

Sprawozdanie

Przetwarzanie analogowo – cyfrowe ADC

Amadeusz Filipek

Laboratorium komputerowe WFILS AGH

1. Wstęp

1.1 Szum kwantyzacji

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z procesem próbkowania analogowo – cyfrowego oraz zbadanie działania zarówno idealnego jak i nieidealnego przetwornika ADC.

Nieodłączną częścią każdego przetwornika analogowo – cyfrowego jest błąd kwantyzacji, który powstaje ze względu na przetłumaczenie analogowego sygnału ciągłego na dyskretny zbiór wartości. Wartość tego błędu związana jest z ilością N bitów przetwornika i dla zakresu dynamicznego $(-V_{ref}, V_{ref})$ przyjmuje wartości:

$$V_q \in \left(-\frac{V_{ref}}{2^N}, \frac{V_{ref}}{2^N} \right)$$

Zakres ten odpowiada szerokości jednego schodka bitowego, która wynosi :

$$V_{lsb} = \frac{2V_{ref}}{2^N}$$

Jeżeli założymy, że błąd kwantyzacji ma rozkład jednorodny w powyższym przedziale to jego moc wynosi:

$$P_q = \frac{1}{V_{lsb}} \int_{-V_{lsb}/2}^{V_{lsb}/2} V^2 dV = \frac{1}{V_{lsb}} \left(\frac{V_{lsb}^3}{24} + \frac{V_{lsb}^3}{24} \right) = \frac{V_{lsb}^2}{12}$$

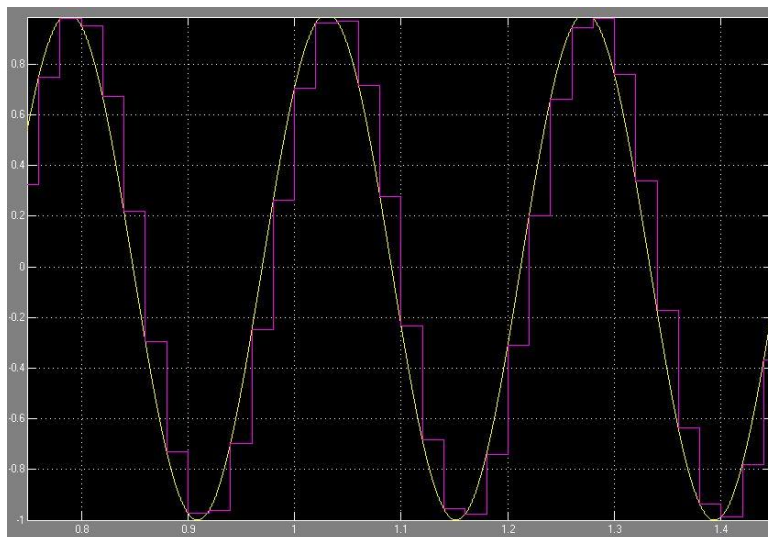
Rozważmy teraz sygnał analogowy w postaci sinusoidalnej o amplitudzie V_{ref} . Wartość skuteczna takiego sygnału wynosi $V_{ref}/\sqrt{2}$. Stosunek wartości skutecznej sygnału do szumu kwantyzacji wynosi:

$$\begin{aligned} SNR &= \frac{\frac{V_{ref}}{\sqrt{2}}}{\frac{V_{lsb}}{\sqrt{12}}} = \frac{2^N V_{lsb} \sqrt{12}}{2 V_{lsb} \sqrt{2}} = 2^N \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 20 \log \left(2^N \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) \text{ dB} = 20 N \log 2 + 20 \log \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{ dB} = \\ &= 6.02 N + 1.76 \text{ dB} \end{aligned}$$

2. Przetwarzanie analogowo – cyfrowe

2.1 Kwantyzacja w dziedzinie czasu (próbkowanie)

Aby zbadać efekt kwantowania w dziedzinie czasu, wykonałem prostą symulację przy wykorzystaniu sygnału sinusoidalnego. Sygnał ten o częstotliwości $F_1 = 4.125 \text{ Hz}$ próbkowałem co okres $T_1 = \frac{1}{50} \text{ s}$ co odpowiada częstotliwości próbkowania $F_s = 50 \text{ Hz}$. Uzyskany przebieg spróbkowany na tle przebiegu sygnału ciągłego wygląda następująco:

