线性代数复习试卷

目　录

第一章　模拟试卷

§1.1　试卷一

一. 选择题(每小题2分, 5题共10分)

1. 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 其中$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为3维列向量. 如果$|A|=2$, 则$|\alpha_1,2\alpha_2+3\alpha_1+\alpha_3,-3\alpha_3|=(\quad)$.

$(A)\ -36$　　$(B)\ -12$　　$(C)\ 12$　　$(D).\ 36$

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$均为$n$维向量, 则下列结论正确的是(　)

(A) 若$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$, 则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关;

(B) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关, 则对任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$, 都有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$;

(C) 若对任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$, 都有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq\mathbf{0}$, 则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关;

(D) 因为$0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m=\mathbf{0}$, 则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关.

3. n阶方阵A具有n个不同特征值是A与对角阵相似的(　).

(A) 充分必要条件;　　(B) 必要而非充分条件;

(C) 充分而非必要条件;　　(D) 既非充分也非必要条件.

4. 设α,β,γ是齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的一个基础解系, 则该方程组的一个基础解系可以是(　).

$(A)\ \alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma,\gamma$;　　$(B)\ \alpha-\beta,\alpha-\beta+\gamma,\gamma$;

$(C)\ \alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma-\alpha$;　　$(D)\ \alpha,\alpha+\beta,\alpha+\beta+\gamma$.

5. 设A,B分别为$n\times m,m\times n$矩阵，如果$AB=I_n$(I_n表示n阶单位矩阵)，则下列结论正确的是(　).

$(A)\ BA=I_m$;　　$(B)\ r(A)=r(B)=n$;

$(C)\ r(A)=r(B)=m$;　　$(D)\ r(A),r(B)>n$.

二. 填空题(每小题3分，5题共15分)

6. 设A,B,C为3阶矩阵, 且$|A|=2,B=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&4\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则$\begin{vmatrix}A&C\\\mathbf{0}&B\end{vmatrix}=$_____;

7. 如果齐次线性方程组$\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\lambda x_2-x_3=0\\2x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$有非零解, 则$\lambda=$_____;

8. 如果矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & k & 1 \\ 7 & 8 & 12 & 7 \end{pmatrix}$的秩为3, 则$k \neq$ _____;

9. 设$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, 则$A^{-1} =$ _____;

10. 设矩阵A与$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$相似, 且$A^*$为$A$的伴随矩阵, 则$|A^*| =$ _____.

三. 是非题(每小题2分，5题共10分)

11. 矩阵乘法满足左、右消去律; ( )
12. 行列式值为零，则行列式列向量组线性相关; ( )
13. n阶可逆矩阵的秩为n; ( )
14. 矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$不可对角化; ( )
15. 设A, B为同阶矩阵,则$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. ( )

四. 计算题(本大题5题，共53分)

16.(10分) 设$AX = X + I$, 其中$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求$X$.

17.(8分)求行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$的第一行代数余子式之和$A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$.

18.(12分)已知非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + 4x_2 + 5x_3 + bx_4 = -2 \end{cases}$有解, 而且对应的齐次线性方程组有两个线性无关的解. 求a, b的值及方程组的通解.

19.(10分)确定常数a,使向量组$\alpha_1 = (1,1,a)^T, \alpha_2 = (1,a,1)^T, \alpha_3 = (a,1,1)^T$ 可由向量组$\beta_1 = (1,1,a)^T, \beta_2 = (-2,a,4)^T, \beta_3 = (-2,a,a)$线性表示，但向量组$\beta_1, \beta_2, \beta_3$不能由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示.

20.(13分)已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+2x_1x_3+ax_2^2+2x_2x_3+5x_3^2$ 的矩阵A的行列式值为72.

(1) (4分) 求二次型的矩阵A;

(2) (9分) 求一个正交变换$x=Py$把二次型化为标准形.

五. 证明题(2题，每题6分共12分)

21.(6分)设α为n维实列向量, 且$\alpha^T\alpha=2$, 求证$A=I-\alpha\alpha^T$为正交矩阵.

22.(6分)设A为复方阵，如果$A=-\overline{A^T}$, 则称A为反厄米特矩阵. 求证反厄米特矩阵A的特征值都是纯虚数或者零.

