恰定方程组指系数矩阵秩与其阶数相同，且与增广矩阵秩相同的方程组. 它有且仅有一个解向量.

它的一般形式是

$$Ax = b$$

我们需要通过某种手段解出符合上述条件的x.

Cramer法则

我们将上述列向量b替换A中的第i个列向量，把产生的新矩阵记作A_i，那么解向量的第i项：

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)} \tag{2.1}$$

式(2.1)被称为Cramer法则. 它要求系数矩阵A是满秩的.

证明

对于满秩的系数矩阵A，我们可以有如下推导

$$Ax = b \tag{2.2-1}$$

$$x = A^{-1}b \tag{2.2-2}$$

由伴随矩阵的定义：

$$x = \frac{A^*b}{det(A)} \tag{2.2}$$

而由矩阵运算法则，解向量x的第i个分量可以描述为：

$$x_i = \sum_{j=0}^{n} A_{ij}^* b_j \tag{2.3-1}$$

而A_{ij}^*是a_{ji}(请注意i和j的顺序)的代数余子式.

故由行列式的Laplace展开运算，不难得到

$$x_i = \sum_{j=0}^{n} A_{ij}^* b_j = A_i \tag{2.3}$$

■

复杂度

一个n阶行列式具有$n!$个Laplace展开项，每一个展开项由n项相乘，故计算单个n阶行列式需要$n!(n-1)$次乘法运算. 而对于n阶系数矩阵，Cramer法则要求计算$(n+1)$个矩阵. 故最终的计算复杂度为$(n+1)!(n-1)$，过大，不可接受.

是什么深层次的原因导致了Cramer法则具有如此的计算复杂度呢?

Gauss消元法

Gauss消元法的核心任务是，对于增广矩阵$[A,\ b] \in \mathbb{R}^n$，执行n次消元，第i次消元通过基本矩阵变换将a_{ii}下方的所有元素归零.

简单Gauss消元法

数学语言描述：

算法2.1:

对于$A = [A,\ b] \in \mathbb{R}^n$的第1至$(n-1)$行向量$A_i (i < n)$，重复执行下述步骤：

$for\ j = i+1,\ j <= n$，令

$$[A_j, b_j] \leftarrow [A_j, b_j] - \frac{a_{ji}}{a_{ii}}[A_i, b_i] \tag{2.4}$$

我们不需要对最后一列元素进行消元，因此使用了“第1至$(n-1)$行”的提法. 经过这样的消元，系数矩阵化为了上三角矩阵，可以立即解出x_n，从而逐个回代求解出解向量. 最终的解公式太过于啰嗦丑陋，且推导难度不大，故不在此重复.

■

复杂度分析

根据上述算法，对于第i次执行来讲，赋值表达式(2.4)中首先执行了1次$\frac{a_{ji}}{a_{ii}}$，而行向量中共有$(n-i+1)$个非零元素，故每次执行赋值表达式(2.4)均要求$(n-i+2)$次乘法运算. 对于每一个行向量i，赋值表达式(2.4)均执行$(n-i)$次，故Gauss消元法的复杂度可以表述为：

$$\sum_{i=1}^{n}(n-1)(n-1+2) = \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$$

失效情况

我们在之前提到了，实际计算中应尽量避免小数除大数，而上述的算法实际上无法避免这种情况，可能在某些矩阵的解决过程中会有某一极小的数作主元的情况发生. 故为了避免这样的问题，我们提出了如下的改进算法：

(列)主元素法

(列)主元素法在算法2.1执行过程中，每面对一个新的i值，它都会遍历矩阵的第i列，将拥有绝对值最大的第i列元素的行向量替换至第i行. 这样的算法附加一个$O(n)$开销，但可以很大程度上保证算法的数值稳定.

全主元素法

继续改进，在在算法2.1执行过程中，每面对一个新的i值，它都会遍历整个矩阵，将拥有绝对值最大的元素的行向量替换至第i行，列向量替换至第i列，同时记录这个列变换，便于修正解向量的顺序. 这样的算法附加一个$O(n^2)$开销，但可以极大程度上保证算法的数值稳定，是求解中小型稠密恰定方程组的最优方法之一.

