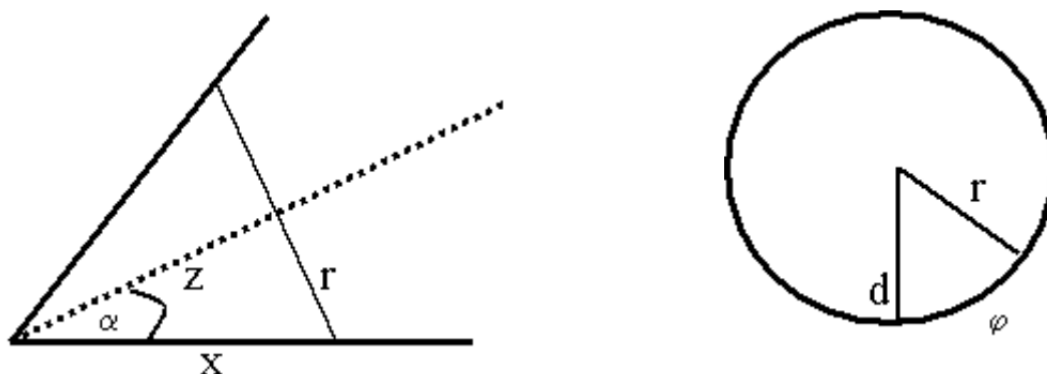


Sprawozdanie

Symulacja komputerowa ruchu ciała w układzie z więzami.

Celem ćwiczenia jest wykonanie symulacji ruchu punktu materialnego po powierzchni stożka leżącego na poziomej płaszczyźnie z wykorzystaniem formalizmu Lagrange'a.

Zadany problem można rozwiązać stosując formalizm Lagrange'a. Na układ nałożone są więzy, ponieważ cząstka może poruszać się tylko po powierzchni stożka. Układ ma zatem dwa stopnie swobody. Jako współrzędne uogólnione przyjmujemy położenie z na osi symetrii stożka oraz kąt φ na przecięciu stożka powierzchnią prostopadłą do osi symetrii stożka jak pokazano na rysunku 1.



Rys. 1 Schemat przedstawiający problem oraz dobór zmiennych

Wykorzystując formalizm Lagrange'a otrzymujemy układ dwóch równań różniczkowych drugiego stopnia :

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g \cos^2 \alpha \sin \varphi}{\sin \alpha} \frac{1}{z} - \frac{2\dot{z}\dot{\varphi}}{z}$$

$$\ddot{z} = \sin^2 \alpha z \dot{\varphi}^2 - g \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 - \cos \varphi)$$

gdzie 2α jest kątem rozwarcia stożka a g przyspieszeniem ziemskim.

W celu rozwiązania numerycznego układ ten przeprowadzamy do układu czterech równań różniczkowych stopnia pierwszego korzystając z prędkości współrzędnej z oraz prędkości kątowej φ :

$$\dot{\varphi} = \omega$$

$$\dot{z} = v$$

Następnie różniczki w układzie równań zastępujemy wyrazami różnicowymi i otrzymujemy końcowy układ czterech równań rekurencyjnych :

$$\varphi(t_{i+1}) = \varphi(t_i) + \omega(t_i) \cdot \Delta t$$

$$z(t_{i+1}) = z(t_i) + v(t_i) \cdot \Delta t$$

$$\omega(t_{i+1}) = \omega(t_i) - \left(\frac{g \cos^2 \alpha \sin \varphi(t_i)}{\sin \alpha} \frac{1}{z(t_i)} + \frac{2v(t_i)\omega(t_i)}{z(t_i)} \right) \cdot \Delta t$$

