电磁学总结—静电场

一　电场强度的计算

方法 1. 叠加法或积分法：点电荷场强 +叠加原理

电荷离散分布： $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\left(\dfrac{q_i}{r_i^2}\hat{r}\right)$

电荷连续分布 $\vec{E} = \int \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r^2}\hat{r},\quad dq = \lambda dl, \sigma ds, \rho dv$

方法 2. 应用高斯定律：

条件 --- 场具有对称性;

选择合适的高斯面。

$$\oint\!\!\oint \vec{E}d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i(s内)} q_i$$

方法 3. 电场强度是电势负梯度

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla U$$

二. 电势的计算

方法 1. 场强积分法:

$$V_a = \int_a^{(0)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

方法 2. 电势叠加法：（由场强积分法演变而来）

点电荷电势 $$V_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

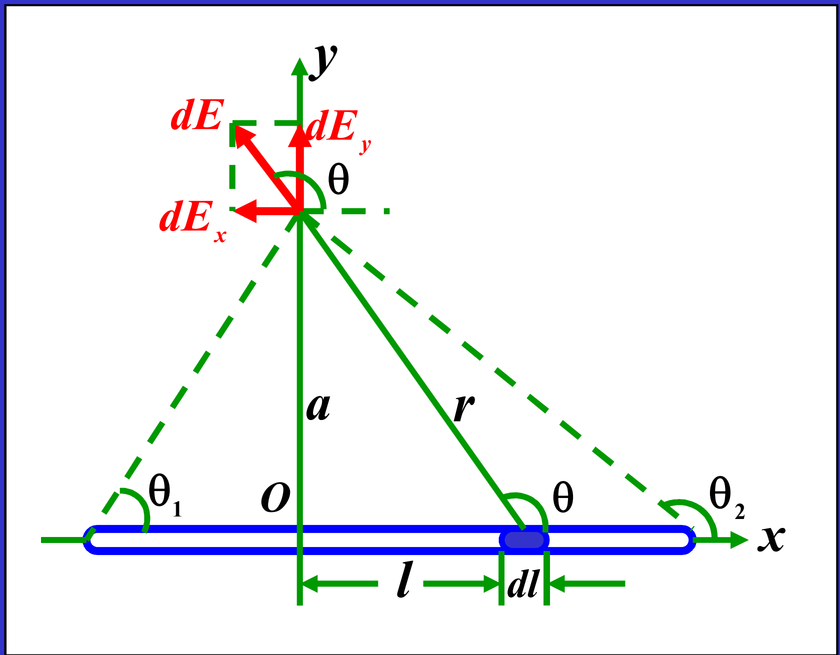
电荷离散分布： $$V_a = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

电荷连续分布： $$V_a = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

几种特殊的带电体的电场

①点电荷 $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $(U_\infty=0)$

②无限长直线 $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$



一般情况下：

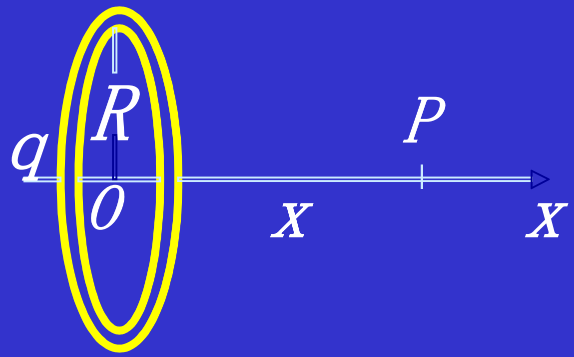
$$\vec{E}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)\hat{\vec{i}}+\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\hat{\vec{j}}$$

③ 无限大平面 $$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

④ 细圆环轴线上

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,x}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(R^2+x^2)^{1/2}}\qquad (U_\infty=0)$$



⑤ 均匀带电圆盘轴线上

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}]\qquad (x>0)\qquad U=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2+R^2}-|x|)$$

⑥ 均匀带电球面:

