ممان درجه دوم آماری سیگنال یک طرفه با مدلاسیون پیوسته فاز

دانشکده مهدسی برق
دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

پروژه درس مخابرات پیشرفته (مقاله‌ی شماره ۹)

۲۸ شهریور ۱۴۰۰

داشتن ممان دوم آماری برای ساخت برخی از انواع دیمدلاتورها به مانند دیملاتور MSEضرروی است. اما استفاده از ممان‌های دوم متغییر با زمان امکان عملیاتی کردن این نوع دیمدلاتور کننده‌ها را منتفی می‌کند. در این مقاله ابتدا یک سیگنال مدلاسیون شده GMSK[۱] را به صورت لوران نمایش می‌دهیم که این نمایش بر اساس شبه سیمبول‌ها و پالس‌های لوران است. سپس به ارائه تایع خودهمبستگی و تابع همبستگی متقابل این شبه سیمبول‌ها می‌پردازیم در پایان نیز با استفاده از موارد ذکر شده تابع خودهمبستگی و همبستگی متقابل سیگنال مدلاسیون شده در باند پایه را بدست می آوریم[۱].

۱ نمایش لوران سیگنال

سیگنال‌های مدلاسیون پیوسته فاز در باند پایه به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$x(t) = exp\left[j2\pi h\sum_{n=0}^{\infty} a_n g(t-nT)\right] \qquad (۱)$$

در رابطه ۱ پارامتر h شاخص مدلاسیون است که در این جا برای GMSK برابر $h=\frac{1}{2}$ در نظر می‌گیریم، همچنین $g(t)$ پاسخ فرکانسی است و a_n نیز سیمبول‌های مدلاسیون هستند که برای مدلاسیون با M سیمبول به صورت $a_n = \{\pm1, \pm3, \ldots, \pm(M-1)\}$

[1] Gaussian Minimum Shift Keying

است. این سیگنال باند پایه را می‌توان به صورت یک سیگنال باند پایه مدلاسیون PAM که یک رابطه‌ی خطی از سیمبول‌ها دارد با استفاده از شبه سیمبول‌ها و پالس‌های لوران نمایش داد که در رابطه ۲ ارائه شده است.

$$x(t) = \sum_{q=0}^{Q-1} \sum_{n=0}^{\infty} s_{q,n} \cdot c_q(t - nT) \tag{۲}$$

پارامتر Q از رابطه $Q = 2^{L-1}$ [۲] بدست می آید در اینجا ما $L = 4$ قرار می‌دهیم پس برای q مقادیر $q \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ را داریم. شبه سیمبول‌ها را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی ۳ بدست آورد. در این رابطه $B_{q,l}$ پایه مبنای دو (باینری) برای نمایش q ها هستند. که از رابطه‌ی $q = \sum_{l=1}^{L-1} 2^{l-1} B_{q,l}$ می‌توان آن‌ها را بدست آورد. به این نکته در حل این معادلات باید توجه نمود که $B_{q,l} \in \{0,1\}$. برای مدلاسیون مورد نظر ما به صورت زیر است:

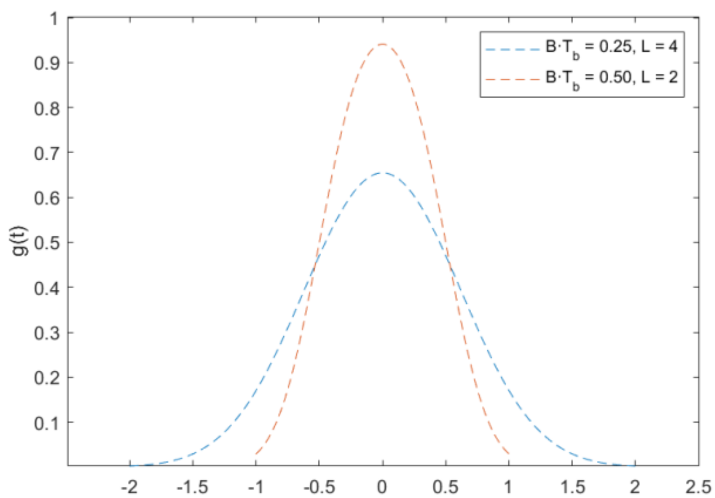
$$B_{q,l} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$s_{q,n} = exp\left[j\pi h \left(\sum_{l=0}^{n} a_l - \sum_{l=0}^{min(n,L-1)} a_{n-l} B_{q,l} \right) \right] \tag{۳}$$