§1.2 试卷二

一. 选择题(每小题2分, 5题共10分)

1. 设A,B是n阶方阵, k为数. 则下列结论错误的是( ).

 (A) $|AB|=|A|\cdot|B|$ (B) $|kAB|=k|A|\cdot|B|$;

 (C) $|A^TB^T|=|A|\cdot|B|$; (D) 如果A,B可逆, 则$|(AB)^{-1}|=|A|^{-1}|B|^{-1}$.

2. 设A,B是n阶方阵, k为非零数. 则下列命题正确的是( ).

 (A) $(AB)^T=A^TB^T$; (B) 如果A,B可逆, 则$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$;

 (C) $r(kA)=r(A)$; (D) $r(AB)=r(A)r(B)$.

3. 设$Ax=\mathbf{b}$有解, 则下列命题正确的是( ).

 (A) A的列向量组线性无关; (B) A的行向量组线性无关;

 (C) A的行向量组线性相关; (D) $\mathbf{b}$可由A的列向量组线性表示.

4. 设A是n阶可逆方阵$(n\geq 2)$, 如果$k\neq 0$, 则$(kA)^*=($).

 (A). $k^{n-1}A^*$; (B). kA^*; (C). k^nA^*; (D). $k^{-1}A^*$.

5. 下列矩阵中与$A=\begin{pmatrix}2&2\\0&4\end{pmatrix}$不相似矩阵是( ).

 (A) $\begin{pmatrix}2&0\\5&4\end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix}2&7\\0&4\end{pmatrix}$.

二. 填空题(每小题3分, 5题共15分)

6. 设α,β为3维列向量, 且$\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\3&6&3\end{pmatrix}$, 则$\beta^T\alpha=$_____;

7. 向量组$(3,3,4,7),(2,1,3,4),(1,-1,2,1),(4,5,5,10)$的秩为_____;

8. 设3阶矩阵A的行列式为2, 则$|2A^{-1}+A^*|=$_____;

9. 设矩阵A与$\begin{pmatrix}2&1&a\\1&2&b\\0&0&2\end{pmatrix}$相似, 则$A$的特征值是1, 3, _____;

10. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta\in\mathbf{R}^3$, 且$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$, 如果$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=\mathbf{0},\\3\alpha_1+4\alpha_2+4\alpha_3=\beta.\end{cases}$ 则线性方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=\beta$的通解为_____.

三. 是非题(每小题2分, 5题共10分)

11. 设α, β为矩阵A不同特征值下的特征向量, 则$\alpha+\beta$不是A的特征向量; ( )
12. 如果矩阵A的行向量组线性无关, 则$Ax=\mathbf{b}$有唯一解; ( )
13. 两个交换的同阶对称矩阵的乘积仍然是对称矩阵; ( )
14. 如果向量组中的向量两两线性无关, 则向量组线性无关; ( )
15. 设A为方阵, 如果$\mathrm{tr}(A)=0$,则A不可逆. ( )

四. 计算题(本大题5题，共53分)

16.(10分) 设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&2\\1&0&1\end{pmatrix}$, 且$A^2X=(3A+I)X+I$. 求$X$.

17.(10分)设$A=\begin{pmatrix}B&\mathbf{0}\\B&B\end{pmatrix}$, 且$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, 求$A^n$.

18.(8分)计算$D_{n+1}=\begin{vmatrix}-a_1&a_1&&&\\&-a_2&a_2&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&-a_n&a_n\\1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$(空白处元素全为零).

19.(12分)求解线性方程组$\begin{cases}x_1-2x_2-x_3-x_4+5x_5=-1,\\4x_1-8x_2-3x_3+x_4+7x_5=2,\\-x_1+2x_2+x_3+2x_4-7x_5=2,\\2x_1-4x_2+x_3-x_4-x_5=t.\end{cases}$

20.(13分)已知$(1,-1,0)^T$为二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2bx_1x_3+2x_2x_3$ 的矩阵A的特征向量.

(1) (4分) 求a, b;

(2) (9分) 求正交变换$x=Py$将二次型化为标准形.

五. 证明题(2题，每题6分共12分)

21.(6分)设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}$ 线性无关.