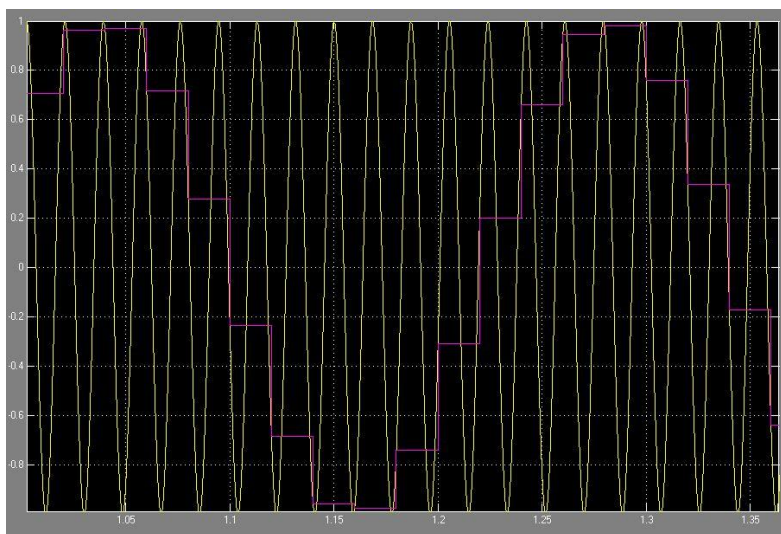


Wykres 1. Sygnał sinusoidalny skwantowany w czasie – przebieg fioletowy, sygnał ciągły – przebieg żółty

Na powyższym wykresie widać, że kwantowanie w czasie zniekształca sygnał, wprowadza błąd. Sygnał wejściowy spotyka się z sygnałem spróbkowanym na rogach schodków od góry dla sygnału rosnącego oraz od dołu dla malejącego. Sygnał skwantowany rosnący jest zaniżony a malejący zawyżony w stosunku do sygnału ciągłego.

2.2 Zjawisko aliasingu

Następnie zmieniłem częstotliwość sygnału analogowego na $F_2 = 54.125 \text{ Hz}$. Uzyskany sygnał spróbkowany na tle sygnału ciągłego przedstawiony jest poniżej:



Wykres 2. Przebieg sygnału spróbkowanego – krzywa fioletowa, na tle sygnału ciągłego – krzywa żółta

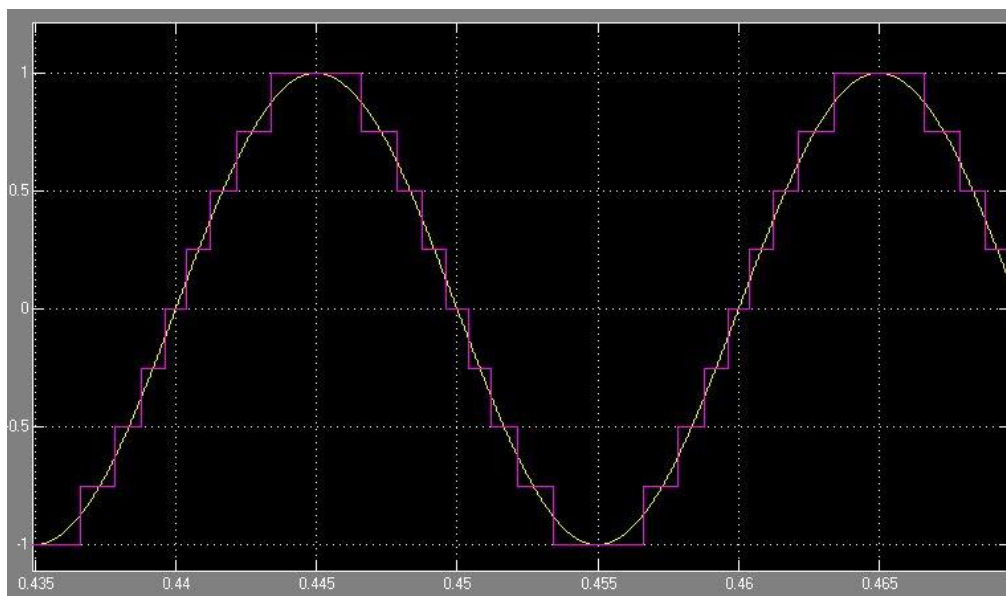
Na powyższym wykresie widać, że sygnał próbkowany nie rekonstruuje sygnału źródłowego. Spróbkowany przebieg także jest okresowy, jednak ewidentnie ma inną częstotliwość. Zjawisko to zwane jest aliasingiem i wynika z faktu, że częstotliwość próbkowania jest zbyt mała w stosunku do częstotliwości sygnału i nie spełnia prawa Nyquista:

