UNIDAD TEMATICA No. 1: LOGICA
EJERCICIOS

Fecha de emisión: 05-02-2024 Fecha de entrega: 16-02-2024

Docente: Nathalia B. Almazan Aguirre

I. Proposiciones

a. Determine si cada oración es una proposición. Si la oración es una proposición, escriba su negación. (No se piden los valores de verdad de las oraciones que son proposiciones).

1. 2 + 5 = 19
2. Mesero, ¿serviría las nueces, quiero decir, serviría las nueces a los invitados?
3. Para algún entero positivo n, 19340 = n · 17.
4. Batman fue originalmente creado por Bob Kane y Bill Finger,
5. Cómprame un caramelo.
6. La diferencia de dos primos.
7. Todo entero par mayor que 4 es la suma de dos primos.

b. Puesto que la proposición p es falsa, la proposición q es verdadera y la proposición r es falsa, determine si cada proposición en los ejercicios es falsa o verdadera.

8. $\neg p \vee \neg q$
9. $\neg p \vee \neg(q \wedge r)$
10. $\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$
11. $(p \vee \neg r) \wedge \neg((q \vee r) \vee \neg(r \vee p))$

c. Escriba la tabla de verdad de cada proposición.

12. $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$
13. $\neg(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)$
14. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
15. $\neg(p \wedge q) \vee (\neg q \vee r)$

d. Formule la expresión simbólica en palabras usando:

p: Hoy es lunes. *q: Está lloviendo.* *r: Hace calor*

16. $\neg p \wedge (q \vee r)$
17. $(p \wedge q) \vee \neg(r \vee p)$
18. $\neg(p \wedge q) \vee r$

e. Represente simbólicamente la proposición definiendo:

p: Oíste el concierto de rock de “Flying Pigs”.

q: Oíste el concierto de rock de “Y2K”.

r: Tienes los tímpanos inflamados.

19. Oíste el concierto de rock de “Flying Pigs”, oíste el concierto de rock de “Y2K” y tienes los tímpanos inflamados.
20. Oíste el concierto de rock de “Flying Pigs” o el concierto de rock de “Y2K”, pero no tienes los tímpanos inflamados.
21. No oíste el concierto de rock de “Flying Pigs” y no oíste el concierto de rock de “Y2K”, pero tienes los tímpanos inflamados.
22. No ocurre que: oíste el concierto de rock de “Flying Pigs” o bien oíste el concierto de rock de “Y2K” o no tienes los tímpanos inflamados.

II. Proposiciones condicionales y equivalencias lógicas

f. Restablezca cada proposición en la forma de una proposición condicional.

23. José pasará el examen de matemáticas discretas si estudia duro.
24. Dalma se graduará si tiene créditos por 160 horas al semestre cumplidas.
25. Una condición necesaria para que Carlos compre una computadora es que obtenga $2000.
26. Una condición suficiente para que Alejandra tome el curso de programación es que apruebe matemáticas discretas.
27. Cuando se fabriquen mejores automóviles, Buick los fabricará.
28. El programa es legible sólo si está bien estructurado.

g. Suponiendo que p y r son falsas y que q y s son verdaderas, encuentre el valor de verdad para cada proposición.

29. $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
30. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
31. $\big(s \rightarrow (p \wedge \neg r)\big) \wedge \Big(\big(p \rightarrow (r \vee q)\big) \wedge s\Big)$
32. $\big((p \wedge \neg q) \rightarrow (q \wedge r)\big) \rightarrow (s \vee \neg q)$

h. *Las proposiciones p, q y r; p es verdadera, q es falsa y el estado de r no se conoce por ahora. Diga si cada proposición es verdadera, falsa o tiene un estado desconocido.*

33. $p \rightarrow r$
34. $r \rightarrow q$
35. $(p \wedge r) \leftrightarrow r$
36. $(q \vee r) \leftrightarrow r$

i. *Formule la expresión simbólica en palabras usando:*
p: Hoy es lunes, q: Está lloviendo, r: Hace calor

37. $\neg p \rightarrow (q \vee r)$
38. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow r$
39. $(p \vee q)(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow (r \vee (q \vee p))$
40. $\left(p \vee \left(\neg p \wedge \neg(q \vee r)\right)\right) \rightarrow \left(p \vee \neg(r \vee q)\right)$

j. *Para cada par de proposiciones P y Q, establezca si P ≡ Q o no.*

41. $P = p \rightarrow q, Q = p \leftrightarrow q$
42. $P = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r), Q = p \rightarrow r$
43. $P = (p \rightarrow q) \rightarrow r, Q = p \rightarrow (q \rightarrow r)$
44. $P = \left(s \rightarrow (p \wedge \neg r)\right) \wedge \left(\left(p \rightarrow (r \vee q)\right) \wedge s\right), Q = p \vee t$

III. Cuantificadores

k. *Diga si la afirmación es una función proposicional. Para cada afirmación que sea una función proposicional, dé un dominio de discurso.*

45. $(2n + 1)^2$ es un entero impar.
46. Seleccione un entero entre 1 y 10.
47. Sea x un número real.
48. La película ganó el premio de la Academia como mejor película en 1955.

l. *Sea P(n) la función proposicional "n divide a 77". Escriba cada proposición en los ejercicios en palabras y diga si es verdadera o falsa. El dominio de discurso es el conjunto de enteros positivos.*

