

高等数学复习题二(1)(经管类)

一、单项选择题

1. 设 a 是常数, 则 $\frac{d}{dx} \int_x^a \frac{1}{1+e^t} dt = (\quad)$.
- A. $\frac{e^x}{1+e^x}$ B. $\frac{-e^x}{1+e^x}$ C. $-\frac{1}{1+e^x}$ D. $\frac{1}{1+e^x}$
2. $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2}) dx = (\quad)$.
- A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. 0
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{x^3} \int_x^0 (e^t \arcsin t^2) dt = (\quad)$.
- A. ∞ B. 2 C. -2 D. 0
4. 曲线段 $\begin{cases} x = \cos^3 t + 1 \\ y = \sin^3 t - 1 \end{cases} (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$ 的弧长为().
- A. 3 B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{4}$
5. 设平面上区域 $D: 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x$, 且 $\iint_D f(x)(1+y) dx dy = 2$, 则 $\int_1^0 x f(x) dx = (\quad)$.
- A. 1 B. 0 C. 2 D. -1
6. 设 $f(x, y) = x^2 + y^2$, 则 $df(x+y, x-y) = (\quad)$.
- A. $4xdx + 4ydy$ B. $2xdx + 2ydy$ C. $2xdx - 2ydy$ D. $4xdx - 4ydy$
7. 设 $\int f(x^2) dx = \arctan x + c$, 则 $\int_0^{e-1} f(x) dx = (\quad)$.
- A. 0 B. 1 C. 2 D. -1
8. 设 n 为大于 1 的自然数, 则 $\int_0^{n\pi} |\sin x| dx = (\quad)$.
- A. $2n$ B. n C. 2 D. 1
9. 曲线段 $f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} (1 \leq x \leq 4)$ 的弧长为().
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{7}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{14}{3}$
10. 设平面上区域 $D: 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, 则 $\iint_D (x+1) dx dy = (\quad)$.
- A. 2π B. -2π C. π D. $-\pi$



关注上大数学在线公众号

11. 设 $z = \arcsin \frac{y}{x}$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = (\quad)$.

A. 0 B. $-\frac{y}{x}$ C. $\frac{y}{x}$ D. $-\frac{y}{x^2}$

12. $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} te^t dt$ 为().

A. xe^x B. x^2e^x C. $2x^2e^x$ D. $2x^3e^{x^2}$

13. $\int_0^{2015\pi} \sin 2t dt$ 是 ().

A、2015 B、0 C、1 D、 2015π

14. 设 $z = f(x, y)$, $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,1)}, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,1)}$ 存在, 则在 $(1,1)$ 处正确的是().

A、有全微分 B、偏导数连续 C、连续 D、均不真

15. 设 $\frac{d}{dx} f\left(\frac{1}{x^2}\right) = x$, 则 $f(x) = (\quad)$.

A、 $f(x) = \frac{x^2}{2}$ B、 $f(x) = \frac{x^2}{2} + c$ C、 $f(x) = \frac{x}{2}$ D、 $f(x) = \frac{1}{2x} + c$

16. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^4 + y^4} = (\quad)$.

A、0 B、1 C、 $\frac{1}{2}$ D、不存在

17. 设 b 是常数, 则 $\frac{d}{dx} \int_x^b \arcsin t dt = (\quad)$.

A. 0 B. $\arcsin x$ C. $\arcsin b$ D. $-\arcsin x$

18. $\int_R^0 \sqrt{R^2 - x^2} dx = (\quad)$.

A. πR^2 B. $-\pi R^2$ C. $-\frac{\pi}{4} R^2$ D. $\frac{\pi}{4} R^2$

19. 设连续函数 $f_1(x) \geq f_2(x) \geq 0 (x \in [a, b])$, 如果 D 为 $y = f_1(x), y = f_2(x)$ 与直线

$x = a, x = b (a < b)$ 所围平面区域, 则 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积是().

A. $\pi \int_a^b (f_1^2(x) - f_2^2(x)) dx$ B. $\pi \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))^2 dx$

C. $\pi \int_a^b (f_1^2(x) + f_2^2(x)) dx$ D. $\pi(b-a)(f_1^2(x) - f_2^2(x))$

20. 设 $f(x+y, xy) = x^2 + y^2$, 则 $df(x, y) = (\quad)$.