$$F_s > \frac{F_{sig}}{2}$$

Uzyskany spróbkowany sygnał jest sprowadzony do zakresu $(0, F_s)$ i reprezentuje wejściowy sygnał o częstotliwości 4.125 Hz. Przez ten sam zbiór próbek reprezentowane byłyby sygnały będące wielokrotnością częstotliwości próbkowania: $F_{sig} = kF_s + 4.125 \text{ Hz}$, k – liczba naturalna.

2.3 Kwantyzacja w dziedzinie wartości

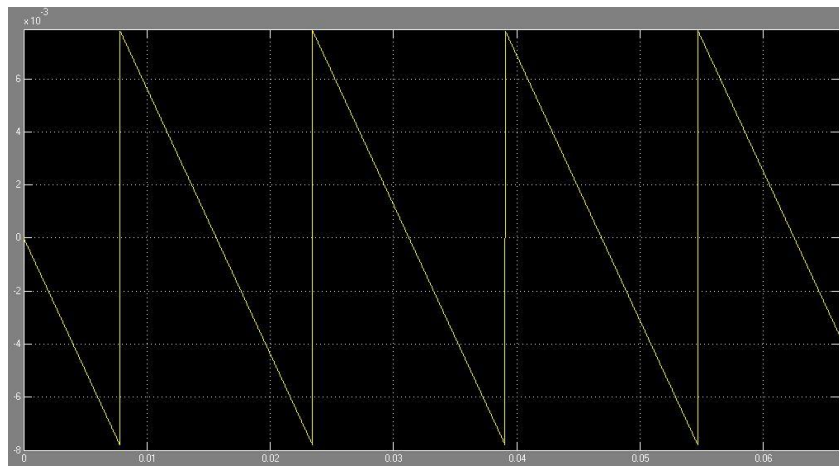
W następnej kolejności dokonałem kwantyzacji sygnału w dziedzinie amplitudy. Szerokość schodków dobrałem tak aby sygnał zajmował pełen zakres dynamiczny przetwornika 3 – bitowego. Uzyskany sygnał spróbkowany na tle źródłowego wygląda następująco:



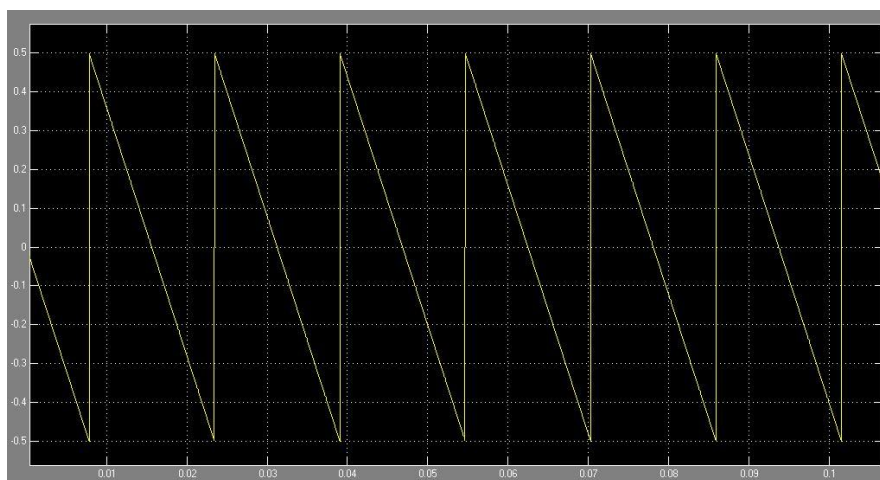
Wykres 3. Przebieg sygnału spróbkowanego – kolor fioletowy, na tle sygnału ciągłego – kolor żółty

