成绩	

题号	一	二	三	四	五
得分	10	15	30	35	10

一、单项选择题（2 分×5=10 分）

1、曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程为 （ **B** ）

A、 $2x+y-z-4=0$ **B**、 $x+2y-4=0$ **C**、 $2x+y-4=0$ **D**、 $2x+y-5=0$

2、$\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 中 λ 是 （ **D** ）

A、最大小区间长 **B**、小区域最大面积 **C**、小区域直径 **D**、小区域的最大直径

3、设 $z = x^3 + 6x + y$，则它在点 $(-2,0)$ 处 （ **A** ）

A、无极值 **B**、取得极大值 **C**、取得极小值 **D**、无法判断

4、$\iiint\limits_{(\Omega)} \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz$ (其中 (Ω) 为 $x^2+y^2+z^2 \le 2$)的值等于 （ **C** ）

A、2 **B**、 1 **C**、0 **D**、-1

5、设 $(L): |x|+|y|=1$，则 $\oint\limits_{(L)} \frac{ds}{|x|+|y|} =$ （ **D** ）

A、4 **B**、2 **C**、$2\sqrt{2}$ **D**、$4\sqrt{2}$

二、填空题（3 分×5=15 分）

1、圆 $x^2+y^2=9$ 上各点的曲率 κ 为 $\underline{\frac{1}{3}}$.

2、设 $\vec{f}(x,y) = (x^2+y^2, e^{xy})$，则 $d\vec{f}(1,1)=$ $\underline{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ e & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}}$.

3、与 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$ 对应的另一顺序的二次积分为 $\underline{\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx}$.

4、设平面区域 $(D): x^2+y^2 \le x$，则反常重积分 $\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \underline{2}$.

5、设 $u = x+y+z$ 且 $y = y(x), z = z(x)$ 分别由下列两式确定：$e^{xy} - xy = 2, e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t}dt$，

则 $\frac{du}{dx} = \underline{2-\frac{y}{x}-\frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}}$.

三、多元函数与重积分（6 分×5=30 分）

1、（6 分）计算 $\iint\limits_{(D)}(3x^3+y)dxdy$，其中 (D) 是两条抛物线 $y=x^2, y=4x^2$ 之间、直线 $y=1$ 以下的闭区域.

解答： $3x^3+y$ 中 $3x^3$ 是关于 x 的奇函数，y 是关于 x 的偶函数，依对称性，有

$$\iint\limits_{(D)}(3x^3+y)dxdy=\iint\limits_{(D)}ydxdy=2\iint\limits_{(D_1)}ydxdy,$$

其中 (D_1) 为 (D) 在第一象限的子区域，故

$$\iint\limits_{(D)}(3x^3+y)dxdy=2\int_0^1 ydy\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}}dx=\int_0^1 y^{\frac{3}{2}}dy=\frac{2}{5}$$

2、（6 分）求由曲面 $z=2x^2+2y^2$ 及 $z=6-x^2-y^2$ 所围成的立体体积.

解答： 由题

$$\begin{cases} z=2x^2+2y^2 \\ z=6-x^2-y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=2,$$

该立体 (Ω) 在 xOy 面上的投影区域为 $(D_{xy}): x^2+y^2\le 2$.

故体积为 $V=\iiint_{(\Omega)}dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho d\rho\int_{2\rho^2}^{6-\rho^2}dz=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\rho(6-3\rho^2)d\rho=6\pi$ ……3 分

3、（6 分）求 $\iint_{(D)}\cos(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 (D) 为由曲线 $xy=1, xy=2, y=x, y=4x$ $(x>0, y>0)$ 所围的区域.

解答： 令 $\begin{cases} u=xy \\ v=\dfrac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{u}{v}} \\ y=\sqrt{uv} \end{cases}$ $\quad |J(u,v)|=\dfrac{1}{2v}$.

所以原来的区域 (D) 可化为： $1\le u\le 2, 1\le v\le 4$,

所以，原式 $=\int_1^4 dv\int_1^2\frac{1}{2v}\cos u du=\ln 2\int_1^2\cos u du=\ln 2(\sin 2-\sin 1)$.