在不少应用场景中，系数矩阵A是保持不变的，而方程右值b来源于输入值，是时刻变化的. 因此在这样的情境下，使用简单Gauss消元法及其衍生方法就会产生复用性低的问题：面对每一个新的b，我们都需要重新执行一遍完全一样的Gauss消元步骤，这是愚蠢的. 故我们试图找到某一种方式来记录Gauss消元法的步骤，我们可以将步骤记录在某种数据结构中，但这种方式太过于随意，也太过于工程化，故难以与理论的误差分析等兼容，故我们提出了结构化描述Gauss消元步骤的方式，这种方式将实践的具体情况祓除，将上述的"记录"抽象为理论.

分解法

用基本初等矩阵刻画线性变换

在高等代数中我们知道，任何一个基本矩阵变换均可以被一个基本初等矩阵刻画. 假使我们有基本初等矩阵$L \in \mathbb{R}^n$，矩阵$A \in \mathbb{R}^n$，那么LA代表对A执行一系列初等行变换，而AL代表对A执行一系列初等列变换.

在上述的情况下，L对A执行的变换操作相当于将单位矩阵E变换为L所需的行或列操作.

例2.1 设矩阵
$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求$LA$和$AL$.

解答：从单位矩阵E变换为L，若是行变换，需“将第二行的1倍加到第三行上”；若是列变换，需执行“将第三列的1倍加到第二列上”. 故LA可以视为“将A的第二行的1倍加到第三行上”，故

$$LA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

同理，AL可以视为“将A的第三列的1倍加到第二列上”，故

$$AL = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Doolittle分解

我们在之后的讨论中，为了方便，将彻底不考虑增广矩阵，只考虑系数矩阵.

因此，我们可以通过一个基本初等矩阵L，将上述对系数矩阵A执行的一系列消元法结构化地描述. 根据算法2.1，面对行向量A_i，我们执行的操作可以刻画为：

$$A \leftarrow L_i A$$

其中：

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & -l_{i+1,\,i} & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & -l_{i+2,\,i} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -l_{n,i} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

其中，$l_{k,i} = \frac{a_{k,i}}{ai,i}$

因此，算法2.1的一系列操作可以记作：

$$A \leftarrow L_{n-1}L_{n-2}...L_1 A \tag{2.5'}$$

用新的符号重写上式以避免在下述推导中出现歧义：

$$U = L_{n-1}L_{n-2}...L_1 A \tag{2.5}$$

左乘移项:

$$L_1^{-1}L_2^{-1}...L_{n-1}^{-1}U = A \tag{2.6}$$

而上述的各个L_i有着很好的运算性质(实际上，与线性变换的性质息息相关)：

在$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & -l_{i+1,\,i} & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & -l_{i+2,\,i} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -l_{n,i} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$时，$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & l_{i+1,\,i} & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & l_{i+2,\,i} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & l_{n,i} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$

且在$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & -l_{i+1,\,i} & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & -l_{i+2,\,i} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -l_{n,\,i} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$,$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & -l_{i+2,i+1} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & -l_{n,i+1} & ... & 1 \end{pmatrix}$

时，有

$$L_1L_2=L=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&0&\dots&0\\0&1&\dots&0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1&0&\dots&0\\0&0&\dots&-l_{i+1,\,i}&1&\dots&0\\0&0&\dots&-l_{i+2,\,i}&-l_{i+2,i+1}&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&-l_{n,i}&-l_{n,i+1}&\dots&1\end{pmatrix}$$

故我们可以根据上述的运算性质，将式(2.6)的所有L_i项合并为一个L项：

$$LU=A \tag{2.7}$$

其中：

$$L=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&0&\dots&0\\l_{2,\,1}&1&\dots&0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\l_{3,\,1}&l_{3,\,2}&\dots&1&0&\dots&0\\l_{4,\,1}&l_{4,\,2}&\dots&l_{i+1,\,i}&1&\dots&0\\l_{5,\,1}&l_{5,\,2}&\dots&l_{i+2,\,i}&l_{i+2,i+1}&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\l_{n,\,1}&l_{n,\,2}&\dots&l_{n,i}&l_{n,i+1}&\dots&1\end{pmatrix}$$

是一个单位下三角矩阵. 而Gauss消元的结果U是一个上三角矩阵，故我们可以藉由Gauss消元的原理，将矩阵A分解为一个单位下三角矩阵和一个一般上三角矩阵的积. 这种分解被称为Doolittle分解.