3.4 Błąd kwantyzacji

W następnej części ćwiczenia wyznaczyłem błąd popełniany przez 6 – bitowy przetwornik ADC w funkcji napięcia wejściowego. Na wejście zadałem napięcie rosnące liniowo tak, że obejmuje cały zakres dynamiczny przetwornika. Podczas obliczeń zaniedbana została kwantyzacja w czasie. Uzyskane wartości błędów absolutne oraz po unormowaniu do szerokości pojedynczego schodka przedstawione są na poniższych wykresach:



Wykres 4. Wartość bezwzględna błędu przetwornika w funkcji napięcia wejściowego

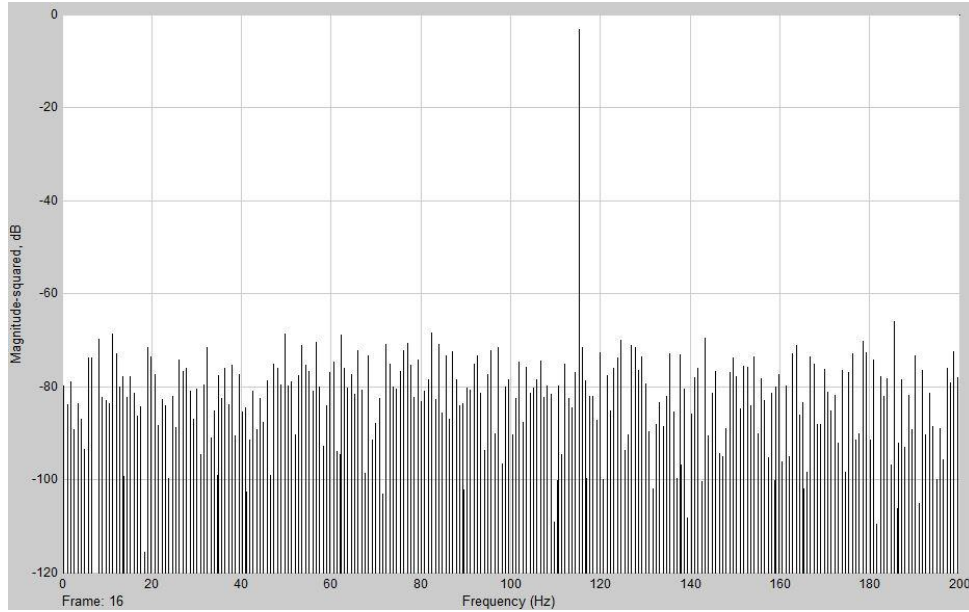


Wykres 5. Wartość błędu przetwornika w funkcji napięcia wejściowego unormowana do szerokości pojedynczego schodka

Na powyższych wykresach widać, że przetwornik popełnia błąd kwantyzacji, który mieści się w zakresie szerokości schodka V_{lsb} podzielonego przez dwa. Błąd bezwzględny kwantyzacji jest zatem funkcją ilości bitów przetwornika. Przetwornik, który pracuje na większej ilości bitów, popełnia mniejszy błąd kwantyzacji i ma lepszą rozdzielczość.

3.5 Widmo sygnału o dyskretnych wartościach (szum kwantyzacji)

Następnie zbadałem widmo sygnału sinusoidalnego spróbkowanego przetwornikiem 8 – bitowym. Sygnał przebiega wartości $[-0.5, 0.5]$ z offsetem 0.5 tak wypełniać cały aby zakres dynamiczny $[0, 1]$ przetwornika. Częstotliwość badanego sygnału wynosi $F_4 = 115.234375 \text{ Hz}$ i próbkowana jest z częstotliwością $F_5 = 400 \text{ Hz}$. Długość wykonanej transformaty wynosi 1024 próbki. Uzyskane widmo sygnału skwantowanego przedstawione jest poniżej :



