

Sprawozdanie

Analiza widmowa sygnałów i prosty filtr o nieskończonej odpowiedzi impulsowej FIR

Amadeusz Filipek

Laboratorium komputerowe WFiIS AGH

1. Wstęp

1.1 Własności dyskretnej transformaty Fouriera

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z analizą widmową sygnałów dyskretnych oraz wykonanie i zbadanie filtru o skończonej odpowiedzi impulsowej FIR.

Dyskretna transformata Fouriera jest podstawowym narzędziem wykorzystywanym w analizie sygnałów dyskretnych. Zdefiniowana jest dla N próbek sygnału $x(n)$ zebranych z czasem próbkowania T_s w sposób następujący:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j n \frac{m}{N}} \quad (1)$$

oraz transformata odwrotna

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{2\pi j n \frac{m}{N}} \quad (2)$$

gdzie $m \in [0, N-1]$ stanowi kolejne prążki o częstotliwościach równych $f(m) = \frac{m}{N} f_s$. Można pokazać, że przekształcenie to jest liniowe, to znaczy, że jeśli:

$$x(n) = \alpha \cdot a(n) + \beta \cdot b(n) \quad (3)$$

to

$$X(m) = \alpha \cdot A(m) + \beta \cdot B(m)$$

Aby powyższą zależność udowodnić, wstawmy (3) do równania (1), uzyskujemy:

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} [\alpha \cdot a(n) + \beta \cdot b(n)] e^{-2\pi j n \frac{m}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\alpha \cdot a(n) e^{-2\pi j n \frac{m}{N}} + \beta \cdot b(n) e^{-2\pi j n \frac{m}{N}} \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\alpha \cdot a(n) e^{-2\pi j n \frac{m}{N}} + \beta \cdot b(n) e^{-2\pi j n \frac{m}{N}} \right] = \alpha \sum_{n=0}^{N-1} a(n) e^{-2\pi j n \frac{m}{N}} + \beta \sum_{n=0}^{N-1} b(n) e^{-2\pi j n \frac{m}{N}} = \\ &= \alpha \cdot A(m) + \beta \cdot B(m) \end{aligned}$$

Dyskretna transformata Fouriera ma także inną ważną cechę, mianowicie dla rzeczywistego sygnału $x(n)$ bez składowych zespolonych przekształcenie jest symetryczne w dziedzinie częstotliwości. Rozważmy prążek o numerze $N - m$:

$$x(N-m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j n \frac{N-m}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j n \left(1 - \frac{m}{N}\right)} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{2\pi j n \frac{m}{N}} = x^*(m)$$

Zatem część rzeczywista sygnału w dziedzinie częstotliwości jest symetryczna względem prążka $N/2$, któremu odpowiada częstotliwość $\frac{f_s}{2}$. Z tego względu analizę widma sygnału w przestrzeni częstotliwości ograniczamy do tego zakresu, gdyż zawiera on całą informację o sygnale rzeczywistym.

1.2 Splot oraz iloczyn sygnałów

Splot lub konwolucja jest działaniem określonym na dwóch funkcjach, dla sygnałów dyskretnych zdefiniowany jest następująco:

$$s(n) = x(n) \otimes y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n-i) y(i)$$

Gdy mamy do czynienia z zestawem N próbek sygnałów $x(n), y(n)$ to pozostałe wyrażenia w sumie możemy traktować jako równe zero, wtedy :

$$s(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x(n-i) y(i)$$

Okazuje się, że dyskretna transformata Fouriera ze splotu dwóch funkcji jest równa iloczynowi transformat tych funkcji. Aby pokazać, że tak jest, wyjdźmy od iloczynu dwóch sygnałów w przestrzeni Fouriera i zastosujmy transformatę odwrotną :

$$\begin{aligned} x(m) \cdot y(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j n \frac{m}{N}} \sum_{p=0}^{N-1} y(p) e^{-2\pi j p \frac{m}{N}} \\ F^{-1}\{x(m) \cdot y(m)\}(n') &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j n \frac{m}{N}} \sum_{p=0}^{N-1} y(p) e^{-2\pi j p \frac{m}{N}} \right] e^{2\pi j n' \frac{m}{N}} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sum_{p=0}^{N-1} y(p) \sum_{m=0}^{N-1} e^{-2\pi j p \frac{m}{N}} e^{-2\pi j n \frac{m}{N}} e^{2\pi j n' \frac{m}{N}} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sum_{p=0}^{N-1} y(p) \sum_{m=0}^{N-1} \exp \left[2\pi j \frac{m}{N} ((n' - p) - n) \right] = \dots \end{aligned}$$

