线性代数复习试卷

目　录

第一章　模拟试卷 **1**

1.1　模拟试卷解答 1

第一章　模拟试卷

§1.1　模拟试卷解答

试　卷　一

1. (B)

根据行列式性质有

$$|\alpha_1, 2\alpha_2+3\alpha_1+\alpha_3, -3\alpha_3| = |\alpha_1, 2\alpha_2, -3\alpha_3| = -6|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = -12.$$

故答案为选项(B).

2. (C)

根据线性无关定义可得.

3. (C)

n阶方阵A具有n个不同的特征值是A可对角化的充分条件而非必要条件, 例如n阶单位矩阵是对角矩阵, 但只有特征值1, 且重数为n.

4. (D)

由于齐次线性方程组的基础解系为齐次线性方程组解空间的基, 所以对应的向量组线性无关, 而选项$(A),(B),(C)$对应的向量组都线性相关, 所以不能作为齐次线性方程组基础解系.

5. (B)

根据秩的等式与不等式有

$$n = r(AB) \le r(A) \le n,$$

得$r(A)=n$. 同理$r(B)=n$. 所以选项(B)正确.

6. -8

因为$\begin{vmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|$, 而$|B|=-4$. 所以$\begin{vmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{vmatrix} = -8$.

7. $\lambda=-1$

如果A为n阶方阵, 则齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$有非零解的充分必要条件是$|A|=0$. 由于所给方程组对应的系数行列式为$-3(\lambda+1)$, 故得$\lambda=-1$.

8. $k\neq 0$

设$A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&3&2\\1&-4&k&1\\7&8&12&7\end{pmatrix}$,则有

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-1&0\\0&0&k&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

由于$r(A)=3$, 得$k\neq 0$.

9. $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

注意到所给矩阵为正交矩阵, 因此其逆阵为其转置.

10. 36

根据伴随矩阵的行列式性质有$|A^*|=|A|^{3-1}=|A|^2$. 又因为相似矩阵行列式值相等, 得$|A|=6$, 从而$|A^*|=36$.

11. **错**

矩阵乘法不满足消去律.

12. **正确**

行列式为零的充要条件是其行(列)向量组线性相关.

13. **正确**

n阶矩阵A可逆的充要条件是其秩等于n.

14. **正确**

如果$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$与对角矩阵相似, 则其与单位矩阵相似(因为所给矩阵的特征值为1, 且重数为2, 显然这是不可能的.

15. **错**

矩阵乘法不满足交换律.

16. **解** 因为$AX=X+I$, 所以有$X=(A-I)^{-1}$, 对

$$(A-I,I)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

作初等行变换, 得

$$(A-I,I)\rightarrow\left(I,\begin{array}{cccc}-2&1&1&1\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{array}\right).$$

所以$X=\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}$.

17. **解** $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&3\\2&3&4&5\\4&5&6&7\end{vmatrix}=0.$

18. **解** 如果系数矩阵A的秩$r(A)>2$, 则齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$基础解系至多含有$4-3=1$个线性无关解, 矛盾. 所以$r(A)=2$.

对线性方程组增广矩阵作初等行变换:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\2&3&4&-1&-1\\a&4&5&b&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&1&2&-3&1\\0&4-a&5-a&b-a&-2+a\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&1&2&-3&1\\0&0&a-3&b+12-4a&-6+2a\end{pmatrix}.$$

由$r(A)=2$得$a-3=0,b+12-4a=0$, 即$a=3,b=0$. 且有

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\2&3&4&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&4&-2\\0&1&2&-3&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可得齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的基础解系：

$$\xi_1=(1,-2,1,0)^T,\xi_2=(-4,3,0,1)^T,$$

原线性方程组的特解$\eta=(-2,1,0,0)^T$. 因此所求线性方程组通解为：$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta$.

19. **解** 如果$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 则$\beta_1,\beta_2,\beta_3$一定可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示(因为此时$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为3维空间的基), 与所给条件矛盾, 所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关, 得$a=1$或者$a=-2$.

如果$a=-2$, 可验证α_2不能由β_1,β_2,β_3线性表示, 矛盾. 所以$a\neq -2$;

当$a=1$时, 可以验证满足题设条件.

20. **解** (1)根据二次型有$A=\begin{pmatrix}4&0&1\\0&a&1\\1&1&5\end{pmatrix}$. 因为$|A|=72$, 有$a=4$, 所以

$$A=\begin{pmatrix}4&0&1\\0&4&1\\1&1&5\end{pmatrix}.$$

(2) 矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&0&-1\\0&\lambda-4&-1\\-1&-1&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-6),$$

得矩阵A的特征值为3, 4, 6.