Wykres 6. Widmo próbkowanego sygnału sinusoidalnego przetworzonym 8 – bitowym

Na podstawie powyższego wykresu odczytana wartość prążka sygnału wynosi -3 dB , natomiast wartość średnia prążków szumu kwantyzacji wynosi około -100 dB . Aby porównać uzyskany stosunek sygnału do szumu z teoretycznym wyjdźmy z definicji metryki określającej stosunek sygnału do szumu i zniekształceń:

$$SINAD = 10 \log_{10} \frac{X^2(m_{sig})}{\sum_{m=1, m \neq m_{sig}}^{\frac{N}{2}-1} X^2(m)} = 10 \log_{10} X^2(m_{sig}) - 10 \log_{10}(509 \bar{X}^2) [\text{dB}]$$

Sumowanie po prążkach szumu zastępujemy wartością średnią przemnożoną przez 509 (gdyż jest to połowa z długości próbek transformaty po odrzuceniu prążka dla sygnału stałego, częstotliwości Nyquista oraz sygnału wejściowego). Przemnożmy równanie obustronnie przez 2:

$$2SINAD = 20 \log_{10} X^2(m_{sig}) - 20 \log_{10}(509 \bar{X}^2) = X^2(m_{sig})[\text{dB}] - \bar{X}^2[\text{dB}]$$

Zauważmy, że stosunek sygnału do szumu i zniekształceń SINAD musi być równy wyznaczonemu w punkcie 1.1 stosunkowi SNR:

$$X^2(m_{sig})[\text{dB}] - \bar{X}^2[\text{dB}] = 2SNR = 12.04N + 3.52 [\text{dB}]$$

Zatem dla 8 – bitowego przetwornika teoretyczna odległość prążka sygnałowego od wartości średniej szumu powinna wynosić 99.84 dB natomiast zmierzona wartość wynosi 97 dB .

3.6 Metryki dynamiczne idealnego przetwornika analogowo – cyfrowego

Następnie, na podstawie uzyskanego w punkcie 3.5 widma wyznaczyłem komplet metryk dynamicznych. Szczegółowy opis metryk wraz z ich definicjami znajduje się w źródle [1]. Wyznaczone indeksy prążków dla dziesięciu pierwszych częstotliwości harmonicznych przedstawione są w poniższej tabeli:

n – ty prążek	Indeks prążka	Częstotliwość harmoniczna [Hz]	Częstotliwość zredukowana [Hz]
1	295	115.234375	115.234375
2	434	230.4688	169.53125
3	139	345.7031	54.296875
4	156	460.9375	60.9375
5	451	576.1719	176.171875
6	278	691.4063	108.59375
7	17	806.6406	6.640625
8	312	921.875	121.875
9	417	1037.109	162.890625
10	123	1152.344	48.046875

Uzyskane wartości metryk wraz z wartościami teoretycznymi przedstawiłem w poniższej tabeli:

	Uzyskane	Teoretyczne
THD [dB]	-64.5174	-67.4448
SNHR [dB]	49.7943	50.0062
SFDR [dB]	62.7436	76.9872
SINAD [dB]	49.6504	49.92
ENOB [bity]	7.9552	8

Teoretyczne wartości metryk zostały wyznaczone na podstawie rachunku z punktu 1.1 oraz przy założeniu że prążek sygnałowy ma wartość jednostkową a prążki dla szumu oraz wyższych harmonicznych mają taką samą wartość. Wartości uzyskane nieznacznie odbiegają od wartości przewidywanych, wynika to z faktu że w praktyce rozkład wartości prążków nie jest jednorodny.