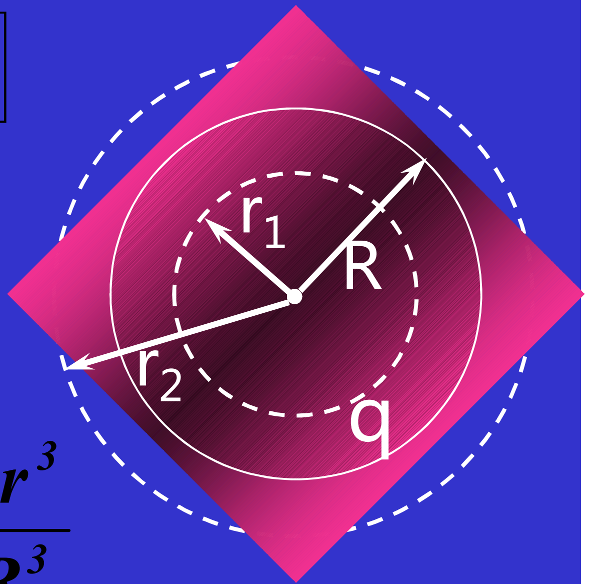
$$\vec{E}=0\qquad (r<R)\qquad U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\vec{r}}\qquad (r>R)\qquad U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

⑦ 均匀带电球体的电场分布（R、q）：

球体外的电场：与球面外电场相同。

$$\therefore \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (r \geq R)$$

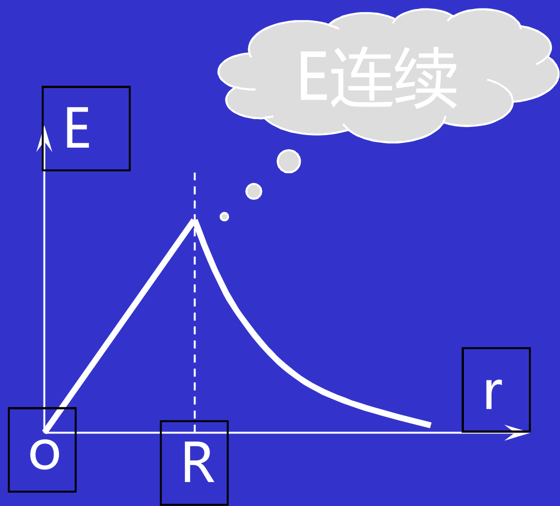


球体内的电场：

$$\Phi_E = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{qr^3}{R^3}$$

$$\therefore \quad E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \qquad (r \leq R)$$

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$ 为电荷体密度。



三 .静电场中的导体

1. 静电平衡条件：导体内部场强处处为零。

推论：1） 整个导体是等势体，表面是等势面。

2） 导体表面上的场强垂直与该点表面。

2. 在静电平衡条件下，导体上的电荷分布：

1) 实心导体: (不论导体是否带电，不论导体是否在外电场中）

导体内部没有净电荷,电荷只能分布在导体表面上。

2）空腔导体： 腔内无电荷时 -- 电荷只分布在外表面上；

腔内有电荷时 -- 导体内表面电荷与腔内电荷代数和为零。

3）导体表面电荷密度与场强关系：$\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$

3. 电容和电容器

电容 $C = \dfrac{Q}{U}$

平行平板电容器 $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

同心球电容器 $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}{R_B - R_A}$

同轴圆柱形电容器 $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(R_B / R_A)}$

等效电容：

串联等效电容 $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \dots$

并联等效电容 $C = C_1 + C_2 + \dots$

四. 静电场中的电介质

1. 电介质对电场的影响： $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

2.电介质中的高斯定律 $\oiint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \sum_{s内} q_0$

电位移矢量 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

在各向同性线性介质中: $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

五. 电场的能量

1. 电容器储能 $$W_c = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$$

2. 电场的能量

能量密度 $$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}$$

总能量 $$W_e = \int_V w_e dV = \int_V \frac{1}{2}DE \cdot dv$$

电磁学总结—磁场

一. 几个重要的物理量

1. 磁感应强度 $\vec{B}$　　定义式: $B = \dfrac{F_{Max}}{q_o v}$

2. 磁通量　$\Phi_m = \int d\Phi_m = \iint_s \vec{B}\cdot d\vec{s}$

3. 磁矩　$\vec{p}_m = IS\vec{n} = I\vec{S}$

二. 基本定律

1. B-S定律: $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Id\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2} \Rightarrow \vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q_0\vec{v}\times\vec{e}_r}{r^2}$

2.安培定律: $d\vec{F} = Id\vec{l}\times\vec{B} \Rightarrow \vec{f} = q_0\vec{v}\times\vec{B}$