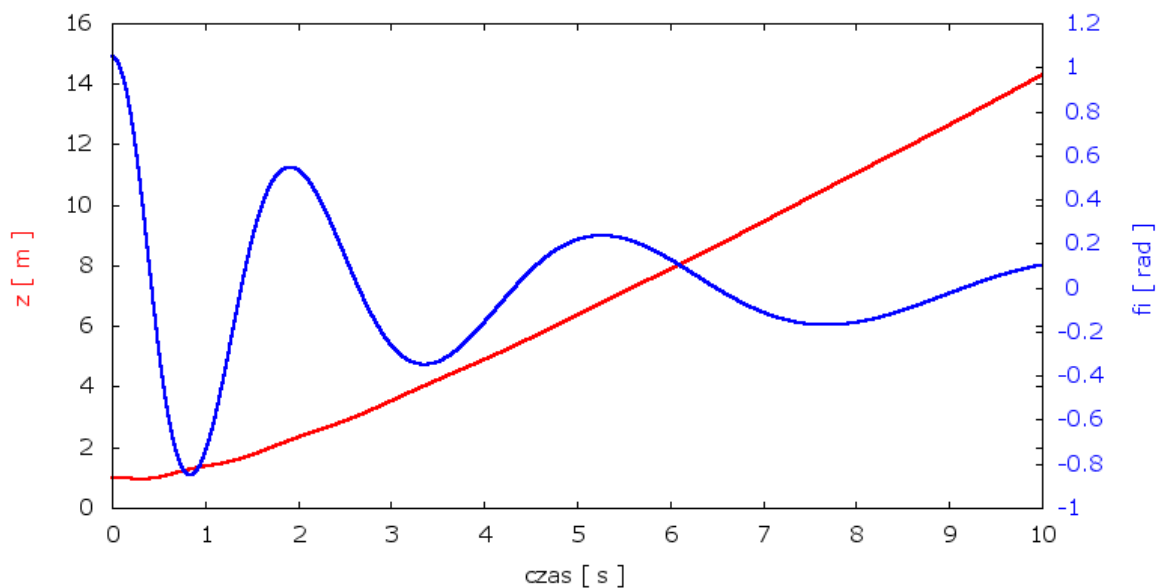
$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + [\sin^2 \alpha \cdot z(t_i) \cdot \omega(t_i)^2 - g \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 - \cos \varphi(t_i))] \cdot \Delta t$$

Rozwiązanie numeryczne realizujemy na siatce kroków czasowych tworzonej za pomocą małego ale skończonego kroku czasowego Δt . Symulacje rozpoczynamy od znanych warunków początkowych $z(t_0)$, $v(t_0)$, $\varphi(t_0)$ oraz $\omega(t_0)$. Ze względu na brak rozwiązania analitycznego do którego można by porównać wyniki numeryczne, poprawność rozwiązania możemy zweryfikować poprzez energię całkowitą układu, która powinna być zachowana i dla tego układu wyraża się wzorem :

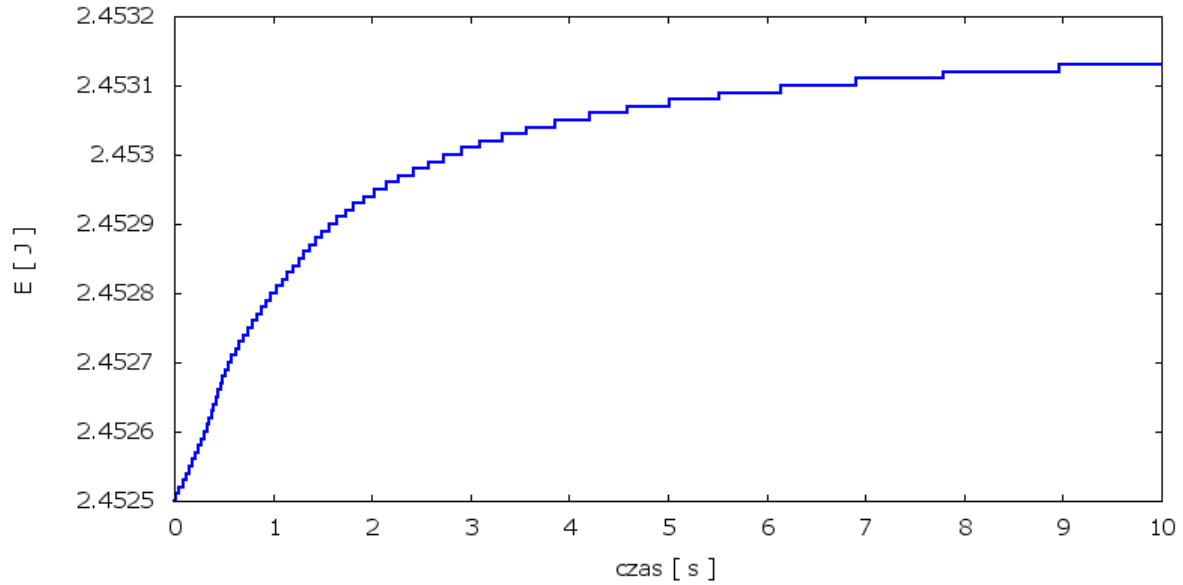
$$E_c(t_i) = \frac{1}{2} t g^2 \alpha z(t_i)^2 \omega(t_i)^2 + \frac{v(t_i)^2}{2 \cos^2 \alpha} + g z(t_i) \sin \alpha [1 - \cos \varphi(t_i)]$$

