

**Anotações de IC:**

Iniciação Científica

**Aluno:** Amadeus Dal Vesco

**Orientador:** Alexandre Magno Silva Santos

**03 de Novembro de 2024**

**Florianópolis - SC**

## Sumário

|   |                    |    |
|---|--------------------|----|
| 1 | Introdução         | 3  |
| 2 | Capítulo 4 - Chung | 4  |
| 3 | Capítulo 6 - Chung | 5  |
| 4 | Capítulo 7 - Chung | 13 |
| 5 |                    | 14 |
|   | Bibliografia       | 15 |

# 1 Introdução

Estas notas tem como objeto reunir todo o conhecimento adquirido durante o trabalho realizado por min, Amadeus Dal Vesco, durante a orientação de Alexandre Magno Silva Santos nesta empreitada que é a Iniciação Científica. Estará contido aqui todo o processo desenvolvimento por min para entender melhor o assunto que estou estudando, que é Física Nuclear num contexto computacional. Trataremos aqui de um caso particular, que é o núcleo do Deutério, o Deuteron, tal que se trata de um núcleo que é composto apenas por um neutron e um próton. Apenas duas partículas estão no problema, pois se tentássemos envolver mais uma partícula nos estudos da interação nuclear, o problema será excessivamente mais complicada. Além de estarmos utilizando a referência principal que é o [Chu01], temos também a seguinte referência, [Men02], que podemos entender um pouco mais deste problema que estamos trabalhando, e da referência [Men22] que será utilizado para os estudos de Física de Hádrons, com foco na equação de Klein-Gordon para a equação de Dirac como objetivo final da Iniciação Científica.

## 2 Capítulo 4 - Chung

Neste capítulo iremos introduzir uma das informações mais importantes para as partículas no contexto da Física Nuclear, que é o Momento Angular. Além disso, iremos introduzir uma nova grandeza intrínseca às partículas subatômicas, o Spin, que será de suma importancia para entender melhor a interação entre os nucleons, o qual serve crucialmente para explicar certos experimentos que não são descritos completamente apenas com o que apenas se sabia.

### **Paridade**

(...)

### **Permutação de Par**

(...)

### **Momento Angular e Spin**

### 3 Capítulo 6 - Chung

Até agora compreendemos como o átomo é constituído e como descobriram a existência dos nucleons, termo utilizado na Física Nuclear, os quais são comumente chamados de próton e neutron.

Apartir de agora queremos compreender como funciona a interação entre os nucleons de um átomo e como é possível existir estabilidade na estrutura atômica destes constituintes, que são cargas de mesma natureza. Para isso, revisitaremos as leis do eletromagnetismo, estudando as interações Coulombianas, as quais descrevem a interação entre partículas carregadas eletricamente.

**Pergunta 1: Como descrever a interação entre nucleons dentro de núcleo de um átomo?**

Por enquanto, ainda é desconhecido a existência de um conjunto de equações que descrevam completamente as interações nucleares entre os nucleons, e que sejam fechadas matematicamente, como as equações de Maxwell para o Eletromagnetismo.

Como ainda não desconhecemos formas mais gerais de tratar o problema, iremos particulariza-lo ao máximo para que possamos obter alguns resultados no momento.

**1ª Aproximação: Supor que a interação entre os constituintes do núcleo possa ser descrito como uma superposição de interações.**

Tal aproximação é falha muitas vezes exatamente por conta de um núcleo apresentar muitos corpos, tal que tal tipo de problema não tem solução exata, analítica, quando tratamos de um sistema de m-corpos, onde  $m > 2$ .

Com tal análise, podemos nos fazer a seguinte pergunta:

**Pergunta 2: Como descrever a interação entre dois nucleons?**

Para isso, partiremos para descrever a interação deste problema que se trata da interação nuclear fundamental, no momento.

Enunciemos, agora, certas especificações para o sistema que queremos estudar e resolver.

