上海大学 2019 ～ 2020 学年秋季学期试卷 A

解析

课程名：微积分 1　课程号：01014125　学分：6

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ______ 应试人学号______ 应试人所在院系______

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

得分	评卷人

一．单项选择题 (5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1. 下列命题正确的是(B).

A. $f(x)$在 x_0 可导的充分必要条件是 $f(x)$在 x_0 处连续;

B. $f(x)$在 x_0 可导的充分必要条件是 $f(x)$在 x_0 处可微;

C. $f(x)$在 x_0 连续的充分必要条件是 $f(x)$在 x_0 处极限存在;

D. $f(x)$在 x_0 可导的充分必要条件是 $f(x)$在 x_0 处连续存在.

2. 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续, 则下列命题不正确的是(B)

A. $f(x)$在$[a,b]$上取得最大值与最小值;

B. 若 $f(a)<A<f(b)$,则存在$x_0\in(a,b)$, 使得$f(x_0)=A$;

C. 若 $f(a)\,f(b)<0$,则存在$x_0\in(a,b)$, 使得$f(x_0)=0$;

D. $f(x)$在$[a,b]$上无界

3. 设$f(x)$可导, 则下列命题不正确的是(A).

A. $\int f'(x)dx=f(x)$　B. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$

C. $\int f'(x)dx=f(x)+C$　D. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}=$ (B)

A.0　B.1　C.+∞　D.-∞

5. 设$f(x)$有二阶导数，且满足$f'(x)+xf(x)=\sin x, f(0)=0$, 则下列命题正确的是(C)

A. $f(x)$在$x=0$ 处无极限值　B. $f(x)$在$x=0$ 处取得极大值

C. $f(x)$在$x=0$ 处取得极小值　D. $f(x)$在$x=0$ 处是否取极值不能确定

得分	评卷人

二．填空题 (5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

6. 在$x\to0$时, $\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)arcsinx$与$\arctan(x^\alpha)$是同阶无穷小, 则$\alpha=$ 3 .

7. 设函数$f(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1}{x-1}, & x>0,\\ \frac{1}{x+2}, & x\le0.\end{cases}$ 则$f(x)$的跳跃间断点个数为 2 .

8. 已知曲线L的参数方程是$\begin{cases}x=3t+t^3,\\ y=3\arctan t\end{cases}$, 则曲线$L$在$t=0$ 处法线斜率为 -1 .

9. 函数$y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\sqrt{1+x^2}$单调递增开区间是 (-1,+∞).

10. $\int_{-1}^{1}\left(x^{2020}\,ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+4x^3\right)dx=$ 0 .

草　稿　区

本解析答案与过程来自于B站"上大王俊凯""洛必达法则掌门人"王玉超老师的视频

"【微积分1】2019-2020学年秋季学期微积分(1)期末试题详解"

详细解析请看视频：https://www.bilibili.com/video/BV1wK411V7WC

在此特别感谢超哥的辛勤付出！

请在选课的时候留意一下这个宝藏老师！

得分	评卷人

三. 计算题 (5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

11. (6 分) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin(x^{-1})+1}{x^2+1}(\frac{1}{2}x^2+\cos x)^{\frac{1}{x^4}}$

计算题

$\Delta\to0 \quad \ln(1+\Delta)\sim\Delta$

$\lim\limits_{x\to0}(\frac12x^2+\cos x)^{\frac{1}{x^4}}$

11. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin(x^{-1})+1}{x^2+1}\left(\frac12x^2+\cos x\right)^{\frac{1}{x^4}}$.

$=\lim\limits_{x\to0}(\frac12x^2+\cos x)^{\frac{1}{x^4}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln(\frac12x^2+\cos x)}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\frac12x^2+\cos x)}{x^4}}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\frac12x^2+\cos x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\frac12x^2+\cos x-1)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac12x^2+\cos x-1}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{12x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{24x^2}=\frac{1}{24}$

原式 $=e^{\frac{1}{24}}$.

12. (6 分) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{e^{x^2}-1}-\frac{1}{\ln(1+x^2)})$

计算题

$\infty-\infty$ $\quad \Delta\to0 \quad e^{\Delta}-1\sim\Delta, \quad \ln(1+\Delta)\sim\Delta.$

12. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{e^{x^2}-1}-\frac{1}{\ln(1+x^2)}\right)$. 通分!