Korzystamy z relacji ortogonalności:

$$\sum_{m=0}^{N-1} \exp \left[2\pi j \frac{m}{N} (k - k') \right] = N \delta_{kk'}$$

Zatem

$$\dots = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sum_{p=0}^{N-1} y(p) \delta_{(n'-p)n} = \sum_{p=0}^{N-1} x(n' - p) y(p) = x(n') \otimes y(n')$$

$$F[x(n') \otimes y(n')] = x(m) \cdot y(m)$$

Powyższa zależność spełniona jest także w kierunku odwrotnym, mianowicie transformaty Fouriera iloczynu dwóch funkcji jest równa splotowi ich transformat. Aby to pokazać, wyjdźmy od splotu dwóch funkcji w przestrzeni Fouriera i zastosujmy transformatę odwrotną:

$$x(m) \otimes y(m) = \sum_{i=0}^{N-1} x(m-i) y(i)$$

$$F^{-1}[x(m) \otimes y(m)](n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{i=0}^{N-1} x(m-i) y(i) \right] e^{2\pi j n \frac{m}{N}} = \dots$$

Wiedząc, że

$$x(m-i) = \sum_{p=0}^{N-1} x(p) e^{-2\pi j p \frac{m-i}{N}}$$

$$y(i) = \sum_{q=0}^{N-1} y(q) e^{-2\pi j q \frac{i}{N}}$$

$$\dots = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} x(p) e^{-2\pi j p \frac{m-i}{N}} \sum_{q=0}^{N-1} y(q) e^{-2\pi j q \frac{i}{N}} \right] e^{2\pi j n \frac{m}{N}} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} x(p) y(q) \sum_{m=0}^{N-1} \exp \left[\frac{2\pi j}{N} (nm - pm) \right] \sum_{i=0}^{N-1} \exp \left[\frac{2\pi j}{N} (pi - qi) \right] =$$

Korzystamy z relacji ortogonalności osobno dla sumy po indeksach m oraz i :

$$N \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} x(p) y(q) \delta_{np} \delta_{pq} = N \sum_{p=0}^{N-1} x(p) y(p) \delta_{np} = Nx(n) \cdot y(n)$$

$$F[x(n) \cdot y(n)] = \frac{1}{N} x(m) \otimes y(m)$$

Zatem z dokładnością do stałej normalizacyjnej transformaty iloczynu funkcji jest równa splotowi ich transformat.