**2ª Aproximação: Sistema de dois nucleons. Isospin total  $T = 0$  ou  $T = 1$  (iso-singlete e isotripletes, respectivamente)**

Com esta segunda aproximação, o nosso sistema de duas partículas/nucleons, que se trata mais especificamente do deuteron, será nossa escolha de estudo, pois se trata do sistema ligado mais simples que conhecemos.

Primeiramente, peguemos alguns dados experimentais acerca deste sistema.

**Dados Experimentais (Deuteron):**

(...)

**Deuteron (Modelo Simples):**

O deuteron é um sistema ligado de duas partículas. Para descrever sua dinâmica precisaremos da equação de Schroedinger para o movimento relativo:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + k^2 \right) u_l = 0, \quad (3.1)$$

tal que  $u_l(r)$  é a parte radial da função de onda principal,  $R(r)$ , com a seguinte equação:

$$u_l(r) = rR(r), \quad (3.2)$$

e, temos que  $k^2$  é:

$$k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E - V(r) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right], \quad (3.3)$$

onde,  $\mu$  representa a expressão para a massa reduzida de um sistema de duas partículas, com a seguinte equação:

$$\mu = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n}, \quad (3.4)$$

tal que  $m_p$  representa a massa do próton e  $m_n$  representa a massa do neutron, os constituintes do nosso sistema.

Na expressão (3.3), temos  $\mathbf{E}$  representando a energia do sistema, isto é, a energia do centro de massa do sistema. Para este problema em específico,  $\mathbf{E}$  será  $\mathbf{E} = -E_0$ , onde  $E_0$  é a energia de ligação do deuteron.

Com a energia  $\mathbf{E}$  definida, o problema agora é escrever a equação para o potencial  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  entre os nucleons do núcleo. Já conhecemos algumas expressões para  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ , que dependerão de serem *esfericamente simétricos*.

A partir disso, utilizaremos os dados empíricos obtidos anteriormente e conhecimentos que temos da física do problema:

1. Interação nuclear é atrativa e tem curto alcance, isto é, limitada;
2. A interação nuclear tem um caroço repulsivo, isto é, a mínima distância entre os nucleons é o limite dado pelo raio da partícula.

Com isso, podemos representar esquematicamente o problema da seguinte forma:

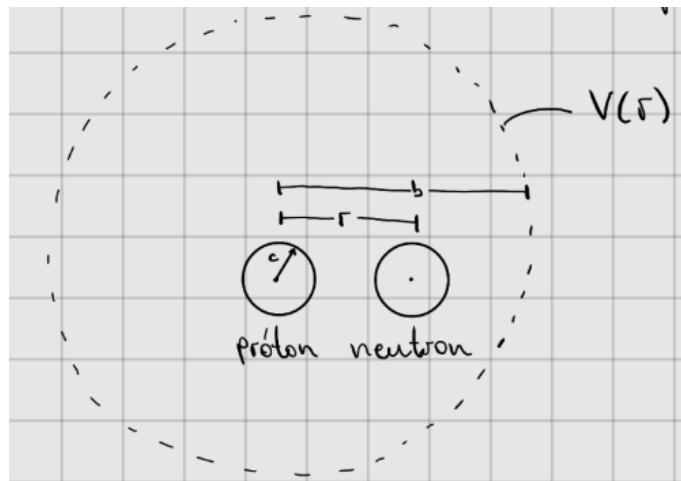


Figura 3.1: Esquema da interação dos nucleons

A figura 3.1 representa esquematicamente como trataremos o problema da interação do potencial nuclear para o nosso problema do deuteron.

O potencial terá os seguintes valores:

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & 0 < r < c \\ -V_0, & c < r < c + b \\ 0, & c + b < r < \infty \end{cases} \quad (3.5)$$

onde,  $(c)$  é o raio do caroço repulsivo, neste caso definimos o próton como referência,  $b$  e  $V_0$  são a largura e a profundidade do poço, respectivamente, tal que tais valores valem quando tomarmos como condições de contorno para um poço retangular.