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)-(e^{x^2}-1)}{(e^{x^2}-1)\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)-e^{x^2}+1}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot2x-e^{x^2}\cdot2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-2x(1+x^2)e^{x^2}}{(1+x^2)4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(1+x^2)e^{x^2}}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-(2x)\cdot e^{x^2}-(1+x^2)e^{x^2}\cdot2x}{4x}$

▷ **−1.** $\quad =-\frac12\lim\limits_{x\to0}\left(e^{x^2}+(1+x^2)e^{x^2}\right)=-1.$

13. (6 分) 设 $y=(1+x)\ln x^3$, 求 $y^{(n)}(1)(n\geq2)$.

计算题

13. 设 $y=(1+x)\ln x^3$，求 $y^{(n)}(1)\ (n\geq2)$.

$y=3(1+x)\ln x$.

$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

$\left(\frac1x\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$

法一：莱布尼茨公式.

$y^{(n)}=3\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(1+x)^{(k)}(\ln x)^{(n-k)}$.

$=3\left(1\cdot(1+x)\cdot(\ln x)^{(n)}+n\cdot1\ (\ln x)^{(n-1)}+0\right)$

$=3\left((1+x)(\ln x)^{(n)}+n(\ln x)^{(n-1)}\right)$

$(\ln x)'=\frac1x \quad (\ln x)^{(n)}=\left(\frac1x\right)^{(n-1)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \quad (\ln x)^{(n-1)}=(-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$

$y^{(n)}=3\left((1+x)\cdot(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}+n(-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}\right)$

$y^{(n)}(1)=3\left(2\cdot(-1)^{n-1}(n-1)!+n\cdot(-1)^n(n-2)!\right)=3(n-2)!(-1)^n(2-n)$.

法二：$y'=3\ln x+3(1+x)\cdot\frac1x=3(\ln x+1+\frac1x)$

$y''=3\left(\frac1x+(\frac1x)'\right)$ 点到为止.

14. (6 分) 设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $y=f(arctanx)$ 求 y''.

计算题

14. 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $y=f(\arctan x)$，求 y''.

$y'=f'(\arctan x)\cdot\frac{1}{1+x^2}$

$y''=f''(\arctan x)\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}+f'(\arctan x)\cdot\frac{0-1\cdot2x}{(1+x^2)^2}$

$=\frac{1}{(1+x^2)^2}\left(f''(\arctan x)-2xf'(\arctan x)\right)$.

▷ $\frac{f''(\arctan x)-2xf'(\arctan x)}{(1+x)^2}$.

得分	评卷人

五. 计算题 (3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分)

15. (6 分)设函数$y=y(x)$由方程$\sin(2x+y)+y+x^2=0$所确定, 求$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0,y=0}$

5 计算题

15. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(2x+\overset{y(0)}{y})+y+x^2=0$ 所确定，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0,y=0}$.

$y'=$___.

两边对x求导, $\cos(2x+y)\cdot(2+y')+y'+2x=0$　　$y'(0)$

两边再对x求导, $-\sin(2x+y)\cdot(2+y')^2+\cos(2x+y)\cdot y''+y''+2=0$

代入$x=0,y=0$. $1\cdot y''(0)+y''(0)+2=0$

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0,y=0}=-1.$

▷ $-1.$

16. (6 分)计算$\int 4x^3\arctan(x^2-1)dx$

4 计算题

16. 求不定积分

优先级: 指三幂对反.

$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$

$\int udv=uv-\int vdu$

$$\int \underset{幂}{4x^3}\ \underset{反三角}{\arctan(x^2-1)}\,dx.$$

$=\int\arctan(x^2-1)dx^4=x^4\arctan(x^2-1)-\int x^4\frac{1}{1+(x^2-1)^2}\cdot 2x\,dx$

$\int\frac{2x^4\cdot x}{1+(x^2-1)^2}dx=\int\frac{x^4}{1+(x^2-1)^2}d(x^2-1)$

$u=x^2-1.$ $\int\frac{x^4}{1+(x^2-1)^2}d(x^2-1)=\int\frac{(u+1)^2}{1+u^2}du$

$=\int\frac{u^2+2u+1}{u^2+1}du=\int\left(1+\frac{2u}{u^2+1}\right)du=u+\int\frac{d(u^2+1)}{u^2+1}=u+\ln(u^2+1)+C$

$=x^2-1+\ln(x^4-2x^2+2)+C$

原式 $=x^4\arctan(x^2-1)-x^2-\ln(x^4-2x^2+2)+C.$

17. (6 分)计算$\int_{-1}^{0}\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

4 计算题

17. 计算 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$

$\sqrt{a^2-x^2}$　$x=a\sin t$

$\sqrt{x^2+a^2}$　$x=a\tan t$

$\sqrt{x^2-a^2}$.　$x=a\sec t$.