A. $2xdx-2dy$ B. $2(x-y)dx-2xdy$ C. $2xdx+2ydy$ D. $2xdx-2ydy$

21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{n+2n} \right] = (\quad).$

A、 $\frac{1}{2} \ln 2$ B、 $\ln 2$ C、 $\frac{1}{2} \ln 3$ D、 $\ln 3$

22. 设 $f(x) = \int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt$, $g(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 ().

A、低阶无穷小 B、高阶无穷小
C、等价无穷小 D、同阶但不等价无穷小

23. $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}} dx = (\quad).$

A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{8}$ C. $\frac{3\pi}{16}$ D. $\frac{3\pi}{32}$

24. 设在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0$, 且 $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$. 令

$A_1 = \int_a^b f(x) dx$, $A_2 = f(b)(b-a)$, $A_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a)$. 则().

A. $A_1 < A_2 < A_3$ B. $A_2 < A_1 < A_3$ C. $A_3 < A_1 < A_2$ D. $A_2 < A_3 < A_1$

25. 曲线 $y = \ln(1-x^2)$ 上 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 一段弧长 $s = (\quad).$

A. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{1-x^2} \right)^2} dx$

B. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx$

C. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{-2x}{1-x^2}} dx$

D. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + [\ln(1-x^2)]^2} dx$

二、填空题

1. $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}};$

2. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\cos(x^2)$, 则 $\int x f'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}};$

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^4 x) dx = \underline{\hspace{2cm}};$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2) dt}{x^2(e^x - 1)} = \underline{\hspace{2cm}};$



关注上大数学在线公众号

5. 已知非负连续函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上定积分 $\int_0^1 f(x)dx=1$, 则区域

$D:0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{f(x)}$ 绕 x 轴旋所得立体体积为_____;

6. 设 $z = \arctan(\frac{y}{x}) + x - y$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____;

7. 设 $f(x)$ 有连续的导数, 则 $\int_a^b f'(3x)dx =$ _____;

8. 曲线段 $\begin{cases} x = 2\sin^3 t \\ y = 2\cos^3 t \end{cases} (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$ 的弧长为_____;

9. 设 $F(x)$ 可导, $z = F(\frac{y}{x}) + x + y$, 则 $x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} =$ _____;

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx =$ _____;

11. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\sin(x^2)$, 则 $\int x f'(x) dx =$ _____;

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x^2} \frac{\ln(1+t)}{t} dt}{\tan^2 x} =$ _____;

13. 设 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, 则 $(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}) \Big|_{(1,1,-1)} =$ _____;

14. $\int x^2 f(x) dx = \arctan x + c$, 则 $f(x) =$ _____;

15. 设 $z = \arctan(\frac{y}{x})$, 则 $\text{Grad } z =$ _____;

16. $\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{2-x}} dx =$ _____;

17. $\int \frac{1}{x \ln(x)} dx =$ _____;

18. 设 $f(x)$ 是连续函数, 则 $\int_{-1}^1 (f(-x) + f(x) + 1) dx =$ _____;

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2) dt}{\tan x^2 \arcsin x} =$ _____;

20. 设 $f(x)$ 为非负连续函数, 且 $\int_0^1 x f(x) dx = 1$, 则区域 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f(x)$ 绕

y 轴旋所得立体体积为_____;



关注上大数学在线公众号

21. 设 $f(u)$ 为可导函数, 且 $z = f(xy)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____;
22. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x \ln(x^2 + \sqrt{1+x^2}) + \sqrt{1-\cos^2 x}) dx =$ _____;
23. 设 $f(x) = \int_0^x \cos(t-x) dt$, 则 $f'(x) =$ _____;
24. $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 x \cos t^2 dt =$ _____;
25. 已知 $\int_0^x f(x) dx = \frac{1}{2} x^3 - 3$, 则 $\int_0^2 x f(x^2) dx =$ _____.