اما برای بیان یک سیگنال مدلاسیون پیوسته فاز به صورت لوران علاوه بر شبه سیمبول‌ها به پالس‌های لوران نیز نیاز است. پالس‌های لوران برای مدلاسیون‌های مختلف فاز پیوسته متفاوت هستند. برای مدلاسیون فاز پیوسته GMSK این پالس‌ها را در مقاله‌ی [۲] توسط لوران بدست آمده است. اما در اینجا به طور دقیق‌تر به بررسی آن می‌پردازیم.

برای بدست آوردن پالس‌های لوران در ابتدا پاسخ فرکانسی مدلاسیون GMSK را با رابطه‌ی ۴ بدست می آوریم. در این فرمول BT_b یکی از پارامترهای GMSK است که رفتار طیفی مدلاسیون را کنترل می‌کند اگر این مقدار کوچک باشد طیف متراکم‌تری را خواهیم داشت اما از طرفی ISI نیز افزایش می‌یابد پس مقدار خطا نیز افزایش خواهد یافت.

$$g(t) = \frac{1}{2T_b}\left[Q\left(\frac{2\pi BT_b}{\sqrt{\ln 2}} \cdot \left(\frac{t}{T_b} - 1\right)\right) - Q\left(\frac{2\pi BT_b}{\sqrt{\ln 2}} \cdot \left(\frac{t}{T_b} + 1\right)\right)\right] \tag{۴}$$



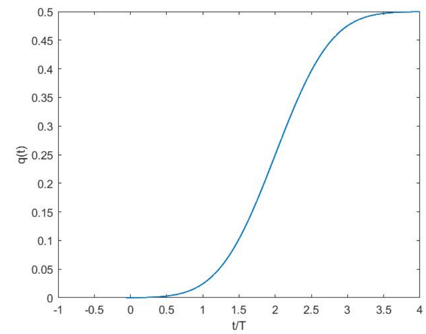
شکل ۱: پاسخ فرکانسی پاسخ فرکانسی برای پارامترهای متفاوت

شکل ۱ پاسخ فرکانسی مدلاسیون GMSK را با دو نوع پارامتر آورده شده است. اما برای رسیدن به پالس‌های لوران چند مرحله دیگر باقی مانده است، در مرحله‌ی بعد باید پاسخ فاز را بدست آوریم برای این کار نیاز است که صرفا از پاسخ فرکانسی انتگرال بگیریم.

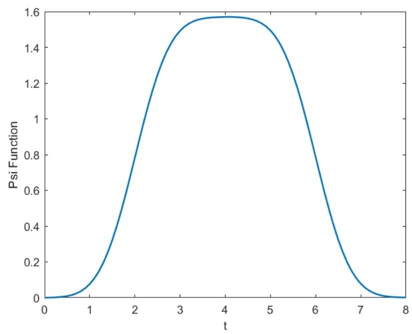
$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x)dx \tag{۵}$$

در شکل ۲ پاسخ فاز مدلاسیون نشان داده شده است. در مرحله‌ی بعدی باید از Psi function استفاده کنیم. LT_b را ۴ در نظر می‌گیریم.

$$\psi(n) = \begin{cases} \pi q(t) & 0 \leq t \leq LT_b \\ \frac{\pi}{2}\left[1 - 2q(t - LT_b)\right] & LT_b \leq t \end{cases} \tag{۶}$$



شکل ۲: پاسخ فاز مدلاسیون



شکل ۳: خروجی تابع Psi

از شکل‌های ۲ و ۳ مشخص است که تابع Psi به نوعی انعکاس تابع پاسخ فاز است نسبت به LT که با ضریب π اسکیل شده است. پس از محاسبه‌ی تابع Psi نوبت به معرفی تابع $S_n(t)$ می‌رسد که چیزی بیشتر از اعمال یک تابع سینوسی به یک تابع Psi که به اندازه‌های معیین nT_b انتقال زمانی می‌یابد نیست.