载流线圈在磁场中所受的力矩 $\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}$

三. 基本定理

1. 高斯定律 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

2. 安培环路定理 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$

四. 几种典型的载流导体的磁场

1.长直导线电流:

有限长: $B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$

无限长: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

2.圆形电流轴线上一点: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\theta = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\dfrac{R^3}{r^3}$

圆心处: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$

3.长直螺线管:

有限长: 轴线上 $B = \dfrac{\mu_0 n I}{2}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$

无限长: 管内 $B = \mu_0 n I$ 管外为零

五. 电磁感应

1.电磁感应 $\boxed{\varepsilon=-\dfrac{d\Phi_m}{dt}}$ 楞次定律

(1) 动生电动势 $\varepsilon_{动}=\int_{-}^{+}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$

推论：匀强磁场中 $\varepsilon_{弧ab}=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\overline{ab}$

(2) 感生电动势： $\varepsilon_{感}=\oint_L \vec{E}_k\cdot d\vec{l}$

(3)自感系数: $L=\dfrac{\Phi}{I}$ 自感电动势： $\varepsilon=-L\dfrac{dI}{dt}$

(4) 互感系数：$M=M_{12}=M_{21}=\dfrac{\Phi_{12}}{I_2}=\dfrac{\Phi_{21}}{I_1}$

互感电动势：$\varepsilon_{12}=-M\dfrac{dI_2}{dt}$

2. 感应电场$\mathbf{E_i}$ 一由变化的磁场激发的非静电场

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\varphi}{dt}$$

圆柱形空间磁场 $dB/dt =$ 常数

$$E_{内} = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \qquad E_{外} = -\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}$$

六. 磁场能量

$$W = \int w_m dv = \int \frac{B^2}{2\mu} dv$$

自感线圈磁能 $W = \frac{1}{2}LI^2$

七. 位移电流&麦克斯韦方程组

1、位移电流:

$$I_D = \frac{\mathrm{d}\,\Phi_D}{\mathrm{d}\,t} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\,\vec{S} \qquad \vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

注意：位移电流与传导电流的异同。

2、麦克斯韦方程组:

$$\begin{cases} \oint\!\!\!\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0 & (1) \\ \oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\oint\!\!\!\oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} & (2) \\ \oint\!\!\!\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 & (3) \\ \oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint\!\!\!\oint_S (\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} & (4) \end{cases}$$

麦克斯韦方程组

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{s} = \iiint_V \rho_0 dv$$

意义：电位移通量仅和面内自由电荷有关；静电场是发散场。

$$\oiint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$$

意义：磁场是涡旋场。

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$$

意义：变化的磁场产生电场；$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=0$，$\oint \vec{E}\cdot d\,\vec{l}=0$

$$\oint \vec{H}\cdot d\,\vec{l} = \sum(I_0 + I_d) = \iint \vec{\delta}\cdot d\vec{s} + \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$$

意义：无变化电场：$\oint \vec{H}\cdot d\,\vec{l} = \sum I_0$

有变化电场，无传导电流：$\oint \vec{H}\cdot d\,\vec{l} = \sum I_d = \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$

电磁学总结—静电与磁场比较

电学	磁学
电荷元dq 场强大小$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{dq}{r^2}$ 方向：$d\vec{E}\,//\,\vec{r}$	电流元$Id\vec{l}$磁感大小 $dB=\frac{\mu}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$ 方向：$d\vec{B}\perp\vec{r}$ $d\vec{B}\perp Id\vec{l}$ $d\vec{B}\,//\,Id\vec{l}\times\vec{r}$

解题类型：**直线、圆环轴线上**

解题方法：取元、写大小 dE 或 dB 、**画方向**、建坐标、**分解$d\vec{E}$或$d\vec{B}$**、正确积分

必须记住的结论： $\left(dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{dq}{r^2}\quad dB=\frac{\mu}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}\right)$

① 有限长直线（场点与直线垂直距离 $=a$ ）

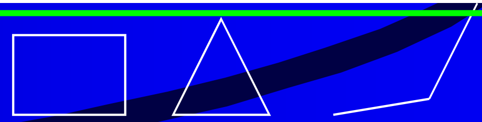
任意一点 $$B=\frac{\mu I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