有效条件

正如我们在所有工程学、自然科学和形式科学中所作的工作一样，在提出一个新的工具之后，我们需要关注一个问题：在什么情况下，这种工具能够正常发挥作用?

我们之前提到，Doolittle分解是使用基本初等矩阵来记录Gauss消元的步骤，因此Gauss消元与Doolittle分解理应是等价的. 因此，适用Gauss消元的矩阵也理应适用Doolittle分解.

定理2.1：设$A\in\mathbb{R}^n$，若A的1至$(n-1)$阶顺序主子式A_i均非零，则矩阵A存在唯一的Doolittle分解.

这条定理是直观的：在执行消元时，我们需要一个非零的主元a_{ii}来执行消元操作. 而易证明，经过先前的消元操作之后，主元a_{ii}非零当且仅当主子式矩阵A_i是满秩的. 分析的证明难度不大，请见讲义.

我们应当注意到，定理2.1中的条件(1至$(n-1)$阶顺序主子式A_i均非零)弱于方程可解条件(系数矩阵A满秩). 这一差距的来源在于，我们在执行消元的过程中，不需要对最后一列元素执行消元操作，因此，最后一个主元a_{nn}是否非零并不重要. 这表明，可以执行Doolittle分解是矩阵可解的必要非充分条件. 这也表示着，Doolittle分解已将消元法从解方程的实际情景中彻底地抽象了出来.

LC的计算方法

至此，我们提出了Doolittle分解的来源、分析定义和有效条件，是时候来讨论其具体的计算和应用方式了.

考察Doolittle分解的定义式:

$$LU = A \tag{2.7}$$

其中，L是一个单位下三角矩阵，U是一个上三角矩阵. 故将上式表示如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & ... & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ l_{n,1} & l_{n,2} & l_{n,3} & ... & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & ... & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & ... & u_{2,n} \\ 0 & 0 & u_{3,3} & ... & u_{3,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & u_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & ... & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & u_{3,3} & ... & a_{3,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & ... & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

由矩阵的乘法法则：

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj} \tag{2.9}$$

根据L和U矩阵中1和0的分布，我们将式(2.9)的计算简化(实际上，简化之后的形式变得非常丑陋)

$$\begin{cases} a_{ij} = u_{ij},\ i = 1 \\ a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} + u_{ij},\ j \leqslant i, i > 1 \\ a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj},\ j < i, i > 1 \end{cases} \tag{2.10}$$

由此可以反解出

$$\begin{cases} u_{1j} = a_{1j} \\ u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj},\ j \leqslant i, i > 1 \\ l_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}},\ j < i, i > 1 \end{cases} \tag{2.11}$$

实际的计算顺序可以简单描述为"逐层计算，先行后列". 实际的计算步骤见讲义，看上去吓人但难度偏低(张宇纸老虎.gif)，按照上述公式实际操作一遍即可学会.

在解方程中应用Doolittle分解

假设我们通过上述繁杂而无趣的计算方法求出了系数矩阵A的Doolittle分解：

$$LU = A \tag{2.7}$$

将其回代到方程组$Ax = b$中：

$$LUx = b$$

将向量Ux表示为y，有

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

相当于解两个已经过消元的恰定(如果系数矩阵A是满秩的)方程组.

至于课本中描述的紧凑格式解方程组，可以认为是一种类似于小学数学"列竖式计算"的内容，重要性偏低.

而所谓追赶法解三对角方程，即是上述L和U矩阵中多出了很多个0，在式(2.11)中多代入几个0即可. 不是很理解为什么还要将其单列一节.

开销分析

由于基本原理相同，Doolittle分解法与Gauss消元法具有相同的运算量，但Doolittle分解法有着复用性的优势.

Cholesky分解

在实践中，有相当一部分线性求解问题应用到了正定二次型的系数矩阵，而正定二次型具有更优的性质，可能可以简化求解运算. 因此我们有必要针对正定二次型来提出一种新的算法.

正定二次型

若一个矩阵满足$A = A^T$，则将其称为对称矩阵，而术语“二次型”常被用于提及一个对称矩阵.