$\int\sec t\,dt=\ln|\sec t+\tan t|+C$

$\int\frac{1}{\cos t}dt=\int\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}$

$$\int_{-1}^{0}\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx.$$

换元必换限!

$x+1=\tan t.$　$x:-1\to 0.$　$t:0\to\frac{\pi}{4}$　$dx=\sec^2t\,dt.$

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-1+\tan t}{\sec t}\sec^2t\,dt=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\sec t\,dt$

$=-\ln|\sec t+\tan t|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\sec t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=-\ln|\sqrt2+1|+\ln|1+0|+\sqrt2-1=\sqrt2-1-\ln(\sqrt2+1).$

18. (6 分)已知$\int_0^x e^{(t-1)^3}dt$, 求$I=\int_0^1 xf(x)dx$ （原题有误）

4 计算题

18. 已知 $f(x)=\int_0^x e^{(t-1)^3}dt$, 求 $f'(x)=e^{(x-1)^3}$

$(\int_0^x f(t)dt)'=f(x)$

$(\int_0^{\varphi(x)}f(t)dt)'=f(\varphi(x))\varphi'(x)$

$\int_0^x xf(t)dt=x\int_0^x f(t)dt$

$f(0)=0$

$$I=\int_0^1(x-1)f(x)dx.$$

不能提 换元.

$I=\int_0^1(x-1)f(x)\,d(x-1)=\frac12\int_0^1 f(x)\,d(x-1)^2.$

$=\frac12(x-1)^2f(x)\Big|_0^1-\frac12\int_0^1(x-1)^2f'(x)dx$　　虚假的换元

$=0-\frac12\int_0^1(x-1)^2e^{(x-1)^3}dx=-\frac16\int_0^1 e^{(x-1)^3}d(x-1)^3.$

$=-\frac16 e^{(x-1)^3}\Big|_0^1=-\frac16+\frac16e^{-1}.$

▷ $\frac16(e^{-1}-1).$

得分	评卷人

五. 应用题 (2 小题, 每小题 8 分, 共 16 分)

19. (8 分)已知抛物线$y = ax^2$与直线$y = 2x - 1$ 相切与点$P(x_0, y_0)$。过$P(x_0, y_0)$作直线L交x轴正半轴于点A, 交y轴正半轴于点B. 假设O为坐标系原点，试求三角形OAB面积的最小值.

5 解答题

19. 已知抛物线 $y = ax^2$ 与直线 $y = 2x - 1$ 相切于点 $P(x_0, y_0)$. 过 $P(x_0, y_0)$ 作直线 L 交 x 轴正半轴于点 A、交 y 轴正半轴于点 B. 假设 O 为坐标系原点，试求三角形 OAB 面积的最小值.

$y_0 = ax_0^2$ $\quad y_0 = 2x_0 - 1$ $\quad 2ax_0 = 2$. $\quad ax_0 = 1$

$y_0 = 1 \cdot x_0$ $\quad x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $a = 1$ $\quad P(1,1)$.

设 L 斜率为 k. $\quad L$: $y - 1 = k(x-1)$.

$A(1-\frac{1}{k}, 0)$ $\quad B(0, 1-k)$ $\quad 1-\frac{1}{k} > 0$, $1-k>0$ $\quad k<1$

$\frac{1}{k} < 1$ $\quad k>1$ 或 $k<0$ $\quad k<0$

$S_{\triangle OAB} = S(k) = \frac{1}{2}|OA|\cdot|OB| = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{k})(1-k) = 1 - \frac{1}{2}(k+\frac{1}{k})$. $\quad (k<0.)$

$S'(k) = -\frac{1}{2}(1-\frac{1}{k^2})$ $\quad$ 驻点 $k=-1$ $\quad$ 唯一驻点.