Poniżej prezentuję wyniki wykonanych przeze mnie symulacji wraz z analizą wyników. Krok czasowy przyjąłem $\Delta t = 1/100000$ aby symulacja była dokładna.

Pierwszą symulację przeprowadziłem dla: $\alpha = \pi/6$, $z(t_0) = 1$, $v(t_0) = 0$, $\varphi(t_0) = \pi/3$ oraz $\omega(t_0) = 0$.



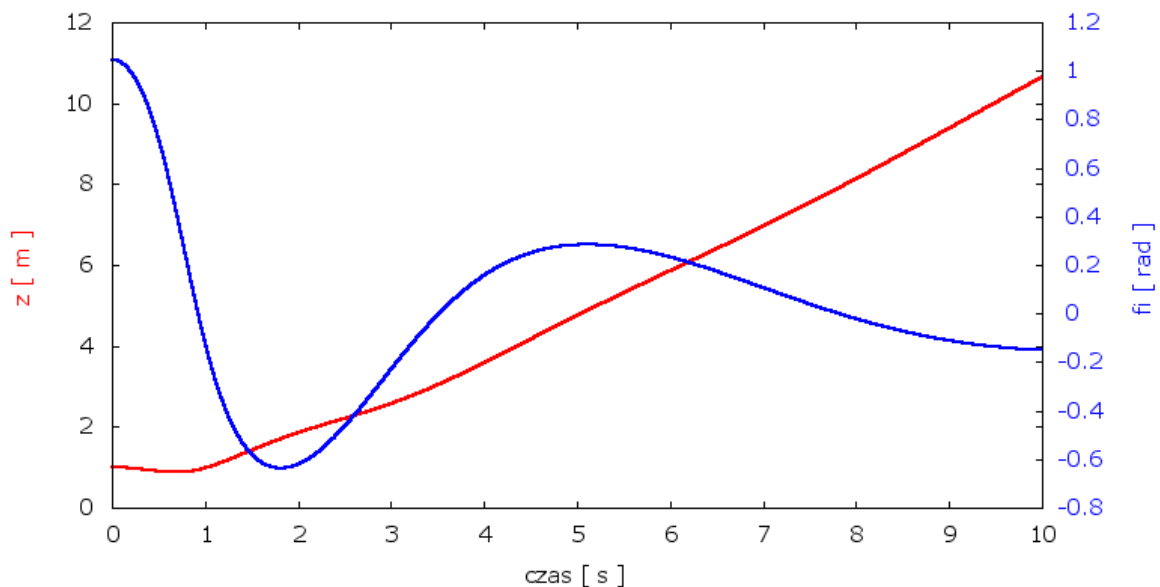
Wykres 1 . Trajektoria cząstki dla pierwszej symulacji



Wykres 2. Energia całkowita cząstki dla pierwszej symulacji

Energia całkowita na końcu symulacji zachowana jest z dokładnością do 0.06% względem energii początkowej. Warunki początkowe pierwszej symulacji są statyczne, prędkości początkowe są zerowe. Cząstka pod wpływem siły grawitacji ruchem oscylacyjnym po powierzchni stożka przemieszcza się w stronę mniejszej krzywizny gdzie długość okręgu jest duża, czyli z dala od wierzchołka stożka. Im większa długość okręgu tym drgania mają mniejszą amplitudę co widać na wykresie 1. Cząstka porusza się po swego rodzaju równi pochyłej. W końcu drgania się wygaszają, gdy $z \rightarrow \infty$ a ruch staje się jednostany prostoliniowy po stycznej stożka do powierzchni. Cała energia potencjalna wynikająca z wysokości początkowej poprzez ruch drgający zostaje w końcu przekształcona na energię kinetyczną.