当一个二次型A满足以下四个等价条件之一:

1. $\forall x \neq 0$， $x^T Ax > 0$
2. $\forall A$的特征值$\lambda, \lambda > 0$
3. A的所有顺序主子式均大于0
4. $C \in \mathbb{R}^n, A = C^T C$

则A被称为正定二次型. 上述四个条件均为命题"A是正定二次型"的充分必要条件

平方根法

由上述性质4：$C \in \mathbb{R}^n, A = C^T C$，我们知道，一个正定二次型可以被分解为一个实矩阵和其转置的积.

定理2.2: 若A属$n \times n$正定二次型，则存在唯一的可逆下三角矩阵C，使得

$$A = CC^T \tag{2.12}$$

其中，C的对角元素均为正实数.

证明:

由定理2.1，存在$LU = A$，其中L是下三角单位矩阵，U为上三角矩阵. 我们将U的对角线元素抄到矩阵D中，即记矩阵$D = diag(u_{11}, u_{22}, ..., u_{nn})$，再记矩阵$P = D^{-1}U$，则$A = LDP$. 请注意，**此时的$P$之对角元素全部为1**. 又$A$属二次型，$D$属对角矩阵，故:

$$LDP = A = A^T = P^T D^T L^T = P^T D L^T$$

而，定理2.1指出，同一个矩阵的Doolittle分解是唯一的. 因此不难得到$L = P^T$，即

$$A = LDP = P^T DP \tag{2.13}$$

接下来，我们试图将对角矩阵D拆分为形如$F^T F$的形式. 但这要求着F也为对角矩阵，且D的对角线元素值为F相应对角线元素值的平方，这就要求D的对角线元素均为正. 因此证明：

由正定性质：任取一非零列向量$x \in \mathbb{R}^{1\times n}$，有

$$x^T Ax = x^T P^T DPx > 0$$

这种形式表示：D也是一个正定二次型，而D是一个对角阵，对角阵的对角元素就是它的特征值. 因此D的对角线元素为正.

故$D = F^T F, F = diag(\sqrt{u_{ii}})$. 即

$$A = P^T DP = P^T F^T FP = (FP)^T FP = CC^T$$

易知FP是上三角矩阵，故$C = (FP)^T$是一个下三角矩阵.

■

唯一性的证明是容易的，请见讲义.

计算方法

Cholesky分解的计算原理与Doolittle分解一致，均是应用矩阵乘法法则. 直接把结果贴在此处.

$$\begin{cases} c_{kk} = (a_{kk} - \sum\limits_{j=1}^{k-1} c_{kj}^2)^{1/2} \\ c_{ik} = (a_{ik} - \sum\limits_{j=1}^{k-1} c_{ij}c_{kj})^{1/2}, i > k \end{cases} \tag{2.11}$$

完成Cholesky分解后的解方程步骤与Doolittle分解一致.

容易得知，Cholesky分解应用了对称性，故计算复杂度为Gauss消元法的一半，为$O(n^3/6)$.

但是，Cholesky分解法调用了平方运算，可能会导致运算时间的延长.

改进的平方根法

在Cholesky分解的证明过程中，我们提到：

$$A = LDP = LDL^T \tag{2.13}$$

其中，L是单位下三角矩阵，D为对角矩阵.

因此我们可以将矩阵A作LDL^T分解以避免平方根运算.

计算方法

改进的平方根法在求矩阵L和D的过程中采用了与Doolittle分解完全一致的方式：首先将LD组合为一个新的矩阵U处理，再通过与Doolittle分解完全一致的计算方式得到如下的计算式：

$$\begin{cases} d_k = a_{kk} - \sum\limits_{k=1}^{k-1} l_{kj}^2 d_j \\ l_{ij} = (a_{ik} - \sum\limits_{k=1}^{k-1} l_{ij} d_j l_{kj})/d_k,\ k \leqslant i \end{cases} \tag{2.14}$$

如果对式子的形式有着充分的观察力，会发现式(2.14)与(2.11)有着完全一致的形式(2.11的第二条由于对称性被简化掉了).

这样的运算式尚未把正定二次型的性质充分发挥，故提出了一个使用辅助量$u_{ik}\ SSsS = l_{ik}d_k$(实际上就是将LD的积U中的元素显式地记录了下来)的计算式，见课本.

使用改进的平方根法解方程的步骤与上述两方法稍有出入：

$$Ax = b$$

$$LDL^T x = b$$

$$Ly = b, L^T x = D^{-1} b$$

针对矩阵的误差分析

直观地，误差分析首先要求我们能够确定且统一地描述误差(即测定值与实际值之间的"距离")，而单靠矩阵显然做不到这一点，因此我们借用了范数这一工具.