49. $P(1)$
50. $P(3)$
51. $\forall n\, P(n)$
52. $\exists n\, P(n)$

m. *Sea P(x) la afirmación "x es un atleta profesional" y sea Q(x) la afirmación "x juega fútbol". El dominio de discurso es el conjunto de todas las personas. Escriba cada proposición en los ejercicios en palabras. Determine el valor de verdad de cada afirmación.*

53. $\forall x\ (P(x)\ \rightarrow\ Q(x))$
54. $\exists x\ \left(P(x) \rightarrow\ Q(x)\right)$
55. $\forall x\ (P(x)\ \wedge\ Q(x))$
56. $\exists x\ \left(P(x) \wedge\ Q(x)\right)$

n. *Determine el valor de verdad de cada afirmación. El dominio de discurso es el conjunto de números reales. Justifique sus respuestas.*

57. $\forall x(x\ >\ 1\ \rightarrow\ x^2\ >\ x)$
58. $\exists x(x\ >\ 1\ \rightarrow\ x^2\ >\ x)$
59. $\forall x\left(x\ >\ 1\ \rightarrow \frac{x}{x^2+1}\right)\ <\ 1/3)$
60. $\exists x\left(x\ >\ 1\ \rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3}\right)$

o. *Sea T(x, y) la función proposicional "x es más alto que y, y x ≠ y". El dominio de discurso consiste en tres estudiantes: Gerardo, que mide 5 pies 11 pulgadas; Ernesto, que mide 5 pies 6 pulgadas, y Martín que mide 6 pies. Escriba cada proposición en palabras y diga si ésta es verdadera o falsa.*

61. $\forall x \forall y\ T\ (x, y)$
62. $\exists x \forall y\ T\ (x, y)$
63. $\forall x \exists y\ T\ (x, y)$
64. $\exists x \exists y\ T\ (x, y)$

p. *Determine el valor de verdad de cada afirmación en los ejercicios. El dominio de discurso es el conjunto de números reales. Justifique sus respuestas.*

65. $\forall x \forall y((x\ <\ y)\ \rightarrow\ (x^2\ <\ y^2))$

66. $\forall x \exists y((x\ <\ y)\ \rightarrow\ (x^2\ <\ y^2))$

67. $\exists x \forall y((x\ <\ y)\ \rightarrow\ (x^2\ <\ y^2))$

68. $\exists x \exists y\left((x\ <\ y) \rightarrow\ (x^2\ <\ y^2)\right)$

IV. Demostraciones e inducción matemáticas

q. Resuelva los problemas de demostración

69. Pruebe que para todos los enteros m y n, si m y n son pares, entonces m + n es par.
70. Demuestre, por contradicción, que si se distribuyen 40 monedas en nueve bolsas de manera que cada bolsa contenga al menos una moneda, al menos dos bolsas contienen el mismo número de monedas.
71. Utilice la prueba por casos para demostrar que $|xy| = |x||y|$ para todos los números reales x y y.
72. Use la prueba por casos para demostrar que $\text{máx}\{x, y\} + \text{mín}\{x, y\} = x + y$ para todos los números reales x e y.

r. Formule con símbolos los argumentos y determine si cada uno es válido. Sean
p: Estudio duro. *q: Obtengo 10.* *r: Me hago rico.*

73. Si estudio duro, entonces obtengo 10.
    Estudio duro.
    ∴ obtengo 10.
74. Si estudio duro, entonces obtengo 10.
    Si no me hago rico, entonces no obtengo 10.
    ∴ Me hago rico.
75. Estudio duro si y sólo si me hago rico.
    Me hago rico
    ∴ estudio duro.
76. Si estudio duro o me hago rico, entonces obtengo 10.
    Obtengo 10.
    ∴ si no estudio duro, entonces me hago rico.

s. Dé un argumento usando las reglas de inferencia para demostrar que la conclusión se deriva de las hipótesis.

77. Hipótesis: Si Julio puede cantar o Daniel puede jugar, entonces compraré el CD. Julio puede cantar. Compraré el reproductor de CD.
    Conclusión: Compraré el CD y el reproductor de CD.
78. Hipótesis: Todos en clase tienen una calculadora que grafica. Todos los que tienen calculadora que grafica entienden las funciones trigonométricas.
    Conclusión: Rafael, que está en la clase, entiende las funciones trigonométricas.

79. Hipótesis: Ken, un miembro de los Titanes, puede batear lejos. Todos los que pueden batear lejos pueden ganar mucho dinero.

    Conclusión: Algún miembro de los Titanes puede ganar mucho dinero.

80. Hipótesis: Todos en la clase de matemáticas discretas aman las demostraciones. Alguien en la clase de matemáticas discretas nunca ha tomado cálculo.

    Conclusión: Alguien que ama las demostraciones nunca ha tomado cálculo.

t. Use la inducción para probar las afirmaciones.

81. $7n - 1$ es divisible entre 6, para toda $n \geq 1$.
82. n líneas rectas en el plano lo dividen en $(n^2 + n + 2)/2$ regiones. Suponga que no hay dos líneas paralelas y que no hay tres líneas con un punto en común.
83. Demuestre que las regiones del ejercicio anterior pueden colorearse de rojo y verde de modo que no haya dos regiones que comparten una orilla que sean del mismo color.