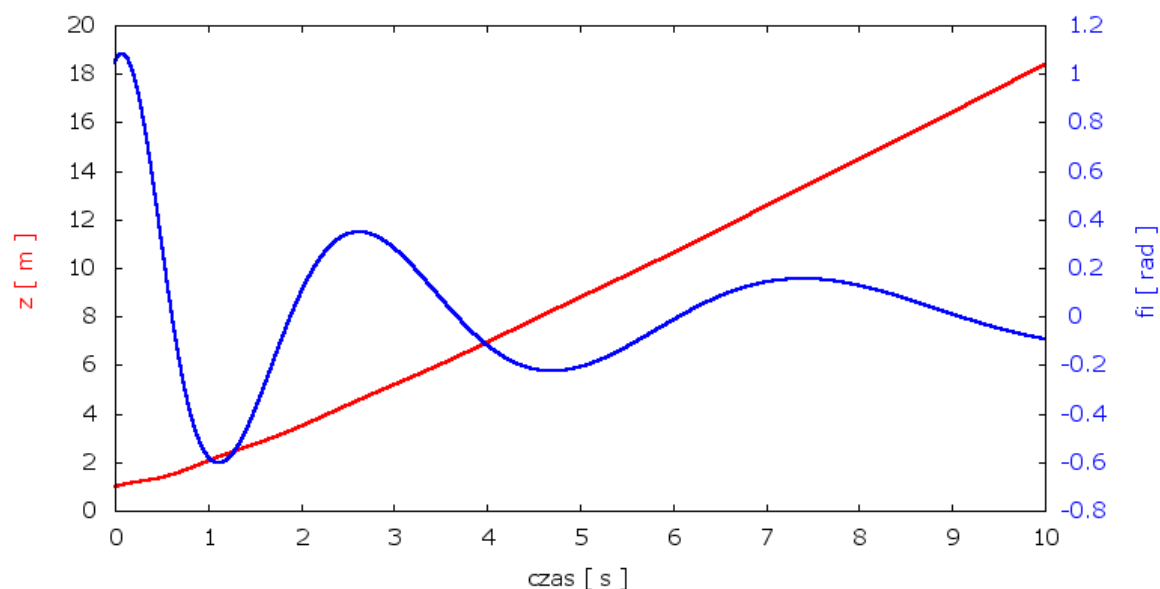
Dla drugiej symulacji przyjąłem takie same wartości jak w symulacji pierwszej oprócz kąta rozwarcia stożka: $\alpha = \pi/3$, $z(t_0) = 1$, $v(t_0) = 0$, $\varphi(t_0) = \pi/3$ oraz $\omega(t_0) = 0$. Kąt rozwarcia stożka jest teraz kątem rozwartym.



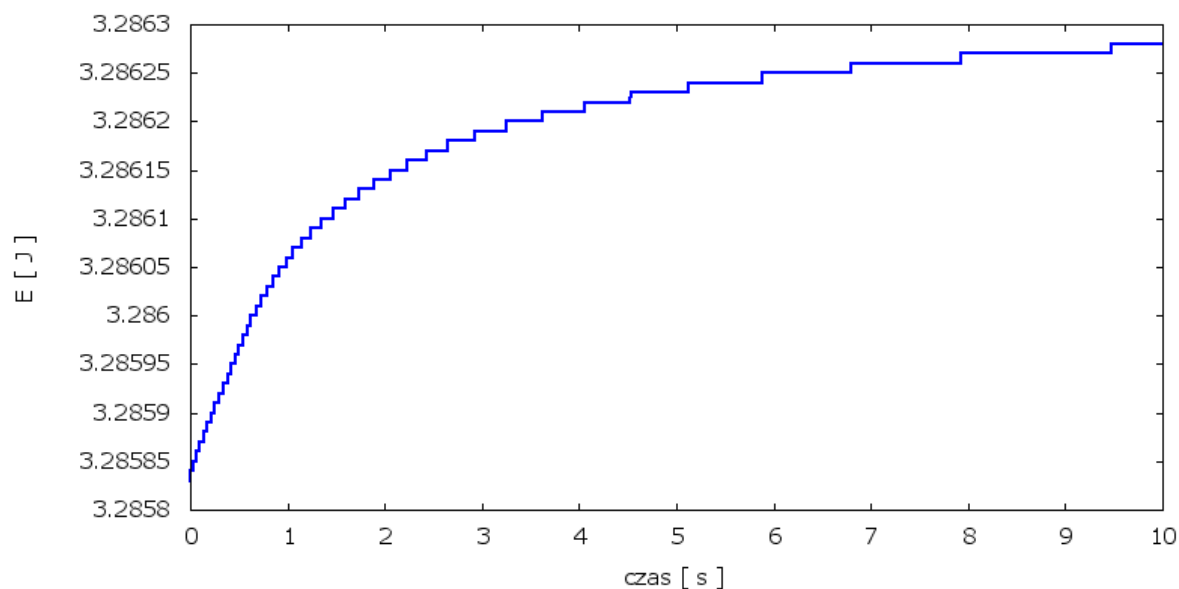
Wykres 3. Trajektoria cząstki dla drugiej symulacji