Para simplificar um pouco as contas de (3.3), os cálculos admitirão o valor para o momento angular orbital igual a zero ( $l=0$ ), onde supõe-se o estado ligado de mais baixa energia para uma onda  $s$ . Ficamos, então, com:

$$k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(r)]. \quad (3.6)$$

Substituindo a equação (3.6) em (3.1), ficamos com:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(r)] \right\} u_0 = 0. \quad (3.7)$$

Com a equação (3.5) que apresenta os possíveis valores para o potencial nuclear de interação dos nucleons, podemos representa-lo graficamente da seguinte forma:

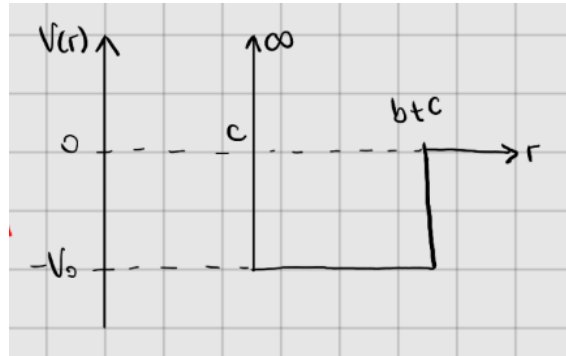


Figura 3.2: Gráfico do potencial de interação

Do gráfico (3.2), podemos tirar algumas informações acerca das condições de contorno deste problema, que se trata do poço retangular, acerca de possíveis soluções.

- Em  $r < c$ , a solução deve ter um comportamento que diverge, isto é, o valor de  $V(r)$  será indefinido;
- Em  $c < r < c+b$ , a solução deve ter um caráter oscilatório, pois apresenta um bom comportamento para este tipo de solução;
- Em  $c+b < r$ , o potencial não terá mais efeito por conta da região máxima de alcance de  $V(r)$ , portanto isto trará uma solução que se anula quando o  $r$  cresce.

Tal análise proporciona as seguintes soluções possíveis para  $u_0$ :

$$u_0 \begin{cases} Be^{-\kappa r}, & r < c \\ A \sin k(r - c), & c < r < c + b \\ 0, & c + b < r \end{cases} \quad (3.8)$$

tal que,

$$\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu(V_0 - E_0)}, \quad (3.9)$$

e

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu E_0}. \quad (3.10)$$

Além disso, temos as constantes de normalização A e B,

$$A = \sqrt{\frac{2\kappa}{(1 + b\kappa)}}, \quad (3.11)$$

$$B = A \sin kbe^{-\kappa(b+c)}, \quad (3.12)$$

e podemos também investigar a relação entre a largura e a profundidade do poço retangular. Efetivamente, temos que a função é contínua em  $c < r < c + b$ , e de sua derivada primeira contínua em  $r = c + b$ ,

$$\cot kb = \frac{-\kappa}{k} \quad (3.13)$$

Da equação (3.13) obtemos uma relação entre  $V_0$  e  $b$ , se  $E_0$  for conhecida.

A partir daqui, iremos descobrir a origem das equações acima e como obtê-las.

Primeira coisa que iremos fazer é, desenvolver as equações que descreve a dinâmica do sistema do deuteron, pois nela há todas as informações que precisamos.

1. Equação de Schroedinger para uma partícula independente do tempo:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(r) + V(r) \Psi(r) = E \Psi(r). \quad (3.14)$$

Utilizaremos então a equação de Schroedinger para obter os resultados que buscamos, aqui está envolvido algumas aproximações particulares, como a própria utilização da equação de Schroedinger, e não da equação de Dirac, pois estamos considerando um potencial nuclear radial sem a presença de certas dependências tensoriais do campo.

