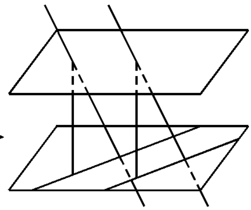


Рис. 272

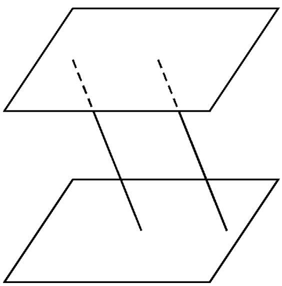


Рис. 273

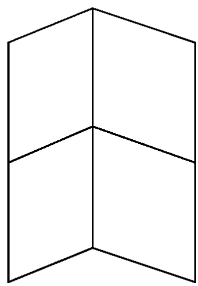


Рис. 274

§ 38. Двугранные и многогранные углы

306. Двугранный угол. Две пересекающиеся плоскости разбивают пространство на четыре части, каждая из которых называется ***двугранным углом***. Таким образом, двугранный угол образован двумя полуплоскостями, называемыми ***гранями***; линия их пересечения называется ***ребром*** двугранного угла. Проведем плоскость, перпендикулярную ребру двугранного угла. Угол, полученный в сечении (рис. 274), называется ***плоским*** (***линейным***) ***углом*** двугранного угла. Этот плоский угол принимается за меру двугранного угла.

Две плоскости, образующие прямой двугранный угол, называются ***взаимно перпендикулярными***.

Т.10.11. *Две плоскости взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда одна из них содержит перпендикуляр к другой плоскости* (***признак перпендикулярности двух плоскостей***).

Справедливо следующее утверждение:

Т.10.12. *Линия пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости, перпендикулярна этой плоскости.*

Например, в кубе все вертикальные грани перпендикулярны нижней грани и все вертикальные ребра (линии пересечения вертикальных граней) также перпендикулярны нижней грани.

П р и м е р. В кубе проведено сечение $ABCDEF$ (рис. 275), где точки A, B, C, D, E, F — середины соответствующих ребер. Найти двугранный угол между этим сечением и нижней гранью.

❑ Построим $\angle DFK = \alpha$ — плоский угол искомого двугранного угла. Здесь AF — ребро двугранного угла; $DF \perp AF$, так как сечение — правильный шестиугольник, а угол DFA опирается на диаметр; $KF \perp AF$, поскольку эти отрезки соединяют середины сторон квадрата. Пусть a — ребро куба. Тогда $DK = a$, $FK = 0{,}5\sqrt{2}a$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$ и $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$. ■

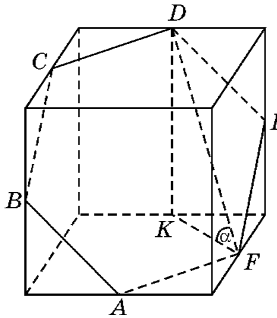


Рис. 275

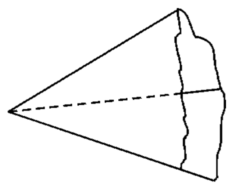


Рис. 276

307. Трехгранный угол. Фигура, образованная тремя лучами, выходящими из одной точки и не лежащими в одной плоскости, и тремя частями плоскостей, заключенных между этими лучами, называется ***трехгранным углом*** (рис. 276). Точка A называется ***вершиной*** угла, лучи — его ***ребрами***, а части плоскостей — ***гранями***. Грани трехгранного угла называются его ***плоскими углами***. Углы между плоскими гранями называются ***двугранными углами*** данного трехгранного угла.

Т.10.13. *В трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других углов.*

П р и м е р. Плоские углы α, β, γ трехгранного угла равны соответственно 45°, 30° и 60°. Найти его двугранные углы (рис. 277).

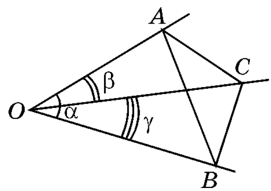


Рис. 277

❑ Отложим на ребре трехгранного угла отрезок $OA = 1$ и проведем сечение ABC, перпендикулярное этому ребру. Пусть $\angle AOB = 45°, \angle AOC = 30°, \angle BOC = 60°$. Искомый угол CAB обозначим через φ (так же обозначим и соответствующий двугранный угол; двугранные углы OB и OC обозначим соответственно через ϕ и θ). Имеем $AB = \operatorname{tg}45° = 1$, $AC = \operatorname{tg}30° = \frac{\sqrt{3}}{3}, OB = \frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2}, OC = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

По теореме косинусов в ΔOBC:

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC \cdot \cos 60° =$$

$$= 2 + \frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2}{5}(5 - \sqrt{6}).$$

С другой стороны, из ΔABC:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\varphi =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\varphi = \frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\varphi.$$

Таким образом,

$$\frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\varphi = \frac{2}{3}(5 - \sqrt{6}),$$

откуда $\sqrt{3}\cos\varphi = \sqrt{6} - 3$, $\cos\varphi = \sqrt{2} - \sqrt{3} \approx -0{,}318$ и $\varphi = \arccos(-0{,}318) \approx 108{,}5°$.

Аналогично найдем $\cos\phi = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}837$, $\phi = \arccos 0{,}837 \approx 33{,}2°$ и $\cos\theta = \frac{2\sqrt{6}}{3} - 1 \approx 0{,}633$, $\theta = \arccos 0{,}633 \approx 50{,}1°$. ■

Между плоскими и двугранными углами трехгранного угла существуют следующие соотношения (сохраним обозначения, указанные в примере):

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma} = \frac{\sin\phi}{\sin\beta} = \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}.$$

Т.10.14. *Сумма плоских углов трехгранного угла меньше* 360°.

Последнее утверждение справедливо для произвольного выпуклого многогранного угла.

Многогранным углом называется фигура, ограниченная несколькими плоскими углами с общей

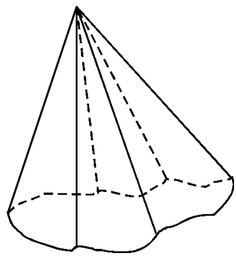


Рис. 278

вершиной (рис. 278), причем каждый из плоских углов меньше развернутого. Многогранный угол называется ***выпуклым***, если он лежит по одну сторону от плоскости каждой из своих граней.

Сумма двугранных углов n-гранного угла заключена между $180^\circ\,(n-2)$ и $180^\circ n$.

Раздел XI

МНОГОГРАННИКИ И ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

§ 39. Многогранники

308. Общие понятия. Рассмотрим тело, ограниченное замкнутой поверхностью, состоящей из плоских многоугольников. Каждый многоугольник называется ***гранью***, а само тело — ***многогранником***. При этом любая сторона каждого многоугольника является также стороной еще одного и только одного многоугольника,а любые два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину, либо не имеют общих точек. Стороны граней многогранника называются его ***ребрами***, а вершины этих граней — ***вершинами*** многогранника (рис. 279). Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется ***диагональю*** многогранника.

Многогранник называется ***выпуклым***, если он лежит по одну сторону от плоскости любой из своих граней. Все многогранники, изображенные на рис. 279, — выпуклые. В дальнейшем мы будем рассматривать только выпуклые многогранники.

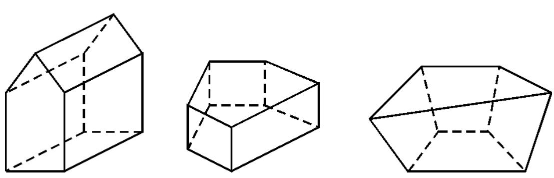


Рис. 279

Пусть Г — число граней, В — число вершин, а Р — число ребер многогранника.

Т.11.1. *Для любого многогранника выполняется соотношение* В + Г − Р = 2, т. е. *число вершин плюс число граней минус число ребер равно* 2 (***теорема Эйлера***).

Т.11.2. *В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой из вершин меньше* 360°.

309. Правильные многогранники. Многогранник называется ***правильным***, если все его грани — равные правильные многоугольники и все многогранные углы при вершине равны между собой.

Гранями правильных многогранников могут быть только правильные треугольники, квадраты и правильные пятиугольники. Из этих элементов можно построить пять правильных многогранников. Все правильные многогранники данного типа подобны. Рассмотрим типы правильных многогранников.

1. ***Правильный тетраэдр*** (рис. 280). Это четырехгранник, каждая грань которого — правильный треугольник, а в каждой вершине сходятся три грани.

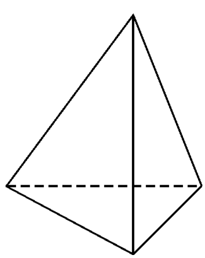


Рис. 280

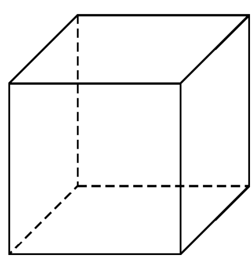


Рис. 281

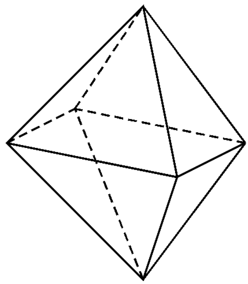


Рис. 282

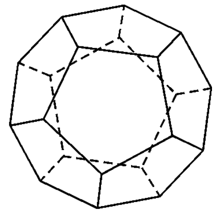


Рис. 283

2. ***Правильный шестигранник — куб*** (рис. 281). Каждая грань куба — это квадрат, а в каждой вершине сходятся три грани.

3. ***Правильный восьмигранник — октаэдр*** (рис. 282). Его грани — правильные треугольники, а в каждой вершине сходятся четыре грани.

4. ***Правильный двенадцатигранник — додекаэдр*** (рис. 283). Его грани — правильные пятиугольники, а в каждой вершине сходятся три грани.

5. ***Правильный двадцатигранник — икосаэдр*** (рис 284). Его грани — правильные треугольники, а в каждой вершине сходятся пять граней.

Пример 1. Найти угол наклона ребра FA правильного тетраэдра $FABC$ (рис. 285) к плоскости ABC.

❑ Пусть ребро тетраэдра равно a. Проведем перпендикуляр FO к плоскости ABC; тогда угол OAF — искомый. Так как точка O — центр ΔABC

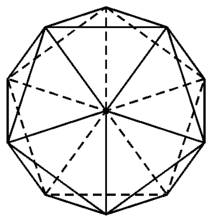


Рис. 284

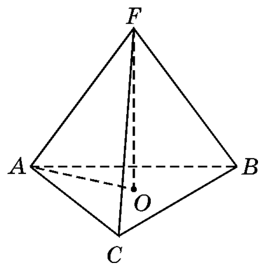


Рис. 285

и $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ (см. п. 293), то $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, т. е. $\varphi =$
$= \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ■

П р и м е р 2. Найти двугранные углы при ребрах октаэдра.

❑ Проведем сечение, перпендикулярное ребрам BC и DE (рис. 286), проходящее через вершины A и F; угол $\varphi = \angle AMF$ — искомый (см. п. 306). Пусть a — ребро октаэдра; тогда $MO = \dfrac{a}{2}$, $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (высота правильного треугольника), $\angle AMN = \dfrac{\varphi}{2}$. Значит,

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{MO}{AM}=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad \cos\varphi=2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1=\frac{2}{3}-1=$$

$$=-\frac{1}{3}.\ \text{Итак,}\ \varphi=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right).\ \blacksquare$$

310. Призма, параллелепипед, куб. Многогранник, две грани которого — равные многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммы, называется ***призмой*** (рис. 287). В зависимости от числа сторон основания призма называется треугольной, четырехугольной и т. д. Многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ называются ***основаниями*** призмы, параллелограммы AA_1B_1B, BB_1C_1C и т. д. — ***боковыми гранями***, а отрезки AA_1, BB_1 и т. д. — ***боковыми ребрами***. ***Высотой*** призмы называется расстояние между ее основниями. Отрезок, который соединяет две вершины, не принадлежащие одной грани, называется ***диагональю*** призмы.

Диагональным сечением призмы называется сечение, проходящее через два боковых ребра, не принадлежащие одной грани (на рис. 287 — это параллелограмм AA_1D_1D).

Перпендикулярным сечением призмы называется сечение, перпендикулярное ее боковому ребру (на рис. 287 — это многоугольник $A'B'C'D'E'$).

Если боковые ребра призмы перпендикулярны основанию, то призма называется ***прямой***; в противном случае — ***наклонной*** (в прямой призме перпендикулярное сечение параллельно основанию или совпадает с ним).

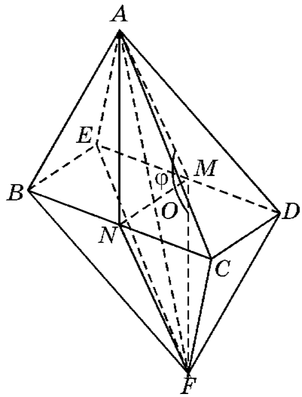


Рис. 286

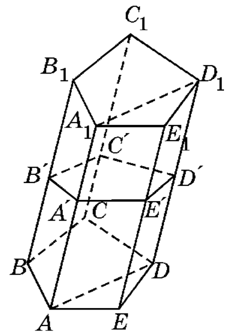


Рис. 287

Прямая призма, основанием которой служит правильный многоугольник, называется ***правильной*** (за исключением куба правильная призма не является правильным многогранником).

Боковая поверхность призмы — это сумма площадей всех ее боковых граней; полная поверхность призмы — это сумма боковой поверхности и площадей ее оснований.

Объем призмы равен произведению площади ее основания S на высоту h или произведению площади ее перпендикулярного сечения $S_{\text{сеч}}$ на боковое ребро l:

$$V = Sh; \tag{1}$$

$$V = S_{\text{сеч}}l. \tag{2}$$

Боковая поверхность призмы равна произведению периметра ее перпендикулярного сечения $P_{\text{сеч}}$ на боковое ребро l:

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{сеч}} l. \tag{3}$$

В частности, *боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания P на высоту призмы h:*

$$S_{\text{бок}} = Ph. \tag{4}$$

П р и м е р 1. В наклонной треугольной призме расстояния боковых ребер друг от друга равны 13, 14 и 15 см, боковое ребро равно 5 см. Найти боковую поверхность и объем призмы.