$$S_n(t) = \sin\left(\Psi(t + nT_b)\right) \tag{۷}$$

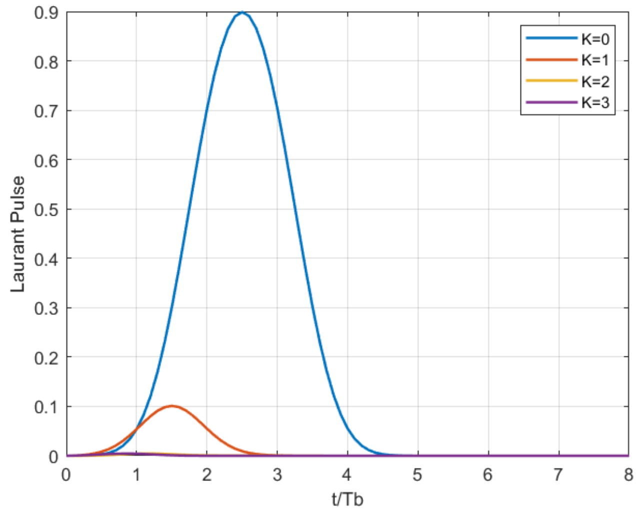
پس از رابطه‌ی ۷ به مرحله‌ی نهایی و معرفی پالس‌های لوران می‌رسیم که به صورت رابطه‌ی زیر تعریف می‌شوند:

$$C_k(t) = S_0(t)\prod_{i=1}^{L-1} S_{i+LB_{k,i}(t)}, \qquad 0 \le K \le 2^{L-1}-1, \quad 0 \le t \le T_{bK} \tag{۸}$$

$$T_{bK} = T_{b,x_{i=1,2,\cdot,L-1}min}\left[L(2 - B_{K,i}) - i\right] \tag{۹}$$

برای L=4 پالس‌های لوران به صورت زیر هستند:

$C_0(t) = S_0(t)S_1(t)S_2(t)S_3(t)$	$0 \le t \le 5T_b$
$C_1(t) = S_0(t)S_2(t)S_3(t)S_5(t)$	$0 \le t \le 4T_b$
$C_2(t) = S_0(t)S_1(t)S_5(t)S_6(t)$	$0 \le t \le 3T_b$
$C_3(t) = S_0(t)S_3(t)S_5(t)S_6(t)$	$0 \le t \le 2T_b$
$C_4(t) = S_0(t)S_1(t)S_2(t)S_7(t)$	$0 \le t \le T_b$
$C_5(t) = S_0(t)S_2(t)S_5(t)S_7(t)$	$0 \le t \le T_b$
$C_6(t) = S_0(t)S_1(t)S_6(t)S_7(t)$	$0 \le t \le T_b$
$C_7(t) = S_0(t)S_5(t)S_6(t)S_7(t)$	$0 \le t \le T_b$



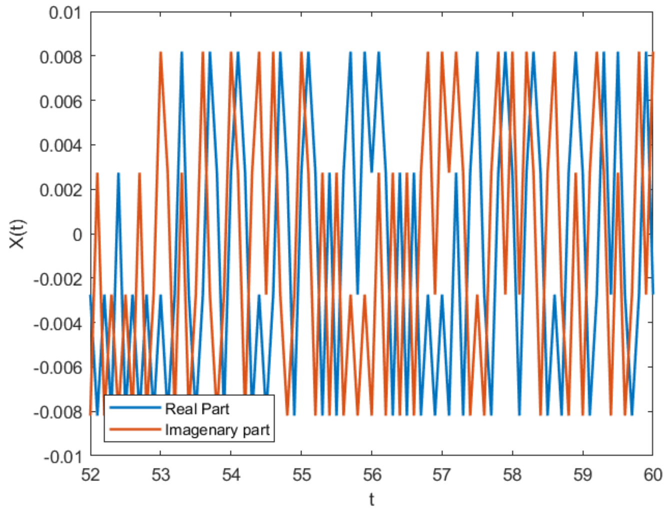
شکل ۴: ۴ پالس اول لوران

بیشترین انرژی در پالس‌های لوران در پالس‌های شماره ۰و۱ هستند و با افزایش شماره پالس‌های انرژی آن کوچک و کوچک‌تر خواهند شد پس برای نمایش سیگنال مدلاسیون شده در باند پایه تنها از دو پالس ۰و۱ استفاده خواهیم کرد. در شکل ۴ هم مشخص است که دو پالس اولیه لوران بیشترین انرژی را دارند.

