线性代数是非题解

题 1. 行列式 D 为零，则行列式必有两行成比例

【答案】错

【内容】行列式及其性质

【性质】行列式两行(列)成比例，行列式值为零. 反之未必成立.

【示例】

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\text{，但任意两行都不成比例.}$$

【必须知晓的结论】

(1)行列式 D 值为零，其行向量组线性相关、列向量组线性相关；

(2) 设 n 阶行列式 D 对应的矩阵为 A，如果 $D=0$, 则 $r(A)<n$.

(3) 设 A 是 n 阶方阵，n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充分必要条件是$|A|=0$.

【备注】当行列式阶数为 2 时，如果行列式值为 0，则其两行成比例。这相当于两个向量线性相关或者在几何中相当于两个向量平行，其对应坐标成比例.、

【读书笔记】

题 2： 行列式两行成比例，则行列式值为零

关注上大数学在线公众号

【答案】 对

【内容】 行列式及其性质

【性质】 行列式两行(列)成比例，行列式值为零. 反之未必成立.

【示例】 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$.

【必须知晓的结论】

(1) 行列式 D 两行(列)相等，行列式值为零，反之未必成立；

(2) 行列式行(列)向量组线性相关，则行列式值为零；

(3) 设 A 是 n 阶方阵，则$|A|=0$ 充分必要条件是 $r(A)<n$.

【备注】 利用行列式两行成比例可以简化行列式计算，例如 3 阶行列式

$$|\alpha, 2\alpha+\beta, \gamma| = |\alpha, 2\alpha, \gamma| + |\alpha, \beta, \gamma| = |\alpha, \beta, \gamma|.$$

如果$|\alpha, \beta, \gamma| = 1$，则$|\alpha, 2\alpha+\beta, \gamma| = |\alpha, \beta, \gamma| = 1$.

【读书笔记】

题 3 .若 n 阶行列式 D 每行元素之和均为零，则 D 等于零

【答案】对

【内容】行列式运算、性质

【性质】行列式某行(列)元素为零，行列式值为零.

【示例】

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

【解答】将行列式所有列加到第 1 列，则第 1 列元素都为零，所以行列式值为零.

【必须知晓的结论】行列式有 3 条基本运算性质

(1)两行(列) 对调行列式值变号；

(2)行列式某行(列)乘上数 k，行列式值扩大 k 倍;

注：在这个性质中允许 k=0，它与矩阵对应的初等变换要求不同，在矩阵初等变换中要求所乘数非零；其次通常是反用该性质，即行列式某行(列)有公因数 k，则 k 可以提取到行列式号外面.

(3) 行列式 D 某行(列)k 倍加到另外一行(列)，行列式值不变.

【备注】行列式运算性质起到简化行列式计算作用，通过行列式运算性质将行列式某行(列)化简为只有一个非零元素，然后降阶以计算行列式的值.

【读书笔记】

题 4. *A*、*B* 同阶方阵，则|A+B|=|A|+|B|

【答案】错

【内容】行列式及其性质

【性质】(行列式分解性质)行列式某行(列)每个元素都可表示为两个元素之和，则行列式为两个行列式和，即(用 3 阶矩阵作示例)

$$|\alpha,\gamma+\beta,\delta|=|\alpha,\gamma,\delta|+|\alpha,\beta,\delta|$$

例如 $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a+2 & b+4 & c+6 \\ a & b & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ a & b & c \end{vmatrix}=0+0=0.$$

【解答】题目结论错误的理解行列式分解性质，并不存在|A+B|=|A|+|B|的性质，除非 *A*、*B* 阶数为 1.

【反例】

$$\begin{vmatrix} 1+2 & 1+3 \\ 1+0 & 1+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=5\text{,但}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4\text{，有}$$

$$5=\begin{vmatrix} 1+2 & 1+3 \\ 1+0 & 1+2 \end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4.$$

【必须知晓的结论】

(1) 行列式 D 两行(列)相等，行列式值为零，反之未必成立；

(2) 行列式两行(列)成比例，行列式值为零. 反之未必成立.