4、（6 分）在平面 $2y-3z=1$ 上求一点，使它到两已知点 $(1,2,1)$，$(3,1,-2)$ 的距离平方和为最小

解答： 设平面上的点为 (x,y,z)，按题意：目标函数

$$d^2=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2+(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2$$

限制条件：$\varphi(x,y,z)=2y-3z-1=0$

作 $L(x,y,z,\lambda)=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2+(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2+\lambda(2y-3z-1)$ …3 分

令 $\begin{cases} L'_x=2(x-1)+2(x-3)=0 \\ L'_y=2(y-2)+2(y-1)+2\lambda=0 \\ L'_z=2(z-1)+2(z+2)-3\lambda=0 \\ 2y-3z=1 \end{cases}$ 得 $x=2, y=\dfrac{3-\lambda}{2}, z=\dfrac{-2+3\lambda}{4}$

代入 $2y-3z=1$ 中得 $\lambda=\dfrac{14}{13}$ $\therefore x=2, y=\dfrac{25}{26}, z=\dfrac{4}{13}$

$\because$ 驻点唯一，$\therefore$ 所求点为 $\left(2,\dfrac{25}{26},\dfrac{4}{13}\right)$

5、（6 分）设向量场 $\vec{A}=(x+xyz)\vec{i}+(y+xyz)\vec{j}+(z+xyz)\vec{k}$，求散度 $div\vec{A}$ 和旋度 $rot\vec{A}$.

解答： 记 $P=x+xyz$，$Q=y+xyz$，$R=z+xyz$，则

$$div\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3+yz+zx+xy,$$

$$rot\vec{A}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=x(z-y)\vec{i}+y(x-z)\vec{j}+z(y-x)\vec{k}.$$

四、曲线与曲面积分（7 分×5=35 分）

1、（7 分）设(C)是方程为$x=\frac{1}{3}\cos^3 t,\ y=\frac{1}{3}\sin^3 t\ (0\le t\le 2\pi)$的星形线，求其弧长.

解答：$\mathrm{d}s=\sqrt{(x')^2+(y')^2}\mathrm{d}t=\sqrt{(-\cos^2 t\sin t)^2+(\sin^2 t\cos t)^2}\mathrm{d}t=\left|\cos t\sin t\right|\mathrm{d}t$，

由对称性，$s=\int_{(C)}\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\mathrm{d}t=2$.

2、（7 分）计算曲线积分$\int_{(L)}(e^x\sin y-1)dx+(e^x\cos y-x)dy$，其中$(L)$为由点$A(a,0)$至原点$O(0,0)$的上半圆周$x^2+y^2=ax\ \ (a>0)$.

解答：记(L)与直线段$\overline{OA}$所围成的闭区域为(D)，则由格林公式，得

$$I_2=\oint_{(L)+\overline{OA}}(e^x\sin y-1)dx+(e^x\cos y-x)dy=-\iint_{(D)}d\sigma=-\frac{\pi}{8}a^2.$$

而$I_1=\int_{\overline{OA}}(e^x\sin y-1)dx+(e^x\cos y-x)dy=-\int_0^a dx=-a$

$$\therefore\int_{(L)}(e^x\sin y-1)dx+(e^x\cos y-x)dy=I_2-I_1=a-\frac{\pi}{8}a^2.$$

3、（7 分）计算曲面积分$\iint_{(\Sigma)}\frac{dS}{z}$，其中$(\Sigma)$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被平面$z=h\ \ (0<h<a)$截出的顶部.

解答：(Σ)的方程为$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，(Σ)在xOy面上的投影区域为

$(D_{xy})=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2-h^2\}$.

又$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=a\big/\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$$\iint_{(\Sigma)}\frac{dS}{z}=\iint_{(D_{xy})}\frac{adxdy}{a^2-x^2-y^2}=a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{\rho d\rho}{a^2-\rho^2}$$

$$=2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-\rho^2)\right]_0^{\sqrt{a^2-h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}.$$

4、（7 分）计算曲面积分

$$I=\iint_{(\Sigma)}2x^3dy\wedge dz+2y^3dz\wedge dx+3(z^2-1)dx\wedge dy,$$

其中(Σ)为曲面$z=1-x^2-y^2(z\ge 0)$的上侧.