Porém, a equação (3.14) descreve um sistema de apenas uma partícula. Para o nosso problema, precisaremos então inserir a informação de duas partículas e da presença do momento angular do sistema, informação crucial para a dinâmica de sistemas compostos por partículas não puntiformes.

2. Equação de Schroedinger para duas partículas com simetria esférica independente do tempo:

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \Psi(r) + \left[ V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] \Psi(r) = E \Psi(r), \quad (3.15)$$



Podemos ver que, nas equações (3.14) e (3.15), há a presença do operador Laplaciano  $\nabla^2$ , o qual não tem um sistema de coordenadas específico, portanto iremos escrever este operador em coordenadas esféricas, trazendo ao nosso problema,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3.16)$$

Ajustando os termos de  $\nabla^2$  para aparecer apenas dependência radial com respeito à equação (3.15), ou seja, os termos angulares  $\theta$  e  $\phi$  da equação (3.16) serão nulos, ficando da seguinte forma,

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \Psi(r) + \left[ V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] \Psi(r) = E\Psi(r). \quad (3.17)$$

Para simplificar a equação acima, podemos abrir os termos com derivadas parciais na coordenada radial, as quais se transformam em derivadas totais, por conta da dependência ser apenas em uma coordenada,

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \Psi(r) + \left[ V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] \Psi(r) = E\Psi(r). \quad (3.18)$$

Além disso, sem perda de generalidade, podemos simplificar a equação (3.18) para  $l = 0$ , tal que consideraremos

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \Psi(r) + V(r)\Psi(r) = E\Psi(r), \quad (3.19)$$

onde  $\Psi(r)$  se trata da função de onda, solução da equação (3.19). Iremos agora utilizar algumas contas que foram desenvolvidas em [Men02] para obter mais resultados. Contudo, depois disso pretendemos voltar para a nossa principal referência, que é [Chu01]. Portanto, com a seguinte expressão para  $\Psi(r)$ ,

$$\Psi(r) = \frac{u_l(r)}{r}, \quad (3.20)$$

vamos calcular agora as derivadas totais de  $\Psi(r)$ , as quais estão presentes na equação (3.19). Apenas uma observação,  $u_l(r)$  corresponde a solução geral, mas como estamos simplificando  $l = 0$ ,  $u_l(r)$  será  $u_0(r)$ .

$$\frac{d\Psi}{dr} = \frac{d}{dr} \left( \frac{u_0}{r} \right) = \left( \frac{du_0}{dr} r - u_0 \right) / r^2, \quad (3.21)$$

e

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left[ \left( \frac{du_0}{dr} r - u_0 \right) / r^2 \right] = \left( \frac{d^2u_0}{dr^2} r^3 - 2 \frac{du_0}{dr} r^2 + 2u_0 r \right) / r^4. \quad (3.22)$$

Portanto, substituindo as equações (3.22) e (3.21) na equação (3.19) e ajustando os termos, ficamos com,

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2u_0}{dr^2} + V(r)u_0 = Eu_0. \quad (3.23)$$

Queremos agora rearranjar os termos da equação acima para que fique semelhante a equação (3.7), a qual, no início, propomos de resolver,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V) \right] u_0 = 0. \quad (3.24)$$

Daqui finalmente podemos aplicar os valores possíveis para  $V(r)$ , os quais estão citados na equação (3.5).