【备注】行列式分解性质可以简化行列式计算，例如 3 阶行列式

$$|\alpha,2\alpha+\beta,\gamma|=|\alpha,2\alpha,\gamma|+|\alpha,\beta,\gamma|=|\alpha,\beta,\gamma|.$$

如果$|\alpha,\beta,\gamma|=1$，则$|\alpha,2\alpha+\beta,\gamma|=|\alpha,\beta,\gamma|=1$.

【读书笔记】

题 5.A 为 n 阶方阵，k 为复数，则$|kA|=k|A|$

关注上大数学在线公众号

【答案】错

【内容】矩阵与行列式关系、矩阵数乘运算.

【性质】设 A 为 n 阶方阵，k 为复数，则$|kA|=k$^$n|A|$.

【示例】

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, kA=\begin{pmatrix}2 & 2k\\ 3k & 4k\end{pmatrix}，有$$

$$\begin{vmatrix}2k & 2k\\ 3k & 4k\end{vmatrix}=8k^2-6k^2=2k^2, k\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=2k,$$

所以当 a 不等于时$|aA|$与 a $|A|$不相等.

【解答】题目结论将行列式性质“行列式某行(列)乘上数 k，行列式值扩大 k 倍”与矩阵和行列式关系性质“$|kA|=k$^$n|A|$”混淆. 学习者应引起注意.

一个数 k 乘矩阵 A 表示 A 中每个元素都要乘上 k，因此$|kA|$中每行都有公因数，利用行列式性质有$|kA|=k$^$n|A|$.

【必须知晓的结论】

设 A，B 为 n 阶矩阵，k 为数，则

(1) $|AB|=|A|\cdot|B|$；

(2) $|kA|=k$^$n|A|$；

(3) $|A$^$T|=|A|$.

【读书笔记】

题 6..在 n 阶行列式中，若行列式中不为零的元素的个数小于 n，则此行列式的值等于零.

【答案】正确

【内容】行列式定义

【解答】按照行列式通项公式定义，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

表达式意指表示所有可能的**取自不同的行和不同的列的 n 个元素乘积的代数和.**

由于行列式中不为零的元素个数小于 n, 于是至少有一行元素全为零. 根据上述定义，知行列式值为零.

【示例】

对于 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，有 $|A|=0$，行列式中非零元素只有一个元素不为零.

【必须知晓的知识】关于行列式定义有两种，一种是通项公式定义, 一种是递归定义. 在通项公式定义中，需要注意如下几点：

(1) n 级排列的总数是 $n!$个，故展开式中共有 $n!$项；

(2) 每项必须是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积；

(3) 每项前的符号取决于 n 个元素列下标所组成排列的奇偶性.

一些特例：

$n=1$ $\quad |a_{11}|=a_{11}$ (一阶行列式即为该数本身)；

$n=2$ $\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2} (-1)^{\tau(p_1p_2)} a_{1p_1}a_{2p_2} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$；

$n=3$ $\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{333}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

【读书笔记】

题 7. (1)行列式值为零，则行列式列向量组线性相关；(2)行列式值为零，则行列式行向量组线性相关.

【答案】正确

【内容】行列式、向量组线性相关与线性无关

【性质】设 A 为 n 阶方阵，如果 $|A|=0$，则 A 的行(列)向量组线性相关.

【示例】

$$\text{对于 } A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a+2 & b+4 & c+6 \\ a & b & c \end{pmatrix}\text{，有 } |A|=0\text{，此时}$$

$$(a+2,b+4,c+6)=(a,b,c)+2(1,2,3).$$

即 A 的行向量组线性相关.

【必须知晓的结论】

设 A 为矩阵 $m\times n$ 矩阵,

(1) r(A)<n 充分必要条件是 A 的列向量组线性相关；

(2) r(A)<m 充分必要条件是 A 的行向量组线性相关.