(1) (3分)求证向量组$\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \cdots, \alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}, \alpha_{2k}+\alpha_1$线性相关;

(2) (3分)求证$r(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \cdots, \alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}, \alpha_{2k}+\alpha_1)=2k-1$.

22.(6分) 设A, B为n阶正交矩阵,且$|A|=-|B|$, 求证$|A+B|=0$.

§1.3 试卷三

一. 选择题(每小题2分，5题共10分)

1. 若非零矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$的伴随矩阵为零矩阵, 则必有( ).

(A) $a=b=0$; (B) $a=b\neq 0$;

(C) $a=-2b$且$b\neq 0$; (D) $a\neq b$且$a+2b\neq 0$.

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$线性相关, 则下列命题正确的是( )

(A) α_1不能由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$线性表示 (B) β为零向量;

(C) β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$唯一表示; (D) 以上都不正确.

3. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则$A$与$B$ ( ).

(A) 合同且相似; (B) 合同但不相似; (C) 不合同但相似; (D) 既不合同也不相似.

4. 设n元线性方程组$Ax=\mathbf{b}$有无穷多组解, 则下列命题正确的是( ).

(A) A的列向量组线性无关; (B) A的行向量组线性无关;

(C) $\mathbf{b}$由A的列向量组表示且唯一; (D) $\mathbf{b}$可由A的列向量组线性表示,但不唯一.

5. 设n阶矩阵A不是单位矩阵, 若$A^2=I$, 则( ).

(A) $I-A$,$I+A$都不可逆; (B) $I+A$不可逆;

(C) $I-A$, $I+A$都可逆;. (D) $I+A$可逆.

二. 填空题(每小题3分，5题共15分)

6. 设A为n阶正交矩阵, 则$|(A^*)^2|=$_____;

7. 设A是n阶非可逆方阵, 且A^*中第一个列向量为$\alpha\neq\mathbf{0}$, 如果非齐次线性方程组$Ax=\mathbf{b}$有解β, 则线性方程组$Ax=\mathbf{b}$的通解为_____;

8. 设A为2阶矩阵, α_1,α_2为线性无关的2维列向量, 又$A\alpha_1=\mathbf{0}, A\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_2$. 则$A$的非零特征值为_____;

9. 设3阶矩阵A的特征值2, 1,1, 则$|4A^{-1}-3I|=$_____;

10. 设$\alpha=(1,1,1), \beta=(k,1,k)$, 若矩阵$\alpha\beta^T$ 相似于$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则$k=$_____.

三. 是非题(每小题2分，5题共10分)

11. 设矩阵A与B相抵, 则A与B相似; ( )
12. 设齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$与$Bx=\mathbf{0}$同解, 则A,B的行向量组等价; ( )
13. 两个同阶正交矩阵的乘积仍然是正交矩阵; ( )
14. 如果$A^2=\mathbf{0}$, 则$A=\mathbf{0}$; ( )
15. 等价的向量组具有相同个数向量. ( )

四. 计算题(本大题5题，共53分)

16.(8分)计算行列式$D=\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$.

17.(10分)设$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 求$A^{-1}$.

18.(12分)设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -a+4 \\ -1 & a-2 & 2a-3 \end{pmatrix}$不可逆.

(1) (4分)求a的值;

(2)(8分)求线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的通解.

19.(10分)设a,b为实数, 计算下列向量组的秩与一个极大无关组:

$$\alpha_1=(1,2,3,4,1),\alpha_2=(3,0,3,0,1),\alpha_3=(1,5,a,10,2),$$

$$\alpha_4=(1,-1,0,-2,b),\alpha_5=(3,3,6,6,2).$$

20. (13分)设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

的规范型为$y_1^2+y_2^2$.

(1)(6分) 求a值与二次型的矩阵A;

(2)(7分) 求正交矩阵P ,使得$P^{-1}AP$为对角矩阵.

五. 证明题(2题，每题6分共12分)

21.(6分) 设α,β是三维列向量, 且$A=\alpha\alpha^T-\beta\beta^T$.

(1)(3分)求证$r(A)\leq 2$;

(2)(3分)若α,β线性相关，求证$r(A)<2$.

22.(6分) 设A为3阶矩阵, α_1, α_2为A的分别属于特征值$-1, 1$的特征向量, 向量α_3满足$A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$.