Druga symulacja jakościowo nie różni się od symulacji pierwszej. Układ ewoluuje w ten sam sposób. Kąt rozwarcia stożka wpływa jedynie na długość okręgu oraz na nachylenie względem powierzchni tym samym wpływając liczbowo na trajektorię.

Dla symulacji trzeciej wprowadziłem niezerowe prędkości początkowe, kąt rozarcia natomiast przywróciłem do z stanu pierwszej symulacji: $\alpha = \pi/6$, $z(t_0) = 1$, $v(t_0) = 1$, $\varphi(t_0) = \pi/3$ oraz $\omega(t_0) = 1$.



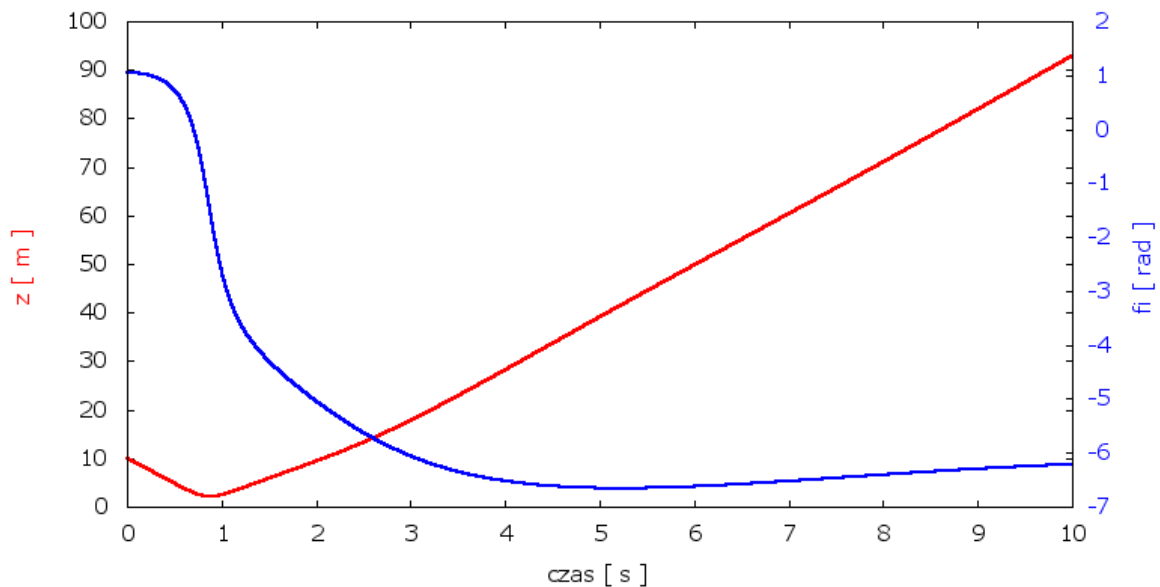
Wykres 4. Trajektorja cząstki dla symulacji trzeciej