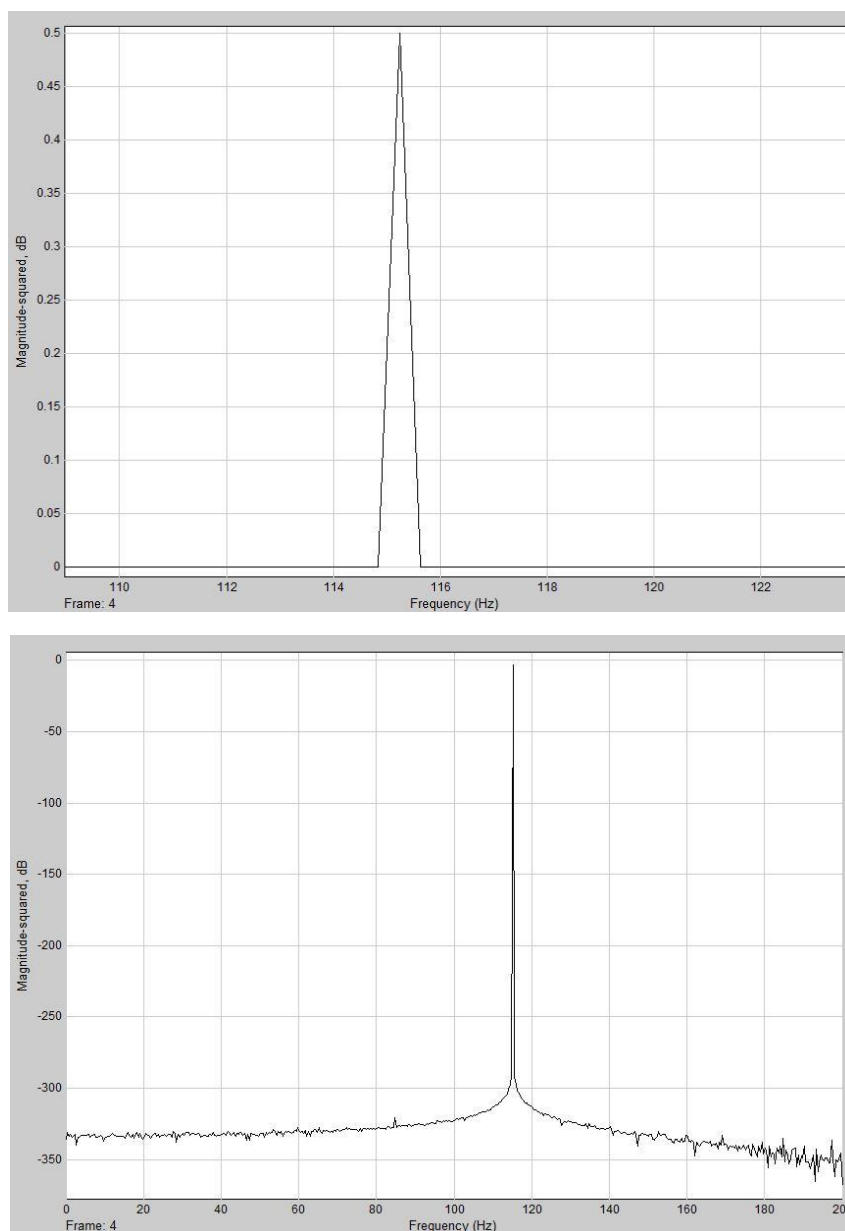
2. Analiza widmowa

3.1 Widmo sygnału sinusoidalnego

W ramach ćwiczenia zbadałem widmo sygnału sinusoidalnego o częstotliwości

$$f = 115.234375 \text{ Hz}$$

zbierając $N = 1024$ próbki z częstotliwością próbkowania $f_s = 400 \text{ Hz}$. Widmo sygnału zostało uzyskane wykonując dyskretną transformatę Fouriera na zebranych próbkach. Widmo przedstawione jest w skali liniowej oraz logarytmicznej na poniższych wykresach:



Wykres 1. Widmo sygnału sinusoidalnego w przestrzeni częstotliwości w skali liniowej oraz logarytmicznej

Na obu powyższych wykresach widać, że widmo sygnału sinusoidalnego stanowi pojedynczy impuls, dokładnie odpowiadający częstotliwości zadanego sygnału. Częstotliwość bazowa widma transformaty wynosi:

$$f_b = \frac{f_s}{N} = 0.390625 \text{ Hz}$$

Można zauważyć, że zadana częstotliwość jest dokładnie wielokrotnością częstotliwości bazowej:

$$\frac{f}{f_b} = 295$$

Dlatego też widmo stanowi pojedynczy impuls zamiast rozmytego piku.

3.2 Liniowość transformaty Fouriera

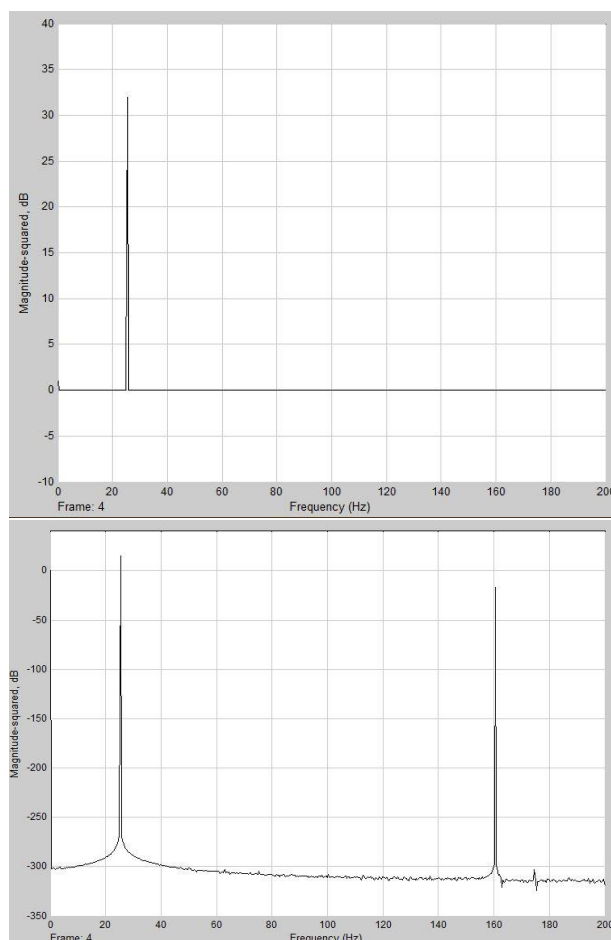
Następnym krokiem ćwiczenia było zbadanie widma dla sygnału następującej postaci:

$$x(t) = 0.2 \sin(2\pi f_1 t) + 8 \sin(2\pi f_2 t) + 1$$

$$f_1 = 160.546875 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 25.390625 \text{ Hz}$$

Uzyskane widmo sygnału przedstawione jest poniżej w skali liniowej oraz logarytmicznej:



Wykres 2. Widmo sumy sygnałów w przestrzeni częstotliwości w skali liniowej oraz logarytmicznej

W skali liniowej widać praktycznie tylko jeden pik natomiast w skali logarytmicznej widoczne są wszystkie trzy piki. Częstotliwości pików odpowiadają częstotliwościom składowym sygnału, wraz ze składową stałą dla częstotliwości zerowej. Widmo stanowi zatem liniową superpozycję sygnałów składowych. Można zweryfikować czy uzyskane amplitudy pików w widmie odpowiadają zadanym amplitudom składowym. Na liniowej osi y amplitudy wyrażone są w Watach czyli w mocy sygnału. Zatem amplitudy sygnałów sinusoidalnych należy podnieść do kwadratu i podzielić przez 2, a sygnał stały podnieść do kwadratu bez dzielenia przez 2. Amplitudy oczekiwane i zmierzone zestawilem w tabeli:

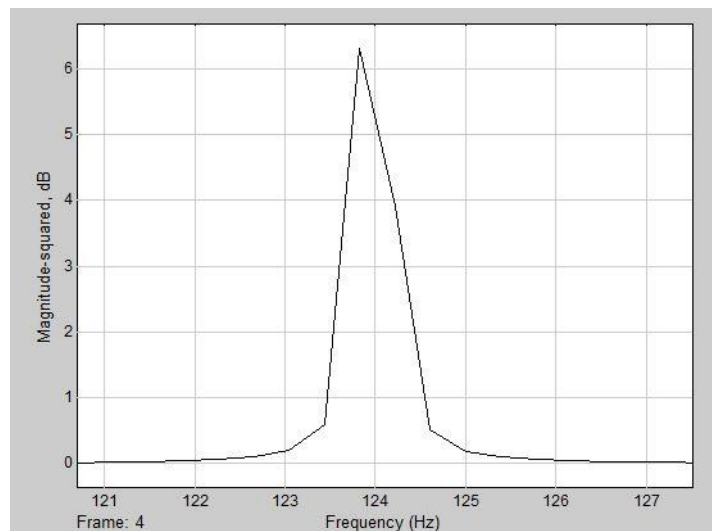
Tabela 1. Zestawienie przewidywanych i uzyskanych amplitud pików w widmie

	A1	A2	A3
Wejściowe	0.2	8	1
[Wat]	0.02	32	1
[dbW]	- 16.98	15.05	0
Uzyskane			
[Wat] one-sided	0.02	32	1
[Wat] two-sided	0.01	16	1
[dbW]	-17	15	0

Zmierzone amplitudy pików pokrywają się z przewidywaniami. Widmo symetryczne (two-sided) posiada amplitudy pików podzielone przez dwa oprócz amplitudy sygnału stałego, która pozostaje bez zmian. Zgodność amplitud pików oraz ich położenia względem częstotliwości świadczy o tym że dyskretna transformata Fouriera w istocie jest liniowa.

