《微积分 2》练习题（理工大类 C 卷）答案

本套练习题共 19 题，满分 50 分；内容涵盖定积分应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、二重积分等四个部分。

一、单项选择题（5 题；每题 2 分，共 10 分）

1．D 2．A 3．D 4．A 5．D

二、填空题（10 题；每题 2 分，共 20 分）

1．$\underline{12}$ 2．$\underline{-1}$

3．$\underline{\begin{cases} x^2+y^2+(a-x)^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}}$ 4．$\underline{1}$

5．$\underline{16x-14y-11z-65=0}$ 6．$\underline{2x+y+z=0}$

7．$\underline{e^{2e}}$ 8．$\underline{(3+\ln 3)x-(6+2\ln 3)y+(12-4\ln 3)z=18+2\ln 3}$

9．记 $F(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)r$,

$$\underline{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}F(r,\theta)dr+\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{1}F(r,\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\theta}^{2\cos\theta}F(r,\theta)dr}$$

10．$\underline{\frac{2}{3}\pi}$

三、计算题（4 题；每题 5 分，共 20 分）

1．试求$y=x^3$上点(1,1)处切线与抛物线$y=-x^2+4x$围成的平面图形的面积.

解: $y'(1)=3x^2\big|_{x=1}=3,$ (1 分)

切线$y=3x-2,$ (1 分)

求交点：$\begin{cases} y=-x^2+4x, \\ y=3x-2, \end{cases}$ $(x+1)(x-2)=0, x_1=-1,\quad x_2=2,$ (1 分)

$s=\int_{-1}^{2}(-x^2+4x-3x+2)dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$ (1 分)

$$= (-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x)\Big|_{-1}^{2}$$ (1 分)

$$= 4\frac{1}{2}.$$

2. 求过直线 $l_1: \begin{cases} x+y-3z-1=0 \\ x-y+\ z+1=0 \end{cases}$ 且与直线 $l_2: \begin{cases} x-z-1=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$ 平行的平面方程.

解: 过直线 l_1 的平面方程可设为 $(x+y-3z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0$

即 $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(\lambda-3)z+(\lambda-1)=0$ ———————— (2 分)

直线 l_2 的方向向量为 $(1,0,-1)\times(0,1,1)=(1,-1,1)$ ———————— (1 分)

所求平面平行于直线 l_2 的充要条件是：

$(1+\lambda)\times1+(1-\lambda)\times(-1)+(\lambda-3)\times1=0$ ———————— (1 分)

$\Rightarrow \lambda=1$，即所求平面方程为 $x-z=0$ ———————— (1 分)

3. 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le4, y\ge0\}$ 上的最大值和最小值.

解: 由 $\begin{cases} f_x=2x-2xy^2=0, \\ f_y=4y-2x^2y=0, \end{cases}$

得 D 内驻点 $(\pm\sqrt{2},1)$； $f(\pm\sqrt{2},1)=2$. ---------------(1 分)

在边界 L_1： $y=0\ (-2\le x\le2)$ 上, $f(x,0)=x^2$, 显然在 L_1 上 $f(x,y)$ 的最大值为 4, 最小值为 0; ---------------(1 分)

在边界 L_2： $x^2+y^2=4\ (y\ge0)$ 上, 令

$$F(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4),$$ ------------(1 分)

由 $\begin{cases} F_x=2x-2xy^2+2\lambda x=0, \\ F_y=4y-2x^2y+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2=4, \end{cases}$

解得$\begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}, \\ y=\sqrt{\dfrac{3}{2}}, \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ y=2, \end{cases}$ $f\left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}},\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)=\dfrac{7}{4}$, $f(0,2)=8$; ---------------(1 分)

所以 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 8，最小值为 0. ---------------(1 分)

4、求 $\iint\limits_{D}\ln(1+x^2+y^2)dxdy$，其中 D 是由 $x^2+y^2=4$ 及坐标轴所围成的第一象限部分区域。

解：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 r\ln(1+r^2)dr=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^2\ln(1+r^2)dr^2=\frac{\pi}{4}\int_0^4\ln(1+t)dt\ (t=r^2)$$ (2+2 分)

$$=\frac{\pi}{4}[(1+t)\ln(1+t)\Big|_0^4-\int_0^4 dt]=\frac{\pi}{4}(5\ln 5-4)$$ (1 分)