三、计算题

1. 计算定积分 $\int_1^e x \ln x dx$.
2. 计算积分 $I = \int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} dx$.
3. $\int \frac{x^3}{1+x^2} dx$.
4. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$.
5. $\int 2x \ln(x-1) dx$.
6. $\int |x-1| dx$.
7. 设 $f(x)$ 为连续函数, $\varphi(x) = \int_0^1 e^{(x-t)^2} dt$, 求 $\varphi'(x)$.
8. $\int_{-1}^1 (x^{2014} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + x^2 e^{x^3}) dx$.
9. 设 $u = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, 求 du .
10. 设 $f(u, v)$ 有连续的一阶偏导数, $z = f(x^2 + y^2, x - y^3)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.
11. 求 $\iint_D \frac{x}{y \cos^2 y} dx dy$, 其中 D 是由 $y = x$, $y = 1$ 及 y 轴所围.



12. 设 $f(x)$ 为连续函数, $\varphi(x) = \int_{-1}^1 f(x+t)dt$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x)$.

13. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x > 0, \\ x+1, & x \leq 0. \end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(2-x)dx$.

14. 设 $f(x) = x^2 + x + 2 \int_0^2 f(x)dx$, 求 $\int_0^2 f(x)dx$.

15. 设 $f(x)$ 为连续函数, 计算 $\lim_{b \rightarrow a^+} \frac{\int_b^a f(t)tdt}{b^2 - a^2}$.

16. 设 $f(x)$ 为连续函数, $\varphi(x) = \int_0^1 f(x-t)dt$, 求 $\varphi'(x)$.

17. $\int_{-1}^1 (x^4 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \frac{1}{x+2})dx$.

18. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\{\sin x, \cos x\} dx$.

19. 设 $z = x^y + y^x + x^2y$, 求 dz .

20. 设 $f(u, v)$ 有连续的二阶偏导数, $z = f(x^2 - y, y^3 + x)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

21. $\int \frac{x+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

22. $\int \frac{1}{1+e^x} dx$.

23. 求 $\iint_D \frac{y \cos x}{x} dx dy$, 其中 D 是由 $y = x$, $x = 1$ 及 x 轴所围.

24. $\int x^2 e^{-x} dx$.

25. $\int_0^{\pi} \frac{x \cos^5 x \sin x}{2 + \cos^6 x} dx$.

26. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x + 5 \sin^2 x} dx$.

27. $\int \frac{x e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$.

28. 设 $(x^2 + y^2)^{xy} + 2z = 1$, 求 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,1)}$.

29. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\sin x}{x}$, 计算 $\int x f'(x) dx$.



30. 16. $\int_{-1}^1 \sqrt{(1-x^2)^5} dx.$

31. 设 $z = z(x, y)$ 由等式 $z^2 = e^z + x^2 - y^3$ 确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$

32. 设 $f(u, v)$ 有连续的一阶偏导数, $z = f(xy, x + y^3)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$

33. 设区域 D 由曲线 $y = \sin x, x = \pm \frac{\pi}{2}, y = 1$ 围成, 计算 $\iint_D (x^5 y - 1) dx dy.$

34. 设 D_1 由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, x = 2$ 以及 $y = 0$ 所围成的平面区域, D_2 由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $y = 0, x = a$ 所围成的平面区域 ($0 < a < 2$).

(1) 求 D_1 面积以及 D_1 绕 x 轴旋转所得旋转体体积 V_1 ,

(2) D_2 绕 y 轴旋转所得旋转体体积 V_2 .

35. 求 $f(x, y) = ex - \frac{x^2 + y^2}{2}$ 的极值.

36. 设曲线 $y = \sqrt{x-1}$. 过原点作曲线的切线, 试求由此切线、曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积, 并求该平面图形绕 x 轴旋转所生成的旋转体的体积.

37. 设曲线 $x = y^2$ 的切线 L_1, L_2 经过点 $(0, 1)$. 如果 D 为曲线 $x = y^2$ 与 L_1, L_2 围成的平面区域.

(1) 求 D 的面积;

(2) 求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体体积.

38. 现计划建造一个 32 立方米无盖的长方体容器, 已知下底面造价为每平方米 5 元, 侧面造价为每平方米 1 元, 问底面半径和高各为多少米时可以使得造价最小?

39. 现计划建造一个 $40\pi^3$ 立方米有盖的圆柱型容器, 已知上、下底面造价为每平方米 5 元, 侧面造价为每平方米 2 元, 问底面半径和高各为多少米时可以使得造价最小?