3.7 Metryki dynamiczne nieidealnego przetwornika analogowo – cyfrowego

W kolejnej części ćwiczenia wyznaczyłem widma sygnału sinusoidalnego oraz komplet metryk dynamicznych dla 8 – bitowego przetwornika nieidealnego. Nieidealność w przetworniku wprowadziłem zniekształcając wejściowy sygnał sinusoidalny za pomocą funkcji:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

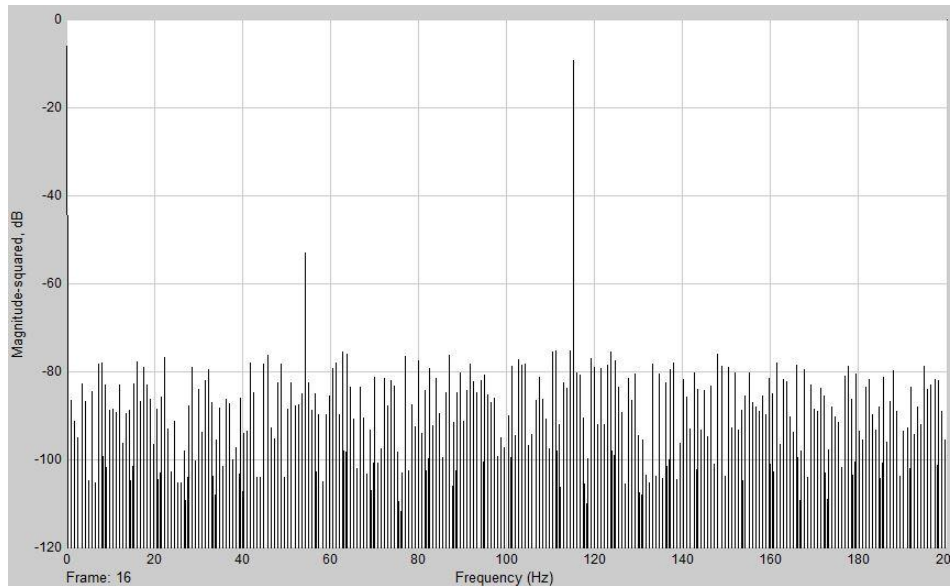
Gdzie A – maksymalna amplituda sygnału wejściowego (dla zakresu dynamicznego przetwornika $[0, A]$), a – stopień zniekształcenia charakterystyki. Współczynniki b oraz c wyznaczyłem zadając na funkcję warunki:

$$f(0.5A) = 0.5, \quad f(A) = A$$

Wejściowy sygnał został przyjęty taki sam jak w punkcie 3.6, zatem $A = 1$. Rozważyłem dwa przypadki ze względu na parametr a .

- Przypadek 1 $a = 0.1$

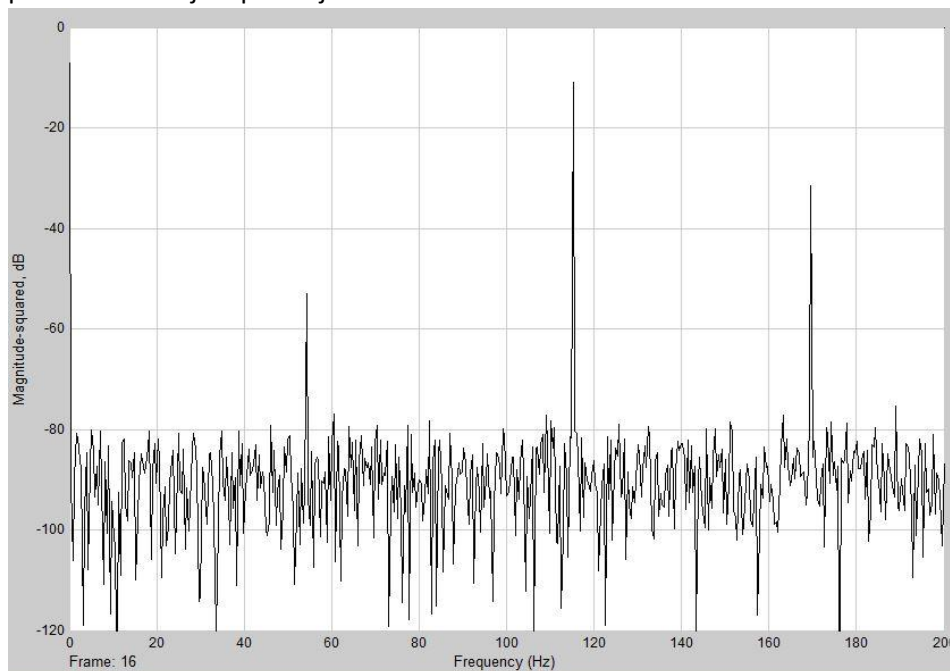
Uzyskane współczynniki wynoszą $b = -0.15, c = 1.05$. Uzyskane widmo sygnału przedstawione jest poniżej:



Wykres 7. Widmo próbkowanego sygnału sinusoidalnego przetwornikiem 8 – bitowym z zaburzeniem 1.