当$\lambda=3$时, 求解线性方程组$(3I-A)x=\mathbf{0}$, 得特征向量$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T$;

当$\lambda=4$时, 求解线性方程组$(4I-A)x=\mathbf{0}$, 得特征向量$\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$;

当$\lambda=6$时, 求解线性方程组$(6I-A)x=\mathbf{0}$, 得特征向量$\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T$.

所以$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

21. **证** 因为

$$\begin{aligned}AA^T&=(I-\alpha\alpha^T)(I-\alpha\alpha^T)^T=(I-\alpha\alpha^T)(I-\alpha\alpha^T)\\&=I-2\alpha\alpha^T+\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T\\&=I-2\alpha\alpha^T+2\alpha\alpha^T=I.\end{aligned}$$

所以A为正交矩阵.

22. **证** 设$A\alpha=\lambda\alpha,\lambda\in\mathbf{C},\alpha\in\mathbf{C}^n$, 且$\alpha$非零, 有

$$\overline{\alpha}^TA\alpha=\lambda\overline{\alpha}^T\alpha.$$

由于$\overline{\alpha}^TA\alpha=(\overline{\overline{A}^T\alpha})^T\alpha$, 且$A$是反厄米特矩阵, 所以

$$\lambda\overline{\alpha}^T\alpha=\overline{\alpha}^TA\alpha=(\overline{-A\alpha})^T\alpha=-\overline{\lambda\alpha}^T\alpha=-\overline{\lambda}\overline{\alpha}^T\alpha.$$

得$(\overline{\lambda}+\lambda)\overline{\alpha}^T\alpha=0$. 因为$\alpha\neq 0$, 所以$\alpha^T\alpha\neq 0$, 有$\overline{\lambda}=-\lambda$, 即$\lambda$为纯虚数或者零, 得证.

试 卷 二

1. (B)

根据行列式与矩阵关系, $|k(AB)| = k^n|A|\cdot|B|$.

2. (C)

根据秩的性质, 当$k\neq 0$时, 有$r(kA)=r(A)$.

3. (D)

$Ax=\mathbf{b}$有解充分必要条件是$\mathbf{b}$可由A的列向量组线性表示.

4. (A)

因为$|kA|=k^n|A|$, 且

$$(kA)(k^{n-1}A^*)=k^n(AA^*)=k^n|A|I=|kA|\cdot I,$$

所以选项(A)正确.

5. (C)

矩阵$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$的特征值为$0,4$, 而矩阵$A$特征值为$2,4$, 所以这两个矩阵不相似(相似矩阵具有相同特征值.)

6. 8

因为$\beta^T\alpha$为1阶矩阵, 所以$\beta^T\alpha=\mathrm{tr}(\beta^T\alpha)=\mathrm{tr}(\alpha\beta^T)=8$.

7. 2

直接计算可得.

8. 32

因为

$$|2A^{-1}+A^*|=|A^{-1}|\cdot|2I+AA^*|=|A|^{-1}\cdot|2I+|A|\cdot I|=\frac{1}{2}|4I|=32.$$

9. 2

直接计算可得.

10. $k(1,2,1)^T+(3,4,4)^T$

设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. 由$\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=\mathbf{0}$知$(1,2,1)^T$为$Ax=\mathbf{0}$的非零解. 由于$r(A)=2$, 所以$(1,2,1)^T$为$Ax=\mathbf{0}$的基础解系. 又因为$3\alpha_1+4\alpha_2+4\alpha_3=\beta$, 所以$(3,4,4)^T$为$Ax=\beta$的特解. 由此得$k(1,2,1)^T+(3,4,4)^T$为$Ax=\beta$的通解.

11. **正确**

事实上, 如果$A\alpha=\lambda\alpha, A\beta=\mu\beta$, 且$\lambda\neq\mu$. 若$\alpha+\beta$是A的特征向量, 则存在$\nu$使得

$$A(\alpha+\beta)=\nu(\alpha+\beta).$$

根据α与β线性无关, 得$\nu-\lambda=\nu-\mu=0$, 从而$\lambda=\mu$, 矛盾.

12. **错**

设A为$m\times n$矩阵, 则对线性方程组$Ax=\mathbf{b}$有$m=r(A)\le r(A,\mathbf{b})\le m$, 得$r(A)=r(A,\mathbf{b})=m\le n$. 当$n>m$时, 线性方程组有无穷多组解.

