2015 ~ 2016 学年春季学期《微积分 3》试卷

一. 单项选择题(5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1. 下列级数中条件收敛的是(　　　).

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\sin\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$　　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$

C. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln n}$　　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n^n}{n!}$

2. 设 $0<a_n<\dfrac{1}{n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，则下列级数中肯定收敛的是(　　　).

A. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$　　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$　　　C. $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_n}{\ln n}$　　　D. $\sum_{n=2}^{\infty}a_n^2\ln n$

3. 已知

$$f(x)=\begin{cases}\pi-x, & 0\le x\le \pi,\\ 0, & -\pi\le x<0.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $x=0$ 处收敛于(　　).

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　　B. π　　　C. $-\dfrac{\pi}{2}$　　　D. $-\pi$

4. 微分方程 $y'=2xy+x^3$ 是(　　　).

A. 齐次方程　　B. 线性非齐次方程　　C. 变量可分离方程　　D. 全微分方程

5. 若方程 $y'+p(x)y=0$ 的一个特解为 $y=\cos 2x$，则该方程满足初值条件 $y(0)=2$ 的特解为(　　　).

A. $\cos 2x+2$　　　B. $\cos 2x+1$　　　C. $2\cos x$　　　D. $2\cos 2x$

二. 填空题(5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

6. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^{2n}$ 在点 $x=2$ 处条件收敛，则其收敛域为_____.

7. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}$ 的收敛半径为______.

8. 幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n\ln n}+\dfrac{1}{2^n}\right)x^n$ 的收敛域为________.

9. 过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$且满足关系式$y'\arcsin x+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$的曲线方程为______.

10. 设$y_1=3+x^2$, $y_2=3+x^2+\mathrm{e}^{-x}$是某二阶常系数非齐次线性微分方程的两个特解, 且相应齐次方程的一个解为$y_3=x$，则该二阶常系数非齐次线性微分方程的通解为_______.

三. 计算题(5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

11. (6 分)判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)$的敛散性. 若收敛, 则说明是绝对收敛还是条件收敛.

12. (6 分)判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n\cdot n!}{n^n}$ $(a>0)$的敛散性.

13. (6 分) 将函数$f(x)=\frac{x-1}{4-x}$在$x_0=1$处展开成幂级数, 并求$f^{(2016)}(1)$.

14. (6 分)求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$在开区间$(-1,1)$内的和函数$S(x)$.

15. (6 分)设

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1,\\ 0, & 1\le x\le 2.\end{cases}$$

试将$f(x)$展开为余弦级数.

四. 计算题(4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分)

16. (6 分)求微分方程$xy'+y-2\sqrt{xy}=0$的满足初值条件$y\big|_{x=4}=9$的特解.

17. (6 分)求微分方程$y''+\frac{2}{1-y}(y')^2=0$的通解.

18. (6 分)求微分方程$y''+y=x+\cos x$的通解.

19. (6 分)求微分方程$x^2y''-2xy'+2y=0$的通解.

五. 综合题(2 小题, 每小题 8 分, 共 16 分)

20. (8 分)设$f(x)$有二阶连续导数, 并满足方程$f(x)=\int_0^x f(1-t)\mathrm{d}t+1$, 求$f(x)$.

21. (8 分)已知函数$y=y(x)$满足等式$y'=x+y$, 且$y(0)=1$, 试讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right]$$

的敛散性.

2015 ~ 2016 学年春季学期《微积分 3》试卷参考答案

1. C

2.D

3.A

4. B

5. D

6. $[0, 2]$

7. $\sqrt{3}$

8. $[-1, 1)$

9. $y\arcsin x = x - \frac{1}{2}$

10. $y = 3 + x^2 + C_1 x + C_2 e^{-x}$

11.解: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}(e^{\frac{1}{n}}-1)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(e^{\frac{1}{n}}-1)$.

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}(e^{\frac{1}{n}}-1)}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}}-1) = 1$,

又因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(e^{\frac{1}{n}}-1)$ 收敛;

故原级数绝对收敛.

12.解: 记 $u_n = \frac{a^n \cdot n!}{n^n}$，则 $u_n > 0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a^n\cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e},$$

所以根据比值审敛法，当 $0 < a < e$ 时级数收敛，当 $a > e$ 时级数发散.

当 $a = e$ 时，因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$，所以此时比值审敛法失效，但由于数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调递增趋于 e，则

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1,$$

所以 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，因而当 $a = e$ 时，级数发散.

综上可得，当$0<a<\mathrm{e}$时级数收敛，当$a\geq \mathrm{e}$时级数发散.