度量方法：范数

范数实际上是实分析中的一条重要概念，是长度概念的推广，我们在此将其简化描述.

假设有一线性空间$\mathbb{D}$，存在某一函数$||\cdot||$将C映射至非负实数空间$\mathbb{R}^*$，且这个函数满足：

1. $||x|| = 0$当且仅当$x = 0$(正定性)
2. $\forall x \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{R}, ||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$(绝对齐次性)
3. $\forall x, y \in \mathbb{D}, ||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$(三角不等式)

则这一函数被称为$\mathbb{D}$上的一个**范数**，二元体$(\mathbb{D}, ||\cdot||)$被称为一个赋范线性空间或Banach空间.

一句话描述：**范数是某种距离的刻画**.

我们称具有如下性质的范数是等价的：

在一线性空间$\mathbb{D}$上的两个范数$||\cdot||_1$和$||\cdot||_2$，如$\forall x \in \mathbb{D}, \exists M, m \in \mathbb{R}, M > m > 0$，有：

$$m||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant M||x||_2$$

则称范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$等价.

这种等价性给出了一种很好的性质：等价范数之间只差一个常数倍，因此，想要得到向量的某种性质，无论用哪种范数来估计，都可以获得相同的结果.

向量范数

针对于$1 \times n$向量空间的常用范数有：

1. 1-范数：$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$
2. 2-范数：$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
3. ∞-范数：$\|x\|_\infty = max\ x_i$

所有的向量范数均是等价的(证明请参见任一实分析教材，如陈建功《实函数论》)

矩阵范数

一般来讲，在矩阵空间上的某一函数$\|\cdot\|$想要被称之为范数，还需要附加一个相容性条件：

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$$

诱导范数

若$\|x\|$属一$1 \times n$向量空间上的向量范数，A是一$n \times n$矩阵，则

$$\|A\|_m = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

则$\|A\|_m$是一矩阵范数，称为诱导范数或算子范数.

证明属实分析内容，略.

由上述向量范数可以诱导出矩阵范数：

1. 1-范数：最大的列总和
2. 2-范数(谱范数)：矩阵的最大奇异值之平方根
3. ∞-范数：最大的行总和

所有的矩阵范数均是等价的

矩阵的误差定义

提出了范数工具，我们即可定义矩阵的误差：

记测量值为x^*，真实值为x，则$\|x - x^*\|$为向量的绝对误差，$\frac{\|x-x^*\|}{\|x^*\|}$为向量的绝对误差.

记测量值为A^*，真实值为A，则$\|A - A^*\|$为矩阵的绝对误差，$\frac{\|A-A^*\|}{\|A^*\|}$为矩阵的绝对误差.

方程组的条件数

在某些情况下，方程组$Ax = b$中，若在右端b施加一小扰动δb，其解x会获得一个相当大的扰动δx，这种方程组被称为病态的.

为了定量刻画方程组的病态程度，我们讨论上述情况：

$$A(x + \delta x) = b + \delta b \tag{2.15}$$

试图得到其解的相对变化$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$与右值的相对变化$\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$的相关关系，从而找出其病态的根源：

由(2.15)得到$A\delta x = \delta b$，而A是可逆矩阵，故：

$$\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \leqslant \|A^{-1}\|\|\delta b\|$$

又$\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$，得到

$$\|x\| \geqslant \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

故：

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\|\delta b\|}{\frac{\|b\|}{\|AS\|}} = \frac{\|A^{-1}\|\|A\|\|\delta b\|}{\|b\|}$$

故我们发现$\|A^{-1}\|\|A\|$控制着这种扰动的大小，这个量被称为条件数，描述为$cond(A)$. 直观地，条件数的大小与所用范数有关.

性质

条件数有如下性质：

1. 任意方阵的条件数大于1
2. $\forall \alpha \neq 0 \in \mathbb{R}, cond(\alpha A) = cond(A)$
3. 正交矩阵的2-范数条件数为1

在如下情况下，方阵的条件数会变得很大：

1. 有两行/列向量非常相近时(这种问题通常被称为多重共线性问题)
2. 有某一主元有着较小的绝对值时
3. 各行/列向量元素的数量级差距较大时

2021.10.18
Hautbois