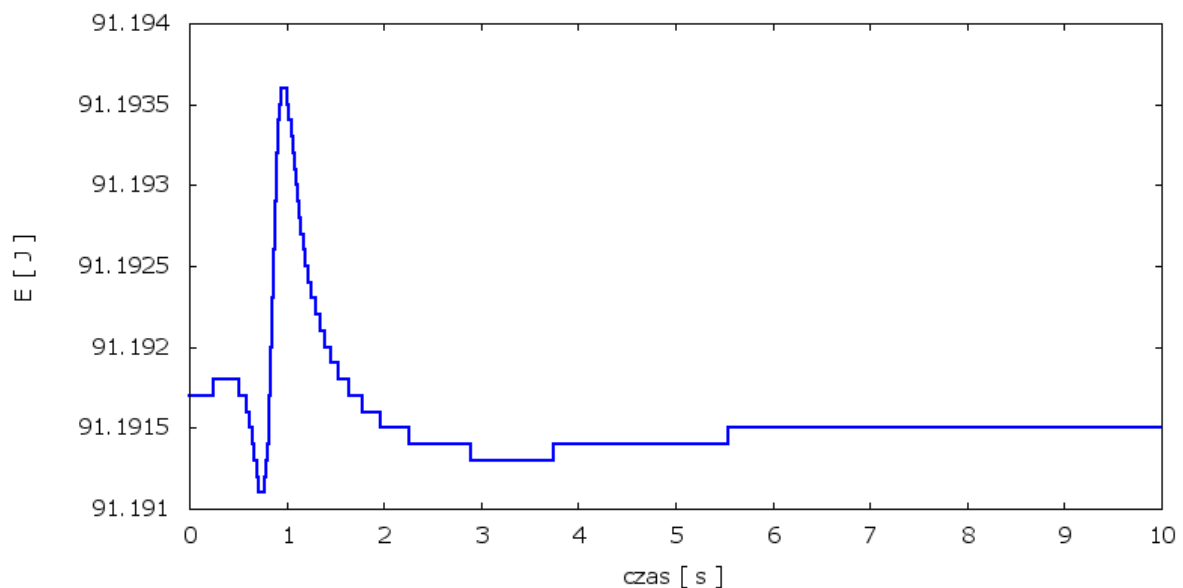
Wykres 5. Energia całkowita cząstki dla symulacji trzeciej

Dla trzeciej symulacji energia całkowita na końcu symulacji jest zachowana z dokładnością do 0.055% względem energii początkowej. Rozwiązanie to także nie różni się jakościowo od symulacji pierwszej. Prędkości początkowe wprowadzają dodatkową energię początkową, zatem energia całkowita układu jest większa.

Czwartą symulację przeprowadziłem dla $\alpha = \pi/6$, $z(t_0) = 10$, $v(t_0) = -10$, $\varphi(t_0) = \pi/3$ oraz $\omega(t_0) = 0$. Zmieniłem znak prędkości na ujemną i zwiększyłem jej wartość a prędkość kątową wyzerowałem.



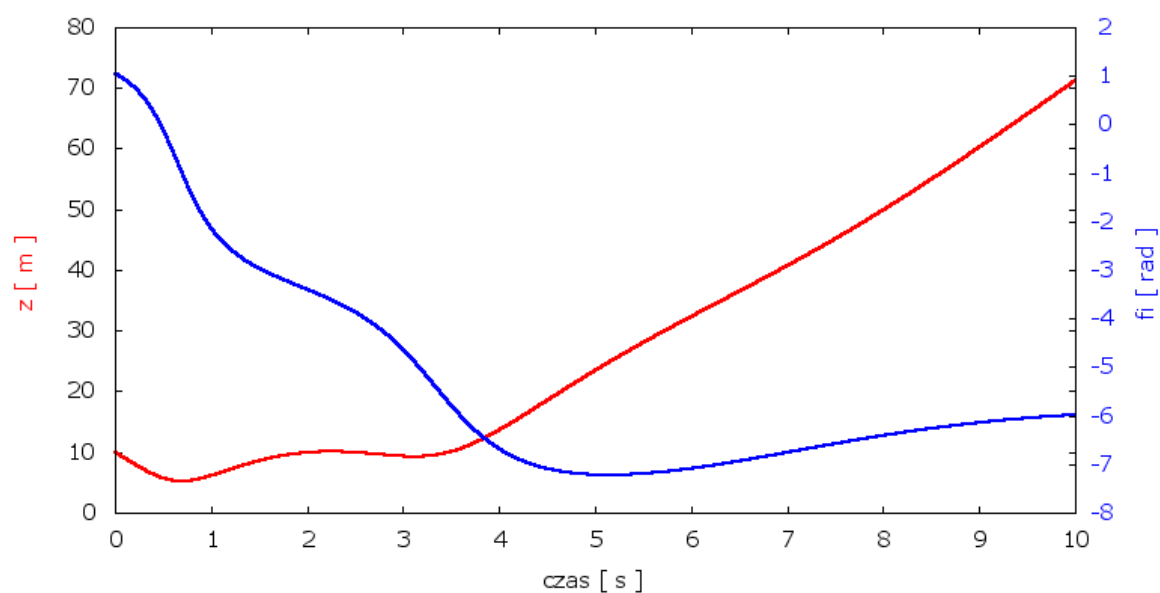
Wykres 6. Trajektoria cząstki dla symulacji czwartej