13. **正确**

当A,B为对称矩阵时, 有$(AB)^T=B^TA^T=BA$. 若$AB=BA$, 则有$(AB)^T=BA=AB$, 即AB为对称矩阵.

14. **错**

例如α,β线性无关, 则$\alpha,\beta,\alpha+\beta$为线性相关向量组, 并是两两线性无关的.

15. **错**

例如矩阵$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$的迹为零. 但矩阵可逆.

16. **解** 计算A^2, 得$A^2=2A$, 所以根据$A^2X=(3A+I)X+I$, 得$(A+I)X=-I$, 即有$X=-(A+I)^{-1}$. 经计算得

$$X=-(A+I)^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&0&-1\\-2&3&-2\\-1&0&2\end{pmatrix}.$$

17. **解** 首先有$A^n=\begin{pmatrix}B^n&\mathbf{0}\\nB^n&B^n\end{pmatrix}$. 下面计算$B^n$.

设$J=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$, 有$B=I+J$, 得

$$J^2=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, J^3=\mathbf{0}.$$

又因为

$$B^n=\sum_{i=1}^{n}C_n^iJ^iI^{n-i}=I+nJ+\frac{n(n-1)}{2}J^2,$$

于是

$$B^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2n&3n\\0&0&2n\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&2n(n-1)\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2n&n(2n+1)\\0&1&2n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

18. **解** 将前n 列加到最后1列, 然后按最后一列展开:

$$D_{n+1}=(n+1)\begin{vmatrix}-a_1 & a_1 & & & \\ & -a_2 & a_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n\end{vmatrix}=(n+1)(-1)^n a_1a_2\cdots a_n.$$

19. **解** 线性方程组增广矩阵

$$(A,\mathbf{b})=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & -1 & 5 & -1\\ 4 & -8 & -3 & 1 & 7 & 2\\ -1 & 2 & 1 & 2 & -7 & 2\\ 2 & -4 & 1 & -1 & -1 & t\end{pmatrix},$$

对其作初等行变换, 有

$$(A,\mathbf{b})\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-2\end{pmatrix},$$

当$t\neq 2$时, $r(A,\mathbf{b})\neq r(A)$, 线性方程组无解;
当$t=2$时, $r(A,\mathbf{b})=r(A)=3<5$, 线性方程组有无穷多解, 求解得通解:

$$x=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\0\\3\\2\\1\end{pmatrix},$$

其中k_1,k_2为任意常数.

20.**解** 二次型的对称矩阵为$A=\begin{pmatrix}a & 1 & b\\ 1 & 2 & 1\\ b & 1 & 2\end{pmatrix}$.

(1) 由于$(1,-1,0)^T$为A的特征向量, 所以存在数k, 使得

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

由此得

$$\begin{cases} a-1=k, \\ -1=-k, \\ b-1=0. \end{cases}$$

于是$k=1$, 且$a=2,b=1$.

(2) 由(1)知$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 而$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$, 得特征值为$1,1,4$.

当$\lambda=1$时, 求解线性方程组$(I-A)x=\mathbf{0}$, 有特征向量$\alpha_1=(1,-1,0)^T,\alpha_2=(1,0,-1)^T$. 对其施密特正交化, 得正交规范向量组

$$\xi_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)^T,\xi_2=\frac{\sqrt{6}}{6}(1,1,-2)^T;$$

当$\lambda=4$时, 求解线性方程组$(4I-A)x=\mathbf{0}$, 有特征向量$\alpha_3=(1,1,1)^T$, 单位化, 得$\xi_3=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)^T$.

得$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$.

21. **证** (1)因为$(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+(\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k})-(\alpha_{2k}+\alpha_1)=\mathbf{0}$, 所以根据线性相关定义知$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k},\alpha_{2k}+\alpha_1$ 线性相关.

(2) 如果

$$l_1(\alpha_1+\alpha_2)+l_2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+l_{2k-1}(\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k})=\mathbf{0},$$

其中$l_1,l_2,\cdots,l_{2k-1}$是数. 可得

$$l_1\alpha_1+(l_1+l_2)\alpha_2+\cdots+(l_{2k-2}+l_{2k-1})\alpha_{2k-1}+l_{2k-1}\alpha_{2k}=\mathbf{0},$$

根据条件$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{2k-1},\alpha_{2k}$线性无关得

$$l_1=l_1+l_2=\cdots=l_{2k-2}+l_{2k-1}=l_{2k-1}=0,$$

于是所有$l_i=0$, 得$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}$ 线性无关, 从而

$$r(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k},\alpha_{2k}+\alpha_1)=2k-1.$$

22. **证** 由条件$|A|=-|B|$有$|A|\cdot|B^{-1}|=-1$, 又B为正交矩阵, 所以$|B^{-1}|=|B^T|=|B|$. 于是$|AB|=|A|\cdot|B|=-1$. 因为

$$|A+B|=|A(B^{-1}+A^{-1})B|=|A|\cdot|B|\cdot|B^{-1}+A^{-1}|,$$

且$A^{-1}=A^T,B^{-1}=B^T$,从而

$$|A+B|=|AB|\cdot|A^T+B^T|=-|(A+B)^T|=-|A+B|.$$

由此有$|A+B|=0$.