❑ Боковую поверхность призмы найдем по формуле (3): $S_{\text{бок}} = P_{\text{сеч}} l$, где $P_{\text{сеч}} = 13 + 14 + 15 = 42$ (см), $l = 5$ см. Значит, $S_{\text{бок}} = 210$ см^2. Чтобы найти объем, воспользуемся формулой (2): $V = S_{\text{сеч}} l$, где, согласно формуле Герона, имеем $S_{\text{сеч}} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$ (см^2). Итак, $V = 420$ (см^3). ■

П р и м е р 2. Основание прямой призмы — правильный треугольник, у которого радиус описанной окружности равен $2\sqrt{3}$. Найти боковую поверхность и объем призмы, если ее высота равна 4.

❑ Найдем сторону основания: $a = R\sqrt{3}$ (см. п. 293), т. е. $a = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$. Поэтому $P = 18$, откуда, согласно формуле (4), $S_{\text{бок}} = 6 \cdot 4 = 24$ (см^2). Далее, в силу формулы (1) имеем

$$V = Sh = \frac{36 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 36\sqrt{3} \ (\text{см}^3). \ ■$$

Призма, основанием которой служит параллелограмм, называется ***параллелепипедом***. Таким образом, параллелепипед — это шестигранник, все грани которого являются параллелограммами. Любую из граней можно принять за основание. *Параллелепипед имеет четыре диагонали, которые пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.*

Если боковые ребра параллелепипеда перпендикулярны основанию, то параллелепипед называется ***прямым***. Все боковые грани прямого параллелепипеда — прямоугольники.

Так как параллелепипед — это частный случай призмы, то для вычисления его объема и боковой поверхности справедливы те же формулы (1) — (4), что и для призмы. Отметим еще, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, равен абсолютной величине смешанного произведения этих векторов (см. п. 302).

П р и м е р 3. Основание прямого параллелепипеда — ромб, площадь которого равна 50 см^2. Площади диагональных сечений равны 30 и 40 см^2. Найти объем и боковую поверхность параллелепипеда.

❑ Имеем $V = 50h$, где h нужно найти. Так как $ABCD$ — ромб (рис. 288), то $50 = 0{,}5 \cdot AC \cdot BD$. Теперь, учитывая, что $AC \cdot h = 30$, $BD \cdot h = 40$, находим $AC = \dfrac{30}{h}$, $BD = \dfrac{40}{h}$. Отсюда получаем $100 = \dfrac{30}{h} \cdot \dfrac{40}{h}$, т. е. $h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (см). Значит, $V = 100\sqrt{3}$ (см^3). Далее, из ΔCOD следует, что $CD^2 =$

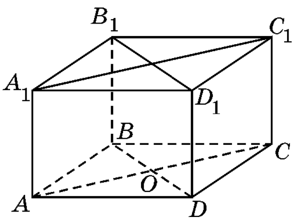


Рис. 288

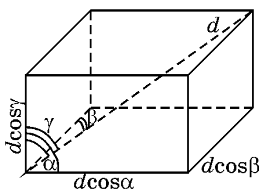


Рис. 289

$$= \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = \left(\frac{30}{4\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{40}{4\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{30^2 + 40^2}{16 \cdot 3} =$$

$= \dfrac{2500}{48}$, т. е. $CD = \dfrac{50}{4\sqrt{3}}$ (см). Окончательно получим $S_{бок} = 4CD \cdot h = \dfrac{4 \cdot 50}{4\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{3} = 100$ (см^2). ■

Прямой параллелепипед, основание которого — прямоугольник, называется ***прямоугольным***. Таким образом, у прямоугольного параллелепипеда все шесть граней являются прямоугольниками. Длины трех взаимно перпендикулярных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его ***измерениями***.

Т.11.3. *В прямоугольном параллелепипеде квадрат диагонали d равен сумме квадратов трех его измерений a, b и c*, т .е. $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

П р и м е р 4. Найти сумму квадратов синусов углов, которые диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с его ребрами.

❑ Пусть a, b, c — измерения параллелепипеда, а α, β, γ — углы, которые диагональ d образует с его ребрами. Тогда $a = d\cos\alpha$, $b = d\cos\beta$, $c = d\cos\gamma$ (рис. 289). Но $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, откуда $d^2(\cos^2\alpha + {}$ $+ \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = d^2$, или $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma =$ $= 1$. Так как $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$, $\cos^2\gamma = 1 - \sin^2\gamma$, то $3 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 1$, т. е. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$. ■

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений:

$$V = abc. \tag{5}$$

Прямоугольный параллелепипед, все грани которого — квадраты, называется ***кубом***. Все ребра куба равны.

Объем куба равен кубу его ребра, т. е.

$$V = a^3. \tag{6}$$

П р и м е р 5. Найти объем куба, если расстояние от его диагонали до непересекающегося с ней ребра равно d.

❑ Расстояние от ребра AA_1 до диагонали B_1D равно расстоянию от этого ребра до плоскости BB_1D_1D, т. е. длине отрезка A_1E (рис. 290). Пусть a — ребро куба; тогда из ΔA_1ED_1 следует, что $2d^2 = a^2$, откуда $a = d\sqrt{2}$. Итак, $V = a^3 = 2d^3\sqrt{2}$. ■

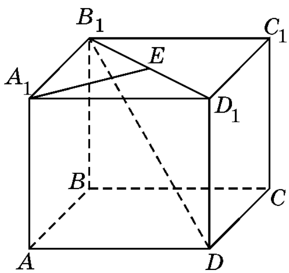


Рис. 290

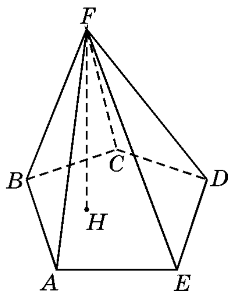


Рис. 291

311. Пирамида, усеченная пирамида. Рассмотрим произвольный плоский многоугольник $ABCDE$ и точку F, лежащую вне его плоскости. Соединим точку F со всеми вершинами многоугольника. Полученный при этом многогранник называется ***пирамидой*** (рис. 291). Одна грань пирамиды (многоугольник $ABCDE$) называется ее ***основанием***, а остальные (треугольники FAB, FBC и т.д. с общей вершиной) — ***боковыми гранями***. Точка F называется ***вершиной*** пирамиды, а отрезки FA, FB и т. д. — ***боковыми ребрами***. В зависимости от числа сторон многоугольника, лежащего в основании пирамиды, различают треугольные, четырехугольные и вообще n-угольные пирамиды.

Заметим, что n-угольная пирамида имеет $n + 1$ грань: n боковых граней и основание. При вершине пирамиды образуется n-гранный угол с n плоскими и n двугранными углами. Они называются соответственно ***плоскими углами при вершине*** и ***двугран-***

ными углами при боковых ребрах. При каждой вершине основания имеется трехгранный угол. Его плоские углы, называемые ***плоскими углами при основании***, образованы боковым ребром и ребрами основания. Двугранные углы между боковыми гранями и основанием называются ***двугранными углами при основании***.

Треугольную пирамиду иногда называют ***тетраэдром***. Любую ее грань можно принять за основание.

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины на основание (на рис. 291 отрезок FH — высота пирамиды).

Пирамида называется ***правильной***, если в ее основании лежит правильный многоугольник, а высота проходит через центр этого многоугольника. Заметим, что правильная пирамида, кроме правильного тетраэдра, не является правильным многогранником.

Отметим, что в правильной пирамиде:

1^0. Все боковые ребра равны между собой.

2^0. Все боковые грани — равные между собой равнобедренные треугольники.

3^0. Все плоские углы при вершине равны.

4^0. Все двугранные углы при вершине равны.

5^0. Все плоские углы при основании равны.

6^0. Все двугранные углы при основании равны.

Высота боковой грани правильной пирамиды называется ***апофемой*** пирамиды.

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания S на высоту h:

$$V = \frac{1}{3}Sh. \qquad (1)$$

Объем пирамиды, построенной на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, равен одной шестой абсолютной величины смешанного произведения этих векторов (см. п. 302).

Боковая поверхность правильной пирамиды равна половине произведения периметра ее основания на апофему m:

$$S_{\text{бок}} = 0{,}5Pm. \qquad (2)$$

Если все боковые грани пирамиды или призмы образуют со сторонами основания равные двугранные углы φ, то боковая поверхность $S_{\text{бок}}$ и площадь основания S связаны соотношением

$$S_{\text{бок}} = \frac{S}{\cos\varphi}. \qquad (3)$$

При решении задач, связанных с пирамидой, часто используют следующие утверждения:

1^0. Пусть в пирамиде выполняется одно из условий: а) либо все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы; б) либо длины всех боковых ребер равны. Тогда вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды (эта же точка служит точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам основания пирамиды).

2^0. Пусть в пирамиде выполняется одно из условий: а) либо все боковые грани образуют с основанием равные углы; б) либо длины всех апофем пирамиды равны. Тогда вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды (эта же точка служит точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды).

П р и м е р 1. Основанием четырехугольной пирамиды служит прямоугольник, диагональ которого равна $2\sqrt{3}$, а угол между диагоналями равен 60°. Каждое из боковых ребер образует с плоскостью основания угол 45°. Найти объем и боковую поверхность пирамиды.

❑ По условию, $BD = 2\sqrt{3}$, $\angle AOB = 60^\circ$ (рис. 292); тогда $\angle BDA = 30^\circ$, $AB = \sqrt{3}$, $AD = 3$. Значит, $S = AB \cdot AD = 3\sqrt{3}$. Так как боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы то, согласно утверждению 1^0, FO — высота пирамиды и $FO = AO = \sqrt{3}$. Тогда по формуле (1) найдем $V = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$. Теперь проведем высоту FM в ΔFDC и из ΔFOM получим $FM = \sqrt{FO^2 + OM^2} = \sqrt{3 + 2{,}25} = 0{,}5\sqrt{21}$. Итак,

$$S_{\text{бок}} = (3 + \sqrt{3})\sqrt{21}. \ ■$$

П р и м е р 2. Найти объем и боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если высота треугольника, являющегося ее основанием, равна 30, а апофема пирамиды равна 20.

❑ Пусть a — сторона правильного треугольника ABC (рис. 293), CM — его высота, FO — высота пирамиды, FM — апофема. Имеем $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, откуда $a = \dfrac{60}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}$. Так как O — центр ΔABC, то

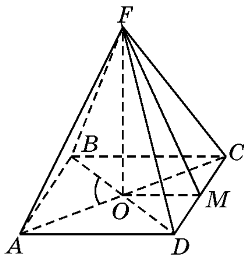


Рис. 292

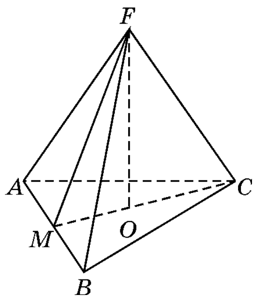


Рис. 293

$OM = \dfrac{1}{3}CM = 10$ и из ΔFOM получим $FO =$ $= \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3}$. Теперь по формулам (1) и (2) находим

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{400 \cdot 3\sqrt{3}}{4} \cdot 10\sqrt{3} = 3000,$$

$$S_{\text{бок}} = 0{,}5Pm = 0{,}5 \cdot 60\sqrt{3} \cdot 20 = 600\sqrt{3}.$$

Для отыскания $S_{\text{бок}}$ можно было также использовать формулу (3). В самом деле, все двугранные углы при основании равны φ, где $\cos\varphi = OM : FM = 0{,}5$. Учитывая, что $S = 300\sqrt{3}$, получим

$$S_{\text{бок}} = 300\sqrt{3} : 0{,}5 = 600\sqrt{3}. \blacksquare$$

Если в произвольной пирамиде провести плоскость, параллельную основанию, то многогранник, гранями которого являются это сечение, основание и заключенные между ними части боковых граней пирамиды, называется ***усеченной пирамидой*** (рис. 294). Параллельные грани усеченной пирамиды называются ее ***верхним и нижним основаниями***, а расстояние между ними — ***высотой***.

Заметим, что пирамида $FA_1B_1C_1D_1$, лежащая выше секущей плоскости (рис. 294), подобна пирамиде $FABCD$. Поэтому площади оснований S_1 и S_2 указанных пирамид относятся как квадраты их линейных размеров, а объемы V_1 и V_2 этих пирамид — как кубы линейных размеров (например, если $FH_1 = h_1, FH = h_2$, то $S_1 : S_2 = h_1^2 : h_2^2$, а $V_1 : V_2 = h_1^3 : h_2^3$).

Усеченная пирамида называется ***правильной***, если пирамида, из которой она получена, была правильной. Все боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобочные трапеции. Высота боковой грани правильной усеченной пирамиды называется ***апофемой*** пирамиды.

Объем усеченной пирамиды равен одной трети произведения высоты на сумму площадей верхнего и нижнего оснований и средней пропорциональной между ними:

$$V = \frac{1}{3} h \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right). \qquad (4)$$

Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему:

$$S_{\text{бок}} = 0{,}5(P_1 + P_2)\, m. \qquad (5)$$

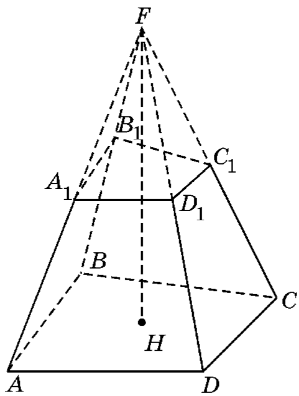


Рис. 294

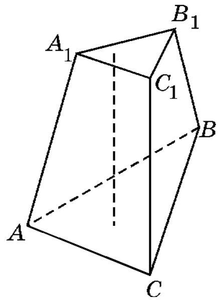
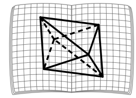


Рис. 295

П р и м е р 3. В треугольной усеченной пирамиде высота равна 10 см, стороны одного основания равны 27, 29 и 52 см, а периметр другого основания равен 72 см. Найти объем усеченной пирамиды.

❑ Согласно формуле (4), искомый объем $V = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$, где S_1 найдем по формуле Герона. Так как $p_1 = 0{,}5(27 + 29 + 52) = 54$ (см), то $S = \sqrt{54 \cdot 27 \cdot 25 \cdot 2} = 270$ (см^2). Учитывая, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 295), имеем $\frac{S_1}{S_2} = \frac{(2p_1)^2}{(2p_2)^2} = \frac{108^2}{72^2} =$



$= \dfrac{9}{4}$, откуда $S_1 = \dfrac{4S_1}{9} = \dfrac{4 \cdot 270}{9} = 120$ (см^2). Итак,

$$V = \frac{10}{3}(270 + 120 + \sqrt{270 \cdot 120}) = 1900 \quad (\text{см}^3). \blacksquare$$

Пример 4. Найти объем и боковую поверхность правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 18, а стороны оснований равны 14 и 10.