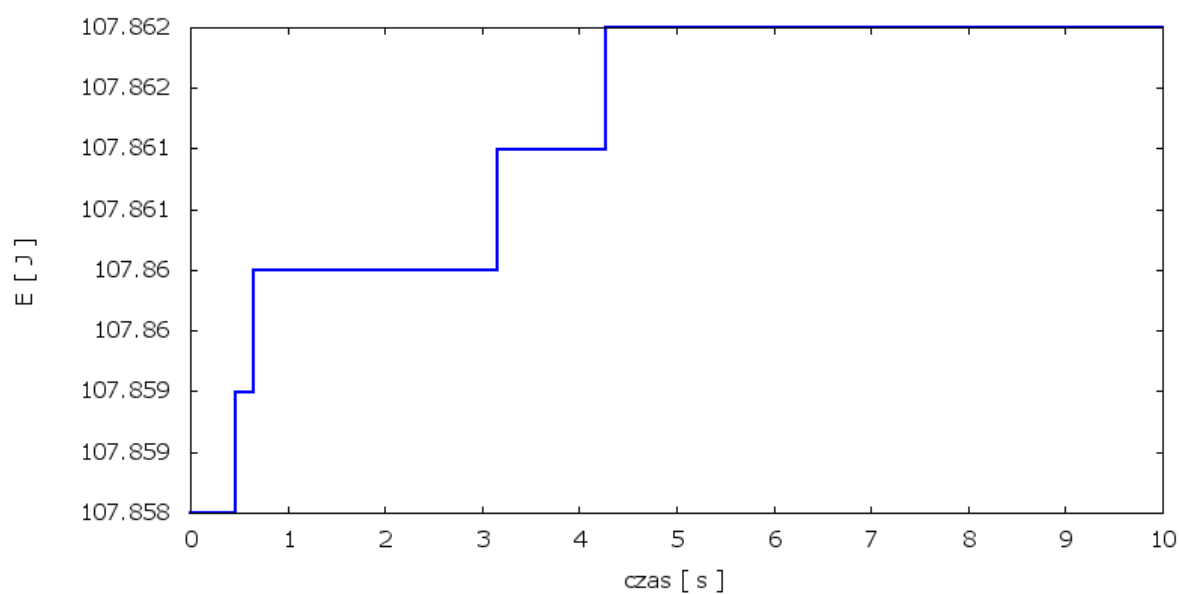
Wykres 6. Energia całkowita cząstki dla symulacji czwartej

Czwarta trajektoria na wykresie 5. różni się od trajektorii pierwszej początkowym przebiegiem. Ze względu na ujemną prędkość początkową, współrzędna z maleje na rzecz dużego wzrostu prędkości kątowej (duży wzrost kątowy w małym odstępie czasu), przyjmuje minimum i zaczyna rosnąć. Po przejściu przez punkt przegięcia trajektoria sprowadza się do trajektorii z symulacji pierwszej, jednak ze znacznie większą prędkością. Ujemna prędkość początkowa zmienia zatem początkowy kierunek rozwoju trajektorii ale w dalszej perspektywie czasowej wypadkowo wnosi wzrost prędkości w kierunku dodatnim. Energia całkowita w czasie symulacji czwartej jest zachowana z dokładnością do 0.23% względem Energii początkowej.