13.解：$f(x)=\dfrac{x-1}{4-x}=(x-1)\cdot\dfrac{1}{4-x}=(x-1)\cdot\dfrac{1}{3-(x-1)}=\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{3}}$

$$=\frac{x-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}(x-1)^{n+1},$$

由$\left|\dfrac{x-1}{3}\right|<1$得收敛域$-2<x<4$.

由于$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$，则根据函数的幂级数展开的唯一性得

$$\frac{f^{(2016)}(1)}{2016!}=\frac{1}{3^{2016}},$$

所以$f^{(2016)}(1)=\dfrac{2016!}{3^{2016}}$.

14.解：设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}\right]'=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}.$$

$$S''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right]'=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{2}{1+x^2}\quad x\in(-1,1),$$

所以

$$S'(x)=S'(x)-S'(0)=\int_0^x S''(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\arctan x,$$

$$S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=2\int_0^x\arctan t\mathrm{d}t=2\left(t\arctan t\Big|_0^x-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t\right)$$

$$=2\left[x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^x\right]=2x\arctan x-\ln(1+x^2).$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}=2x\arctan x-\ln(1+x^2).$$

15.解：$f(x)$在$[0,2]$上满足收敛定理的条件.

将$f(x)$进行偶周期延拓，$l=2$.

$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots)$；

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^1=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 1\mathrm{d}x=1;$$

所以

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}\quad x\in[0,1)\cup(1,2].$$

16.解：方程化为

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{2}{\sqrt{x}}\sqrt{y},$$

为贝努利方程，变形

$$\frac{1}{\sqrt{y}}y'+\frac{1}{x}\sqrt{y}=\frac{2}{\sqrt{x}},$$

设 $u=\sqrt{y}$，则 $u'=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}y'$,

所以

$$u'+\frac{1}{2x}u=\frac{1}{\sqrt{x}},$$

则

$$u=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\sqrt{x}+\frac{C}{\sqrt{x}},$$

即

$$\sqrt{y}=\sqrt{x}+\frac{C}{\sqrt{x}}.$$

由 $y\big|_{x=4}=9$，得 $C=2$,

所以所求的特解为

$$\sqrt{y}=\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}.$$

17.解：设 $y' = p$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$． 原方程化为

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + \frac{2}{1-y}p^2 = 0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{2}{y-1}\mathrm{d}y,$$

所以

$$\ln p = 2\ln(y-1) + \ln C_1,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = C_1(y-1)^2,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^2} = C_1\mathrm{d}x,$$

解得

$$-\frac{1}{y-1} = C_1 x + C_2,$$

即

$$y = 1 - \frac{1}{C_1 x + C_2} \quad (\text{其中} C_1, C_2 \text{是任意常数}).$$

18 解：由 $r^2 + 1 = 0$ 得 $r = \pm \mathrm{i}$．

所以对应的齐次方程的通解为 $\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$．

设 $y'' + y = x$ 的一个特解为 $y_1^* = Ax + B$，

代入此方程解得 $A = 1,\ B = 0$．所以 $y_1^* = x$．

再设 $y'' + y = \cos x$ 的一个特解为 $y_2^* = x(C\cos x + D\sin x) = Cx\cos x + Dx\sin x$，

代入此方程解得 $C = 0,\ D = \dfrac{1}{2}$．所以 $y_2^* = \dfrac{1}{2}x\sin x$．

所以原方程的通解为

$$y = \overline{y} + y_1^* + y_2^* = C_1\cos x + C_2\sin x + x + \frac{1}{2}x\sin x \quad (\text{其中} C_1, C_2 \text{是任意常数}).$$

19.解：二阶欧拉方程．令 $x = \mathrm{e}^t$，得 $xy' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$x^2 y'' = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$．

所以原微分方程化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=0.$$

由 $r^2-3r+2=0$ 解得 $r_1=1, r_2=2$.

所以

$$y=C_1e^t+C_2e^{2t},$$

即原微分方程的通解为

$$y=C_1x+C_2x^2 \quad (\text{其中 } C_1, C_2 \text{ 是任意常数}).$$

20.解: 方程两端求导得

$$f'(x)=f(1-x), \tag{1}$$

再求导得

$$f''(x)=-f'(1-x), \tag{2}$$

由(1)式推出

$$f'(1-x)=f(1-(1-x))=f(x),$$

代入(2)式得到

$$f''(x)=-f(x).$$

显然 $f(0)=1$. 又在(1)式中令 $x=0$, 得到 $f'(0)=f(1)$, 于是原积分方程问题化为二阶微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} f''(x)+f(x)=0, \\ f(0)=1,\ f'(0)=f(1). \end{cases}$$

由 $r^2+1=0$ 解得 $r=\pm i$, 所以方程通解为

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

由 $f(0)=1$ 得到 $C_1=1$.