- Przypadek 2 $a = 0.3$

Uzyskane współczynniki wynoszą $b = -0.45, c = 1.15$. Uzyskane widmo sygnału przedstawione jest poniżej:



Wykres 8. Widmo próbkowanego sygnału sinusoidalnego przetwornikiem 8 – bitowym z zaburzeniem 2.

Uzyskane widmo na wykresie 7. Posiada jeden dodatkowy pik, który odpowiada trzeciej harmonicznej o częstotliwości 54.296875 Hz . Widmo na wykresie 8. natomiast posiada dwa dodatkowe piki odpowiadające drugiej (169.53125 Hz) oraz trzeciej harmonicznej.

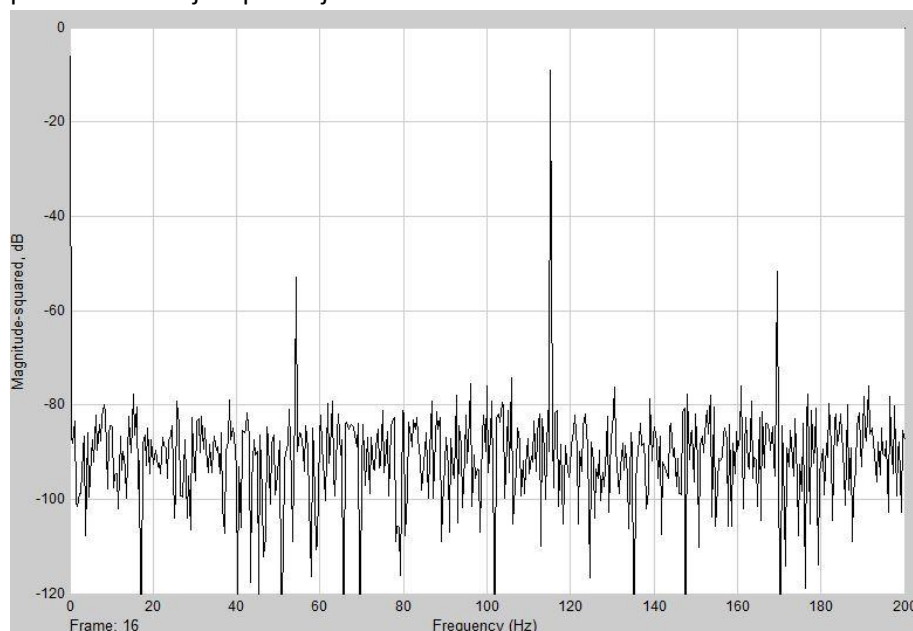
W następnej kolejności zadałem inne warunki na funkcję zaburzającą:

$$f(0.5A) = 0.5, \quad f(A) = A$$

Rozważyłem kolejne dwa przypadki ze względu na parametr a :