❑ Искомый объем выразится так: $V = \dfrac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$, где $S_1 = 196$, $S_2 = 100$. Найдем $h = B_1K$ (рис. 296). В ΔB_1KD имеем $B_1K = \sqrt{B_1D^2 - KD^2}$. Учитывая, что BB_1D_1D — равно-

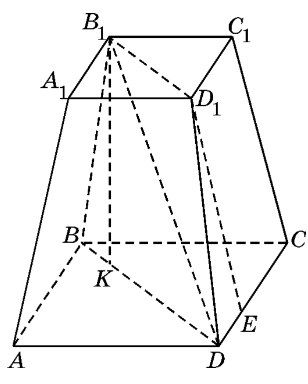


Рис. 296

бочная трапеция, находим $BK = 0{,}5\,(BD - B_1D_1) = 0{,}5\,(14\sqrt{2} - 10\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, откуда $KD = BD - BK = 12\sqrt{2}$, т. е. $h = \sqrt{18^2 - (12\sqrt{2})^2} = 6$. Значит,

$$V = \frac{6}{3}(196 + 100 + 140) = 872.$$

Теперь проведем апофему D_1E и в $\Delta\, D_1ED$ имеем $D_1D = B_1B = \sqrt{B_1K^2 + BK^2} = \sqrt{36+8} = 2\sqrt{11}$, $DE = 0{,}5\,(DC - D_1C_1) = 2$. Тогда $D_1E = \sqrt{44-4} = 2\sqrt{10}$ и, используя формулу (5), получим

$$S_{\text{бок}} = 0{,}5\,(P_1 + P_2)m = 2\,(14 + 10)\cdot 2\sqrt{10} = 96\sqrt{10}. \;\blacksquare$$

§ 40. Тела вращения

312. Цилиндр. Рассмотрим какую-либо плоскую линию l. Через каждую точку этой линии проведем параллельные прямые, не лежащие в плоскости линии l (рис. 297). Полученная при этом поверхность называется ***цилиндрической***. Линия l называется ***направляющей*** цилиндрической поверхности, а параллельные прямые — ее ***образующими***.

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с замкнутой направляющей и двумя параллельными плоскостями, пересекающими ее образующие, называется ***цилиндром***. Части параллельных плоскостей, лежащие внутри цилиндра, называются ***основаниями***, а расстояние между этими плоскостями — ***высотой*** цилиндра. Основания цилиндра равны, также равны и

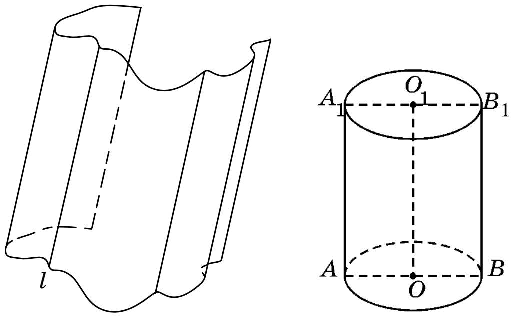


Рис. 297

все его образующие (т. е. отрезки образующих цилиндрической поверхности, заключенные между ее основаниями).

Цилиндр называется ***прямым***, если его образующие перпендикулярны основанию. Если направляющей является окружность, то цилиндр называется ***круговым*** (рис. 297).

В дальнейшем мы будем рассматривать только круговой цилиндр. Радиус основания цилиндра называется ***радиусом цилиндра***, образующая цилиндра одновременно является его высотой. Отрезок, соединяющий центры оснований, называется ***осью*** цилиндра (O_1O на рис. 297). Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось, называется ***осевым*** (AA_1B_1B на рис. 297). Плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная осевому сечению, проведенному через эту образующую, называется ***касательной плоскостью*** цилиндра.

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту, т. е.

$$V = Sh = \pi R^2 h. \qquad (1)$$

Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту, т. е.

$$S_{бок} = Cl = 2\pi Rh. \qquad (2)$$

П р и м е р 1. Отрезок, соединяющий две диаметрально противоположные точки A и B_1 нижнего и верхнего оснований цилиндра (рис. 298), равен 12 см и составляет с плоскостью нижнего основания угол 30°. Найти боковую поверхность и объем цилиндра.

❑ Проведем через отрезок AB_1 сечение плоскостью, перпендикулярной основанию цилиндра. В ΔABB_1 имеем $AB = 2R = 12\cos 30° = 6\sqrt{3}$ (см), $BB_1 = h = 12\sin 30° = 6$ (см). Теперь, используя формулы (2) и (1), находим

$$S = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 3\sqrt{3} \cdot 6 = 36\pi\sqrt{3} \ (\text{см}^2),$$

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot (3\sqrt{3})^2 \cdot 6 = 162\pi \ (\text{см}^3). \ \blacksquare$$

Призмой, вписанной в цилиндр, называется призма, основания которой — многоугольники, вписанные в основания цилиндра. Ее боковые ребра совпадают с образующими цилиндра.

Призмой, описанной около цилиндра, называется такая призма, основания которой — многоугольники, описанные около оснований цилиндра. Плоскости ее боковых граней являются касательными плоскостями цилиндра.

П р и м е р 2. Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около цилиндра радиуса R,

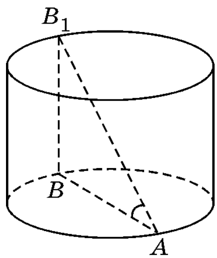


Рис. 298

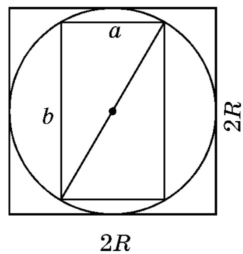


Рис. 299

в 4 раза больше объема прямоугольного параллелепипеда, вписанного в этот цилиндр. Найти стороны основания вписанного параллелепипеда.

❑ На рис. 299 изображено плоское сечение заданной конфигурации. Основанием описанного параллелепипеда служит квадрат со стороной $2R$, объем этого параллелепипеда $V_1 = 4R^2h$, где h — высота цилиндра. Пусть основание вписанного параллелепипеда — прямоугольник со сторонами a и b; тогда объем этого параллелепипеда $V_2 = abh$, откуда $4R^2h : abh = 4$, т. е. $ab = R^2$. Учитывая, что $a^2 + b^2 = 4R^2$, а $2ab = 2R^2$, приходим к системе

$$\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = 6R^2, \\ a^2 - 2ab + b^2 = 2R^2; \end{cases} \begin{cases} a + b = R\sqrt{6}, \\ a - b = R\sqrt{2}. \end{cases}$$

Итак, $a = 0{,}5R(\sqrt{6} + \sqrt{2})$, $b = 0{,}5R(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. ■

313. Конус, усеченный конус. Рассмотрим какую-либо плоскую линию l и произвольную точку F, не лежащую в плоскости этой линии (рис. 300, *а*). Всевозможные прямые, соединяющие точку F со всеми точками линии l, образуют так называемую ***коническую поверхность***. При этом точка F называется ***вершиной***, линия l — ***направляющей***, а указанные прямые — ***образующими*** конической поверхности. Коническая поверхность имеет две полости: одна из них образована лучами, пересекающими l, а другая — их продолжениями. ***Конусом*** называется тело, ограниченное одной полостью конической поверхности с замкнутой направляющей

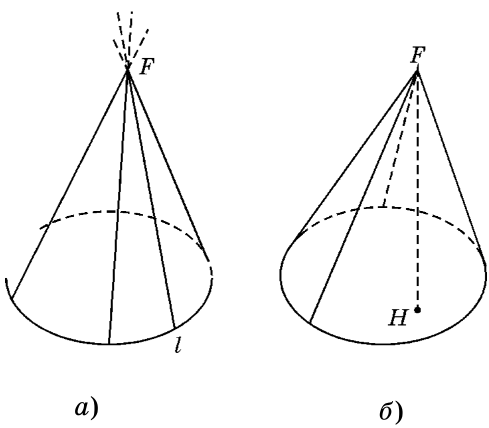


Рис. 300

и плоскостью, пересекающей эту коническую поверхность и не проходящей через вершину F (рис. 300, *б*). Часть этой плоскости, лежащая внутри конической поверхности, называется ***основанием*** конуса. Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на основание, называется ***высотой*** конуса (FH на рис. 300, *б*).

Пирамиду можно рассматривать как частный случай конуса (направляющей служит многоугольник).

Если в качестве направляющей взять окружность, то конус называется ***круговым***; если, кроме того, высота конуса проходит через центр основания, то конус называется ***прямым круговым***. В дальнейшем мы будем рассматривать только прямой круговой конус.

Рассмотрим сечения конуса плоскостями, не проходящими через его вершину. Если секущая плоскость параллельна основанию, то линия, получающаяся в сечении, — окружность (рис. 301, *а*); если секущая плоскость не параллельна ни одной из образующих и пересекает только одну полость, то в сечении получается линия, называемая ***эллипсом*** (рис. 301, *б*; частным случаем эллипса является окружность); если секущая плоскость пересекает только одну полость и параллельна образующей, то линия, получающаяся в сечении, — парабола (рис. 301, *в*); если секущая плоскость пересекает обе полости конуса, то линия, получающаяся в сечении, — гипербола (рис. 301, *г*). Эллипс, гипербола и парабола называются ***коническими сечениями***.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется ***осевым***. Плоскость, проходящая через образующую перпендикулярно осевому сечению, проведенному через эту образующую, называется ***касательной плоскостью*** конуса.

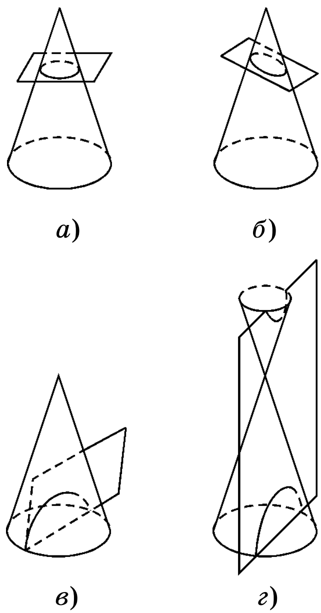


Рис. 301

Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту, т. е.

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h. \qquad (1)$$

Боковая поверхность конуса равна половине произведения длины окружности основания на образующую, т. е.

$$S_{\text{бок}} = 0{,}5Cl = \pi Rl. \qquad (2)$$

П р и м е р 1. Боковая поверхность конуса вдвое больше площади основания. Найти объем конуса, если площадь его осевого сечения равна $3\sqrt{3}$ см^2.

❑ По условию, $S_{\text{бок}} = 2S$, т. е. $\pi Rl = 2\pi R^2$ (рис. 302), откуда $l = 2R$ и, значит, ΔAFB — правильный. Имеем $S_{\Delta AFB} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$, что согласно условию равно $3\sqrt{3}$, т. е. $R = \sqrt{3}$. Теперь по формуле (1) находим $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$, где $h = R\sqrt{3} = 3$. Итак,

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3 \cdot 3 = 3\pi \text{ (см}^3\text{)}. \blacksquare$$

Пирамидой, вписанной в конус, называется пирамида, основание которой — многоугольник, вписанный в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. Боковые ребра вписанной пирамиды являются образующими конуса.

Пирамидой, описанной около конуса, называется пирамида, основание которой — многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. Плоскости боковых граней описанной пирамиды являются касательными плоскостями конуса.

П р и м е р 2. В конус вписана треугольная пирамида, боковые ребра которой попарно взаимно перпендикулярны. Найти угол между образующей конуса и его высотой.

❑ Так как $FA = FB = FC$ (рис. 303), то $\Delta AFB = \Delta AFC = BFC$ (прямоугольные треугольники, име-

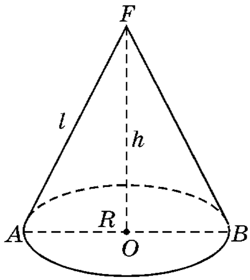


Рис. 302

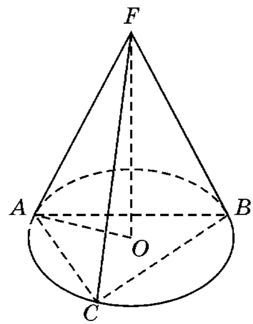


Рис. 303

ющие по два равных катета); значит, ΔABC — правильный. Искомый угол φ — это угол AFO между высотой и ребром правильной пирамиды $FABC$.

Пусть $AB = a$. Тогда $FA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, откуда

$$\sin\varphi = \frac{OA}{FA} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ и } \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}. \ \blacksquare$$

Если от конуса отсечь часть плоскостью, параллельной его основанию, то тело, заключенное между секущей плоскостью и основанием, называется ***усеченным конусом*** (рис. 304). При этом круги с центрами O_1 и O, лежащие в параллельных плоскостях, называются ***верхним*** и ***нижним основаниями*** усеченного конуса, а расстояние между этими плоскостями называется ***высотой*** усеченного конуса (O_1O на рис. 304).

Объем усеченного конуса равен одной трети произведения высоты на сумму площадей верхнего и нижнего оснований и средней пропорциональной между ними:

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right) = \frac{1}{3}\pi h\left(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2\right). \quad (3)$$

Боковая поверхность усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую:

$$S_{\text{бок}} = 0{,}5\,(C_1 + C_2)l = \pi(R_1 + R_2)l. \quad (4)$$

П р и м е р 3. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 и 4 см. Найти объем и боковую поверхность усеченного конуса, если последняя равна сумме площадей оснований.

