| 成绩 | |
|---|---|

# 上海大学 2017 ～ 2018 学年冬季学期试卷 A

课程名：微积分 2 参考答案 课程号：01014126 学分：6

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ______________ 应试人学号______________应试人所在院系______________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | **15** | **15** | **24** | **18** | **14** | **14** |

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

## 一. 单项选择题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足关系式 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则必有 $\vec{a}\times\vec{b}=$( B ).

A. $\vec{a}\times\vec{c}$　　B. $\vec{b}\times\vec{c}$　　C. $\vec{c}\times\vec{b}$　　D. $\vec{b}\times\vec{a}$

2. 过点 $(x_0,y_0,z_0)$ 的直线参数方程形式是( A ).

A. $\begin{cases} x=x_0+nt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+pt. \end{cases}$　　B. $\begin{cases} x=-x_0+nt, \\ y=-y_0+mt, \\ z=-z_0+pt. \end{cases}$

C. $\dfrac{x-x_0}{n}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p}$　　D. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

3. 设 $z=f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处全微分存在，则下面结论**正确**的是 ( C ).

A. $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处偏导数未必存在；

B. $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处偏导数连续；

C. $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处沿任何方向的方向导数存在；

D. $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处未必连续.

4. 设 $D$ 是由 $y=x,\ x=1,\ y=0$ 所围的平面区域，则 $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma$ 可表示为( D ).

A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r)\mathrm{d}r$　　B. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta} f(r)\mathrm{d}r$　　C. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r)r\mathrm{d}r$　　D. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta} f(r)r\mathrm{d}r$

5. 设 $\Sigma$ 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(x^2+y^2\le 1)$，则曲面积分 $\iint_\Sigma (z-\sqrt{x^2+y^2}+1)\mathrm{d}S=$( A ).

A. $\sqrt{2}\pi$　　B. $2\pi$　　C. $4\pi$　　D. $0$

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

## 二. 填空题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 通过空间曲线 $\begin{cases} 2z=-(x^2+y^2) \\ x+y+z=-1 \end{cases}$ 且母线平行于 $z$ 轴的投影柱面方程为 $\underline{(x-1)^2+(y-1)^2=4}$.

7. 函数 $f(x,y,z)=x^2y^2z$ 在 $(1,1,1)$ 处的方向导数的最大值等于 $\underline{3}$.

8. 函数 $z=f(x,y)$ 关于 $y$ 是奇函数，且 $D: x^2+4y^2\le 4$，则 $\iint_D (f(x,y)+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{2\pi}$.

9. 设曲线 $L: y=f(x)\ (0\le x\le 1)$，则第一类曲线积分 $\int_L \dfrac{1}{\sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}}\mathrm{d}s=\underline{1}$.

10. 已知封闭曲线 $L$ 取正向，且围成的面积为 1，则 $\oint_L y\mathrm{d}x+3x\mathrm{d}y=\underline{2}$.

## 草　稿　纸

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

## 三. 计算题 (4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分)

11. 在曲面 $z=x^2+y^2$ 上求一点，使这一点处的切平面与直线 $\frac{x}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$ 垂直，并写出此切平面方程.

**解** 令 $F(x,y,z)=z-x^2-y^2$，则曲面 $z=x^2+y^2$ 上点 $(x,y,z)$ 处的法向量为

$\{F_x,F_y,F_z\}=\{-2x,-2y,1\}$. (2 分)

由题意得 $\{-2x,-2y,1\}//\{2,-2,1\}$，所以 $\frac{-2x}{2}=\frac{-2y}{-2}=\frac{1}{1}$, (2 分)

解得 $x=-1,\ y=1$. 代入曲面方程得 $z=2$ .所以所求点为 $(-1,1,2)$. (1 分)

此时切平面方程为 $2(x+1)-2(y-1)+(z-2)=0$. (1 分)

12. 求过直线 $l_1:\begin{cases}x+y-3z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 且与直线 $l_2:\begin{cases}x-z-2=0\\y+z+3=0\end{cases}$ 平行的平面方程.