由实际问题 $\quad S_{min} = S(-1) = 2$.

20. (8 分)设函数$f(x)$满足$f(x) = \dfrac{3}{2(\sqrt{x+2}+2)} + \int_2^7 f(x)dx$ 。求$f(x)$

5 解答题

20. 设连续函数 $f(x)$ 满足

$$f(x) = \frac{3}{2(\sqrt{x+2}+x)} + \int_2^7 f(x)\,dx.$$

求 $f(x)$.

$f(x) =$

$A = 2\ln 5 - 3\ln 2 + 5A$ $\quad A = \frac{3}{4}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5$.

$f(x) = \frac{3}{2(\sqrt{x+2}+x)} + \frac{3}{4}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5$. $\quad \int_2^7 A\,dx = A\int_2^7 dx = 5A$

设 $\int_2^7 f(x)dx = A$. $\quad f(x) = \frac{3}{2(\sqrt{x+2}+x)} + A$.

两边在 $[2,7]$ 上积分 $A = \int_2^7 f(x)dx = \int_2^7 \frac{3}{2(\sqrt{x+2}+x)}dx + 5A$.

$t = \sqrt{x+2}$. $x = t^2 - 2$ $\quad x: 2 \to 7$ $\quad t: 2 \to 3$ $\quad dx = 2t\,dt$.

$\int_2^7 \frac{3}{2(\sqrt{x+2}+x)}dx = \int_2^3 \frac{3}{2(t+t^2-2)} \cdot 2t\,dt = 3\int_2^3 \frac{t}{(t+2)(t-1)}dt$.

$\frac{t}{(t+2)(t-1)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-1} = \frac{At - A + Bt + 2B}{(t+2)(t-1)}$ $\quad \begin{cases} A+B=1 \\ -A+2B=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} A=\frac{2}{3} \\ B=\frac{1}{3} \end{cases}$

$= 2\int_2^3 \frac{1}{t+2}dt + \int_2^3 \frac{1}{t-1}dt = 2\ln(t+2)\Big|_2^3 + \ln(t-1)\Big|_2^3 = 2\ln 5 - 3\ln 2$.

得分	评卷人

六. 证明题 (1 小题,共 6 分)

21. (6 分)设$f(x), g(x)$在区间$[a,b]$上连续，证明存在$\xi \in (a,b)$使得

$$f(\xi)\int_a^{\xi} g(x)dx = g(\xi)\int_{\xi}^{b} f(x)dx.$$

本解析答案与过程来自于B站"上大王俊凯""洛必达法则掌门人"

王玉超老师的视频

"【微积分1】2019-2020学年秋季学期微积分(1)期末试题详解"

详细解析请看视频：https://www.bilibili.com/video/BV1wK411V7WC

在此特别感谢超哥的辛勤付出!

草 稿 区

6 证明题 存在性结论. ~~单调有界数列~~. ~~闭区间连续函数~~. 微分中值、积分中值

21. 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$f(x) \in C[a,b]$. $\exists \xi \in [a,b]$ $\quad \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

$f(\xi)\int_a^{\xi} g(x)dx - g(\xi)\int_{\xi}^b f(x)dx = 0$

$$f(\xi)\int_a^{\xi} g(x)\,dx = g(\xi)\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx.$$

$-f(t)\int_a^t g(x)dx + g(t)\int_t^b f(x)dx$.

$\frac{d}{dt}\left(\int_a^t g(x)dx\right) = g(t)$.

$\frac{d}{dt}\left(\int_t^b f(x)dx\right) = -f(t)$.

$\frac{d}{dt}\left(\int_a^t g(x)dx \int_t^b f(x)dx\right) = g(t)\int_t^b f(x)dx + \int_a^t g(x)dx \cdot (-f(t))$

取 $F(t) = \int_a^t g(x)dx \int_t^b f(x)dx$. $\quad F(t) \in C[a,b] \cap D(a,b)$. $\quad F(a) = F(b) = 0$

由罗尔定理. $\exists \xi \in (a,b)$, $F'(\xi) = 0$ $\quad f(\xi)\int_a^{\xi} g(x)dx = g(\xi)\int_{\xi}^b f(x)dx$.