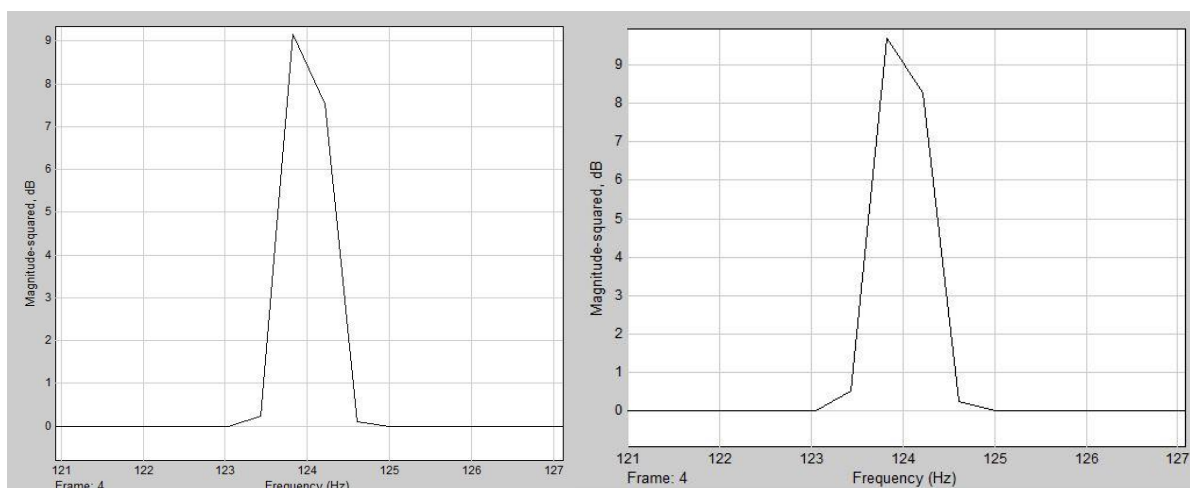
3.3 Przeciek DFT oraz funkcje okien

Zbadałem widmo sygnału o amplitudzie $A = 5$ i częstotliwości $f = 124 \text{ Hz}$, niebędącej wielokrotnością częstotliwości bazowej. Uzyskane widmo w skali liniowej wygląda następująco:



Wykres 3. Widmo liniowe sygnału o częstotliwości niebędącej wielokrotnością częstotliwości bazowej

Na wykresie widać pewne rozmycie piku oraz odchylenie maksimum od częstotliwości 124 Hz. Uzyskana amplituda równa 6.3 powinna wynosić 12.5 dla częstotliwości będącej wielokrotnością f_b . Zjawisko to zwane jest przeciekiem DFT. W rzeczywistości częściej mamy do czynienia z takimi sytuacjami niż z częstotliwościami zgodnymi z f_b . Aby zniwelować częściowo negatywny efekt rozmycia piku, możemy zastosować funkcje okien. Widmo po zastosowaniu wybranych funkcji okien wygląda następująco:

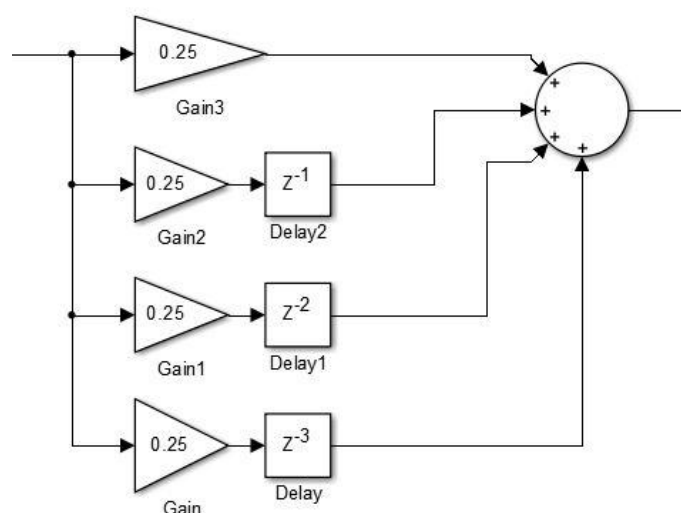


Wykres 3. Widmo piku po zastosowaniu funkcji okien z lewej Hamminga, z prawej Hanna

Widzimy, że zastosowanie funkcji okien zwiększa amplitudę pików z 6.3 do ponad 9 oraz zwęża rozmyte ogony pików.