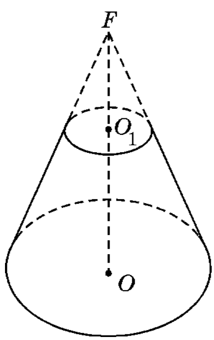


Рис. 304

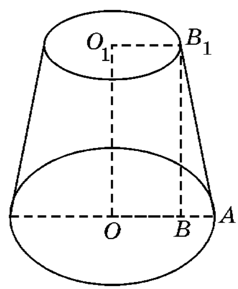


Рис. 305

❑ Проведем $B_1B \perp OA$ и положим $B_1B = h$, $B_1A = l$, $\angle B_1AB = \alpha$ (рис. 305). В ΔB_1BA имеем: $BA =$ $= 1$ см, $B_1A = l = \dfrac{1}{\cos\alpha}$. По условию, $S_{\text{бок}} = S_{\text{нижн.осн}} +$ $+ S_{\text{верх.осн}}$, или $\pi(3+4)l = \pi(3^2 + 4^2)$, откуда $l = \dfrac{25}{7}$, $h = \sqrt{\left(\dfrac{25}{7}\right)^2 - 1} = \dfrac{24}{7}$. Значит, $S_{\text{бок}} = 25\pi$ (см^2). Теперь воспользуемся формулой (3):

$$V = \frac{\pi \cdot 24}{7 \cdot 3}(3^2 + 4^2 + 3 \cdot 4) = \frac{296\pi}{7} \text{ (см}^3\text{).} \ ■$$

314. Шар, сфера. ***Шаровой поверхностью*** (или ***сферой***) называется геометрическое место точек, удаленных от заданной точки O (***центра***) на заданное расстояние R (***радиус***). ***Шар*** — геометрическое место точек, удаленных от центра на расстояние, не превышающее радиус (рис. 306).

Любой отрезок, соединяющий произвольную точку сферы с центром, называется ее ***радиусом***. Отрезок, соединяющий какие-либо две точки сферы и проходящий через ее центр, называется ***диаметром***. Центр, радиус и диаметр сферы является также центром, радиусом и диаметром шара.

Плоскость, имеющая с шаром одну общую точку, называется ***касательной плоскостью*** шара.

Т.11.4. *Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной плоскости.*

Т.11.5. *Всякое сечение шара плоскостью есть круг.*

Если расстояние секущей плоскости от центра шара равно d, то радиус сечения $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Плоскость, проходящая через центр шара, называется его ***диаметральной плоскостью***. Сечение шара диаметральной плоскостью называется ***большим кругом***.

Любая диаметральная плоскость является плоскостью симметрии шара. Центр шара — его центр симметрии.

Шаровым сегментом называется часть шара, отсеченная от него плоскостью ($MABCD$ на рис. 306). Если расстояние секущей плоскости от центра шара равно d, то разность $R - d = h$ называется ***высотой*** сегмента (MN на рис. 306).

Шаровым слоем называется часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями (на рис. 306 изображен шаровой слой AA_1C_1C, заключенный между плоскостями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$). Расстояние между секущими плоскостями называется ***высотой*** шарового слоя (NN_1 на рис. 306).

Рассмотрим конус с вершиной в центре шара. Часть шара, лежащая внутри этого конуса, называется ***шаровым сектором***; на рис. 306 изображен шаровой сектор $OAMC$, состоящий из конуса $OABCD$ и шарового сегмента $MABCD$. (Шаровым сектором называется также и часть шара, лежащая вне этого конуса, т. е. дополняющая указанный выше сектор до полного шара).

Объем шара радиуса R находится по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{1}$$

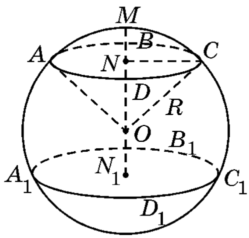


Рис. 306

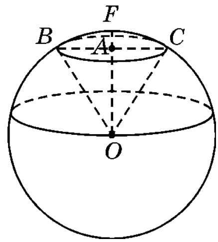


Рис. 307

Объем шарового сегмента находится по формуле

$$V_{\text{сегм}} = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h), \qquad (2)$$

где R — радиус шара, h — высота сегмента.

Объем шарового сектора находится по формуле

$$V_{\text{сект}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h, \qquad (3)$$

где R — радиус шара, h — высота соответствующего сегмента (здесь шаровой сектор рассматривается как тело, состоящее из конуса и шарового сегмента).

Если α — угол между осью и образующей конуса, то формула (3) примет вид

$$V_{\text{сект}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Площадь сферы радиуса R находится по формуле

$$S = 4\pi R^2. \qquad (5)$$

Площадь поверхности сферического сегмента находится по формуле

$$S_{\text{сегм}} = 2\pi Rh, \qquad (6)$$

где R — радиус сферы, h — высота сегмента.

Площадь поверхности шарового слоя находится по формуле

$$S_{\text{слоя}} = 2\pi RH, \qquad (7)$$

где R — радиус сферы, H — высота слоя, т. е. эта площадь зависит только от высоты слоя, а не от его положения на сфере.

П р и м е р 1. Шар пересечен плоскостью, перпендикулярной его радиусу и отстоящей от его центра на 9 см. Площадь сечения равна 144π см^2. Найти объем шара и площадь сферы.

❑ Пусть $OB = x$ — радиус сферы (рис. 307). В ΔOAB имеем $AB^2 = OB^2 - OA^2 = x^2 - 81$. По условию, $\pi(x^2 - 81) = 144\pi$, откуда $x = 15$ (см). Теперь, используя формулы (1) и (5), находим

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 = 4500\pi \text{ (см}^3\text{)},\ S = 4\pi \cdot 15^2 = 900\pi \text{ (см}^2\text{)}. \blacksquare$$

П р и м е р 2. Используя условие примера 1, найти: а) объем шарового сектора $OBFC$ (см. рис. 307); б) объем шарового сегмента BFC и площадь сферической поверхности этого сегмента; в) площадь поверхности шарового слоя, заключенного между плоскостью данного сечения и параллельной ей плоскостью, проходящей через центр шара.

❑ а) Объем шарового сектора $OBFC$ вычислим по формуле (3): $V_{\text{сект}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$, где $R = 15$ см, $h = AF = OF - OA = 15 - 9 = 6$ (см). Значит,

$$V_{\text{сект}} = \frac{2}{3}\pi \cdot 15^2 \cdot 6 = 900\pi \ \ (\text{см}^3).$$

Проверим, что тот же результат дает и формула (4). Имеем $\alpha = \angle AOC$, $\cos\alpha = \frac{OA}{OC} = \frac{9}{15} = 0{,}6$, $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} = \frac{1 - 0{,}6}{2} = 0{,}2$, откуда

$$V_{\text{сект}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 \cdot 0{,}2 = 900\pi \ \ (\text{см}^3).$$

б) Так как $R = 15$ см, $h = 6$ см, то, используя формулы (2) и (6), получим

$$V_{\text{сегм}} = \frac{\pi}{3} \cdot 6^2 \ (45 - 6) = 468\pi \ (\text{см}^3),$$

$$S_{\text{сегм}} = 2\pi \cdot 15 \cdot 6 = 180\pi \ \ (\text{см}^2). \ ■$$

в) Согласно формуле (7), где $R = 15$ см, $H = 9$ см, находим

$$S_{\text{слоя}} = 2\pi \cdot 15 \cdot 9 = 270\pi \ \ (\text{см}^2). \ ■$$

Шар называется ***описанным около многогранника***, если все вершины многогранника лежат на сфере.

Шар называется ***вписанным в многогранник***, если он касается всех граней многогранника.

П р и м е р 3. Около правильной треугольной призмы, высота которой вдвое больше стороны основания, описан шар. Найти отношение объема шара к объему призмы.

❑ Пусть $AB = a$, $OA = R$ (рис. 308). Тогда $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_{\text{пр}} = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. В ΔOEA имеем $OE = \frac{1}{2}AA_1 = a$, $AE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (радиус окружности, описанной около правильного треугольника); значит, $R = \sqrt{OE^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Отсюда находим $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{8a^3}{3\sqrt{3}} = \frac{32\pi a^3}{9\sqrt{3}}$. Итак,

$$V_{\text{шара}} : V_{\text{пр}} = \frac{32\pi a^3}{9\sqrt{3}} : \frac{a^3\sqrt{3}}{2} = \frac{64\pi}{27}. \ \blacksquare$$

П р и м е р 4. Найти поверхность шара, вписанного в правильный тетраэдр с ребром a.

❑ Проведем плоскость через высоту пирамиды FO и апофему FD (рис. 309); радиус круга в полученном сечении равен радиусу шара. Так как все ребра пирамиды равны a, то $FD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $OD = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $BO = FK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Из ΔFOD следует, что $FO = \sqrt{FD^2 - OD^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Пусть R — радиус шара; тог-

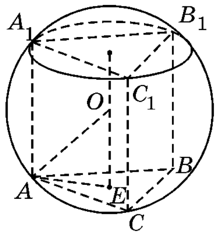


Рис. 308

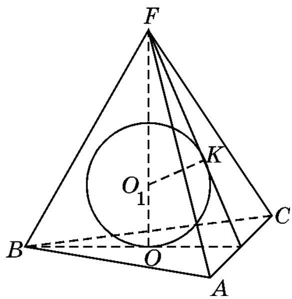


Рис. 309

да $FO_1 = FO - R$. В ΔFKO_1 имеем $O_1K^2 = FO_1^2 - FK^2$, или $R^2 = (FO - R)^2 - \frac{a^2}{3}$, откуда

$$R^2 = \frac{2a^2}{3} - \frac{2aR\sqrt{6}}{3} + R^2 - \frac{a^3}{3},$$

т. е. $R = \frac{a}{2\sqrt{6}}$. Итак, $S_{\text{шара}} = 4\pi R^2 = \frac{\pi a^2}{6}$. ■

315. Цилиндр, конус и шар как тела вращения. Цилиндр, конус и шар можно получить с помощью вращения плоских фигур вокруг соответствующих осей (цилиндр — вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон; конус — вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов; шар — вращением полукруга вокруг его диаметра). Поэтому цилиндр, конус и шар называют ***телами вращения***.

Как известно (см. п. 245), объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $y = f(x)$, снизу осью Ox, а сбоку двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, выражается формулой

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx. \qquad (1)$$

П р и м е р. Доказать справедливость формулы (2) из п. 314, т. е. что $V_{\text{сегм}} = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$, где R — радиус шара, а h — высота сегмента.

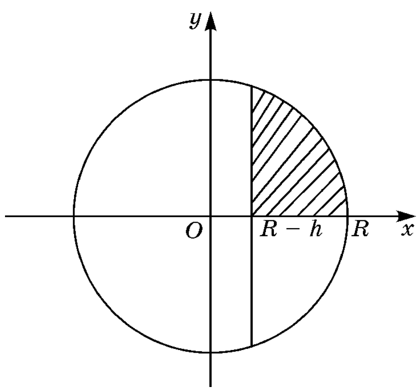


Рис. 310

❑ Будем рассматривать шаровой сегмент как тело, полученное вращением вокруг оси Ox заштрихованной на рис. 310 криволинейной трапеции. Последняя ограничена сверху дугой окружности, уравнение которой имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$ (см. п. 284), а пределы интегрирования равны $R - h$ и R. Согласно формуле (1), находим

$$V_{\text{сегм}} = \pi \int\limits_{R-h}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{R-h}^{R} =$$

$$= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} - R^2(R-h) + \frac{(R-h)^3}{3} \right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h). \ \blacksquare$$

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

АЛГЕБРА

1. Основные законы алгебры

Для любых действительных чисел a, b, c справедливы равенства:

$a + b = b + a$ (переместительный закон сложения).

$(a + b) + c = a + (b + c)$ (сочетательный закон сложения).

$a + 0 = a$.

$a + (-a) = 0$.

$ab = ba$ (переместительный закон умножения).

$(ab)c = a(bc)$ (сочетательный закон умножения).

$a(b + c) = ab + ac$ (распределительный закон умножения относительно сложения).

$a \cdot 1 = a$.

$a \cdot \frac{1}{a} = 1$, где $a \neq 0$.

2. Числовые неравенства

Для любых действительных чисел a, b, c, d справедливы свойства:

Если $a > b$, то $b < a$.

Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности).

Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.

Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.

Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, причем $a > b$ и $c > d$, то $ac > bd$.

Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.

Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Если $a > b > 0$ и $n \in N$, то $a^n > b^n$.

3. Модуль действительного числа

Определение модуля:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Для любых действительных чисел a, b справедливы свойства:

$|a| \geq 0.$

$|a| = |-a|.$

$|ab| = |a||b|.$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, где $b \neq 0$.

$|a|^2 = a^2.$

4. Арифметический корень

Определение арифметического корня:

если $a \geq 0$ и $n \in \boldsymbol{N}$, то $\sqrt[n]{a} = x$ означает: 1) $x \geq 0$; 2) $x^2 = a$.

Для любых действительных чисел $a \geq 0$ и $b \geq 0$ справедливы свойства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}.$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ где } b \neq 0.$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

$$\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}.$$

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

5. Обобщение понятия степени

Определение степени с натуральным показателем:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots\ a}_{n \text{ множителей}}, \quad a^1 = a.$$

Определение степени с положительным дробным показателем:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \text{ где } a \geq 0.$$

Определение степени с нулевым показателем:

$$a^0 = 1, \text{ где } a \neq 0.$$

Определение степени с отрицательным рациональным показателем:

$$a^{-r} = a^{\frac{1}{r}}, \text{ где } a > 0.$$

Определение степени с иррациональным показателем:

а) если $a = 1$ и $\alpha \in \boldsymbol{I}$, то $1^{\alpha} = 1$;

б) если $a > 1$ и $\alpha \in \boldsymbol{I}$, то под a^{α} понимают число, заключенное между a^{r_1} и a^{r_2} для любых рациональных чисел r_1 и r_2 таких, что $r_1 < \alpha$, а $r_2 > \alpha$;

в) если $0 < a < 1$ и $\alpha \in \boldsymbol{I}$, то под a^{α} понимают число, заключенное между a^{r_2} и a^{r_1} для любых рациональных чисел r_1 и r_2 таких, что $r_1 < \alpha < r_2$.

Для любых $a > 0$, $b > 0$ и любых действительных чисел x и y справедливы свойства:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}.$$

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x.$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

Стандартный вид положительного действительного числа:

$$a = a_1 \cdot 10^n,\text{ где } 1 \le a_1 < 10,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

6. Комплексные числа

Алгебраическая форма комплексного числа:

$$z = (a;\ b) = a + bi,$$

где $\operatorname{Re} z = a$ — действительная часть, $\operatorname{Im} z = b$ — мнимая часть комплексного числа z.