**解** 过直线 $l_1$ 的平面方程可设为 $(x+y-3z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0$

即 $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(\lambda-3)z+(\lambda-1)=0$ (2 分)

直线 $l_2$ 的方向向量为 $(1,0,-1)\times(0,1,1)=(1,-1,1)$ (2 分)

所求平面平行于直线 $l_2$ 的充要条件是：

$(1+\lambda)\times1+(1-\lambda)\times(-1)+(\lambda-3)\times1=0$ (1 分)

解得 $\lambda=1$，即所求平面方程为 $x-z=0$ (1 分)

13. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^5-xz^4+yz=1$ 所确定的隐函数，求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}$.

**解** 设 $F(x,y,z)=z^5-xz^4+yz-1$，则 $F_x=-z^4$，$F_y=z$，$F_z=5z^4-4xz^3+y$,

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z^4}{5z^4-4xz^3+y}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{z}{5z^4-4xz^3+y}$, (4 分)

将 $x=0,\ y=0$ 代入原方程得 $z=1$. 所以则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\frac{1}{5}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=-\frac{1}{5}$. (2 分)

14. 设 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，如果 $z=f(xy,x^2-y^2)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

**解** $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+2xf_2'$ (2 分)

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y(xf_{11}''-2yf_{12}'')+2x(xf_{21}''-2yf_{22}'')$ (2 分+1 分)

$=f_1'+xyf_{11}''+2(x^2-y^2)f_{12}''-4xyf_{22}''$ (1 分)

草 稿 纸

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

## 四. 计算题 (3 小题，每小题 6 分，共 18 分)

15. 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}|y-x|\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x^2+y^2\le 1\right\}$.

**解** $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(r\sin\theta-r\cos\theta\right)r\mathrm{d}r+\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(r\cos\theta-r\sin\theta\right)r\mathrm{d}r$ (2 分+2 分)

$=\frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$ （2 分）

16. 计算累次积分 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{(y-1)^2}\mathrm{d}y$

**解** 进行积分换次，有

$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\mathrm{e}^{(y-1)^2}\mathrm{d}x$ **(3 分)**

$=\int_0^1\mathrm{e}^{(y-1)^2}(1-y)\mathrm{d}y$ **(1 分)**

$=-\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{(y-1)^2}\mathrm{d}(y-1)^2=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$ **(2 分)**

17. 求 $I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2-yz)\mathrm{d}v$，其中 $\Omega$ 是由曲线 $\begin{cases}z=x,\\ y=0\end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转一周而成的曲面与 $z=1$ 所围成的立体.

**解** 旋转曲面方程 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(z\ge 0)$. (1 分)

根据对称性有 $\iiint_{\Omega}yz\mathrm{d}v=0$ (1 分)

所以 $I=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1(x^2+y^2)\mathrm{d}x=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)(1-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (2 分)

其中 $D:x^2+y^2\le 1$，于是

$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^2+1)(1-r)r\mathrm{d}r=\ =\frac{13}{30}\pi$ (2 分)

草　稿　纸

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

## 五. 计算题 (2 小题, 每小题 7 分, 共 14 分)

18 设有向曲线 $\vec{L}$ 方程为 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, (0 \le t \le 1, a \ne 0) \\ z = at. \end{cases}$，问 $a$ 为何值时，

$$L(a) = \int_{\vec{L}} (y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z)$$

取极小值。

**解** 根据题意有

$$L(a) = \int_0^1 (-a^2\sin^2 t - a^2\cos^2 t + a^3t^2)\mathrm{d}t \qquad (2 分)$$

$$= -a^2 + \frac{1}{3}a^3 \qquad (2 分)$$

因为 $L'(a) = -2a + a^2 = a(a-2)$ 得驻点 $a = 2$ (0 舍去) (1 分)

由此知 $L(a)$ 在 $(-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$ 单调增加，在 $(0, 2)$ 上单调减少，所以在 $a = 2$ 处取极小值，且为 $-\frac{4}{3}$ (2 分)

19. 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $F(t) = \int_0^t f(u)\mathrm{d}u$。计算曲面积分

$$I = \iint_\Sigma (x^3 + F(x^2))\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3 + F(y^2))\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3 + F(z^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\Sigma$ 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧.