4. Prosty filtr typu FIR

Kolejnym etapem ćwiczenia było zaprojektowanie prostego filtra dolnoprzepustowego trzeciego rzędu typu FIR. Zaprojektowany filtr w pakiecie obliczeniowym Simulink środowiska Matlab wygląda następująco:



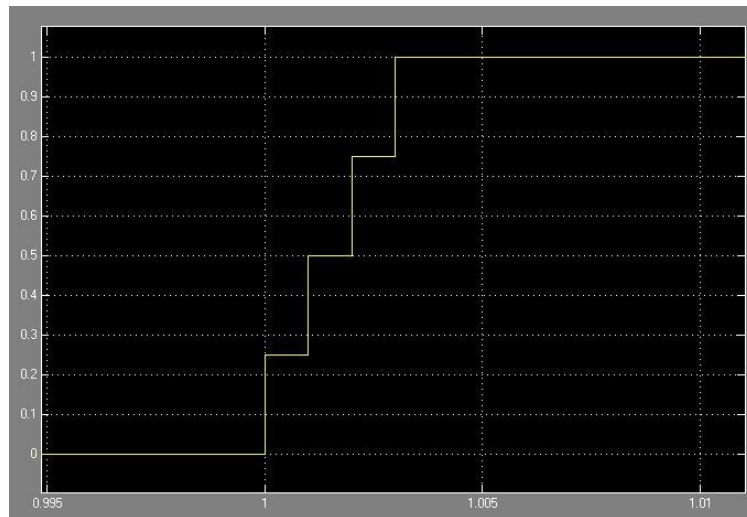
Rysunek 1. Schemat zaprojektowanego filtra FIR

Zaprojektowany filtr nie ma sprzężenia zwrotnego a jego funkcja przenoszenia ma postać:

$$H(z) = 0.25 + 0.25z^{-1} + 0.25z^{-2} + 0.25z^{-3}$$

4.1 Odpowiedź na skok napięcia

Zbadałem odpowiedź na jednostkowy skok napięcia zaprojektowanego filtra FIR. Sygnał wejściowy próbkowany jest z częstotliwością $f_s = 1 \text{ kHz}$. Uzyskana odpowiedź przedstawiona jest na poniższym wykresie:

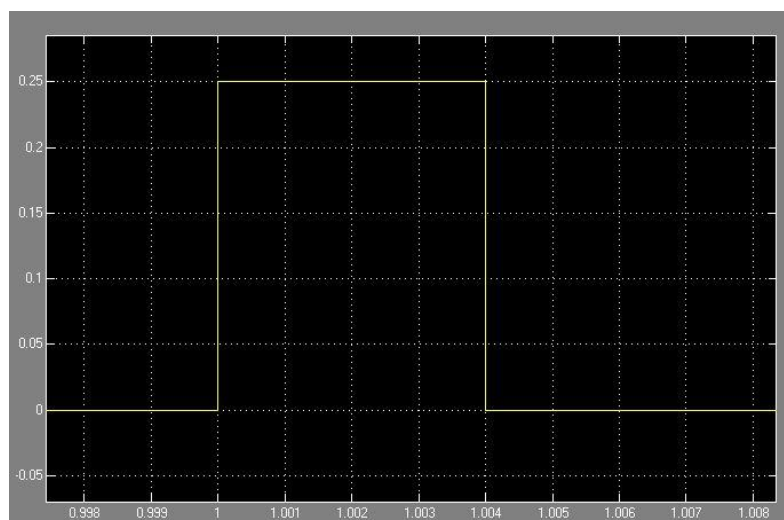


Wykres 4. Odpowiedź filtra FIR na skok napięcia

Uzyskany wykres możemy bardzo łatwo zinterpretować, ze względu na prostą budowę filtra. Zauważmy, że suma wszystkich próbek jest równa 1. Z każdą kolejną próbką odpowiedź filtra wzrasta o 0.25 aż do 1 gdy wypełnione są wszystkie próbki filtra. Czas odpowiedzi τ filtra jest zatem bezpośrednio związany z rzędem filtra. Zmierzony czas odpowiedzi wynosi $\tau = 3 \text{ ms} = 3 T_s$. Zmierzone wzmocnienie stałoprądowe filtra wynosi $K = 1$.