(1)(3分)求证$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关;

(2)(3分)令$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求$P^{-1}AP$.

§1.4 试卷四

一. 选择题(每小题2分, 5题共10分)

1. 若n阶矩阵A,B可逆, 则矩阵方程$AXB=C$的解为(　　).

(A) $X=A^{-1}B^{-1}C$; (B) $X=A^{-1}CB^{-1}$;

(C) $X=CA^{-1}B^{-1}$; (D) $X=B^{-1}CA^{-1}$.

2. 设矩阵A,B相抵, 则有(　　)

(A) A,B相似; (B) A,B合同;

(C) $r(A)=r(B)$; (D) 以上都不正确.

3. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&a&0\\0&0&0\end{pmatrix}$相似, 则$a=$(　　).

(A) 0; (B) 3; (C) 1; (D) -1.

4. 设矩阵A满足$r(A)=r<n$, 则n元非齐次线性方程组$Ax=\mathbf{b}$ (　).

(A) 有无穷多组解; (B) 有唯一解;

(C) 无解; (D) 不一定有解.

5. 设a,b为矩阵A的特征值, 特征向量分别为ξ_1,ξ_2, 且$a=-b$, 则$\xi_1+\xi_2$ 一定(　　).

(A) 是A的特征向量; (B) 是$-A$的特征向量;

(C) 是A^2的特征向量; (D) 不是A^2的的特征向量.

二. 填空题(每小题3分, 5题共15分)

6. 设$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$为正交矩阵, 则$ac+bd=$_____;

7. 设A是n阶正交矩阵, 且B=$\begin{pmatrix}A&A\\\mathbf{0}&A\end{pmatrix}$. 则$|2B^*|=$_____;

8. 设A为2阶矩阵, α_1,α_2为线性无关的2维列向量, 又$A\alpha_1=\mathbf{0}, A\alpha_2=\alpha_1+3\alpha_2$. 则$|A+I|=$_____;

9. 设$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(0,0,1)^T$为$\mathbf{R^3}$基, 则$\beta=(1,2,3)^T$在此组基下坐标为_____;

10. 设$\alpha=(1,1,1),\beta=(k,1,k)$, 若矩阵$\alpha\beta^T+I$ 相似于$\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则$k=$_____.

三. 是非题(每小题2分, 5题共10分)

11. 设矩阵A与B相似, 则A与B相抵; ( )

12. 设n元齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$与$Bx=\mathbf{0}$同解, 则$r(A)=r(B)$; ( )

13. 如果$Ax=\mathbf{b}$有解, 则$Ax=\mathbf{0}$有非零解; ( )

14. $n+1$个n维向量组线性相关; ( )

15. 两个矩阵相似的充分必要条件是两个矩阵有相同特征值. ( )

四. 计算题(本大题5题，共53分)

16.(8分)计算行列式$D_n=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n\times n}$.

17.(10分)设$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 如果$A^3X=3AX+4I$, 求X.

18.(12分)设线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0. \end{cases}$ 与线性方程$2x_1+3x_2+2x_3=a-1$有公共解, 求a的值及所有公共解.

19.(10分) 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$B=A^3-3A^2+4A-I$. 求$(PBP)^n$.

20.(13分)已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+bx_2^2+2x_2x_3+3x_3^2$, 如果二次型对应的实对称矩阵的行列式值为20, 对角线元素之和为9.

(1)(4分)求a,b值;

(2)(9分)求正交变换$x=Py$将二次型化为标准形.

五. 证明题(2题，每题6分共12分)

21.(6分) 设A为n阶对称矩阵, 如果$A+I$为正交矩阵, 求证$r(A)+r(A+2I)=n$.

22.(6分) 设n元非齐次线性方程组$Ax=\mathbf{b}$满足$r(A)=r(A,\mathbf{b})=n-2$, 且α,β,γ为线性方程组$Ax=\mathbf{b}$的线性无关解,求证$x=\alpha+k_1(\alpha-r)+k_2(\beta-\gamma)$($k_1,k_2$为任意常数)为方程组$Ax=\mathbf{b}$的通解。

§1.5 试卷五

一. 选择题(每小题2分, 5题共10分)

1. 如果3阶行列式第一行元素为1, 2, 3, 而且第二行余子式是$a,1,2$, 则$a=($ $)$.
   $(A)\ -8$ $(B)\ 8$ $(C)\ -4$ $(D).\ 4$

2. 设A,B是n阶可逆矩阵, 下面陈述正确的是( ).
   $(A)\ |A+B|=|A|+|B|$; $(B)\ |2A|=2|A|$;
   $(C)\ (AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$; $(D)\ (AB)^T=B^TA^T$.

3. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$为$n$维列向量组，$A$是$m\times n$矩阵, 则下列选项正确的是( ).
   (A) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_m$线性相关;
   (B) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_m$线性无关;
   (C) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_m$线性相关;
   (D) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_m$线性无关.

4. n阶方阵A与B相似, 则下列结论**不正确**的是( ).
   (A) A,B有相同的特征多项式; (B) A,B有相同的行列式;
   (C) A可对角化的充要条件是B可对角化; (D) A,B有相同的特征向量.

5. 设矩阵A通过矩阵初等列变换化为B, 则下列结论正确的是( ).
   (A) A的任意r列组成的向量组和B的对应r列组成的向量组等价;
   (B) 线性方程组$Ax=\mathbf{0}$和线性方程组$Bx=\mathbf{0}$同解;
   (C) A的行向量组极大无关组和B的行向量组极大无关组相同;
   (D) A的列向量组和B的列向量组等价.

二. 填空题(每小题3分，8题共24分)

6. 设$A=\begin{pmatrix}3&2&a&d\\3&3&b&c\\2&1&a&d\\2&1&b&c\end{pmatrix}$, 则$|A^*|=$_____;

7. 如果$|A|=3$, 则$\begin{vmatrix}A&A\\A&2A\end{vmatrix}=$_____;

8. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则$r(\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3)=$_____;

9. x,y,z 是两两正交的单位向量, 则向量$x+y+3z$的长度是_____;

10. 实对称矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&2\\0&2&1\end{pmatrix}$, 则二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$的规范形为_____;

11. $n\times 3$矩阵A的秩为1, 且线性方程组$Ax=\mathbf{b}$有三个线性无关解α,β,γ, 则$Ax=\mathbf{b}$通解为_____;

12. 设$A=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\,,1\,,1\end{pmatrix}$, 则$A^n=$_____;

13. 设$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $V=\{f(A)\,|\,f(x)\in\mathbf{R}[x]\}$, 则$V$为$\mathbf{R}$上3维线性空间, 基为_____.

三. 计算题(本大题5题，共54分)

14.(12分)求$\begin{vmatrix}a&a&\cdots&a&x\\a&a&\cdots&x&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a&x&\cdots&a&a\\x&a&\cdots&a&a\end{vmatrix}$的值.

15.(10分)设$A=\begin{pmatrix}B&I\\B&B+I\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$, 求$A^{-1}$.

16.(12分)已知线性方程组

$$\begin{cases}4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1,\\2x_1+x_2+3x_3-3x_4=1,\\ax_1-x_2+bx_3+(b-6)x_4=3.\end{cases}$$

有解$\eta=(2,-3,0,0)^T$. 求线性方程组的通解。

17.(15分)设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&a&b\\a&2&1\\b&1&2\end{pmatrix}$与矩阵$B=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$相似(其中$a,b$为正整数), 求$A$的特征向量.

18.(9分) 设V是实2阶方阵全体, 且E_{ij}是第i行第j列元素为1其他元素为零的二阶方阵. 如果

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},$$

则$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 与A_1,A_2,A_3,A_4 为V的两组基.

(1)(5分) 求$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$到$A_1,A_2,A_3,A_4$的过渡矩阵;

(2)(4分) 求在两组基下坐标相同的矩阵A.

四. 证明题(2题，每题6分共12分)

19.(6分)设α为n维实列向量, 且$\alpha^T\alpha = k$, 试确定k为何值时矩阵$A = I + \alpha\alpha^T$为正交矩阵.

20.(6分)设β是线性方程组$Ax = \mathbf{b}(\mathbf{b} \neq \mathbf{0})$的一个解, $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-r}$ 是线性方程组$Ax = \mathbf{0}$的基础解系. 求证$\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-r}, \beta$线性无关.