**解** 根据高斯公式有

$$I = \iiint_\Omega (3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xf(x^2) + 2yf(y^2) + 2zf(z^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad (2 分)$$

根据区域对称性和函数奇偶性，得

$$I = 3\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2 \cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r = \frac{12\pi}{5}$$

(2 分) (2 分) (1 分)

# 草　稿　纸

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

## 六. 应用题 (2 小题, 每小题 7 分, 共 14 分)

20.设 $D$ 为曲线 $y=x^2, y=0, x=1$ 所围平面区域。试求 $D$ 分别绕 $y$ 轴，直线 $y=1$ 旋转一周所得旋转体的体积.

**解** (1) $D$ 饶 $y$ 轴所得旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_0^1 (x^2)\cdot x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}. \qquad (3\text{ 分})$$

(2) $D$ 饶直线 $y=1$ 所得旋转体的体积为

$$V=\pi\cdot 1^2\cdot 1-\pi\int_0^1 (1-x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{7\pi}{15}. \qquad (4\text{ 分})$$

21. 设 $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$，在球面 $C: x^2+y^2+z^2=5r^2 (r>0)$ 位于第一卦限上求一点，使函数 $f(x,y,z)$ 在此点取得最大值，并求最大值.

**解** 设 $C$ 上所求点为 $(x, y, z)$，根据题意构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=\ln x+\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-5r^2)\text{，} \qquad (2\text{ 分})$$

求偏导数，有 $\begin{cases} L'_x=x^{-1}+2x\lambda=0, \\ L'_y=y^{-1}+2y\lambda=0, \\ L'_z=3z^{-1}+2z\lambda=0, \\ x^2+y^2+z^2=5r^2, \end{cases}$ (2 分)

解得 $x=r, y=r, z=\sqrt{3}r$，所以函数在点 $(r,r,\sqrt{3}r)$ 上取得最大值 (2 分)

且最大值为 $5\ln r+3\ln\sqrt{3}$ (1 分)

## 草　　稿　　纸

# 上海大学 2018 ～ 2019 学年冬季学期试卷 A

| 成绩 | |
|---|---|

课程名：微积分 2 参考答案 课程号：01014126 学分：6

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ______________ 应试人学号______________应试人所在院系______________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | 15 | 15 | 18 | 18 | 18 | 16 |

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

## 一. 单项选择题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 3 维实向量 $\vec{a}=\{1,2,n\},\vec{b}=\{2,m,6\}$ 满足 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$，则 $(n,m)=$ ( A ).

A. $(3,4)$ B. $(4,3)$ C. $(3,3)$ D. $(4,4)$

2. 如果平面 $x+y-6z=1$ 与直线 $\dfrac{ax}{2}=\dfrac{y}{2}=2z$ 平行，则 $a=$ ( C ).

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

3. 设 $z=f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处两个偏导数存在，则下面结论一定正确的是 ( D ).

A. $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处连续 B. $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处可微

C. $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处极限存在 D. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$ 都存在

4. 设 $\Omega$ 是由圆柱面 $x^2+y^2=2y$ 以及平面 $z=0,z=1$ 所围区域，则 $\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2},z)\mathrm{d}v=$ ( B ).

A. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r\mathrm{d}r\int_0^1 f(r,z)\mathrm{d}z$ B. $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r\mathrm{d}r\int_0^1 f(r,z)\mathrm{d}z$

C. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} \mathrm{d}r\int_0^1 f(r,z)\mathrm{d}z$ D. $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} \mathrm{d}r\int_0^1 f(r,z)\mathrm{d}z$

5. 设 $\Sigma$ 是曲面 $z=x^2+y^2+1\,(x^2+y^2\le 1)$，则曲面积分 $\iint_{\Sigma}\dfrac{(z-x^2-y^2+x)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S=$ ( D ).

A. $2\pi$ B. 0 C. $4\pi$ D. $\pi$

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

## 二. 填空题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 平行于 $z$ 轴的动直线 $L$ 延着空间曲线 $C$ 运动所形成的曲面称为 C 在 $xOy$ 平面上的<u>投影柱面</u>.

7. 函数 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处的最大方向导数值为此点处的梯度<u>模(或长度)</u>.