4.2 Odpowiedź impulsowa

Następnie zbadałem odpowiedź filtra na jednostkowy impuls. Uzyskana odpowiedź przedstawiona jest poniżej:

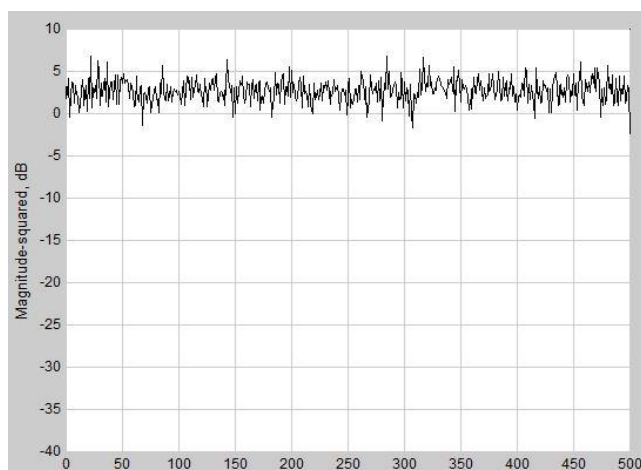


Wykres 5. Odpowiedź filtra FIR na jednostkowy impuls

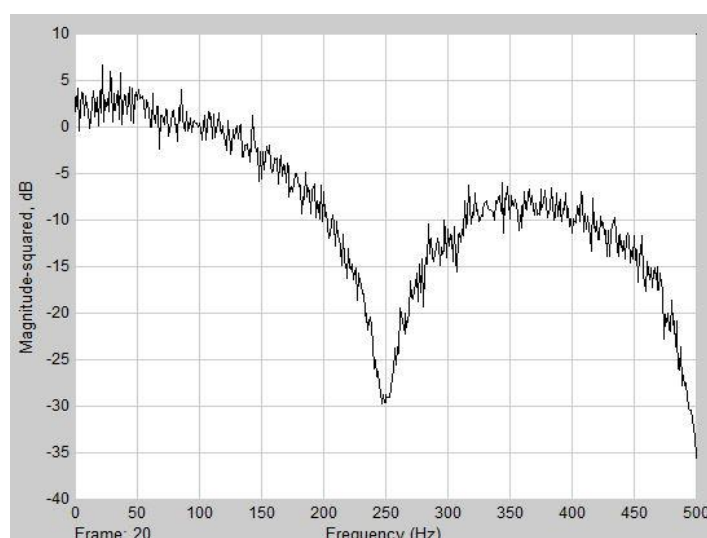
Uzyskana odpowiedź na impuls jest także łatwa w interpretacji. Uzyskujemy przez cztery okresy próbkowania kolejno wartości próbek filtru, w tym wypadku wszystkie równe 0.25.

4.3 Odpowiedź częstotliwościowa

W ostatniej części ćwiczenia zbadałem charakterystykę częstotliwościową zaprojektowanego filtru. Na wejście filtru zadałem generator szumu białego o jednostkowej mocy sygnału. Uzyskana charakterystyka wejściowa oraz wyjściowa przedstawione są poniżej:



Wykres 6. Widmo szumu białego



Wykres 7. Uzyskana charakterystyka częstotliwościowa filtru FIR

Interpretacja charakterystyki częstotliwościowej filtru FIR nie jest już tak prosta. Charakterystyka jest bardziej skomplikowana niż dla filtrów IIR. Wyznaczone wzmocnienie stałoprądowe wynosi $K = 1$ a częstotliwość graniczna filtru $f_g \cong 100 \text{ Hz}$.

5. Podsumowanie

W ramach ćwiczenia zbadałem cechy i własności dyskretnej transformaty Fouriera i wyznaczyłem jej wynik dla prostych sygnałów sinusoidalnych. Zauważyłem, że dla sygnałów o częstotliwościach niebędących wielokrotnością częstotliwości bazowej transformacji występuje przeciek i rozmycie piku. W drugiej części ćwiczenia wykonałem prosty filtr FIR i zbadałem jego odpowiedź na skok napięcia oraz impuls. Wyznaczyłem także jego charakterystykę częstotliwościową.