(3)当 A 为 n 阶方阵时，$|A|=0$ 充分必要为 $r(A)<n$.

(4)矩阵 A 的行秩=矩阵 A 的列秩=矩阵 A 的秩.

【备注】对于方阵 A，通过其行列式是否为零可以判别矩阵的行(列)向量组的线性相关性，反之亦然. 对于 $m\times n$ 矩阵，需要通过矩阵 A 的秩来确定行(列)向量组的线性相关性.

一般通过行初等变换方法计算 $m\times n$ 矩阵 A 的秩：**将 A 化为行阶梯阵 B，则 B 的非零行行数为 A 的秩**.

【读书笔记】

题 8.设 A,B 为 n 阶方阵，则 $AB=BA$.

关注上大数学在线公众号

【答案】 错

【内容】 矩阵运算、矩阵运算律.

【性质】 矩阵乘法在有意义前提下满足结合律、分配律.

【解答】 矩阵乘法一般不满足交换律、消去律，例如

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}，有$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=BA,$$

所以交换律不成立.

【必须知晓的结论】 矩阵乘法满足结合律、分配律.

【备注】 对于矩阵 A、B, 只有**当 A 的列数与 B 的行数相等时**，AB 才有意义. 其次即使 AB 有意义，BA 也未必有意义. 例如 A 是 3×4 矩阵，B 为 4×4 矩阵，则 AB 有意义，但 BA 无意义.

【拓广】 虽然矩阵乘法不满足交换律，但**对矩阵 A 而言，存在无穷多矩阵与 A 交换**. 例如任意 n 阶方阵与 n 阶单位矩阵交换. 再比如对任意方阵 A 而言，A 的多项式矩阵都与 A 交换.

【读书笔记】

题 9. (1)设矩阵 *A* 满足 *A*^2=*A*，则 *A*=0 或 *A* 为单位矩阵；

(2)设矩阵 *A*、*B* 满足 *AB*=0，则 *A*、*B* 中必有一个矩阵为零矩阵；

(3)矩阵乘法不满足左、右消去律.

【答案】(1)错、(2)错、(3)对

【内容】矩阵运算、矩阵运算律.

【性质】矩阵乘法在有意义前提下满足结合律、分配律.

【解答】矩阵乘法一般不满足消去律、交换律，例如

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}，有$$

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}，但 A\neq \mathbf{0}, B\neq \mathbf{0}.$$

又如：$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，有 $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，但 A 是非零矩阵.

所以消去律不成立.

【必须知晓的结论】矩阵乘法满足结合律、分配律.

【备注】矩阵乘法与数的乘法具有很大区别：

(1)数的乘法满足交换律，但矩阵乘法不满足交换律；

(2) 数的乘法满足消去律，即当 a 非零时，如果 $ab=ac$，则 $b=c$. 但矩阵乘法不满足消去律，即当 A 为非零矩阵时，如果 $AB=AC$，**未必有** $B=C$.

(3)当矩阵 A 可逆时，如果 $AB=AC$，**则 $B=C$**. 因此与数乘法相类比，非零数相当于可逆矩阵.

【读书笔记】

题 10. (1)两个交换的同阶对称矩阵乘积仍然是对称矩阵；

(2)两个同阶对称矩阵乘积仍然是对称矩阵.

【答案】(1)对、(2)错

【内容】矩阵运算、对称矩阵.

【解答】设矩阵 A、B 为同阶对称矩阵，则

$$(AB)' = B'A' = BA$$

而 AB 为对称充要条件是

$$(AB)' = AB$$

于是有 $AB=BA$，即 AB 为对称充要条件是 $AB=BA$. 由此知(1)正确，(2)错误.

【反例】对于两个同阶对称矩阵 A、B，一般不存在 $AB=BA$，例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}，有\ AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = BA.$$

【必须知晓的结论】矩阵乘法满足结合律、分配律. 但不满足交换律、消去律.

【读书笔记】