解答：取(Σ_1)为$z=0(x^2+y^2\le 1)$的下侧，记(Σ)与(Σ_1)所围成的空间闭区域为(Ω)，则由高斯公式，有

$$I_2=\oiint_{(\Sigma)+(\Sigma_1)}2x^3dy\wedge dz+2y^3dz\wedge dx+3\left(z^2-1\right)dx\wedge dy=\iiint_{(\Omega)}6\left(x^2+y^2+z\right)dv$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 d\rho\int_0^{1-\rho^2}\left(\rho^2+z\right)\rho dz=2\pi$$

$$I_1=\iint_{(\Sigma_1)}2x^3dy\wedge dz+2y^3dz\wedge dx+3\left(z^2-1\right)dx\wedge dy=3\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}}dxdy=3\pi$$

$$\therefore\quad I=I_2-I_1=2\pi-3\pi=-\pi.$$

5、（7 分）$\oint_{(C)}(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$,其中$(C)$是由抛物线$y=x^2,x=y^2$所围成的区域的正向边界曲线.

解答： 【法 1】因为$(C)=(C_1)+(C_2)$,故

$$\oint_{(C)}(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$$

$$=\int_{(C_1)}(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy+\int_{(C_2)}(2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$$

$$=\int_0^1[(2x^3-x^2)+(x+x^4)2x]dx+\int_1^0[(2y^3-y^4)2y+(y^2+y^2)]dy$$

$$=\int_0^1(2x^5+2x^3+x^2)dx-\int_0^1(-2y^5+4y^4+2y^2)dy=\frac{1}{30}.$$

【法 2】由格林公式$\iint_{(D)}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_{(D)}(1-2x)dxdy$

$$=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}}(1-2x)dx=\int_0^1(y^{\frac{1}{2}}-y-y^2+y^4)dy=\frac{1}{30}.$$

五、（10 分）

(1) （3 分）计算二次积分 $I(a)=\int_0^a dx\int_a^x e^{-y^2}dy$,其中实数 $a>0$，**证明**：极限 $\lim\limits_{a\to+\infty} I(a)$ 存在，并求之。

(2) （3 分）设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面 $z=2-x^2-y^2$ 上位于第一卦限的点，**证明**：曲面在该点的切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积为 $\dfrac{1}{24}\dfrac{(4-z_0)^3}{x_0y_0}$

(3)（4 分）设 $f(x)$ 为连续函数，$f(0)=a$，$F(t)=\iiint\limits_{(\Omega_t)}[z+f(x^2+y^2+z^2)]dv$，其中 (Ω_t) 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{t^2-x^2-y^2}$ 所围成的闭区域，**证明**：$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F(t)}{t^3}$ 存在，并求之。

解答：

(1)

$$\int_0^a dx\int_a^x e^{-y^2}dy=-\int_0^a dx\int_x^a e^{-y^2}dy=-\int_0^a dy\int_0^y e^{-y^2}dx$$

$$=-\int_0^a ye^{-y^2}dy=\frac{1}{2}\left(e^{-a^2}-1\right).$$

从而

$$\lim_{a\to+\infty} I(a)=-\frac{1}{2}.$$

(2) 曲面在 M_0 的切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+z-z_0=0$$

利用曲面方程简化切平面方程为 $2x_0x+2yy_0+z=(4-z_0)$

其在三个坐标轴上的截距分别为 $x=\dfrac{4-z_0}{2x_0}$， $y=\dfrac{4-z_0}{2y_0}$， $z=4-z_0$

故四面体的体积为 $V=\dfrac{1}{24}\dfrac{(4-z_0)^3}{x_0y_0}$

（3）$F\left(t\right)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^t\left[r\cos\varphi+f\left(r^2\right)\right]r^2dr$

$$=2\pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^t r^3dr+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^t f\left(r^2\right)r^2dr\right]$$

$$=\pi\left[\frac{t^4}{8}+\left(2-\sqrt{2}\right)\int_0^t r^2 f\left(r^2\right)dr\right]$$

故 $$\lim_{t\to0^+}\frac{F\left(t\right)}{t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{\pi\left[\frac{t^3}{2}+\left(2-\sqrt{2}\right)t^2f(t^2)\right]}{3t^2}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi\lim_{t\to0^+}f(t^2)=\frac{2-\sqrt{2}}{3}\pi a.$$