试　卷　三

1. (B)

由条件知A的秩小于$3-1=2$, 又A非零, 所以$r(A)=1$. 由此得$a=b\neq 0$.

2. (C)

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$线性相关, 所以$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,α_4唯一表示(此为定理.)

3. (B)

经过计算实对称矩阵A的特征值为$3,3,0$, 所以A的规范型是$\mathrm{diag}(1,1,0)$. 显然B的规范型是$\mathrm{diag}(1,1,0)$, 所以A,B合同. 由于相似矩阵具有相同特征值, 而B特征值为$1,2,0$, 所以A,B不相似.

4. (D)

由条件$Ax=\mathbf{b}$有无穷多组解知, $r(A)=r(A,\mathbf{b})<n$, 所以A的列向量组线性相关. 故选项(A)不正确. 根据条件不能得出矩阵A的行向量组是否相关或无关, 所以选项(B)错误. 又$Ax=\mathbf{b}$有解的充分必要条件是$\mathbf{b}$可由A的列向量组线性表示, 根据解的个数无穷知, 此表示法不唯一, 从而选项(D)正确.

5. (B)

由$A^2=I$知$(I-A)(I+A)=\mathbf{0}$. 如果$I+A$可逆, 可推得$I-A=\mathbf{0}$, 即$A=I$, 矛盾. 故$I+A$不可逆. 注意$I-A$是否可逆不能确定.

6. 1

因为$|A^*|=|A|^{n-1}$, 所以$|(A^*)^2|=|A|^{2(n-1)}=1$(因为A是正交阵, 故$|A|=\pm 1$.)

7. $k\alpha+\beta$(其中k任意.)

因为A^*中第一个列向量为$\alpha\neq\mathbf{0}$, 又A是n阶非可逆方阵, 所以$r(A)=n-1$, 且$AA^*=\mathbf{0}$, 于是$A\alpha=\mathbf{0}$. 故α为齐次线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的基础解系, 得$Ax=\mathbf{b}$的通解为$k\alpha+\beta$(其中k为任意常数).

8. 2

设$\beta=A\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_2$, 根据$\alpha_1,\alpha_2$线性无关知$\beta\neq\mathbf{0}$. 此时

$$A\beta=A\alpha_1+2A\alpha_2=2A\alpha_2=2\beta,$$

所以β为A的特征向量, 且对应的特征值为2.

9. -1

由于A的特征值2, 1,1. 所以A^{-1}的特征值为$\dfrac{1}{2},1,1$, 从而$4A^{-1}-3I$的特征值为$-1,1,1$. 故$|4A^{-1}-3I|=(-1)\cdot 1\cdot 1=-1$.

10. 1

由条件有$\mathrm{tr}(\alpha\beta^T)$ $=\mathrm{tr}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=3$. 又因为$\mathrm{tr}(\alpha\beta^T)$ $=\mathrm{tr}(\beta^T\alpha)=2k+1$. 所以$k=1$.

11. **错**

例如$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$相抵但不相似.

12.**正确**

因为$Ax=\mathbf{0}$与$Bx=\mathbf{0}$同解, 所以$Ax=\mathbf{0}$与$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=\mathbf{0}$同解, 得$r(A)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$, 且由$A$的行向量组是$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$的行向量组部分组, 由此知$A$的行向量组的极大无关组为$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$的行向量组极大无关组, 得$A$的行向量组与$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$的行向量组等价. 同理$B$的行向量组与$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$的行向量组等价, 于是$A, B$的行向量组等价.

13.**正确**

设A, B为同阶正交矩阵, 则$AA^T=I, BB^T=I$, 所以$(AB)(AB)^T=ABB^TA^T=I$.

14.**错**

例如$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$有$A^2=\mathbf{0}$, 但$A\neq\mathbf{0}$.

15.**错**

例如向量组α与向量组α,α等价, 但两个向量组所含向量个数不同.

