《微积分 2》练习题（理工大类 B 卷）答案

本套练习题共 19 题，满分 50 分；内容涵盖定积分应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、二重积分等四个部分。

一、单项选择题（5 题；每题 2 分，共 10 分）

1．C　2．B　3．A　4．D　5．B

二、填空题（10 题；每题 2 分，共 20 分）

1．$\dfrac{\pi}{2},2\pi$　　2．$6\sqrt{3}$

3．$\begin{cases}(a-z)^2+4y^2+z^2=4\\ x=0\end{cases}$　　4．1

5．e^{2e}　　6．$\dfrac{3}{4}$

7．$-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　8．30

9．$\dfrac{1}{3}$　　10．$f(2)$

三、计算题（4 题；每题 5 分，共 20 分）

1 计算曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\le x\le\dfrac{1}{2}$ 的一段弧的长度.

解: 弧长 $l=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(-\dfrac{2x}{1-x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$ ---------------(2 分)

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{1-x^2}-1\right)\mathrm{d}x$$

$$=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}$$ ---------------(2 分)

$$=\ln 3-\frac{1}{2}.$$ ---------------(1 分)

2. 设 $z=f(u,x,y)$，$u=x\sin y$，其中 f 具有二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_u\cdot\sin y+f_x$; ---------------(2 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(f_{uu}\cdot x\cos y+f_{uy})\sin y+f_u\cdot\cos y+(f_{xu}\cdot x\cos y+f_{xy}).$$ ------------(3 分)

3. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上某点 M 处的切平面 π 的方程，使 π 过已知直线 L: $\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$.

解: 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$，则 $F_x=2x,\ F_y=4y,\ F_6=6z$.

则椭球面上点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面 π 的方程为

$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0,$$

即

$$x_0x+2y_0y+3z_0z=21.$$ ---------------(1 分)

取直线 L 上两点 $A\left(6,3,\dfrac{1}{2}\right),\ B\left(0,0,\dfrac{7}{2}\right)$. ---------------(1 分)

因为切平面 π 过直线 L，所以 A, B 的坐标满足 π 的方程，即

$$\begin{cases}6x_0+6y_0+\dfrac{3}{2}z_0=21,\\ \dfrac{21}{2}z_0=21,\end{cases}$$

又因为 $x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21$，解得

$$x_0=3,\ y_0=0,\ z_0=2 \text{ 或 } x_0=1,\ y_0=2,\ z_0=2.$$ ------------(1 分)

故所求的切平面方程为

$$x+2z=7 \text{ 或 } x+4y+6z=21.$$ ---------------(1+1 分)

4. 设闭区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$，$f(x,y)$为$D$上的连续函数，且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

求$f(x,y)$.

解：令$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，则$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}a$. ---------------(1 分)

由$a=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}a\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\cdot r\mathrm{d}r-\frac{8}{\pi}a\cdot\pi$$

$$=-\frac{2\pi}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-8a$$

$=\dfrac{2\pi}{3}-8a$, ---------------(2 分)

解得$a=\dfrac{2\pi}{27}$. ---------------(1 分)

所以$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}\cdot\dfrac{2\pi}{27}=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{16}{27}$. ---------------(1 分)