中垂面上	$E=\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon a}\dfrac{L}{\sqrt{a^2+(\frac{L}{2})^2}}$	$B=\dfrac{\mu I}{4\pi a}\dfrac{L}{\sqrt{a^2+(\frac{L}{2})^2}}$
无限长	$E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon a}$	$B=\dfrac{\mu I}{2\pi a}$
半无限长	$E_x=E_y=\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon a}$	$B=\dfrac{\mu I}{4\pi a}$
延长线上	$E\neq 0$	$B=0$

方向

- 中垂面上 $E // a$（与直线垂直）
- 无限长
- 半无限长 与直线成45^0角
- 延长线上 $E //$ 直线

$\vec{B}\perp a$，与电流方向成右手螺旋。

解题类型：**1、分段直线的线状体；如：** 

解题方法：写大小 $E_1 \ldots E_n$ 或 $B_1 \ldots B_n$ 、**画方向**、建坐标、**分解** $\vec{E}_1 \ldots \vec{E}_n$ **或** $\vec{B}_1 \ldots \vec{B}_n$ 、正确求和

2、无限长的半圆筒；无限长平板（高斯定理、安培环路定理）

解题方法：取宽 $=dx$ 的无限长直线、写大小 dE 或 dB 、**画方向**、建坐标、**分解** $d\vec{E}$ **或** $d\vec{B}$ 、正确积分

$dE = \dfrac{\sigma dx}{2\pi\varepsilon a}$ 方向：平行 a

a：**场点到所取直线的垂直距离，此时是变量。**

$dB = \dfrac{\mu\ jdx}{2\pi a}$ 方向：垂直 a ，与电流成右手螺旋

② 圆环轴线上 $E=\frac{1}{2\varepsilon}\frac{\lambda Rx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$ $\quad B=\frac{\mu}{2}\frac{I\ R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}$

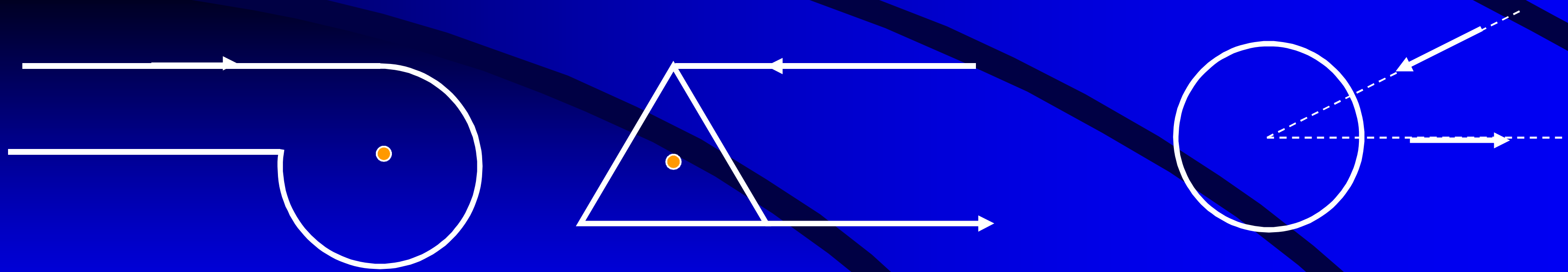
$(q=2\pi\ R\lambda)$

圆环中心 $E_o=0$ $\quad B_o=\frac{\mu I}{2R}$

顶角 $=\alpha$ 圆弧 $\quad B_{顶角处}=\frac{\mu I}{2R}\frac{\alpha}{2\pi}$

方向：沿轴，$\vec{B}$ 与电流成右手螺旋

解题类型：**1、分段直线+圆弧的线状体产生的磁感强度 $\vec{B}$**



解题方法： $\vec{B}=\vec{B}_1+\cdots\vec{B}_n$

2、带电的有宽度圆环、圆盘、有圆孔的无限大平板的 $\vec{E}$

解题方法：取半径 $= r$ 宽 $= dr$ 的圆环、写大小 dE 、沿半径积分

$$dE = \frac{x\sigma 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon\sqrt{(x^2+r^2)^3}} \qquad E = \int dE$$