Symulację piątą zrealizowałem dodając do parametrów symulacji czwartej prędkość kątową :
 $\alpha = \pi/6$, $z(t_0) = 10$, $v(t_0) = -10$, $\varphi(t_0) = \pi/3$ oraz $\omega(t_0) = -1$.



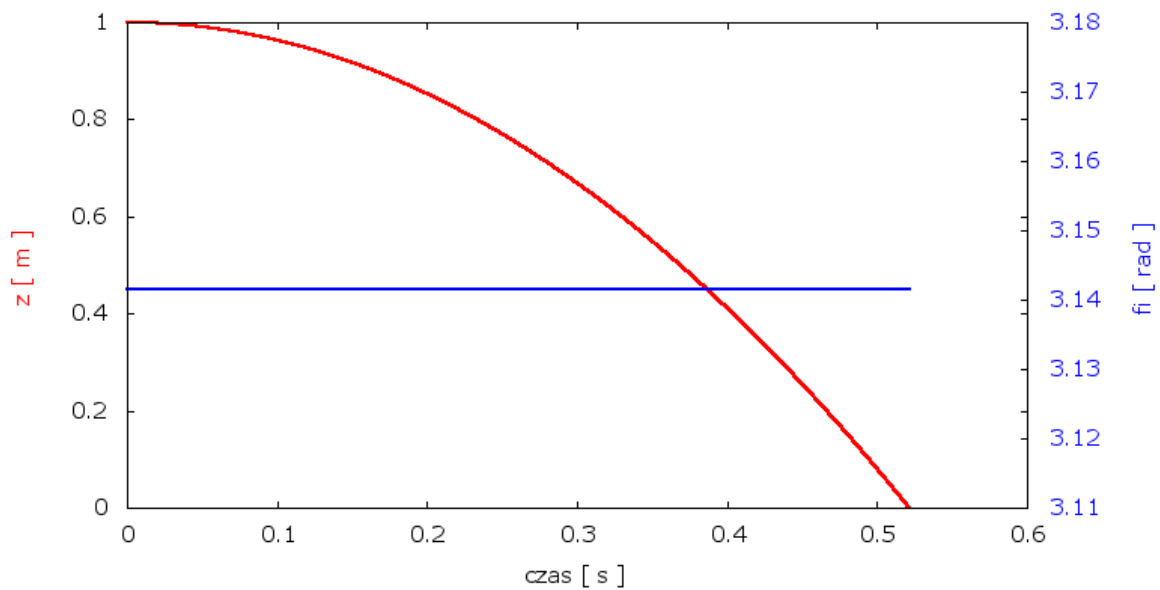
Wykres 7. Trajektoria cząstki dla symulacji piątej



Wykres 8. Energia całkowita cząstki dla symulacji piątej

Na wykresie 7. widać, że powstają dwa minima lokalne trajektorii współrzędnej z . Początkowa prędkość kątowa zaburza wygaszenie ujemnej prędkości, ponieważ prędkości te są ze sobą sprzężone. Energia całkowita w czasie symulacji zachowana jest z dokładnością 0.4% względem początkowej energii całkowitej.

Szósta symulacja obejmuje przypadek szczególny : $\alpha = \pi/6$, $z(t_0) = 1$, $v(t_0) = 0$, $\varphi(t_0) = \pi$ oraz $\omega(t_0) = 0$.



Wykres 9. Trajektoria cząstki dla symulacji szóstej

W tym przypadku ciało realizuje ruch po równi pochyłej. Jest to sytuacja szczególna dla $\varphi = \pi$. Ten szczególny przypadek jest czysto teoretyczny, ponieważ cząstka przez czas znajduje się w punkcie równowagi niestabilnej ze względu na współrzędną kątową. W praktyce ciało od razu zsunęłoby się i zrealizowało jedną z powyżej przedstawianych trajektorii. Drugim przypadkiem szczególnym są wartości początkowe : $\varphi(t_0) = 0$ oraz $\omega(t_0) = 0$. Ten trywialny przypadek to po prostu ruch jednostajny prostoliniowy po stycznej stożka do powierzchni.