16.**解**

根据行列式性质有

$$D=\begin{vmatrix}x&1&1&1\\1&x&1&1\\1&1&x&1\\1&1&1&x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x&1&1\\0&1&x&1\\0&1&1&x\end{vmatrix}.$$

又

$$\begin{vmatrix}x&1&1&1\\1&x&1&1\\1&1&x&1\\1&1&1&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+3&1&1&1\\0&x-1&0&0\\0&0&x-1&0\\0&0&0&x-1\end{vmatrix}=(x+3)(x-1)^3;$$

同理

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+2)(x-1)^2.$$

所以$D = (x+3)(x-1)^3 + (x+2)(x-1)^2$.

17.**解** **解法一**

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & -1 & 1 & 1 & & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & & & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & -1 & & & & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & 1 & & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & & & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & -1 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

法二 因为$A^2 = 4I$, 所以$A \cdot \dfrac{1}{4}A = I$, 得$A^{-1} = \dfrac{1}{4}A$.

18.**解** (1) 因为A不可逆, 所以$|A| = 0$, 由此解得$a = 0, 1$;

(2) 当$a = 0$时,

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由此可得线性方程组通解为$k_1(1, -2, 1)^T$;

当$a = 1$时,

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由此可得线性方程组通解为$k_2(0, -1, 1)^T$.

19.**解** 因为

$$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T)=\begin{pmatrix}1&3&1&1&3\\2&0&5&-1&3\\3&3&a&0&6\\4&0&10&-2&6\\1&1&2&b&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&1&1&3\\0&-6&3&-3&-3\\0&-6&a-3&-3&-3\\0&-12&6&-6&-6\\0&-2&1&b-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&3&1&1&3\\0&2&-1&1&1\\0&0&a-6&0&0\\0&0&0&b&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

当$a=6,b=0$时, 向量组秩为2,极大无关组是α_1,α_2;

当$a=6,b\neq 0$时, 向量组秩为3,极大无关组是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$;

当$a\neq 6,b=0$时, 向量组秩为秩为3, 极大无关组是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$;

当$a\neq 6,b\neq 0$时, 向量组秩为秩为4,极大无关组是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

20. **解** (1) 二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}a&0&1\\0&a&-1\\1&-1&a-1\end{pmatrix}$, 由此有

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a&0&-1\\0&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-a+2)(\lambda-a-1).$$

于是A的特征值为$a,a-2,a+1$. 又因为二次型的规范型是$y_1^2+y_2^2$, 故特征值为两正一零. 由此得$a=2$, 且$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$, A的特征值为0,2,3.

(2)当$\lambda=0$时, 求解线性方程组$(0I-A)x=\mathbf{0}$, 有特征向量$\alpha_1=(-1,1,2)^T$, 单位化, 得$\xi_1=\dfrac{\sqrt{6}}{6}(-1,1,2)^T$;

当$\lambda=2$时, 求解线性方程组$(2I-A)x=\mathbf{0}$, 有特征向量$\alpha_2=(1,1,0)^T$, 单位化, 得$\xi_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0)^T$;

当$\lambda=3$时, 求解线性方程组$(3I-A)x=\mathbf{0}$, 有特征向量$\alpha_3=(1,-1,1)^T$, 单位化, 得$\xi_3=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1,-1,1)^T$;

得$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$.

21.**证** (1) 首先有$r(\alpha\alpha^T), r(\beta\beta^T) \le 1$, 所以

$$r(A) = r(\alpha\alpha^T - \beta\beta^T) \le r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) \le 2.$$

(2) 不妨设$\alpha = k\beta$, 则有$A = (k^2-1)\beta\beta^T$, 所以

$$r(A) = r((k^2-1)\beta\beta^T) \le 1 < 2.$$

22.**证** (1) 如果

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}(\text{其中}k_1, k_2\text{是数}), \qquad (1)$$

则有

$$\begin{aligned} A(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3) &= k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + k_3A\alpha_3 \\ &= -k_1\alpha_1 + (k_2+k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

即有

$$-k_1\alpha_1 + (k_2+k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}, \qquad (2)$$

同理可得

$$k_1\alpha_1 + (k_2+2k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}. \qquad (3)$$

注意α_1, α_2为不同特征值下特征向量, 所以线性无关, 从而$\alpha_3 \ne \mathbf{0}$. 式(3)减去式(1)得$2k_3\alpha_2 = \mathbf{0}$, 得$k_3 = 0$, 同理可得$k_1 = k_2 = 0$, 由此知$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

(2)根据

$$A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$$

得$AP = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 所以有

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

试 卷 四

1. (B)

注意矩阵乘法一般不满足交换律.