所以

$$f(x)=\cos x+C_2\sin x,$$

两端求导得

$$f'(x)=-\sin x+C_2\cos x,$$

再由 $f'(0)=f(1)$ 可以得到 $C_2=\dfrac{\cos 1}{1-\sin 1}$,

所以

$$f(x)=\cos x+\frac{\cos 1}{1-\sin 1}\sin x.$$

21.解: 因为 $y'-y=x$，所以

$$y=\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\left(\int x\cdot \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{x}\left(\int x\cdot \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{x}\left[-\int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})+C\right]$$

$$=\mathrm{e}^{x}\left(-x\mathrm{e}^{-x}+\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{x}(-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}+C)=C\mathrm{e}^{x}-x-1,$$

由 $y(0)=1$ 得 $C=2$，所以 $y=2\mathrm{e}^{x}-x-1$.

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right]=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}-1\right)$.

其为正项级数. 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x^{2}}}\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0^{+}}\frac{\mathrm{e}^{t}-t-1}{t^{2}}\xlongequal{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}\lim_{t\to0^{+}}\frac{\mathrm{e}^{t}-1}{2t}=\frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n^{2}}}=\dfrac{1}{2}$.

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2}}$ 收敛，因此级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right]$$

收敛.

上海大学 2014 ～ 2015 学年春季学期试卷

一. 单项选择题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. 下列级数收敛的是(　　)

A. $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin(\frac{1}{n})$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-2)^n}{2^n}$

2. 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)}\cos(n\pi)$ （$a>0$ 为常数）的收敛性态是(　　)**总习题 10.2.(1)**

A. 条件收敛　　B. 绝对收敛　　C. 发散　　D. 收敛性与 a 有关

3. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛，则此级数在 $x=2$ 处(　　)2013-2014 试卷题 3

A．条件收敛　　B. 绝对收敛　　C. 发散　　D. 收敛性不能确定

4. 设微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=f\left(y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$，如果设 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$，则原二阶微分方程可化为关于 y 和 p 的一阶微分方程(　　)第 11 章第六节概念

A． $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$　　B. $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$　　C． $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=pf(y,p)$　　D． $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=yf(y,p)$

5. 设 $s(x)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$ 和函数，则 $s(x)$ 满足的微分方程是(　　)

A． $s'(x)-(2n-1)s(x)=0$　　B. $s''(x)-s(x)=x$

C． $s'(x)+s(x)=\mathrm{e}^{2x}$　　D． $s''(x)-s(x)=0$

二. 填空题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-2$ 处条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}x^n$ 的收敛半径为_____.

7. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{3^n}$ 的收敛域为______.

8. 设 $f(x)$ 为连续周期函数，则 $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 的傅立叶展开式的系数 $b_n=$_____.　　总习

题 10.1.（3）

9. 微分方程 $xy'+y=0$ 满足初始条件 $y(1)=2$ 的特解为______.

10. 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$，则 $f(x)$ =____.

三. 计算题 (5 小题，每小题 5 分，共 25 分)

11. 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(1-\dfrac{2}{n})^{n^2}$ 的敛散性. 级数第三节例 5

12. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^n-(-1)^n}{n^2}x^{2n}$ 的收敛半径.

13. 判别级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n}$ 的敛散性(a 为不等于零的常数).

14. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2x+y^4}$ 的通解.11 章第四节例 2

15. 求解微分方程 $(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,\quad y\big|_{x=0}=0,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=1$.第 11 章习题 6.2.(2)

四. 计算题 (3 小题，每小题 7 分，共 21 分)

16. 将函数 $f(x)=\dfrac{4x+1}{2x^2+x-3}$ 展开为 x 的幂级数.

17. 设周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上满足 $f\left(x\right)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & 0<x<\pi.\end{cases}$. 试将 $f(x)$ 展开为傅立叶级数. 第12节例1

18. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-2)^{n+1}}{(n!)^2}(x-2)^n, x\in(-\infty,+\infty)$，求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(2)$ 的和. 10 章第九节**泰勒展开式概念**

五. 计算题 (3 小题，每小题 6 分，共 18 分)

19. 求微分方程 $y''-y=\sin x+\cos x$ 的通解. 2013-2014 试卷 20 题简化

20. 设 $f(x)$ 为可导函数，求解积分方程 $f(x)=2x\mathrm{e}^x+1+\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t$ .11 章第四节例 8