Условие равенства двух комплексных чисел:

$$(a; b) = (c;\ d),\ \text{если} \begin{cases} a = b, \\ c = d. \end{cases}$$

Модуль комплексного числа $z = a + bi$:

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Степени мнимой единицы:

$$i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i, i^{4n} = i, n \in \boldsymbol{N}.$$

Тригонометрическая форма комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где r — модуль, а φ — главное значение аргумента $(-\pi < \varphi \le \pi)$, причем

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Умножение и деление комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Возведение комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в степень n:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi);\ n \in \boldsymbol{N}.$$

Формула Муавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,\ n \in \boldsymbol{N}.$$

Извлечение корня n-й степени $(n \in \boldsymbol{N})$ из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

7. Формулы сокращенного умножения

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (разность квадратов);

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (квадрат суммы);

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ (квадрат разности);

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (куб суммы);

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ (куб разности);

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ (сумма кубов);

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (разность кубов).

8. Квадратное уравнение

Формула корней неприведенного квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\text{ где } D=b^2-4ac.$$

Формула корней неприведенного квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ в случае, когда b — четное число:

$$x=\frac{-k\pm\sqrt{D^*}}{a}=\frac{-b\pm\sqrt{k^2-ac}}{a},\text{ где } k=\frac{b}{2},\ D^*=\frac{D}{4}.$$

Теорема Виета для приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$:

$$x_1+x_2=-p,\ x_1x_2=q.$$

9. Многочлены

Выделение полного квадрата из квадратного трехчлена:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Разложение квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 — корни трехчлена.

Теорема о делении многочленов с остатком: для любых двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ таких, что степень $P(x)$ не меньше степени $Q(x)$, существует одна и только одна пара многочленов $S(x)$ и $R(x)$ так, что справедливо тождество

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x),$$

причем степень остатка $R(x)$ меньше степени $Q(x)$.

Теорема Безу: остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - \alpha$ равен значению многочлена при $x = \alpha$, т. е. $R = P(\alpha)$.

Схема Горнера: при делении многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a^n$$

на двучлен $x - \alpha$ коэффициенты частного и остатка располагают в следующей таблице:

	a_0	a_1	a_2	a_{n-1}	a_n
α	$a_0 = b_0$	$\underbrace{\alpha b_0 + a_1}_{b_1}$	$\underbrace{\alpha b_1 + a_2}_{b_2}$	$\underbrace{\alpha b_{n-2} + a_{n-1}}_{b_{n-1}}$	$\alpha b_{n-1} + a_n = r$

10. Определители и системы двух (трех) линейных уравнений с двумя (тремя) переменными

Определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Разложение определителя по элементам какой-либо строки или столбца; например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

— разложение по элементам первой строки, где

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

— алгебраические дополнения элементов a_{11}, a_{12}, a_{13}.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Система двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

при условии, что ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$

где Δ_x, Δ_y — определители, полученные из определителя Δ заменой столбцов при неизвестных столбцом свободных членов.

Система трех линейных уравнений с тремя переменными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

при условии, что ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta z}{\Delta},$$

где Δ_x, Δ_y, Δ_z — определители, полученные из определителя Δ заменой столбцов при соответствующем неизвестном столбцом свободных членов.

11. Логарифмы

Определение логарифма:

$$a^{\log_a x} = x, \text{ где } x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

Логарифм произведения:

если $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2;$$

если $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, то

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a|x_1| + \log_a|x_2|.$$

Логарифм частного:

если $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2;$$

если $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, то

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a|x_1| - \log_a|x_2|.$$

Логарифм степени:

если $x > 0$, то $\log_a x^r = r \log_a x$;

если $x \neq 0$ и k — четное число, то

$$\log_a x^k = k \log_a |x|.$$

Переход к новому основанию:

если $x > 0$, то $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$;

если $x > 0$, то $\log_a x = \log_{a^k} x^k$.

12. Значения тригонометрических функций некоторых углов

Функция	Аргумент t						
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
$\operatorname{ctg} t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

13. Связь межу градусной (α°) и радианной (α) мерами одного и того же угла

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi}; \ \alpha = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}.$$

14. Формулы приведения

Функция	Аргумент t						
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

15. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}; t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}; t \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1; t \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

16. Формулы сложения и вычитания аргументов

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\ \alpha,\ \beta, \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\boldsymbol{Z};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\ \alpha,\ \beta, \alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\boldsymbol{Z}.$$

17. Формулы двойного аргумента

$$\sin 2t=2\sin t\cos t;$$

$$\cos 2t=\cos^2 t-\sin^2 t;$$

$$\operatorname{tg} 2t=\frac{2\operatorname{tg} t}{1-\operatorname{tg}^2 t}.$$

18. Формулы понижения степени

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2};$$

$$\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}.$$

19. Выражение $\sin t$, $\cos t$ и $\operatorname{tg} t$ через $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$

$$\sin t=\frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}},\ \cos t=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}},$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}.$$

20. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Формула вспомогательного угла:

$$a\cos t + b\sin t = A\sin(t+\alpha),$$

где

$$a = A\sin\alpha,\ B = A\cos\alpha,\ A = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

21. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

22. Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Его решение
$\sin x = a, \lvert a\rvert \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$
$\cos x = a, \lvert a\rvert \le 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\mathrm{tg}\, x = a$	$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$
$\mathrm{ctg} x = a$	$x = \mathrm{arcctg}\ a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Частные случаи

Уравнение	Его решение
$\sin x = 0$	$x = \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

Уравнение	Его решение
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{tg} x = 0$	$x = \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{ctg} x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

23. Некоторые важные неравенства

Неравенство Коши:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \text{ где } x \geq 0, y \geq 0.$$

Неравенство треугольника:

$$|x+a| \leq |x| + |a|.$$

Неравенство для суммы двух взаимно обратных положительных величин:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \text{ где } x > 0.$$

Неравенства, характеризующие множество значений синуса и косинуса:

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1, \ -1 \leq \cos\alpha \leq 1.$$

24. Элементы комбинаторики

Формула числа размещений без повторений из n элементов по k элементов:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\ldots(n-k+1), \text{ где } k \le n.$$

Формула числа размещений с повторениями из n элементов по k элементов:

$$\tilde{A}_n^k = n^k.$$

Формула числа перестановок без повторений из n элементов:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n.$$

Формула числа перестановок из n элементов с повторениями, содержащих k_1 элементов первого типа, k_2 элементов второго типа, ..., k_n элементов n-го типа (где $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = n$):

$$\tilde{P}(k_1 + k_2 + \ldots + k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}.$$

Формула числа сочетаний без повторений из n элементов по k элементов:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\, k!}, \text{ где } k \le n,\ C_n^0 = 1.$$

Формула числа сочетаний с повторениями из n элементов по k элементов:

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}.$$

Формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots$$

$$\ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Формула общего члена разложения бинома Ньютона:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, \text{ где } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

25. Арифметическая прогрессия

Определение арифметической прогрессии:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Формула n-го члена:

$$a_n = a_1 + d\,(n-1).$$

Формулы суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \quad S_n = \frac{2a_1 + d\,(n-1)}{2} \cdot n.$$

Характеристическое свойство:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

26. Геометрическая прогрессия

Определение геометрической прогрессии:

$$b_{n+1} = b_n q, \text{ где } b_1 \neq 0,\ q \neq 0.$$

Формула n-го члена:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Формулы суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}; \quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

Характеристическое свойство:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Формула суммы членов бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

27. Производная

Определение производной:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Таблица производных:

1. $C' = 0.$
2. $(kx + b)' = k.$
3. $(x^r)' = rx^{r-1}.$
4. $(e^x)' = e^x.$

5. $(a^x)' = a^x \ln a$.

6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

8. $(\sin x)' = \cos x$.

9. $(\cos x)' = -\sin x$.

10. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Дифференцирование суммы, произведения и частного:

$(u+v)' = u' + v'$;

$(Cu)' = Cu'$, где C — постоянная;

$(uv)' = u'v + uv'$;

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, где $v(x) \neq 0$.

Дифференцирование сложной функции $y = f(g(x))$:

$$y' = f'(g(x))\, g'(x).$$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$:

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Формула Лагранжа:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Формула для приближенного вычисления значения функции $f(x)$ в точке x:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

28. Первообразная и интеграл

Определение первообразной: функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X, если $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in X$.

Таблица первообразных:

Функция	Первообразная	Функция	Первообразная
$f(x) = k$	$F(x) = kx$	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
$f(x) = x^r$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
$(r \neq -1)$		$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert$	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \operatorname{tg} x$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$F(x) = \arcsin x$
$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$	$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$	$F(x) = \operatorname{arctg} x$

Правила вычисления первообразных:

Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $H(x)$ — первообразная для $h(x)$, то $F(x)+H(x)$ — первообразная для $f(x)+h(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а k — постоянная, то $kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а k и b — постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для $f(kx+b)$.

Интегральная сумма для функции $y=f(x)$ по отрезку $[a, b]$:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right).$$

Интеграл функции $y=f(x)$ от a до b:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Формула Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Правила вычисления интегралов:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx;$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx, \text{ где } k \text{ — постоянная.}$$

Формула для вычисления площади фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и графиками непрерывных на $[a, b]$ функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \le f_1(x)$ на $[a, b]$:

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx.$$

Формула для вычисления площади криволинейной трапеции, т. е. фигуры, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и графиком непрерывной и неотрицательной на $[a, b]$ функции $y = f(x)$:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Формула для вычисления объема тела, расположенного между двумя плоскостями, удаленными от данной плоскости на расстояния a и b $(a < b)$ и такого, что в пересечении этого тела плоскостью, параллельной данной и удаленной от нее на расстояние $x\,(a < x < b)$, образуется сечение, площадь которого выражается непрерывной на $[a,\, b]$ функцией $S\,(x)$:

$$V = \int_a^b S\,(x)\,dx.$$

Формула для вычисления объема тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и графиком непрерывной на $[a,\, b]$ функции $y = f\,(x)$:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

ГЕОМЕТРИЯ

1. Произвольный треугольник

Обозначения:

a, b, c — стороны;

A, B, C — углы, противолежащие сторонам a, b, c;

l_a, l_b, l_c — биссектрисы;

m_a, m_b, m_c — медианы;

h_a, h_b, h_c — высоты;

r — радиус вписанной окружности;

R — радиус описанной окружности;

$p = 0{,}5(a + b + c)$ — полупериметр;

S — площадь.

Сумма углов треугольника:

$$A + B + C = 180°.$$

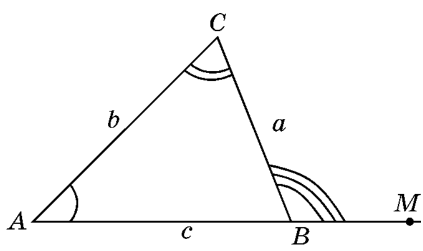


Рис. 311

Внешний угол треугольника (рис. 311) равен сумме двух внутренних углов, с ним не смежных:

$$\angle CBM = \angle A + \angle C.$$

Неравенство треугольника:

$$a < b + c,\ b < a + c,\ c < a + b.$$

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке — центре окружности, вписанной в треугольник (рис. 312).

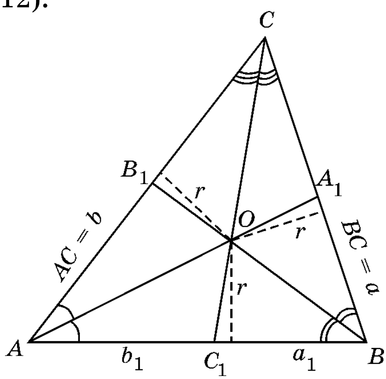


Рис. 312

Биссектриса делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника (рис. 312):

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

Длина биссектрисы:

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}, \quad l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1}.$$

Медианы треугольника пересекаются в одной точке — центре масс треугольника (рис. 313). Эта точка делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины:

$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1} = \frac{CM}{MC_1} = 2:1.$$

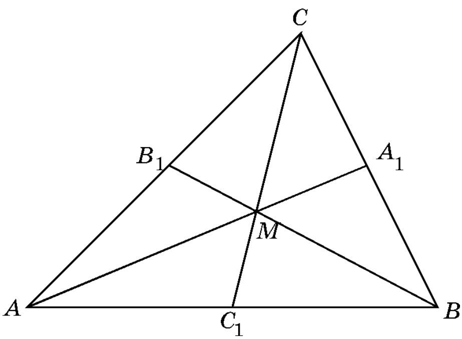


Рис. 313

Длина медианы:

$$m_c = 0{,}5\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

Высоты треугольника пересекаются в одной точке — ортоцентре треугольника (рис. 314).

Длина высоты:

$$h_c = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}.$$

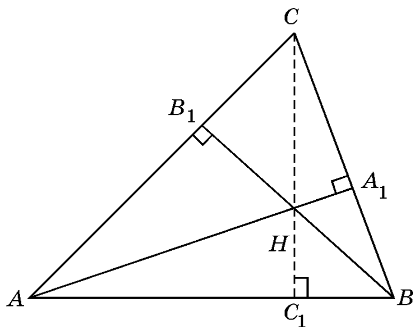


Рис. 314

Связь между сторонами и высотами:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника (рис. 315).

Теорема косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Формулы для площади:

1) $S = 0{,}5ah_a$.

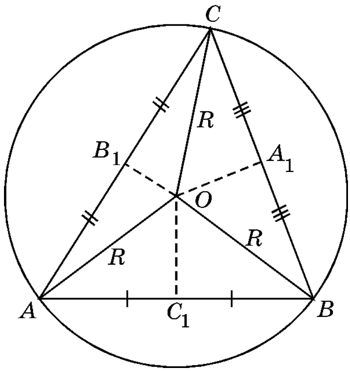


Рис. 315

2) $S = 0{,}5\, bc \sin A$.

3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона).

4) $S = pr$.

5) $S = \dfrac{abc}{4R}$.

6) Если $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$ — вершины треугольника, то

$$S = 0{,}5\,|\Delta|,$$

где Δ — определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$.

7) Площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна половине модуля векторного произведения $\bar{a}$ на $\bar{b}$.