حال نوبت نمایش سیگنال مدلاسیون شده با GMSK باند پایه با استفاده از پالس‌های لوران است. برای این مدلاسیون شبه سیمبول‌ها برای تعداد محدودی از سیمبول‌ها در جدول زیر آمده است.

سیمبول و شبه سیمبول | n	۶۱	۴۸	۳۵	۲۷	۲۰
a_n	-۵	۱	۳	۳	۷
$S_{0,n}$	i	-۱	$-i$	i	-۱
$S_{1,n}$	-۱	i	-۱	۱	i

در شکل ۵ سیگنال باند پایه برای زمان ۵۲ تا ۶۰ ثانیه نمایش داده‌شده است که در آن قسمت حقیقی و موهومی جدا مشخص شده اند. طول دوره‌ی هر سیمبول ۱ است.



شکل ۵: سیگنال نمایش داده شده با پالس‌های لوران در باند پایه

۲ ACF و CCF برای شبه سیمبول‌ها

۱.۲ ACF

برای محاسبه‌ی ACF [2] شبه سیمبول‌ها از رابطه‌ی ۱۰ استفاده می‌کنیم. که در این رابطه Δ_{q_1,q_2} نیز خود از رابطه‌ی ۱۲ و ۱۱ بدست می آید که برای مدلاسیون مدنظر ما L برابر ۴ است.

$$R_{s_{q1},s_{q2}}(m) = [cos(\pi h)]^{\Delta_{q_1,1_2}(m)} \tag{۱۰}$$

$$\Delta_{q_1,q_2}(m) =\mid m \mid + \sum_{k=1}^{L-1}(B_{q1,k}+B_{q2,k}) - 2\sum_{k\geq 1}^{\substack{k\leq L-1\\ k\leq -m-1}} B_{q1,k} - 2\sum_{k\geq 1}^{\substack{k\leq L-1\\ k\leq m-1}} B_{q2,k} - 2\sum_{\substack{k\geq 1\\ k\geq 1-m}}^{\substack{k\leq L-1\\ k\leq L-1-m}} B_{q1,k}\cdot B_{q2,k+m} \tag{۱۱}$$

$$\Delta_{q_1,q_2}(m) = \sum_{k=1}^{L-1}(B_{q1,k}-B_{q2,k}) \qquad \mid m \mid\geq L \tag{۱۲}$$

[2] Autocorrelation Function

با توجه به اینکه ما در مدلاسیون انتخاب شده h را برابر با $\frac{1}{2}$ در نظر می‌گیریم در رابطه‌ی ۱۰ ، $cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ پس تابع ACF همواره برابر صفر خواهد شد، مگر اینکه توان آن نیز صفر شود تا با توجه به رابطه‌ی $0^0 = 1$ آن مقدار یک داشته باشد. با توجه به رابطه‌ی ۱۱ و۱۲ برای اینکه مقدار Δ_{q_1,q_2} برابر صفر باشد در ابتدا باید عبارت داخل قدرمطلق برابر صفر باشد، سپس سراغ ۴ عبارت باقی مانده می‌رویم. در دو عبارت زیر

$$\sum_{k\geq 1}^{\substack{k\leq L-1\\ k\leq -m-1}} B_{q1,k} - 2\sum_{k\geq 1}^{\substack{k\leq L-1\\ k\leq m-1}} B_{q2,k} \tag{۱۳}$$