2. (C)

同型矩阵A, B相抵的充分必要条件是$r(A)=r(B)$. 两个矩阵相似或者合同推出两个矩阵相抵, 反之未必.

3. (B)

矩阵A的特征值为$3, 3, 0$, 而相似矩阵具有相同特征值, 所以$a=3$.

4. (D)

线性方程组$Ax=\mathbf{b}$有解充分必要条件是$r(A)=r(A, \mathbf{b})$. 根据题设不能得出$r(A)=r(A, \mathbf{b})$, 故选项D正确. 如果$r(A)=r(A, \mathbf{b})<n$, 则$Ax=\mathbf{b}$有无穷多组解.

5. (C)

因为

$$A^2(\xi_1+\xi_2)=A(a\xi_1+b\xi_2)=a^2\xi_1+b^2\xi_2=a^2(\xi_1+\xi_2),$$

又因为$\xi_1+\xi_2\neq\mathbf{0}$, 所以选项$(C)$正确.

6. 0

因为A是正交矩阵, 所以A^T也是正交矩阵, 于是

$$a^2+c^2=a^2+b^2=d^2+b^2=1.$$

由此可得$ac+bd=0$.

7. 4^n

因为$|B|=|A|\cdot|A|=|A|^2=1$(正交矩阵行列式等于±1), 所以

$$|2B^*|=2^{2n}|B^*|=4^n|B|^{2n-1}=4^n.$$

8. 4

设$\beta=A\alpha_2=\alpha_1+3\alpha_2$, 根据$\alpha_1, \alpha_2$线性无关知$\beta\neq\mathbf{0}$. 此时

$$A\beta=A\alpha_1+3A\alpha_2=3A\alpha_2=3\beta,$$

所以β为A的特征向量, 且对应的特征值为3. 由此知A的特征值是$0, 3$, 故$A+I$特征值为$1, 4$, 得$|A+I|=1\cdot 4=4$.

9. $(1,1,1)^T$

设$\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, 故

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}\beta=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\beta=(1,1,1)^T.$$

10. 1

由条件有$\mathrm{tr}(\alpha\beta^T+I)=\mathrm{tr}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=6$. 又因为$\mathrm{tr}(\alpha\beta^T+I)=\mathrm{tr}(\alpha\beta^T)+3=\mathrm{tr}(\beta^T\alpha)+3=2k+4$. 所以$k=1$.

11.**正确**

两个矩阵相似, 则其相抵, 反之未必成立.

12.**正确**

因为$Ax=\mathbf{0}$与$Bx=\mathbf{0}$同解, 则有$n-r(A)=n-r(B)$, 得$r(A)=r(B)$.

13.**错**

$Ax=\mathbf{b}$有解充分必要条件是$r(A)=r(A,\mathbf{b})$, 而n元方程组$Ax=\mathbf{0}$有非零解充分必要条件是$r(A)\leq n$. 根据题设条件推不出此结论.

14.**正确** 参见第三章内容.

15.**错**

例如矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$与单位矩阵有相同特征值, 但两个矩阵不相似.

16.**解** 对D_n按照第一行展开, 并对第二项按照第一列展开, 得

$$D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2},$$

由此得

$$D_n-aD_{n-1}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=a^{n-2}(D_2-aD_1),$$

注意到$D_1=2a,D_2=3a^2$, 得

$$D_n-aD_{n-1}=a^n,$$

由此可计算出

$$D_n=(n+1)a^n.$$

17.**解** 经计算有$A^2=4I$, 根据$A^3X=3AX+4I$, 得$AX=4I$, 故有$X=4A^{-1}=A$.

18.**解** 根据条件知公共解为下列线性方程组解:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+2x_3=a-1. \end{cases} \qquad (1)$$

故线性方程组(1)的增广矩阵秩与其系数矩阵秩相等, 对线性方程组(1)的增广矩阵作行初等变换, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}.$$

由此得$a-1=0$或者$a^2-3a+2=0$, 得$a=1$或者$a=2$.

当$a=1$时, 线性方程组(1)有无穷多组解, 且通解为$x=k(-1,0,1)^T$(其中k为任意常数);

当$a=2$, 线性方程组(1)有唯一解, 且为$x=(0,1,-1)^T$.