Отношение периметров и площадей подобных треугольников: если $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 316), то

$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} =$$

$$= \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}; \quad \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AB^2}{A_1B_1{}^2}.$$

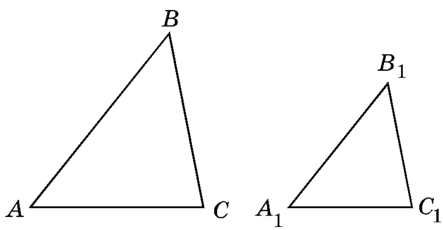


Рис. 316

2. Прямоугольный треугольник

Обозначения (рис 317):

$C = 90°$;

a, b — катеты;

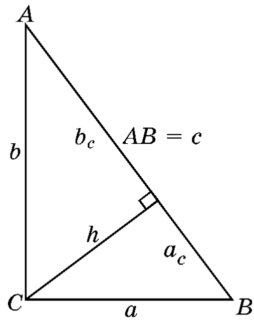


Рис. 317

c — гипотенуза;

h — высота, проведенная из вершины C;

a_c, b_c — длины отрезков, отсекаемых высотой на гипотенузе.

Теорема Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Радиус описанной окружности:

$$R = 0{,}5\,c.$$

Радиус вписанной окружности:

$$r = 0{,}5\,(a + b - c).$$

Связь между a, b, c, a_c, b_c и h:

$$\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c};\ \frac{b_c}{b} = \frac{b}{c};\ \frac{a_c}{h} = \frac{h}{b_c}.$$

Формулы для площади:

$$S = 0{,}5\,ab;\ S = 0{,}5\,ch.$$

3. Правильный треугольник
(*a* — сторона; рис. 318)

Радиус описанной окружности:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

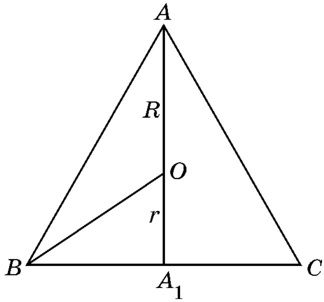


Рис. 318

Радиус вписанной окружности:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Высота:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Формулы для площади:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};\ S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4};\ S = 3\sqrt{3}r^2.$$

4. Произвольный выпуклый четырехугольник

Сумма углов:

$$A + B + C + D = 360°.$$

Площадь:

$$S = 0{,}5\, d_1 d_2 \sin\varphi,$$

где d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними.

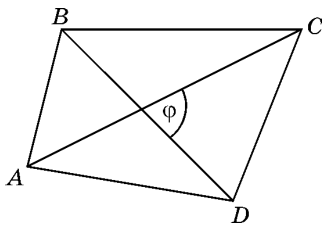


Рис. 319

5. Четырехугольник, вписанный в окружность (рис. 320)

Суммы противоположных углов равны 180°:

$$A + C = B + D = 180°.$$

Произведения отрезков, на которые диагонали разбиваются точкой пересечения, равны:

$$AF \cdot FC = BF \cdot FD.$$

Теорема Птолемея: произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

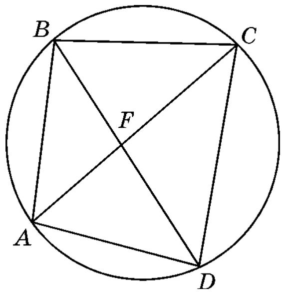


Рис. 320

Площадь:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где a, b, c, d — стороны, $p = 0{,}5(a+b+c+d)$ — полупериметр.

6. Четырехугольник, описанный около окружности (рис. 321)

Суммы длин противоположных сторон равны:

$$AB + CD = BC + AD.$$

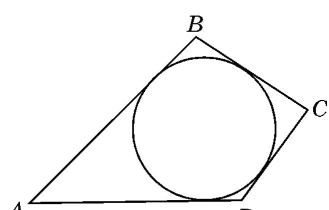


Рис. 321

Площадь:

$$S = pr,$$

где p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности.

7. Параллелограмм

Обозначения:

a, b — стороны;

α, β — углы, прилежащие к одной стороне;

h_a, h_b — высоты;

d_1, d_2 — диагонали;

φ — угол между диагоналями.

Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180° (рис. 322):

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

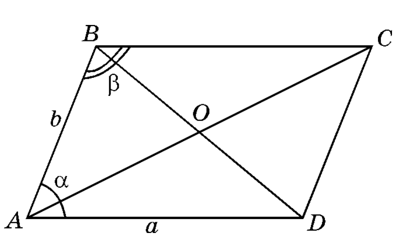


Рис. 322

Диагонали в точке пересечения делятся пополам (рис. 322):

$$AO = OC = 0{,}5d_1, BO = OD = 0{,}5\,d_2.$$

Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\,(a^2 + b^2).$$

Формулы для площади:

1) $S = ah_a = bh_b$ (рис. 323).

2) $S = ab\sin\alpha$ (рис. 322).

3) $S = 0{,}5\,d_1 d_2 \sin\varphi$ (рис. 324).

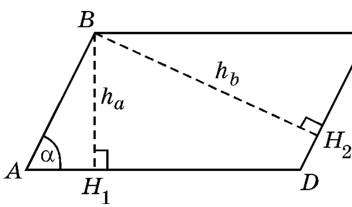
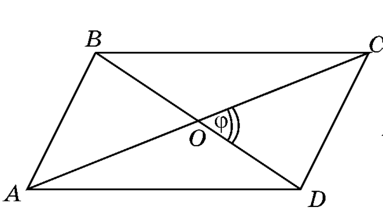


Рис. 323



$AC = d_1$
$BD = d_2$

Рис. 324

4) Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, равен модулю векторного произведения $\overline{a}$ на $\overline{b}$.

8. Прямоугольник (рис. 325)

Диагонали прямоугольника равны: $AC = BD = d$.
Связь между сторонами и диагональю:

$$d^2 = a^2 + b^2 .$$

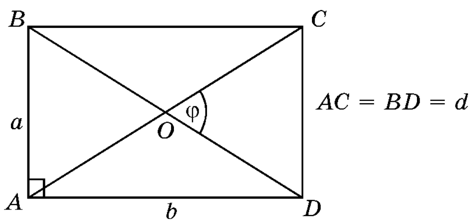


Рис. 325

Формулы для площади:

$$S = ab;\ S = 0{,}5\,d^2 \sin\varphi.$$

9. Ромб (a — сторона; рис. 326)

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны:

$$d_1 \perp d_2.$$

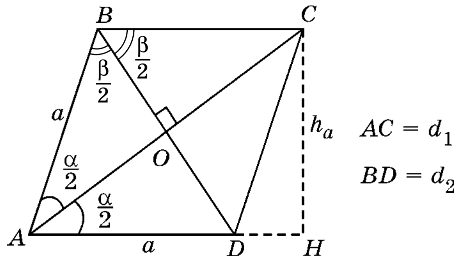


Рис. 326

Диагонали ромба являются биссектрисами его углов:

$$\angle BAO = \angle DAO = \frac{\alpha}{2};$$

$$\angle ABO = \angle CBO = \frac{\beta}{2}.$$

Связь между стороной и диагоналями:

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

Формулы для площади:

1) $S = ah_a$.

2) $S = a^2 \sin \alpha$.

3) $S = 0{,}5\, d_1 d_2$.

10. Квадрат (*a* — сторона; рис. 327)

Диагонали квадрата равны и взаимно перпендикулярны: $d_1 = d_2 = d$, $d_1 \perp d_2$.

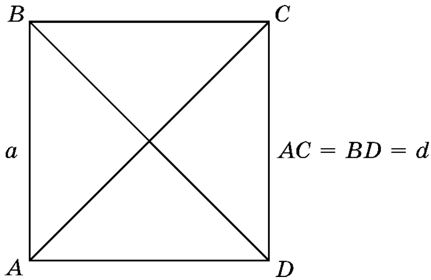


Рис. 327

Связь между стороной и диагональю:

$$d = a\sqrt{2}.$$

Формулы для площади:

$$S = a^2;\ S = 0{,}5\,d^2.$$

11. Трапеция

Обозначения (рис. 328):

a, b — основания;

l — средняя линия;

h — высота;

d_1, d_2 — диагонали;

φ — угол между ними.

Сумма углов, прилежащих к каждой из боковых сторон AB и CD, равна 180°:

$$\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ;\ \angle BCD + \angle ADC = 180^\circ.$$

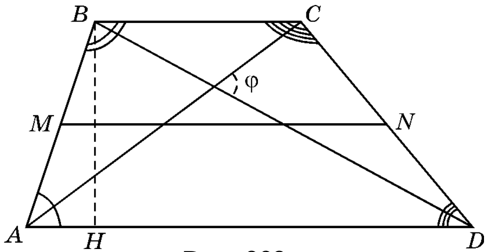


Рис. 328

Средняя линия параллельна основаниям и равна ее полусумме:

$$MN \parallel AD,\ MN \parallel BC,\ l = 0{,}5\,(a + b).$$

Формулы для площади:

1) $S = 0{,}5\,(a + b)\,h$.

2) $S = lh$.

3) $S = 0{,}5\,d_1 d_2 \sin\varphi$.

12. Равнобочная трапеция

Диагонали равнобочной трапеции равны: $AC = BD = d$ (рис. 329).

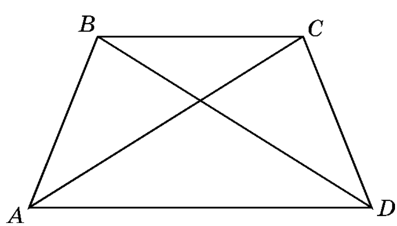


Рис. 329

Около любой равнобочной трапеции можно описать окружность (рис. 330). Эта окружность совпадает с окружностью, описанной около любого треугольника, вершины которого совпадают с вершинами трапеции.

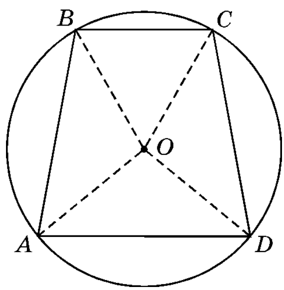


Рис. 330

В равнобочную трапецию можно вписать окружность только при условии, что боковая сторона трапеции равна полусумме ее оснований (рис. 331):

$$m = 0{,}5\,(a + b).$$

Высота такой трапеции равна диаметру вписанной окружности:

$$h = 2r.$$

13. Произвольный выпуклый *n*-угольник

Сумма внутренних углов равна $180^\circ\,(n - 2)$.
Сумма внешних углов равна 360°.

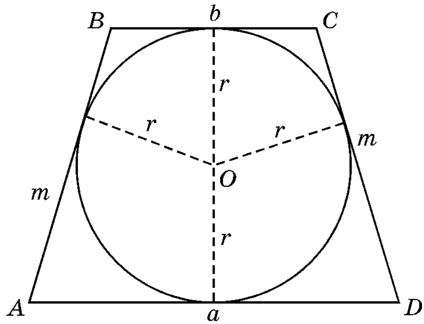


Рис. 331

Площадь выпуклого n-угольника, в который можно вписать окружность:

$$S = pr,$$

где p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности.

14. Правильный n-угольник

Обозначения (рис. 332):

a_n — сторона вписанного n-угольника;

R_n — его радиус (т. е. радиус описанной окружности);

r_n — апофема (т. е. радиус вписанной окружности);

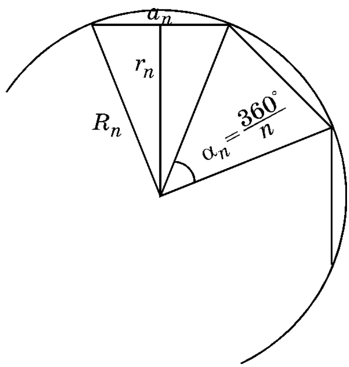


Рис. 332

P_n — периметр;

S_n — площадь.

Выражения a_n и r_n через R_n:

$$a_n = 2R_n \sin\frac{180^\circ}{n},\ r_n = R_n \cos\frac{180^\circ}{n}.$$

В частности, для правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса R:

$$a_3 = R\sqrt{3},\ r_3 = 0{,}5R;$$

для квадрата:

$$a_4 = R\sqrt{2},\ r_4 = 0{,}5R\sqrt{2};$$

для правильного шестиугольника:

$$a_6 = R,\ r_6 = 0{,}5R\sqrt{3}.$$

Выражения R_n и r_n через a_n:

$$R_n = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}, \; r_n = \frac{a_n}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

В частности, для радиуса R окружности, описанной около правильного треугольника, квадрата, правильного шестиугольника:

$$R = \frac{a_3\sqrt{3}}{3}, \; R = \frac{a_4\sqrt{2}}{2}, \; R = a_6;$$

для радиусов окружностей, вписанных в правильный треугольник, квадрат, правильный шестиугольник (апофем этих фигур):

$$r_3 = \frac{a_3\sqrt{3}}{6}, \; r_4 = \frac{a_4}{2}, \; r_6 = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}.$$

Выражения P_n и S_n через R_n:

$$P_n = na_n = 2nR_n \sin\frac{180^\circ}{n};$$

$$S_n = \frac{1}{4}na_n^2 \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n};$$

$$S_n = \frac{1}{2}nR_n^2 \sin\frac{360^\circ}{n}.$$

Выражение b_n (стороны правильного описанного n-угольника) через a_n и R:

$$b_n = \frac{Ra_n}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Выражение a_{2n} (стороны правильного вписанного $2n$-угольника) через a_n и R (формула удвоения):

$$a_{2n} = R\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4R^2}}}.$$

Выражение r_{2n} через a_n и R:

$$r_{2n} = \frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4R^2}}}.$$

15. Углы и пропорциональные отрезки в круге

Центральный угол AOB измеряется дугой AB, на которую он опирается (рис. 333).

Вписанный угол AMB измеряется половиной дуги AB, на которую он опирается (рис. 333).

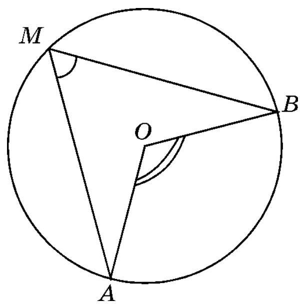


Рис. 333

Угол KMA между касательной и хордой измеряется половиной дуги AnM, лежащей внутри данного угла (рис. 334).

Угол AMC, образованный двумя хордами AB и CD, пересекающимся в точке M внутри круга, измеряется

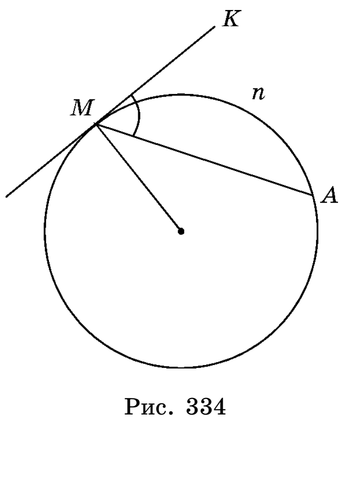


Рис. 334

полусуммой дуг AC и DB, лежащих внутри данного угла и вертикального с ним (рис. 335).