به ازای m=0 حد بالای مجموع از حد پایین آن کوچک می‌شود پس حاصل این دو مجموع برابر صفر خواهد شد. در پالس اول لوران $B_0 = [0,0,0,0]$ است پس عبارت‌های دیگر رابطه نیز برابر صفر خواهد شد. پس به ازای $m = 0$ و $q1 = 0$ و $q2 = 0$ عبارت $\Delta_{0,0}(0)$ برابر صفر خواهد شد. برای پالس دوم لوران نیز که $B_1 = [0,1,0,0]$ دو عبارت در رابطه‌ی ۱۳ به دلایل ذکر شده صفر می‌شود. اما رابطه‌ی ۱۴ و ۱۵ دارای مقادیر هستند، اما این مقادیر دارای مقدار قرینه هستند پس به طور مجموع حاصل برابر صفر خواهد شد. پس برای $\Delta_{1,1}(0) = 0$ است.

$$\sum_{k=1}^{L-1} (B_{q1,k} + B_{q2,k}) \tag{۱۴}$$

$$-2\sum_{\substack{k\geq 1\\ k\geq 1-m}}^{\substack{k\leq L-1\\ k\leq L-1-m}} B_{q1,k}\cdot B_{q2,k+m} \tag{۱۵}$$

اما در $\Delta_{q_1,1_2}(0)$ اگر $q_1 \neq q_2$ برابر صفر نخواهد شد، پس تابع ACF همواره برابر صفر می‌شود. پس برای تابع ACF رابطه‌ی ۱۶ را داریم.

$$R_{s_{q1},s_{q2}}(m) = \delta(m)\cdot\delta(q_1 - q_2) \tag{۱۶}$$

۲.۲ CCF

برای محاسبه‌ی CCF [۳] شبه سیمبول‌ها نیز از رابطه‌ی ۱۷ استفاده می‌کنیم. برای مدلاسیون GMSK با شاخص مدلاسیون برابر با ۰.۵، $h = \frac{1}{2}$ رابطه‌ی ۱۷ به مانند قسمت قبل و محاسبه‌ی ACF به فرم ساده‌تری تبدیل می‌شود.

$$R^{+}_{s_{q1},s_{q2*}}(m) = \prod_{l=0}^{m-1} \cos\left[\pi h\left(1 - B_{q1,l}\right)\right] \prod_{l=0}^{-m-1} \cos\left[\pi h\left(1 - B_{q2,l}\right)\right] \times \prod_{l=(m)^+}^{L+m-1-(m)^+} \cos\left[\pi h\left(2 - B_{q1,l} - B_{q2,l-m}\right)\right] \times \prod_{l=L-m}^{L-1} \cos\left[\pi h\left(2 - B_{q2,l}\right)\right] \prod_{l=L+m}^{L-1} \cos\left[\pi h\left(2 - B_{q1,l}\right)\right] \times \left[cos(2h\pi)\right]^{-L+1+(m)^+} \quad (۱۷)$$

با توجه به دو عبارت خط اول رابطه‌ی۱۷ مشخص است که به ازای هر $k \in \mathcal{Z} \quad h = \frac{1}{2} + k$ آن را می‌توان به فرم ساده‌تری نوشت که در آن:

$$\prod_{l=0}^{m-1} \cos\left[\pi h\left(1 - B_{q1,l}\right)\right] \prod_{l=0}^{-m-1} \cos\left[\pi h\left(1 - B_{q2,l}\right)\right] = \prod_{l=0}^{m-1} B_{q1,l} \prod_{l=0}^{-m-1} B_{q2,l} \quad (۱۸)$$

با توجه به اینکه $B_{q,0} = 0$ برای هر $q \in \{0, 1, \ldots, Q-1\}$ رابطه‌ی ۱۷ برای همه‌ی $m \neq 0$ برابر با صفر است. عبارت خط دوم رابطه‌ی ۱۷ را نیز به ازای هر $k \in \mathcal{Z} \quad h = \frac{1}{2} + k$ می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\prod_{l=(m)^+}^{L+m-1-(m)^+} \cos\left[\pi h\left(2 - B_{q1,l} - B_{q2,l-m}\right)\right] = \prod_{l=0}^{L-1} \left(B_{q1,l} + B_{q2,l} - 1\right) \quad (۱۹)$$