8. 设函数 $f(x,y)$ 连续，平面区域 $D$ 关于 $y=x$ 对称，则 $\iint_D (f(x,y)-f(y,x))\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{0}$.

9. 设光滑曲线 $L: y=f(x)\ (0\le x\le 1)$，则 $\int_L \dfrac{y-f(x)+2}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\mathrm{d}s=\underline{2}$.

10. 已知有向曲线弧 $L: y=x^2$ 的起点为原点，终点为(1,1)，则 $\int_L y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\underline{1}$.

草 稿 纸

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

## 三. 计算题 (3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分)

11. 若曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $P$ 处的切平面与平面 $x+2y-2z=1$ 和 $x+y=1$ 都垂直，求此切平面方程.

**解** 令 $F(x,y,z)=z-x^2-y^2$，则曲面 $z=x^2+y^2$ 上点 $(x,y,z)$ 处的法向量为

$\{F_x,F_y,F_z\}=\{-2x,-2y,1\}$. (1 分)

由题意得 $\{-2x,-2y,1\}\parallel\{1,2,-2\}\times\{1,1,0\}=\{2,-2,-1\}$, (2 分)

得 $\dfrac{-2x}{2}=\dfrac{-2y}{-2}=\dfrac{1}{-1}$，解得 $x=1,\ y=-1,z=2$. (1 分)

于是切平面方程为 $2(x-1)-2(y+1)-(z-2)=0$. (2 分)

12. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^3+y^3+z^3+xyz=4$ 所确定的隐函数，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}$

**解** 将 $x=1,\ y=1$ 代入原方程得 $z=1$ (1 分)

方程 $x^3+y^3+z^3+xyz=4$ 两边对 $x$ 求导，得

$$3x^2+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0$$ (1 分)

将 $x=1,\ y=1$，$z=1$ 代入上述方程得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=-1$. (1 分)

方程 $3x^2+3z^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz+xy\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ 两边对 $x$ 求导，得

$$6x+6z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2y\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$ (2 分)

将 $x=1,\ y=1$，$z=1$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=-1$ 代入上述方程得 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=-\dfrac{5}{2}$ (1 分)

13. 设 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，如果 $z=f(x+y,x-y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

**解** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'$ (2 分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''-f_{12}''+f_{21}''-f_{22}''$ (2 分)

$=f_{11}''-f_{22}''$ (2 分)

## 草　稿　纸

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

## 四. 计算题 (3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分)

14. 计算二重积分

$$I=\iint_D \frac{(x+1)\sin(\pi(x^2+y^2))}{x+y+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4, x,y\ge 0\right\}$.

**解** 根据对称性有

$$I=\frac{1}{2}\iint_D \frac{(x+y+2)\sin\pi(x^2+y^2)}{x+y+2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D \sin\pi(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (2 分)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\sin(\pi r^2)\mathrm{d}r=-\frac{1}{4} \quad (2 分+2 分)$$

15. 计算累次积分 $I=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{|x|}^1 x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$

**解** 进行积分换次，有

$$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-y}^{y}x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x \quad \textbf{(3 分)}$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{e}^{-u}u\mathrm{d}u \quad \textbf{(2 分)}$$

$$=\frac{1}{3}(1-2\mathrm{e}^{-1}) \quad \textbf{(1 分)}$$

16. 求 $I=\iiint_\Omega(x^2+y^2+1+xyz)\mathrm{d}v$，其中 $\Omega$ 是由曲线 $\begin{cases} z=1-x^2, \\ y=0. \end{cases}$ 绕 $z$ 轴旋转一周而成的曲面与 $z=0$ 所围成的立体.

**解** 旋转曲面方程 $z=1-(x^2+y^2)(z\le 1)$. (1 分)

根据对称性有 $\iiint_\Omega xyz\mathrm{d}v=0$ (1 分)

所以 $I=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-(x^2+y^2)}(x^2+y^2+1)\mathrm{d}z=\iint_D(x^2+y^2+1)(1-(x^2+y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (2 分)

其中 $D:x^2+y^2\le 1$，于是

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^2+1)(1-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi \quad (2 分)$$

草 稿 纸

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

## 五. 计算题 (3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分)

17 设曲线$C$方程为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0. \end{cases}$，求第一类曲线积分$I=\int_C (xy+yz+zx)\mathrm{d}s$.