3、带电的有宽度圆环、圆盘、有圆孔的无限大平板绕轴转动产生的 $\vec{B}$

带电圆环绕轴转动时电流大小

$$I = \frac{\text{总电量}}{\text{转一圈时间}} = \frac{2\pi R\lambda}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{2\pi\, r\, dr\sigma}{\frac{2\pi}{\omega}}$$

解题方法：取半径 $=r$ 宽 $=dr$的圆环、写大小 $\boldsymbol{dB}$、沿半径积分

$$dB = \frac{\mu\, r^2 \sigma\omega\, rdr}{2\sqrt{(x^2+r^2)^3}} \qquad B = \int dB$$

③ 无限大平板

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \qquad B = \frac{\mu}{2} j$$

j：面电流密度

沿宽度（垂直电流方向）单位宽度的电流强度

方向：**必须清楚。**

解题类型：**1、求有厚度的无限大平板的电场强度**

$$\sigma = \rho dx \qquad dE = \frac{\rho dx}{2\varepsilon}$$

特别注意上、下限

dx： 所取薄层的厚度

2、求无限大导体平板的各种问题

静电场

高斯定律

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_i=\iiint \rho dV$$

面内电荷，面上场；通量与电荷分布无关，但场有关。

$$D=\varepsilon E=\varepsilon_r\varepsilon_0 E$$

稳恒磁场

安培环路定理

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_i$$

线内电流、线上场；环流与电流分布无关，但场有关。

$$B=\mu H=\mu_r\mu_0 H$$

高斯定律　　解题类型：　　安培环路定理

高斯定律	安培环路定理
1、柱状体（圆柱、圆 筒、圆柱外套圆筒） **高斯面：** 与柱同轴、半径$=r$ 高$=h$、上、下有底的圆筒面。 $\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = D\cdot 2\pi\, rh$	**1、柱状体（圆柱、圆 筒、圆柱外套圆筒）** **安培环路：** 与柱轴垂直、半径$=r$ 的圆周。 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi\, r\vec{H}$
2、球状体（球体、球壳、球体外套球壳） **高斯面：** 与球同心、半径$=r$ 的球面。 $\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = D\cdot 4\pi\, r^2$	**2、螺绕环** **安培环路：** 与环轴垂直、半径$=r$ 的圆周。 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi\, r\vec{H}$

高斯定理　　　　　　　　安培环路定理

解题类型：

3、无限大带电平板

3、无限大载流平板

4、无限长密绕螺线管

$$\begin{cases} B_{外} = 0 \\ B_{内} = \mu nI \end{cases}$$

nI :沿管长方向单位长度电流强度

电学　　　　　　　　**磁学**

通过任一曲面的通量**等于**通过同一曲面的力线根数

$$\Phi_e = \int_S E\cos\theta dS$$

$$\Phi_m = \int_S B\cos\theta dS$$

闭合面内电荷**代数和为零**时 $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$

任何情况 $\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$

第三种求电场强度方法

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (U = \varphi)$$

电　势

1、点电荷电势 $U = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r} \quad (U_\infty = 0)$

2、叠加法求电势（场源电荷只能有限大，且取 $U_\infty = 0$ **）**

解题方法：取电荷元dq、写大小 dU，正确积分

$$dU = \frac{dq}{4\pi\varepsilon r} \qquad U = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon r}$$

3、已知场强分布或场强分布能够用高斯定理求出的情况求电势（典型如：球状和柱状场源电荷）

$$U_P = \int_P^{电势零点} E\cos\theta dl$$

① 球状带电体：如题中无规定，取 $U_\infty = 0$

$$U_P = \int_P^{\infty} Edr$$ 注意分段积分

② 柱状带电体：一定不能取无限远电势=0

$$U_P = \int_P^{电势零点} Edr$$ 注意分段积分

求 a、b 两点电势差 $U_a - U_b = \int_a^b E\cos\theta dl$ 直接积分，无需零点

球、柱带电体时： $U_a - U_b = \int_a^b Edr$

电场力作功=电势能减少量=运动电荷电量×电势减少量
减少量=差=起点量−末点量；增量=末点量−起点量

$$电场力作功 = q(U_a - U_b) = W_a - W_b = A_{ab}$$

外力作功= −电场力作功

电场能量

电**容**器储**电**能

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$$

电场能量密度 $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$

磁场能量

电**感**器储**磁**能

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

电场能量密度 $w_m = \frac{1}{2\mu}B^2$