با توجه به این نکته که به ازای هر $l \in \{0, 1, \ldots, L-1\}$ که در آن $B_{q1,l} \neq B_{q2,l}$ حاصل ضرب ۱۹ با توجه به اینکه مقدار رابطه‌ی ۱۷ باید مثبت باشد بی معنی خواهد بود. مطابق آنچه گفته شد رابطه‌ی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$\forall q1, q2 \in \{0, 1, \ldots, Q-1\} : q1 \neq q2 \Rightarrow \prod_{l=0}^{L-1} \left(B_{q1,l} + B_{q2,l} - 1\right) = 0 \quad (۲۰)$$

[3] Cross Correlation Function

ترم خط آخر رابطه‌ی ۱۷ باتوجه به $h=\frac{1}{2}$ همواره برابر با یک خواهد بود به هر توانی که برسد نیز این مقدار ثابت است. اما حاصل دو عبارت خط سوم، با توجه به موارد گفته شده در بالا برای رابطه‌ی ۱۷ به ازای هر مقدار غیر از $m=0$ رابطه‌ی ۱۷ برابر صفر خواهد بود. این دو عبارت نیز به ازای $m=0$ حد پایین عبارت PI از حد بالای آن بیشتر خواهد شد، در این شرایط این دو عبارت برابر یک خواهند شد. در رابطه‌ی ۲۱ مفهوم گفته شده ارائه شده است.

$$\prod_{l=a}^{b} f(l) = 1 \quad if \quad a \geq b \tag{۲۱}$$

پس برای CCF نیز به فرمولی شبیه به ACF می‌رسیم:

$$R^{+}_{s_{q1},s_{q2^*}}(m) = \delta(m)\cdot\delta(q_1-q_2) \tag{۲۲}$$

۳ ACF و CCF برای سیگنال

در این قسمت با توجه به روابط موجود در مقاله و نتایجی در قسمت ۱.۲ و ۲.۲ بدست آوردیم. CCF و ACF را برای سیگنال باند پایه بدست می آوریم.

۱.۳ ACF

مقدار ACF از رابطه‌ی ۲۳ بدست می‌آید. با جایگزینی رابطه‌ی ۱۶ در رابطه‌ی ۲۳ به جای $R_{s_{q1},s_{q2}}(m)$ به رابطه‌ی ۲۴ می‌رسیم.

$$R^{\frac{k}{T}}_{x,x}(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{q1,q2=0}^{Q-1}\sum_{-\infty}^{\infty} R_{s_{q1},s_{q2}}(m)P_{q1,q2}\left(\frac{k}{T},\tau-mT\right) \tag{۲۳}$$

$$R^{\frac{k}{T}}_{x,x}(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{q=0}^{Q-1} P_{q,q}\left(\frac{k}{T},\tau\right) \tag{۲۴}$$

برای شبیه‌سازی عددی استفاده از دو پالس اول لوران کافی است، زیرا همانطور که بیان شد بیشتر انرژی سیگنال در این دو پالس است. با توجه به این مورد به رابطه‌ی زیر برای محاسبه‌ی ACF می‌رسیم:

$$R^{\frac{k}{T}}_{x,x}(\tau) = \frac{1}{T}\left(P_{0,0}\left(\frac{k}{T},\tau\right)+P_{1,1}\left(\frac{k}{T},\tau\right)\right) \tag{۲۵}$$

در رابطه‌ی ۲۵ برای محاسبه $P_{0,0}\left(\frac{k}{T},\tau\right)$ و $P_{1,1}\left(\frac{k}{T},\tau\right)$ از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$P_{q1,q2}(f,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} c_{q1}(t)c_{q2}(t-\tau)e^{-j2\pi ft}dt \tag{۲۶}$$

۲.۳ CCF

دراین قسمت نیز روندی به مانند بخش ۱.۳ را دنبال می‌کنیم. از رابطه‌ی ۲۷ می‌توان به CCF رسید.

$$R_{x,x}^{\frac{k}{2T}}(\tau) = \frac{1}{2T} \sum_{q1,q2=0}^{Q-1} \sum_{-\infty}^{\infty} R^{+}_{s_{q1},s_{q2*}}(m) G_{q1,q2}\left(\frac{k}{2T}, \tau - mT\right) \tag{۲۷}$$

با جایگذاری رابطه‌ی ۲۱ در رابطه‌ی ۲۷ و استفاده از دو پالس لوران به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