- Przypadek 3 $a = 0.1$

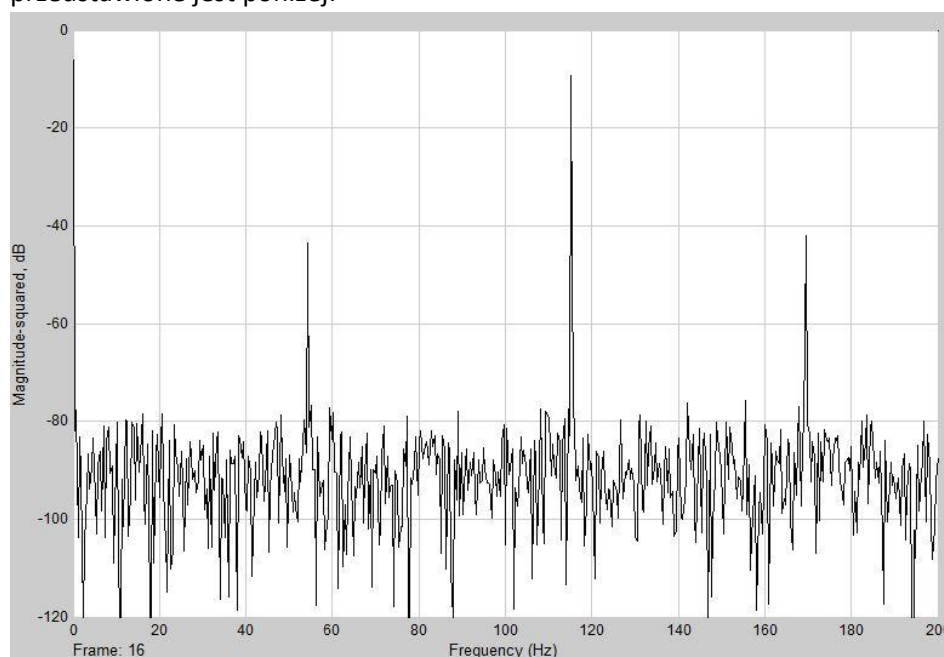
Uzyskane współczynniki wynoszą $b = -0.18, c = 1.072$. Uzyskane widmo sygnału przedstawione jest poniżej:



Wykres 9. Widmo spróbkowanego sygnału sinusoidalnego przetwornikiem 8 – bitowym z zaburzeniem 3.

- Przypadek 4 $a = 0.3$

Uzyskane współczynniki wynoszą $b = -0.54, c = 1.216$. Uzyskane widmo sygnału przedstawione jest poniżej:



Wykres 10. Widmo spróbkowanego sygnału sinusoidalnego przetwornikiem 8 – bitowym z zaburzeniem 4.

Oba uzyskane widma posiadają dwa dodatkowe piki odpowiadające drugiej oraz trzeciej harmonicznej. Dla wszystkich czterech badanych przypadków wprowadzonego zaburzenia wyznaczyłem metryki dynamiczne, wyniki zestawilem w poniższej tabeli zbiorczej:

Przypadek	THD [dB]	SNHR [dB]	SFDR [dB]	SINAD [dB]	ENOB
1	-43.9002	49.8343	43.9062	42.9136	6.8362
2	-34.3363	49.9183	34.3373	34.2178	5.3917
3	-40.0671	49.827	42.435	39.6308	6.2908
4	-30.2836	49.6194	32.603	30.2333	4.7298
Idealny	-64.5174	49.7943	62.7436	49.6504	7.9552
Teoretyczny	-67.4448	50.0062	76.9872	49.92	8

Na podstawie powyższej tabeli możemy stwierdzić, że w miarę wzrostu nieidealności przetwornika maleją jego wartości efektywnej liczby bitów, stosunku sygnału do szumu oraz zakresu wolnego od zniekształceń. Rośnie natomiast wpływ degradacji sygnału wywołanego przez zniekształcenia harmoniczne. Niezmienny natomiast zostaje stosunek sygnału do szumu nie będącego częstotliwościami harmonicznymi, ponieważ jest to zakłócenie spowodowane szumem kwantyzacji, który nie ulega zmianie.

4. Podsumowanie

W Ramach ćwiczenia zbadałem proces próbkowania zarówno w dziedzinie czasu jak i amplitudy sygnału. Zbadałem wynikający z próbkowania błąd kwantyzacji. Zbadałem także zjawisko aliasingu powstające gdy sygnał nie spełnia prawa Nyquista. Następnie zbadałem widmo sygnału sinusoidalnego po spróbkowaniu za pomocą przetwornika zarówno idealnego jak i nieidealnego. Wyznaczyłem metryki dynamiczne przetwornika idealnego oraz nieidealnego a wartości uzyskane porównałem z teoretycznymi. Zauważyłem, że na nieidealność przetwornika przyczynia się wkład od wyższych harmonicznych sygnału podczas gdy szum kwantyzacji jest zakłóceniem pozostającym na stałym poziomie także idealnego przetwornika.

Źródła:

1. J. Moroń, *Opracowanie pomiarów dynamicznych ADC*, AGH 2015,
http://asic.fis.agh.edu.pl/students/dsp/metryki_adc.pdf