Começamos com  $V(r)$  no intervalo ( $0 < r < c$ ). Ao colocarmos o valor de  $V(r)$  direto na equação (3.24), obteremos uma indeterminação, como podemos ver no gráfico (3.2), então para resolver a equação, a solução  $u_0$  terá que ser nula para que a equação continue sendo válida no intervalo,

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - \infty) \right] u_0 = 0 \implies u_0 = 0. \quad (3.25)$$

Na próxima região possível para  $V(r)$ , temos o seguinte valor:  $V(r) = -V_0$  em ( $c < r < c+b$ ). Aqui basta substituir o valor de  $V(r)$  direto na equação (3.24), além disso precisaremos do valor de  $E$ , onde nesta região de validade para o sistema ligado do deuteron, sua energia corresponde á energia de ligação  $E = -E_0$ . Com isso, a equação (3.24) fica

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0 - E_0) \right] u_0 = 0. \quad (3.26)$$

ou, denotando  $k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0 - E_0)$ , ficamos com

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + k^2 \right) u_0 = 0. \quad (3.27)$$

A equação diferencial acima tem uma forma conhecida, se trata da equação diferencial para um oscilador harmônico, que dependendo do valor de  $k^2$ , podemos ter soluções do tipo,

$$u_0(r) = Ae^{ikr} + Be^{-ikr}, \quad (3.28)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes arbitrárias,  $k$  é o valor conhecido acima. Aqui iremos especificar ainda mais a solução da equação acima com relação ao valor de ( $r=c$ ), pois queremos que a solução volte para seu valor naquele intervalo, que é  $u_0 = 0$ , portanto (3.28) fica

$$u_0(r) = Ae^{ik(r-c)} + Be^{-ik(r-c)}. \quad (3.29)$$

Podemos representar a equação (3.29) de uma outra forma, basta lembrar da fórmula de euler:  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , ficando então,

$$u_0 = A \cos k(r - c) + B \sin k(r - c). \quad (3.30)$$

Para definir somente um possível valor para  $u_0$ , precisaremos olhar novamente para as condições de contorno do sistema, que se trata de um potencial retangular. Como em ( $r=c$ ),  $u_0 = 0$ , ao substituirmos na equação (3.30), apenas o segundo termo irá zerar, definindo assim pra gente a solução que queremos no intervalo ( $c < r < c+b$ ).

$$u_0 = B \sin k(r - c). \quad (3.31)$$

Por fim, queremos analisar agora o intervalo ( $c+b < r$ ), onde  $V(r) = 0$ . A (3.24) ficará da seguinte forma,

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} E_0 \right) u_0 = 0. \quad (3.32)$$

Como neste intervalo o potencial vai pra zero, a solução também tenderá para zero na medida que  $r$  cresce, ou também ao resolver a equação (3.32), obteremos as seguintes soluções:

$$u_0(r) = Ce^{\kappa r} + De^{-\kappa r}, \quad (3.33)$$

onde C e D são constantes arbitrárias e  $\kappa$  vale

$$\kappa = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2 E_0}}. \quad (3.34)$$

Novamente queremos que a solução da (3.32), quando estiver no intervalo ( $c+b < r$ ), ou seja, quando  $r$  crescer a solução vá pra zero no mesmo passo que  $V(r)$ . Com esta análise, podemos afirmar que a única solução que temos é,

$$u_0(r) = De^{-\kappa r}. \quad (3.35)$$

Finalmente, obtemos as seguintes soluções de acordo com os valores possível para  $V(r)$ :

$$u_0(r) = \begin{cases} 0, & r < c \\ A \sin k(r - c), & c < r < c + b \\ Be^{-\kappa r}, & c + b < r \end{cases} \quad (3.36)$$

já que as constantes A e D são arbitrárias, podemos redefinir  $u_0(r) = De^{-\kappa r}$  como  $u_0(r) = Be^{-\kappa r}$ .

Queremos agora determinar valores para as constantes A e B, para isso utilizaremos as condições de contorno do problema.