19.**解** 因为$P^2=I$, 所以$(PBP)^n=PB^nP$. 设$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 有$A=I+J$, 得

$$J^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J^3=\mathbf{0}.$$

又因为

$$A^n=\sum_{i=1}^{n} C_n^i J^i I^{n-i}=I+nJ+\frac{n(n-1)}{2}J^2,$$

于是可得$B=A^3-3A^2+4A-I=A$, 故

$$B^n=A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & n & n \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是

$$(PBP)^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ n & 1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

20.**解** (1)$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ，有$a+b=6, |A|=3ab-a-b-1=20$ ，经计算得$a=b=3$.

(2) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda-2)^2$,所以特征值为5, 2, 2 .

当$\lambda=5$时, 求解线性方程组$(5I-A)x=\mathbf{0}$, 有特征向量$\alpha_1=(1,1,1)^T$, 单位化, 得$\xi_1=\dfrac{\sqrt{1}}{2}(1,1,1)^T$;

当$\lambda=2$时, 求解线性方程组$(2I-A)x=\mathbf{0}$, 有特征向量$\alpha_2=(1,-1,0)^T, \alpha_3=(1,0,-1)^T$, 正交单位化, 得$\xi_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)^T, \xi_3=\dfrac{\sqrt{6}}{6}(1,1,-2)^T$.

得$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$.

21.**证** (1) 因为$A+I$为n阶正交对称矩阵, 所以$A+I=(A+I)^T=(A+I)^{-1}$, 得$(A+I)^2=I$, 由此有$A(A+2I)=\mathbf{0}$. 根据第一章内容可证结论.

22.**证** 因为α,β,γ是线性方程组$Ax=\mathbf{b}$的解，所以

$$\alpha-r,\quad \beta-\gamma,$$

是$Ax=\mathbf{0}$的解. 又α,β,γ线性无关，则$\alpha-r,\beta-\gamma$线性无关, 这是因为, 如果有数k_1,k_2使

$$k_1(\alpha-r)+k_2(\beta-\gamma)=\mathbf{0},$$

则有

$$k_1\alpha+k_2\beta+(-k_1-k_2)\gamma=\mathbf{0}.$$

由于α,β,γ线性无关，可知$k_1=k_2=-(k_1+k_2)=0$,即$\alpha-r,\beta-\gamma$线线性无关. 另一方面，由$r(A)=r(A,\mathbf{b})=n-2$可知，$Ax=\mathbf{0}$基础解系含有$n-(n-2)=2$ 个向量，因此$\alpha-r,\beta-\gamma$是$Ax=\mathbf{0}$的基础解系，从而$Ax=\mathbf{b}$的通解为

$$\alpha+k_1(\alpha-r)+k_2(\beta-\gamma)(k_1,k_2\text{为任意常数}).$$

试 卷 五

1. (C)

根据行列式展开式知, 行列式某行乘上另一行代数余子式为零. 故有

$$1\cdot(-a)+2\cdot 1+3\cdot(-2)=0,$$

解得$a=-4$.

2. (D)

根据矩阵运算性质有$(AB)^T=B^TA^T,(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$; 根据行列式与矩阵关系有$|2A|=2^n|A|$; 不存在行列式等式$|A+B|=|A|+|B|$. 故选项$(D)$正确.

3. (A)

如果$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$, 则有

$$A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_mA\alpha_m=\mathbf{0}.$$

所以当$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关时，$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_m$线性相关.

4. (D)

选项$(A),(B),(C)$为相似矩阵性质.

5. (D)

矩阵A通过初等列(行)变换化为矩阵B, 则A的列(行)向量组和B的列(行)向量组等价.

6. $(ac-bd)^3$

首先有

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&2&0&0\\2&1&a&d\\2&1&b&c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a&d\\b&c\end{vmatrix}=ac-bd.$$

于是$|A^*|=|A|^3=(ac-bd)^3$.

7. 9

因为$\begin{vmatrix}A&A\\A&2A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&A\\0&A\end{vmatrix}=|A|\cdot|A|=9$.

8. 2

首先根据条件有$\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_2+\alpha_3$线性无关, 而

$$\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3=(\alpha_1+\alpha_2)+(2\alpha_2+\alpha_3),$$

所以向量组$\alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3$线性相关, 且秩为2.

9. $\sqrt{11}$

这是因为

$$|x+y+3z| = \sqrt{(x+y+3z, x+y+3z)} = \sqrt{(x,x)+(y,y)+9(z,z)} = \sqrt{11}.$$

10. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

注意到实对称矩阵A的特征多项式为$(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda-1)$, 因此矩阵的特征值为两正一负, 由此知其规范型为$y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

11. $k_1(\alpha-\beta)+k_2(\alpha-\gamma)+\alpha$(其中$k_1,k_2$为任意常数.)