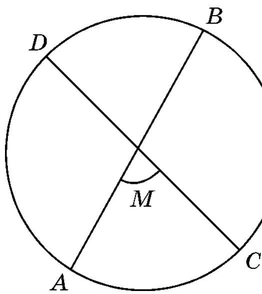


Рис. 335

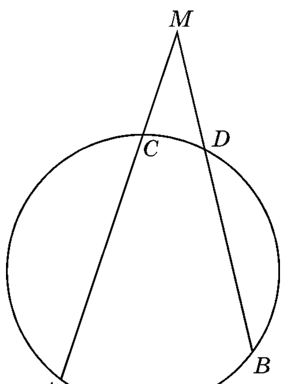


Рис. 336

Угол AMB, образованный двумя секущими MA и MB, проведенными из точки M вне круга, измеряется полуразностью дуг AB и CD, лежащих внутри данного угла (рис. 336).

Если две хорды AB и CD пересекаются в точке M (рис. 335), то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды:

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD.$$

Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть (рис. 337):

$$MC \cdot MB = MK^2.$$

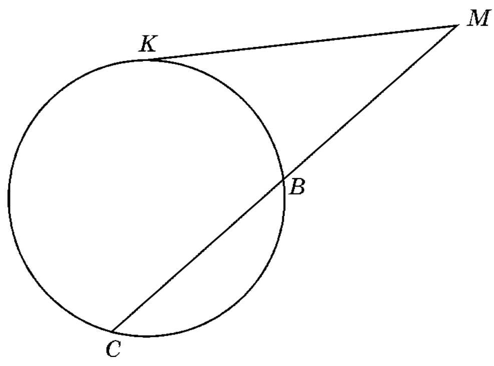


Рис. 337

16. Длина окружности. Площадь круга и его частей

Обозначения (рис. 338):

R — радиус окружности, круга;

D — диаметр;

C — длина окружности;

l — длина дуги AMB окружности;

α°, α — центральный угол в градусной, радианной мере;

S — площадь круга;

$S_{\text{сект}}$ — площадь сектора AOB;

$S_{\text{сегм}}$ — площадь сегмента AMB;

Формулы длины окружности:

$$C = 2\pi R;\ C = \pi D.$$

Формулы длины дуги окружности:

$$l = \frac{\pi R\alpha^\circ}{360^\circ};\ l = R\alpha.$$

Формулы площади круга:

$$S_{\text{круга}} = \pi R^2;\ S_{\text{круга}} = \frac{\pi D^2}{4};\ S_{\text{круга}} = \frac{CR}{2}.$$

Формулы площади сектора:

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2\alpha^\circ}{360^\circ};\ S_{\text{сект}} = \frac{1}{2}R^2\alpha.$$

Формула площади сегмента:

$$S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$$

(эта же формула справедлива и для сегмента ANB, дополняющего сегмент AMB, заштрихованный на рис. 338, до полного круга).

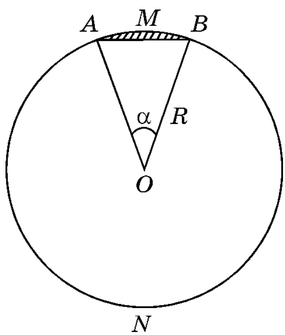


Рис. 338

17. Прямоугольная декартова и полярная системы координат на плоскости

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Координаты середины отрезка с концами $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$:

$$x = 0{,}5(x_1 + x_2),\ y = 0{,}5(y_1 + y_2).$$

Уравнение прямой в общем виде:

$$Ax + By + C = 0,$$

где $n = \{A; B\}$ — вектор нормали к прямой.

Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом k:

$$y = kx + b.$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0; y_0)$ и имеющей заданный угловой коэффициент k:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Уравнение окружности с центром O (0; 0) и радиусом R:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнение окружности с центром C $(a;\ b)$ и радиусом R:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Нахождение декартовых координат точки $M\,(x;\ y)$ по ее известным полярным координатам r,φ (рис. 339):

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$$

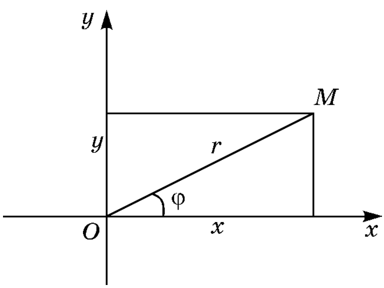


Рис. 339

Нахождение полярных координат точки M $(r;\ \varphi)$ по ее известным декартовым координатам x, y (рис. 339):

$$r=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi=\frac{y}{r}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

18. Прямоугольная декартова система координат в пространстве

Расстояние между двумя точками $M_1\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$:

$$M_1\,M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Координаты середины отрезка с концами $M_1\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$:

$$x = 0{,}5\,(x_1 + x_2 + x_3),\ y = 0{,}5\,(y_1 + y_2 + y_3),$$

$$z = 0{,}5\,(z_1 + z_2 + z_3).$$

Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $\overline{n} = \{A;\ B;\ C\}$ — вектор нормали к плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M\,(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и перпендикулярной вектору $\overline{n} = \{A;\ B;\ C\}$:

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и $M_3\,(x_3;\ y_3;\ z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение сферы с центром $C(a; b; c)$ и радиусом R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

19. Векторы и операции над ними

Координаты вектора с началом $A(x_1; y_1; z_1)$ и концом $B(x_2; y_2; z_2)$:

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}.$$

Длина вектора $\overline{a}\,\{X; Y; Z\}$:

$$|\overline{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Равенство векторов $\overline{a}\,\{X_1; Y_1; Z_1\}$ и $\overline{b}\,\{X_2; Y_2; Z_2\}$:

$$X_1 = X_2;\ Y_1 = Y_2;\ Z_1 = Z_2.$$

Сумма векторов $\overline{a}\,\{X_1; Y_1; Z_1\}$ и $\overline{b}\,\{X_2; Y_2; Z_2\}$:

$$\overline{a} + \overline{b} = \{X_1 + X_2;\ Y_1 + Y_2;\ Z_1 + Z_2\}.$$

В параллелограмме $ABCD$, построенном на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (рис. 340), диагональ $\overline{AC}$, выходящая из их общего начала, равна сумме $\overline{a}+\overline{b}$, а диагональ $\overline{DB}$ равна разности $\overline{a}-\overline{b}$.

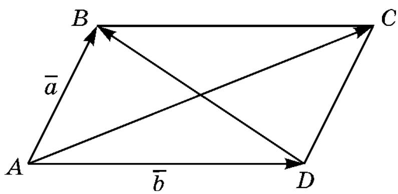


Рис. 340

Свойства операции сложения векторов:

1^0. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ (переместительный закон).

2^0. $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ (сочетательный закон).

Произведение вектора $\overline{a}\{X;\ Y;\ Z\}$ на число λ:

$$\lambda\overline{a}\{X;\ Y;\ Z\}=\overline{b}\{\lambda X;\ \lambda Y;\ \lambda Z\}.$$

Свойства операции умножения вектора на число:

1^0. $(\lambda\mu)\overline{a}=\lambda(\mu\overline{a})$ (сочетательный закон).

2^0. $(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$ (распределительный закон по отношению к числовому множителю).

3^0. $\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$ (распределительный закон по отношению к векторному множителю).

Признак коллинеарности векторов $\overline{a}\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$ и $\overline{b}\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$:

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}.$$

Признак компланарности векторов $\overline{a}\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$, $\overline{b}\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$ и $\overline{c}\{X_3;\ Y_3;\ Z_3\}$:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Разложение вектора $\overline{d}$ по трем некомпланарным векторам $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$:

$$\overline{d}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}+\gamma\overline{c}.$$

Определение скалярного произведения векторов $\overline{a}\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$ и $\overline{b}\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$:

$$\overline{a}\,\overline{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2.$$

Формула для вычисления скалярного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\overline{a}\,\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos(\widehat{\overline{a},\ \overline{b}}).$$

Формула для вычисления косинуса угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\cos(\widehat{\overline{a},\ \overline{b}}) = \frac{\overline{a}\,\overline{b}}{|\overline{a}|\ |\overline{b}|}.$$

Свойства скалярного произведения ($\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — любые векторы, λ — любое число):

1^0. $\overline{a}\,\overline{a} \geq 0$, причем $\overline{a}^2 > 0$, если $\overline{a} \neq 0$.

2^0. $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{b}\,\overline{a}$ (переместительный закон).

3^0. $(\overline{a} + \overline{b})\,\overline{c} = \overline{a}\,\overline{c} + \overline{b}\,\overline{c}$ (распределительный закон).

4^0. $(\lambda\,\overline{a})\,\overline{b} = \lambda\,(\overline{a}\,\overline{b})$ (сочетательный закон).

Условие перпендикулярности векторов $\overline{a}\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$ и $\overline{b}\,\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$:

$$\overline{a}\,\overline{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$$

Определение векторного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: это такой вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$, что:

1) $|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$ (длина вектора $\overline{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$);

2) направление вектора $\bar{c}$ перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3) поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ на наименьший угол виден из конца вектора $\bar{c}$ происходящим против часовой стрелки (рис. 341).

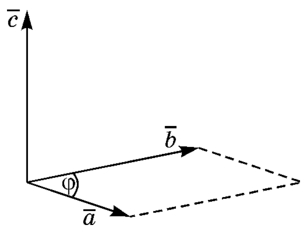


Рис. 341

Формула для вычисления векторного произведения векторов $\bar{a}\,\{X_1; Y_1; Z_1\}$ и $\bar{b}\,\{X_2; Y_2; Z_2\}$:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

Векторные произведения ортов координатных осей:

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k},\ \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i},\ \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j};$$

$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}.$$

Свойства векторного произведения ($\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ — любые векторы, λ — любое число):

1^0. $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$, т. е. при перемене мест сомножителей векторное произведение меняет знак.

2^0. $(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$ (распределительный закон).

3^0. $(\lambda \overline{a}) \times \overline{b} = \lambda (\overline{a} \times \overline{b})$ (сочетательный закон).

Определение смешанного произведения векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \overline{a}\,(\overline{b} \times \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b})\,\overline{c}.$$

Формула для вычисления смешанного произведения векторов $\overline{a}\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$, $\overline{b}\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$ и $\overline{c}\{X_3;\ Y_3;\ Z_3\}$:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения ($\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ — любые векторы, λ — любое число):

1^0. $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\overline{c}\,\overline{a} = \overline{c}\,\overline{a}\overline{b} = -(\overline{b}\overline{a}\overline{c}) = -(\overline{c}\overline{b}\overline{a}) = -(\overline{a}\,\overline{c}\overline{b})$, т. е. смешанное произведение не меняется при круговой перестановке сомножителей и меняет знак при перестановке двух сомножителей.

2^0. $(\overline{a} + \overline{b})\ \overline{c}\ \overline{d} = \overline{a}\ \overline{c}\ \overline{d} + \overline{b}\ \overline{c}\ \overline{d}$ (распределительный закон).

3^0. $(\lambda\,\overline{a})\,\overline{b}\ \overline{c} = \lambda\,(\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c})$ (сочетательный закон относительно скалярного множителя).

20. Призма и произвольный параллелепипед

Обозначения:

l — боковое ребро;

h — высота;

P — периметр основания;

S — площадь основания;

$P_{\text{сеч}}$ — периметр перпендикулярного сечения $A_0B_0C_0D_0$;

$S_{\text{сеч}}$ — площадь перпендикулярного сечения $A_0B_0C_0D_0$;

$S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности;

V — объем.

Объем произвольной призмы (рис. 342):

$$V = Sh;\ V = S_{\text{сеч}}l.$$

Боковая поверхность произвольной призмы (рис. 342):

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{сеч}}l.$$

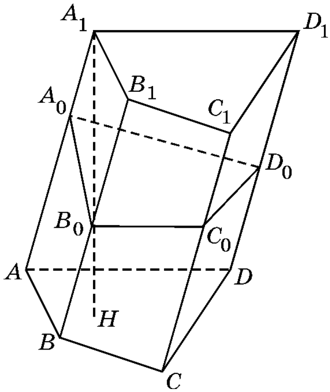


Рис. 342

Боковая поверхность прямой призмы (рис. 343):

$$S_{\text{бок}} = Ph.$$

Те же формулы справедливы и для произвольного параллелепипеда.

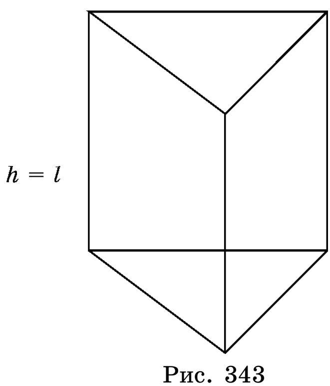


Рис. 343

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ (рис. 344), равен абсолютной величине смешанного произведения этих векторов.

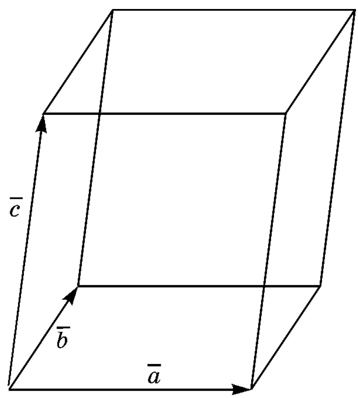


Рис. 344

21. Прямоугольный параллелепипед

Обозначения (рис. 345):

a, b, c — измерения параллелепипеда;

d — его диагональ;

Объем:

$$V = abc.$$

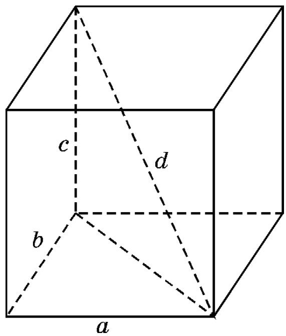


Рис. 345

Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}} = Ph.$$

Связь между диагональю параллелепипеда и его измерениями:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

22. Куб (*a* — ребро)

Объем:

$$V = a^3.$$

Связь между ребром и диагональю:

$$d = a\sqrt{3}.$$

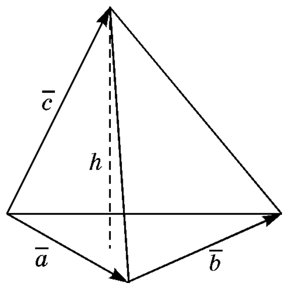


Рис. 346

23. Пирамида

Объем произвольной пирамиды (рис. 346):

$$V = \frac{1}{3} Sh,$$

где S — площадь основания, h — высота пирамиды.

Объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ (рис. 346), равен одной шестой абсолютной величины смешанного произведения этих векторов.

Боковая поверхность правильной пирамиды (рис. 347):

$$S_{\text{бок}} = Pm,$$

где P — периметр основания, m — апофема пирамиды.

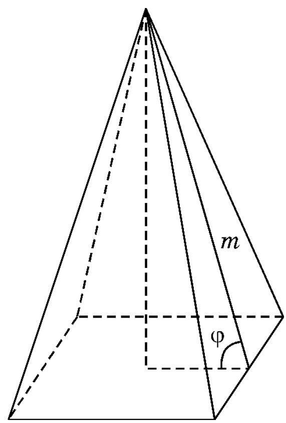


Рис. 347

Если все боковые грани пирамиды или призмы образуют со сторонами основания равные двугранные углы φ (рис. 347), то

$$S_{\text{бок}} = \frac{S}{\cos\varphi}.$$

24. Усеченная пирамида

Объем произвольной усеченной пирамиды (рис. 348):

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right),$$

где h — высота пирамиды, S_1 и S_2 — площади оснований.

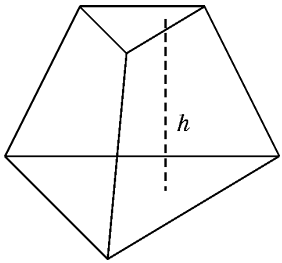


Рис. 348

Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды (рис. 349):

$$S_{\text{бок}} = 0{,}5\,(P_1 + P_2)\,m,$$

где m — апофема, P_1 и P_2 — периметры оснований.

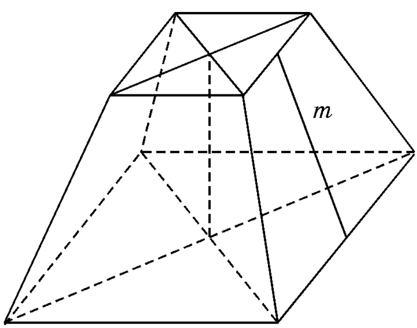


Рис. 349

25. Цилиндр

Обозначения (рис. 350):

R — радиус основания;

h — высота;

$S_{бок}$ — площадь боковой поверхности;

V — объем.

Объем:

$$V = \pi R^2 h.$$

Боковая поверхность:

$$S_{бок} = 2\pi Rh.$$

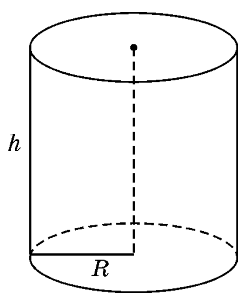


Рис. 350

26. Конус

Обозначения (рис. 351):

R — радиус основания;

h — высота;

l — образующая;

$S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности;

V — объем.

Объем:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Боковая поверхность:

$$S_{\text{бок}} = \pi R l.$$

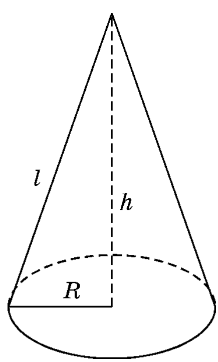


Рис. 351

27. Усеченный конус

Обозначения (рис. 352):

R_1 и R_2 — радиусы оснований;

h — высота;

l — образующая;

$S_{бок}$ — площадь боковой поверхности;

V — объем.

Объем:

$$V = \frac{1}{3}\pi h\,(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2).$$

Боковая поверхность:

$$S_{бок} = \pi\,(R_1 + R_2)l.$$

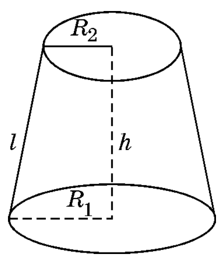


Рис. 352

28. Шар, сфера

Обозначения (рис. 353):

R — радиус шара, сферы;

V — объем шара.

S — площадь сферы.

Объем шара:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Площадь сферы:

$$S = 4\pi R^2.$$

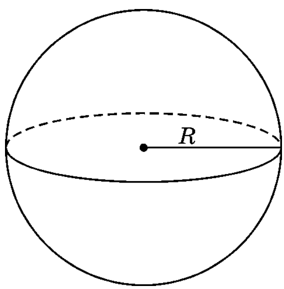


Рис. 353

29. Шаровой сегмент

Обозначения (рис. 354):

R — радиус шара, сферы;

$h = FM$ — высота шарового сегмента AFB;

$V_{\text{сегм}}$ — объем шарового сегмента;

$S_{\text{сегм}}$ — площадь поверхности сферического сегмента.

Объем шарового сегмента:

$$V_{\text{сегм}} = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h).$$

Площадь поверхности сферического сегмента:

$$S_{\text{сегм}} = 2\pi Rh.$$

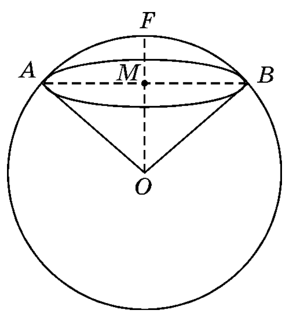


Рис. 354

30. Шаровой сектор и шаровой слой

Обозначения (рис. 355):

R — радиус шара, сферы;

$h = FM$ — высота соответствующего сегмента;

α — угол между осью и образующей конуса;

$H = MN$ — высота шарового слоя;

$V_{\text{сект}}$ — объем шарового сектора OAB;

$S_{\text{слоя}}$ — площадь поверхности шарового слоя, заключенного между плоскостями AMB и DNC.

Объем шарового сектора:

$$V_{\text{сект}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h;$$

$$V_{\text{сект}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Площадь поверхности шарового слоя:

$$S_{\text{слоя}} = 2\pi RH.$$

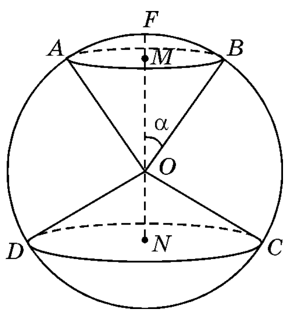


Рис. 355

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$e \approx 2{,}71828$ — основание натуральных логарифмов

$\pi \approx 3{,}14159$ — отношение длины окружности к диаметру

$a = b$ — a равно b

$a \neq b$ — a не равно b

$a \approx b$ — a приближенно равно b

$a < b$ — a меньше b

$a > b$ — a больше b

$a \leq b$ — a меньше или равно b

$a \geq b$ — a больше или равно b

$a \in A$ — a принадлежит множеству A

$a \notin A$ — a не принадлежит множеству A

$B \subset A$ — B является подмножеством A

$A \bigcup B$ — объединение множеств A и B

$A \bigcap B$ – пересечение множеств A и B

$\varnothing$ — пустое множество

$\boldsymbol{N}$ —множество натуральных чисел

$\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел

$\boldsymbol{Q}$ — множество рациональных чисел

$\boldsymbol{I}$ — множество иррациональных чисел

$\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел, числовая прямая

$\boldsymbol{C}$ — множество комплексных чисел

D (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b

K (a, b) — наименьшее общее кратное чисел a и b

$n \,\vdots\, a$ — натуральное число n делится на натуральное число a без остатка

% — процент

Основные обозначения

$M\,(x)$ — точка M на координатной прямой имеет координату x

$M\,(x;\ y)$ — точка M в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости имеет абсциссу x и ординату y

$M\,(x;\ y;\ z)$ — точка M в прямоугольной декартовой системе координат в пространстве имеет абсциссу x, ординату y и аппликату z

$M(r;\varphi)$ — точка M в полярной системе координат имеет полярный радиус r и полярный угол φ

$[a, b]$ — отрезок

(a, b) — интервал

$[a, b)$, $(b, a]$ — полуинтервалы

$[a, +\infty)$, $(-\infty,\ b]$ — лучи

$(a, +\infty)$, $(-\infty, -b)$ — открытые лучи

$(-\infty,\ +\infty)$ — числовая прямая

$|a|$ — модуль (абсолютная величина) действительного числа a

$[a]$ — целая часть числа a

$\{a\}$ — дробная часть числа a

a^n — n-я степень числа a

$\sqrt[n]{a}$ — корень n-й степени из числа a

$z = (a; b) = a + bi$ — алгебраическая форма комплексного числа z

i, где $i^2 = -1$, — мнимая единица

$\operatorname{Re} z$ — действительная часть комплекского числа z

$\operatorname{Im} z$ — мнимая часть комплексного числа z

$|z| = r$ — модуль комплексного числа z

$\arg z = \varphi$, где $-\pi < \varphi \leq \pi$, — главное значение аргумента комплексного числа z

$\overline{z} = a - bi$ — число, сопряженное с комплексным числом z

$\log_a x$, где $a < 0$, $a \neq 1$, — логарифм положительного числа x по основанию a

$\lg x$ — десятичный логарифм числа x

$\ln x$ — натуральный логарифм числа x

$\sin x$ — синус x

$\cos x$ — косинус x

$\operatorname{tg} x$ — тангенс x

$\operatorname{ctg} x$ — котангенс x

$\arcsin x$ — арксинус x

$\arccos x$ — арккосинус x

$\operatorname{arctg} x$ — арктангенс x

$\operatorname{arcctg} x$ — арккотангенс x

$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x) \end{cases}$ — система уравнений

$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x) \end{array}\right.$ — совокупность уравнений

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ — определитель второго порядка

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ — определитель третьего порядка

$n!$ — факториал, произведение последовательных натуральных чисел от 1 до n

A_n^k, где $k \leq n$, — размещения без повторений из n элементов по k элементов

$\tilde{A}_n^k$ — размещения с повторениями из n элементов по k элементов

P_n — перестановки без повторений из n элементов

$\tilde{P}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ — перестановки с повторениями, содержащие k_1 элементов первого типа, k_2 элементов второго типа, ..., k_n элементов n-го типа $(k_1 + k_2 + \ldots + k_n = n)$

C_n^k, где $k \leq n$, — сочетания без повторений из n элементов по k элементов

$\tilde{C}_n^k$ — сочетания с повторениями из n элементов по k элементов

$(a_n) = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — последовательность

$\div\, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — арифметическая прогрессия

∺ $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ — геометрическая прогрессия

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $f(x) \to b$ при $x \to a$ — предел функции $f(x)$ равен b, если x стремится к a

Δx, Δy — приращение аргумента, приращение функции

$y', f'(x)$ — значение производной функции $y = f(x)$ в точке x

$y'', f''(x)$ — значение второй производной функции $y = f(x)$ в точке x

dy — дифференциал функции $y = f(x)$

$y_{\text{наиб}}, y_{\text{наим}}, \max\limits_{[a,b]} f(x), \min\limits_{[a,b]} f(x)$ — наибольшее, наименьшее значения функции на отрезке $[a, b]$

$\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — интеграл функции $f(x)$ от a до b

A — точка A

a, AB — прямая a, прямая AB

α, ABC — плоскость α, плоскость ABC

$||$ — знак параллельности, например $a \,||\, b$, $a \,||\, \alpha$, $\alpha \,||\, \beta$

$\perp$ — знак перпендикулярности, например $a \perp b$, $a \perp \alpha$, $\alpha \perp \beta$

$\angle$ — знак угла, например $\angle ABC$, $\angle(a, b)$

$\cup$ — знак дуги, например $\cup AB$, $\cup PnQ$

$^\circ, ', ''$ — градус, минута, секунда, например $57^\circ 15' 40''$

ΔABC — треугольник ABC

~ — знак подобия, например $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

$\overline{a}$, $\overline{AB}$ — вектор $\overline{a}$, вектор $\overline{AB}$

$|\overline{a}|$, $|\overline{AB}|$ — модуль вектора $|\overline{a}|$, модуль вектора $|\overline{AB}|$

$\overline{a} = \{X;\ Y;\ Z\}$ — координаты вектора $\overline{a}$ равны $X;\ Y;\ Z$

$(\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$ — угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$

$\overline{a} \cdot \overline{b}$, $(\overline{a},\ \overline{b})$ — скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$

$\overline{a} \times \overline{b}$, $[\overline{a},\ \overline{b}]$ — векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$

$\overline{a}\overline{b}\overline{c}$, $(\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c})$ — смешанное произведение векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Б

В

Г

Д

З

И

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Х

Ц

Ч

Ш

Э

СОДЕРЖАНИЕ

АЛГЕБРА

Раздел I. Числа

Раздел III. Функции и графики

Раздел V. **Неравенства**

Раздел VI. **Элементы комбинаторики**

Раздел VII. **Элементы математического анализа**

ГЕОМЕТРИЯ

Раздел VIII.
Основные понятия геометрии

Раздел IX.

Геометрические фигуры на плоскости

Раздел X. Векторы. Прямые и плоскости в пространстве

Справочное издание

Маслова Тамара Николаевна
Суходский Андрей Матвеевич

**СПРАВОЧНИК
ШКОЛЬНИКА ПО МАТЕМАТИКЕ**

5—11 классы

Ответственный редактор *Н. В. Валуева*
Младший редактор *О. А. Фёдорова*
Технический редактор *Е. А. Вишнякова*
Корректор *Н. Е. Жданова*

Оригинал-макет подготовлен *ООО «Бета-Фрейм»*

Подписано в печать 25.10.2007. Формат 84x108 $^1/_{32}$.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 35,28. Тираж 3000 экз. Заказ № .

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — учебная литература

ООО «Издательство Оникс».
127422, Москва, ул. Тимирязевская, д. 38/25.
Почтовый адрес: 117418, Москва, а/я 26.
Отдел реализации: тел. (499) 619-02-20, 610-02-50.
Internet: www.onyx.ru; e-mail: mail@onyx.ru

ООО «Издательство «Мир и Образование».
Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001.
109193, Москва, ул. 5-я Кожуховская, д. 13, стр. 1.
Тел./факс (495) 120-51-47, 129-09-60, 742-43-54.
E-mail: mir-obrazovanie@onyx.ru