Sabemos do nosso problema que, da figura 3.1, a solução que encontramos em

$$u_0(r = c) = u_0(r \rightarrow \infty) = 0. \quad (3.37)$$

Com isso, podemos avaliar as soluções no intervalo ( $c < r < c+b$ ), com preferência em ( $r=c+b$ )

$$\begin{cases} u_0(r) = A \sin k(r - c), \\ u_0(r) = Be^{-\kappa r}. \end{cases} \quad (3.38)$$

quando ( $r=c$ ), a primeira solução fica,

$$u_0(r = c) = A \sin k(c - c) = A \sin k(0) = 0 \quad (3.39)$$

e a primeira e a segunda solução em ( $r=c+b$ ) fica,

$$\begin{cases} u_0(r = c + b) = A \sin k[(c + b) - c] = A \sin k(b), \\ u_0(r = c + b) = Be^{-\kappa(c+b)}. \end{cases} \quad (3.40)$$

Com estas equações, podemos encontrar o valor da constante B,

$$u_0(r = c + b) = A \sin k(b) = Be^{-\kappa(c+b)} \implies B = A \sin k(b) e^{\kappa(c+b)}. \quad (3.41)$$

Agora, para encontrarmos o valor da constante A, precisaremos levar em conta que A e B são constantes de normalização, então elas tem a seguinte propriedade,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_0^*(r)u_0(r)dr = 1, \quad r \in (-\infty, +\infty). \quad (3.42)$$

Portanto, com a equação (??), ficamos com

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(r)dr = \int_{-\infty}^c f(r)dr + \int_c^{c+b} f(r)dr + \int_{c+b}^{+\infty} f(r)dr = 1, \quad (3.43)$$

onde, apenas chamei o termo da integral  $u_0^*(r)u_0(r)$  de  $f(r)$  para simplificar a cara da equação de cima.

Podemos agora substituir o valor de  $u_0(r)$  nos devidos intervalos, seguindo a relação da função com o intervalo em (3.36).

$$\int_{-\infty}^c u_0^*(r)u_0(r)dr = \int_{-\infty}^c 0 \, dr = 0, \quad (3.44)$$

primeiro resultado que obtemos é com relação ao intervalo  $(-\infty < r < c)$ , o qual não está propriamente definido no nosso problema, e que em  $(0 < r < c)$  a solução tem que ser nula, resultado no valor acima.

$$\int_c^{c+b} u_0^*(r)u_0(r)dr = \int_c^{c+b} [A \sin k(r-c)]^2 dr = \frac{A^2}{2} \left[ b - \frac{\sin 2kb}{2k} \right], \quad (3.45)$$

este segundo resultado foi utilizada a função solução periódica que obtivemos, resultando no valor obtido acima.

E, por fim, temos a última integral a ser feita,

$$\int_{c+b}^{+\infty} u_0^*(r)u_0(r)dr = \int_{c+b}^{+\infty} [e^{-\kappa r}]^2 dr = \frac{B^2}{2\kappa} e^{-2\kappa(c+b)}. \quad (3.46)$$

Vamos utilizar o valor da constante B encontrada na equação (3.41) para encontrar o valor de A,

$$\frac{B^2}{2\kappa} e^{-2\kappa(c+b)} = \frac{[A \sin kbe^{\kappa(c+b)}]^2}{2\kappa} e^{-2\kappa(c+b)} = \frac{A^2 \sin^2 kb}{2\kappa} \quad (3.47)$$

Por fim, juntemos as equações (3.45) e (3.47) em (3.43).

$$\frac{A^2}{2} \left[ b - \frac{\sin 2kb}{2k} \right] + \frac{A^2 \sin^2 kb}{2\kappa} = 1 \quad (3.48)$$

(3.49)

## 4 Capítulo 7 - Chung

**5**

## Bibliografia

- [Chu01] K. C. Chung. *Introdução à Física Nuclear*. EdUERJ, 2001. ISBN: 8575110152.
- [Men02] D. P. Menezes. *Introdução á Física Nuclear e de Partículas Elementares*. Editora da UFSC, 2002.
- [Men22] Marquez K. D Menezes D. P. Silva T. J. N. *Introdução á Física Nuclear e de Hádrons*. Editora Livraria da Física, 2022. ISBN: 9786555632569.