**解** $I=\dfrac{1}{2}\int_C [(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]\mathrm{d}s$ (3 分)

$=-\dfrac{1}{2}\int_C 1\cdot \mathrm{d}s=-\pi$ (2 分+1 分)

18. 设$f(x)$具有连续导函数，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3+2xf(xyz))\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3-yf(xyz))\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3-zf(xyz))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$\Sigma$为上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧.

**解** 设$P=x^3+2xf(xyz), Q=y^3-yf(xyz), R=z^3-zf(xyz)$，有

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3x^2+3y^2+3z^2$$ (1 分)

设$\Sigma_1: z=0$（取下侧），则令

$I_1=\iint_{\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，根据$\Sigma_1: z=0$，得$I_1=0$ (2 分)

因此由高斯公式有

$$I+I_1=\iiint_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$ (1 分)

其中$\Omega$是$\Sigma$、$\Sigma_1$围成的区域，得

$$I=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi \mathrm{d}r=\frac{6\pi}{5}$$ (2 分)

19. 设光滑有向曲线 $C$ 的起点为原点，终点为(1,1). 如果函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上具有连续导数，且$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$. 计算曲线积分$I=\int_C f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$.

**解** 设$P=f(x^2+y^2)x, Q=f(x^2+y^2)y$，则有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xyf'(x^2+y^2)=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

根据条件$\dfrac{\partial P}{\partial y},\dfrac{\partial Q}{\partial x}$在平面上连续，因此曲线积分与路径无关. (2 分)

选取路径$A(0,0)\to B(0,1)\to C(1,1)$,则

$$I=\int_0^1 f(y^2)y\mathrm{d}y+\int_0^1 f(1+x^2)x\mathrm{d}x$$ (2 分)

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u$$ (1 分)

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 f(u)\mathrm{d}u=1$$ (1 分)

## 草 稿 纸

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

## 六. 应用题 (2 小题, 每小题 8 分, 共 16 分)

20.设 $L$ 为曲线 $y=x^2$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处法线，交 $x$ 轴于点(3,0)。 求由 $L$ 、 $x$ 轴、 $y=x^2$ 在第一象限所围平面区域绕 $y$ 轴旋转一周所得旋转体的体积.

**解** 直线 $L$ 的斜率为 $-\dfrac{1}{2x_0}=\dfrac{x_0^2}{x_0-3}$，解得 $x_0=1$， (2 分)

得 $L$ 方程为 $y=-\dfrac{1}{2}(x-3)$ (2 分)

所得旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_0^1 (x^2)\cdot x\mathrm{d}x+2\pi\int_1^3 -\frac{1}{2}(x-3)x\mathrm{d}x$$ (2 分)

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{10\pi}{3}=\frac{23\pi}{6}$$ (2 分)

21.设球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 在点 $P(x,y,z)(x>0,y>0,z>0)$ 处的切平面交坐标轴的截距分别记为 $A,B,C$，求点 $P(x,y,z)$ 使得 $A+B+C$ 取值最小，并求最小值.

**解** 设所求点为 $P(x,y,z)$，则 $P(x,y,z)$ 处切平面方程为

$$2x(X-x)+2y(Y-y)+2z(Z-z)=0,$$

因为 $x^2+y^2+z^2=3$，得切平面方程为 $\dfrac{X}{3x^{-1}}+\dfrac{Y}{3y^{-1}}+\dfrac{Z}{3z^{-1}}=1$， (2 分)

得 $A+B+C=3x^{-1}+3y^{-1}+3z^{-1}$ (1 分)

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=3x^{-1}+3y^{-1}+3z^{-1}+\lambda(x^2+y^2+z^2-3),$$ (2 分)

求偏导数，有 $$\begin{cases} L'_x=-3x^{-2}+2x\lambda=0,\\ L'_y=-3y^{-2}+2y\lambda=0,\\ L'_z=-3z^{-2}+2z\lambda=0,\\ x^2+y^2+z^2=3, \end{cases}$$ (2 分)

解得 $P=(1,1,1)$，且最小值为 $9$ (1 分)

## 草 稿 纸