由于A的秩为1, 所以线性方程组$Ax=\mathbf{0}$基础解系含有向量为$3-1=2$个. 又α,β,γ为$Ax=\mathbf{b}$的解, 所以$\alpha-\beta, \alpha-\gamma$为$Ax=\mathbf{0}$的基础解系, 故$Ax=\mathbf{b}$的通解为$k_1(\alpha-\beta)+k_2(\alpha-\gamma)+\alpha$.

12. $A^n=4^{n-1}A$

由于$A^2=4A$, 所以$A^n=4^{n-1}A$.

13. I,J,J^2或者I,A,A^2, 其中$J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $J^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

因$A=I+J$, 有

$$A^n = I+nJ+\frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

所以$f(A)$可由V中元素I,J,J^2线性表示, 得其基为I,J,J^2或者I,A,A^2.

14. **解** $\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & x \\ a & a & \cdots & x & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & x & \cdots & a & a \\ x & a & \cdots & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & (n-1)a+x \\ a & a & \cdots & x & (n-1)a+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & x & \cdots & a & (n-1)a+x \\ x & a & \cdots & a & (n-1)a+x \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & (n-1)a+x \\ 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(x-a)^{n-1}[(n-1)a+x]$.

15. **解**

$$(A, I_4) \to \begin{pmatrix} B & I & I & \mathbf{0} \\ 0 & B & -I & I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & B^{-1} & B^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & -B^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} & B^{-1}+B^{-2} & -B^{-2} \\ \mathbf{0} & I & -B^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

所以$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1}+B^{-2} & -B^{-2} \\ -B^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$.

又$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B^{-2} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

所以$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -5 & 3 \\ -4 & 3 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

16. **解** 因为$\eta = (2,-3,0,0)^T$为线性方程组解,代入第三个方程，得$a = 0$. 对线性方程组增广矩阵作初等变换,得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & b & b-6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & b-1 & b-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

当$b = 1$时, 系数矩阵的秩与增广矩阵秩都等于2, 线性方程组有解, 且有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & b & b-6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由此得线性方程组通解$k_1(-2,1,1,0)^T + k_2(4,-5,0,1)^T + \eta$ (其中k_1, k_2为任意常数.)

当$b \neq 1$时, 系数矩阵的秩与增广矩阵秩都等于3, 线性方程组有解, 且有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & b & b-6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

由此得线性方程组通解$k_1(6,-6,-1,1)^T + \eta$ (其中k_1为任意常数.)

17. **解** 相似矩阵具有相同特征多项式, 因此$|xI-A| = |xI-B| = x^3-6x^2+9x-4$, 即有

$$x^3 - 6x^2 + (11 - a^2 - b^2)x + 2(a^2 + b^2 - ab - 3) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4,$$

从而

$$11 - a^2 - b^2 = 9, 2(a^2 + b^2 - ab - 3) = -4,$$

由于a, b为正整数, 根据上式得$a = b = 1$, 且A的特征值为1,1,4 .

当特征值为1时, 求解线性方程组$(I-A)x=\mathbf{0}$, 得特征向量为$k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$(其中$k_1,k_2$不全为零);

当特征值为4时, 求解线性方程组$(4I-A)x=\mathbf{0}$, 得特征向量为$k_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$(其中$k_3$不为零).

18. **解** (1)因为

$$(A_1\,,\ A_2\ ,\ A_3\ ,\ A_4)=(E_{11}\,,E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

所以$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$为所求过渡矩阵.

(2)设$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, 由题意, 得

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix},$$

解得$b=c=d=0$, 且a 任意.

19. **解** 因为

$$AA^T=(I+\alpha\alpha^T)(I+\alpha\alpha^T)^T=(I+\alpha\alpha^T)(I+\alpha\alpha^T)$$

$$=I+2\alpha\alpha^T+\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T$$
$$=I-2\alpha\alpha^T+k\alpha\alpha^T=I+(k-2)\alpha\alpha^T.$$

而A为正交矩阵的充分必要条件是$AA^T=I$, 得A为正交矩阵的充分必要条件为$k-2=0$，即$k=2$.

20. **证** 由于$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 是线性方程组$Ax=\mathbf{0}$的基础解系, 因此$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$线性无关. 如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r},\beta$线性相关, 则$\beta$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$线性表示, 从而$\beta$为齐次线

性方程组$Ax = \mathbf{0}$的解, 得$A\beta = \mathbf{0}$, 与β是线性方程组$Ax = \mathbf{b}(\mathbf{b} \neq \mathbf{0})$的一个解矛盾. 于是$\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-r}, \beta$线性无关.