40. 求点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $x + y + z = 1$ 的距离.

41. 已知某商品每周生产 q 个单位时, 总成本变化率为 $C'(q) = 0.4q - 12$ (元/单位), 且固定成本为 500 元, 求总成本 $C(q)$. 如果这种商品的销售单价是 20 元, 求总利润 $L(q)$, 并问每周生产多少单位时才能获得最大利润?



42. 设某产品的固定成本 $C_0 = 0$, 总成本 C (万元) 的变化率 (边际成本) $C' = 1$, 总收益

R (万元) 的变化率 (边际收益) 为生产量 x (百台) 的函数: $R' = 5 - x$, 求产量为多少时, 总利润 $L = R - C$ 最大?

四、证明题

1. 证明当 $x > 0$ 时, 有

$$\frac{1}{2} \ln^2 x - \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t} dt.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且为偶函数, 求证

$$\int_0^\pi x f(\cos x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\cos x) dx.$$

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且为偶函数, 求证

$$\int_0^\pi x f(\cos x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\cos x) dx.$$

4. 证明连续函数 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上以 2π 为周期的函数当且仅当积分 $\int_0^{2\pi} f(x+t) dt$ 与 x 无关。

5. 设 $f(x)$ 是以 2 为周期连续函数, 证明函数 $G(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt$ 也是以 2 为周期的周期函数。

6. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 对任意的 $x, x_0 \in [a, b]$, 求证

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^x [f(t+h) - f(t)] dt = f(x) - f(x_0).$$

7. 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 最大值和最小值分别是 M 、 m , 如果

$$F(x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt \quad (a > 0).$$

求证 (1) $\lim_{a \rightarrow 0} F(x) = f(x)$; (2) $|F(x) - f(x)| \leq M - m$.

8. 设 $F(x) = \int_0^x \left(\frac{x}{2} - t\right) e^{t^3} dt$, 求证 $F(x)$ 是单调递减函数。



参考答案

一、选择题答案

C、B、C、D、D、A、B、A、D、C、A、D、B、D、D、D、D、C、A、A、C、
B、D、B、B

二、填空题答案

1. $\frac{\pi}{2}$,

2. $-2x^2 \sin(x^2) - \cos(x^2) + C$,

3. $\frac{3}{8}\pi$,

4. $\frac{1}{3}$,

5. π ,

6. $x - y$,

7. $\frac{1}{3}[f(3b) - f(3a)]$,

8. 3,

9. $x + y$,

10. $\frac{3}{16}\pi$,

11. $2x^2 \cos(x^2) - \sin(x^2) + C$,

12. 1,

13. 2,

14. $\frac{1}{x^2(1+x^2)}$,

15. $\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$,

16. $\ln \left| \frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{2-x}-1} \right| + c$,

17. $\ln |\ln x| + c$,

18. 2,

19. $\frac{1}{3}$,



关注上大数学在线公众号

20. 2π ,

21. yf' ,

22.2,

23. $\cos x$

三、计算题答案

1. $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$

2. $\frac{3\pi}{8}$

3. $\frac{1}{2}(x^2 - \ln(1 + x^2)) + C$

4. $\sqrt{x^2 - 1} - \arccos \frac{1}{x} + C$

5. $x^2 \ln(x-1) - \frac{1}{2}x^2 - x - \ln(x-1) + C$

6. $\int |x-1| dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + 1 + C_2, & x \geq 1 \\ x - \frac{1}{2}x^2 + C_2, & x < 1 \end{cases}$

7. $\varphi'(x) = -e^{(x-1)^2} + e^{x^2}$

8. $\frac{1}{3}(e - e^{-1})$

9. $du = \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(xdx + ydy + zdz)$

10. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'_1 + f'_2, \frac{\partial z}{\partial x} = 2yf'_1 - 3y^2f'_2$

11. $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} + \ln \cos 1)$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x+1) - f(x-1)) = f(1) - f(-1)$

13. $\frac{2+\pi}{4}$

14. $\int_0^2 f(x) dx = -\frac{14}{9}$

15. $-\frac{f(a)}{2}$

16. $\varphi'(x) = -f(x-1) + f(x)$

17. $\ln 3$

