《微积分 2》练习题（理工大类 D 卷）答案

本套练习题共 19 题，满分 50 分；内容涵盖定积分应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、二重积分等四个部分。

一、单项选择题（5 题；每题 2 分，共 10 分）

1．C　　2．C　　3．C　　4．B　　5．C

二、填空题（10 题；每题 2 分，共 20 分）

1．$\frac{\pi}{4}$

2．$\begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ x+2y-z-2=0 \end{cases}$ 或 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{1}$

3．$\begin{cases} x^2+y^2+(a-x)^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$

4．$(-\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}},-\frac{1}{\sqrt{30}})$，或$(\frac{5}{\sqrt{30}},-\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{1}{\sqrt{30}})$

5．$4y+3z=21$

6．$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=(2x+1)^{xy}\left\{\left[y\ln(2x+1)+\frac{2xy}{2x+1}\right]dx+x\ln(2x+1)dy\right\}$

7．e^{2e}

8．$-\frac{3}{\sqrt{5}}$

9．记 $F(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)r$,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}F(r,\theta)dr+\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^1F(r,\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_\theta^{2\cos\theta}F(r,\theta)dr$$

10．$f(2)$

三、计算题（4 题；每题 5 分，共 20 分）

1. 求曲线 $y=1-x^2$ 与 x 轴围成的封闭图形的面积；并求该封闭图形绕直线 $y=2$ 旋转所得的旋转体体积.

解: 面积 $S=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$　　---------------(1 分)

$$=2\int_0^1(1-x^2)\mathrm{d}x=2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{3};$$ ---------------(1 分)

体积 $V=\pi\times2^2\times2-\pi\int_{-1}^{1}[2-(1-x^2)]^2\mathrm{d}x$ ---------------(2 分)

$$=8\pi-2\pi\int_0^1(1+x^2)^2\mathrm{d}x$$

$$=8\pi-2\pi\cdot\frac{28}{15}=\frac{64}{15}\pi.$$ ---------------(1 分)

2. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上某点 M 处的切平面 π 的方程，使 π 过已知直线 L: $\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$.

解: 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$，则 $F_x=2x,\ F_y=4y,\ F_z=6z$.

则椭球面上点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面 π 的方程为

$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0,$$

即

$$x_0x+2y_0y+3z_0z=21.$$ ---------------(1 分)

取直线 L 上两点 $A\left(6,3,\frac{1}{2}\right),\ B\left(0,0,\frac{7}{2}\right)$. ---------------(1 分)

因为切平面 π 过直线 L，所以 A,B 的坐标满足 π 的方程，即

$$\begin{cases}6x_0+6y_0+\dfrac{3}{2}z_0=21,\\ \dfrac{21}{2}z_0=21,\end{cases}$$

又因为 $x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21$，解得

$$x_0=3,y_0=0,z_0=2 \text{ 或 } x_0=1,y_0=2,z_0=2.$$ ------------(1 分)

故所求的切平面方程为

$$x+2z=7 \text{ 或 } x+4y+6z=21.$$ ---------------(1+1 分)

3. 求 $u=x^2-y^2+6$ 在闭区域 $x^2+\dfrac{y^2}{4}\le1$ 上的最大值和最小值.

解: 在 $x^2+\dfrac{y^2}{4}<1$ 内: 由 $\begin{cases} u_x = 2x = 0, \\ u_y = -2y = 0, \end{cases}$ 得驻点 $(0,0)$, 且 $u(0,0)=6$; -(1 分)

在 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上: 作 $L=x^2-y^2+6+\lambda\left(x^2+\dfrac{y^2}{4}-1\right)$. -----------------(1 分)

由 $\begin{cases} L_x = 2x+2\lambda x = 0, \\ L_y = -2y+\dfrac{\lambda}{2}y = 0, \\ L_\lambda = x^2+\dfrac{y^2}{4}-1 = 0, \end{cases}$ 解得 $(0,2),\ (0,-2),\ (1,0),\ (-1,0)$, ---------------(1 分)

且 $u(0,2)=u(0,-2)=2,\ u(1,0)=u(-1,0)=7$. -----------------(1 分)

所以最大值 $M=7$, 最小值 $m=2$. -----------------(1 分)

4. 设闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$, $f(x,y)$ 为 D 上的连续函数, 且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

求 $f(x,y)$.

解: 令 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$, 则 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}a$. ---------------(1 分)

由 $a=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}a\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\cdot r\mathrm{d}r-\frac{8}{\pi}a\cdot\pi$$

$$=-\frac{2\pi}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-8a=\frac{2\pi}{3}-8a,$$ ---------------(2 分)

解得 $a=\dfrac{2\pi}{27}$. ---------------(1 分)

所以 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}\cdot\dfrac{2\pi}{27}=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{16}{27}$. ---------------(1 分)