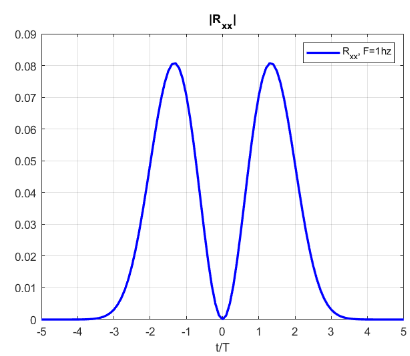
$$R_{x,x}^{\frac{k}{2T}}(\tau) = \frac{1}{2T}\left(G_{0,0}\left(\frac{k}{T}, \tau\right) + G_{1,1}\left(\frac{k}{T}, \tau\right)\right) \tag{۲۸}$$

در رابطه‌ی ۲۸ توابع $G_{0,0}\left(\frac{k}{T}, \tau\right)$ و $G_{1,1}\left(\frac{k}{T}, \tau\right)$ را از رابطه‌ی زیر بدست می آوریم:

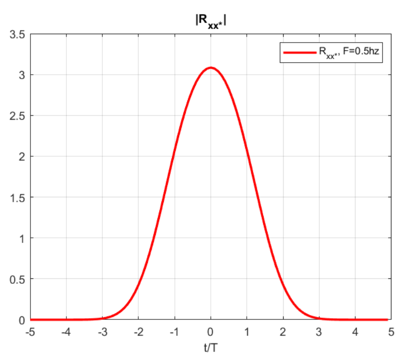
$$G_{q1,q2}\left(\frac{k}{2T}, \tau - mT\right) = \begin{cases} 2P_{q1,q2}\left(\frac{k}{2T}, \tau - mT\right) & k \quad odd \\ 0 & k \quad even \end{cases} \tag{۲۹}$$

۳.۳ شبیه‌سازی عددی

با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل، نتایج عددی رابطه‌ی ۲۸ و ۲۵ را درشکل ۷ و ۶ می‌توان مشاهده نمود.

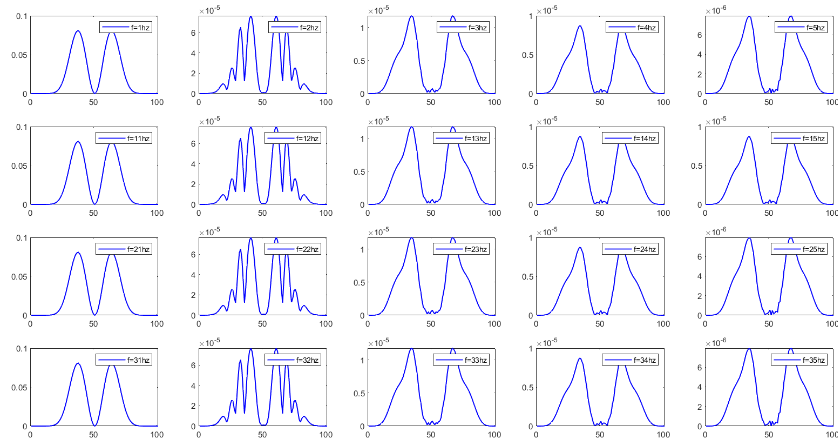


شکل ۶: ACF با فرکانس ۱هرتز



شکل ۷: CCF با فرکانس ۰.۵ هرتز

نتایج ارائه شده در شکل ۶ و ۷ به صورت دوره‌ای به ازای فرکانس‌های مختلف تکرار می‌شوند.



شکل ۸: ACF به ازای فرکانس‌های مختلف

در شکل ۸ قابل مشاهده است که ACF به ازای فرکانس‌های مختلف تکرار می‌شود. CCF نیز همچین رفتاری را نشان می‌دهد.

مراجع

[1] D. Darsena, G. Gelli, I. Iudice, and F. Verde, “Second-order statistics of one-sided cpm signals,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 24, no. 10, pp. 1512–1516, 2017.

[2] P. Laurent, “Exact and approximate construction of digital phase modulations by superposition of amplitude modulated pulses (amp),” *IEEE transactions on communications*, vol. 34, no. 2, pp. 150–160, 1986.