《微积分 2》练习题（理工大类 A 卷）答案

本套练习题共 19 题，满分 50 分；内容涵盖定积分应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、二重积分等四个部分。

一、单项选择题（5 题；每题 2 分，共 10 分）

1．C　　2．B　　3．C　　4．C　　5．B

二、填空题（10 题；每题 2 分，共 20 分）

1．15　　2．$\dfrac{x^2}{4}-y^2-z^2=1$

3．$\dfrac{5}{4}$　　4．e^{2e}

5．$\dfrac{3}{8}\mathrm{d}x-\dfrac{3}{16}\mathrm{d}y-\dfrac{1}{8}\ln 2\,\mathrm{d}z$　　6．$\dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1)$

7．$\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}}$　　8．$\sqrt{3}$

9．0　　10．$\dfrac{1}{3}$

三、计算题（4 题；每题 5 分，共 20 分）

1. 求曲线 $y=1-x^2$ 与 x 轴围成的封闭图形的面积；并求该封闭图形绕直线 $y=2$ 旋转所得的旋转体体积.

解：面积 $S=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x$ ---------------(1 分)

$$=2\int_0^1(1-x^2)\mathrm{d}x=2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{3};$$ ---------------(1 分)

体积$V=\pi\times 2^2\times 2-\pi\int_{-1}^{1}[2-(1-x^2)]^2\mathrm{d}x$ ---------------(2 分)

$$=8\pi-2\pi\int_0^1(1+x^2)^2\mathrm{d}x$$

$$=8\pi-2\pi\cdot\frac{28}{15}=\frac{64}{15}\pi\,.$$ ---------------(1 分)

2．函数$z=z(x,y)$由方程$x=f(y^2,x+z)$所确定，其中$f(u,v)$二阶可偏导，且$f_v\neq 0$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解：令$F(x,y,z)=f(y^2,x+z)-x$， -----------------(1 分)

则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=-\dfrac{f_2'-1}{f_2'}=-1+\dfrac{1}{f_2'}$； -----------------(2 分)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial x}\left(-1+\frac{1}{f_2'}\right)=\frac{-f_{22}''\cdot\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{(f_2')^2}=-\frac{f_{22}''}{(f_2')^3}\,.$$ -----------------(2 分)

3 设闭区域$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$，$f(x,y)$为$D$上的连续函数，且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

求$f(x,y)$.

解：令$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，则$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}a$. ---------------(1 分)

由$a=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}a\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\cdot r\mathrm{d}r-\frac{8}{\pi}a\cdot\pi$$

$$=-\frac{2\pi}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^1-8a$$

$$=\frac{2\pi}{3}-8a\,,$$ ---------------(2 分)

解得$a=\dfrac{2\pi}{27}$. ---------------(1 分)

所以 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}\cdot\dfrac{2\pi}{27}=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{16}{27}$. ---------------(1 分)

4 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\}$ 上的最大值和最小值.

解: 由

$$\begin{cases} f_x=2x-2xy^2=0, \\ f_y=4y-2x^2y=0, \end{cases}$$

得 D 内驻点 $(\pm\sqrt{2},1)$; $f(\pm\sqrt{2},1)=2$. ---------------(1 分)

在边界 L_1: $y=0\ (-2\le x\le 2)$ 上, $f(x,0)=x^2$, 显然在 L_1 上 $f(x,y)$ 的最大值为 4, 最小值为 0; ---------------(1 分)

在边界 L_2: $x^2+y^2=4\ (y\ge 0)$ 上, 令

$$F(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4),$$ ------------(1 分)

由 $\begin{cases} F_x=2x-2xy^2+2\lambda x=0, \\ F_y=4y-2x^2y+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2=4, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}, \\ y=\sqrt{\dfrac{3}{2}}, \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ y=2, \end{cases}$ $f\left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}},\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)=\dfrac{7}{4}$, $f(0,2)=8$; ---------------(1 分)

所以 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 8, 最小值为 0. ---------------(1 分)