

Sprawozdanie

Symulacja rozkładu naprężeń i odkształceń metodą elementów skończonych

Amadeusz Filipek

Laboratorium komputerowe WFiIS AGH

1. Wstęp

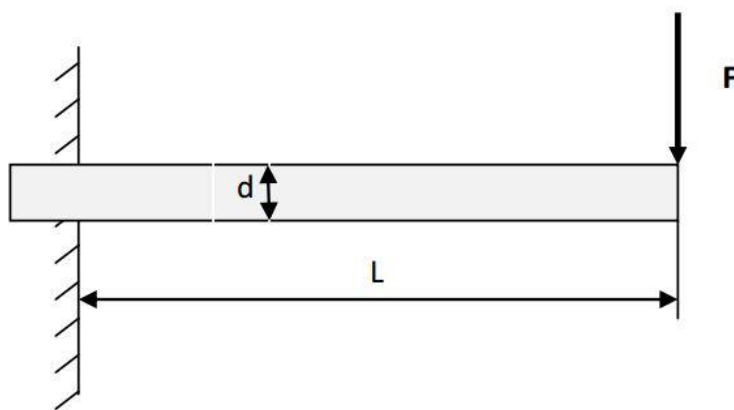
Celem ćwiczenia jest wyznaczenie rozkładu naprężeń i odkształceń analizowanych obiektów przy użyciu metody elementów skończonych.

Metoda elementów skończonych jest zaawansowaną metodą numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych. Metoda bazuje na podziale analizowanej przestrzeni na skończone elementy w obszarze których rozwiązanie jest przybliżane wybranymi funkcjami. Równanie natomiast rozwiązywane jest tylko dla naroży tych elementów zwanych węzłami. Najczęstszym wyborem elementów podczas symulacji dwuwymiarowych są trójkąty. Pakiet pdftool oprogramowania Matlab udostępnia gotową bibliotekę wraz z interfejsem graficznym do modelowania metodą elementów skończonych w 2D.

Metodę tą wykorzystać można do obliczenia naprężeń oraz odkształceń pod wpływem przyłożonych sił we wszelkiego rodzaju materiałach i konstrukcjach, pod warunkiem, że odkształcenia są na tyle małe, że zostajemy w obszarze odkształceń sprężystych.

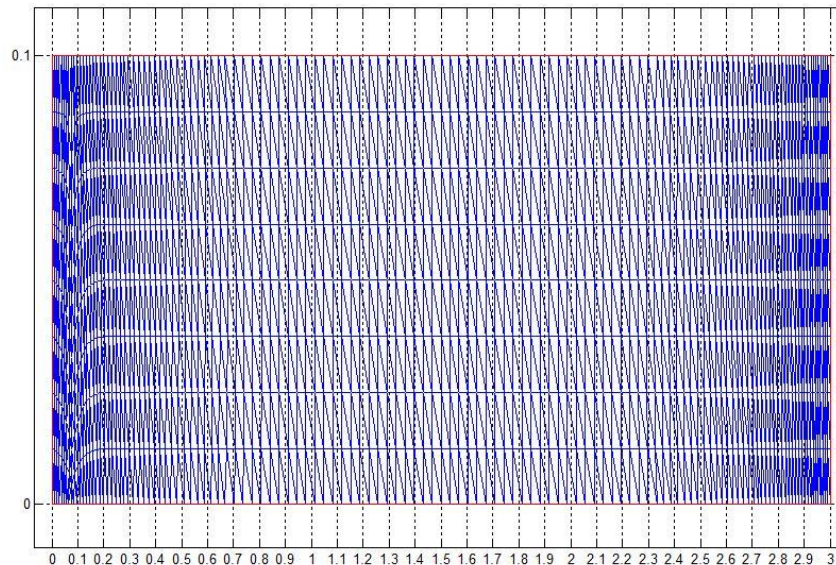
2. Ugięcie belki

Pierwszym modelowanym obiektem jest belka przymocowana na sztywno do ściany za jeden koniec i poddana sile przyłożonej do drugiego końca w kierunku pionowym w dół (schemat 1). Układ rozpatrujemy w dwóch wymiarach. Belka wysunięta jest na długość $L = 3m$ i ma grubość równą $d = 0.1m$. Modelowanym obiektem jest stal, która posiada gęstość $\rho = 7860 \frac{kg}{m^3}$, moduł Young'a $E = 200 GPa$ oraz współczynnik Poissona $\nu = 0.3$.



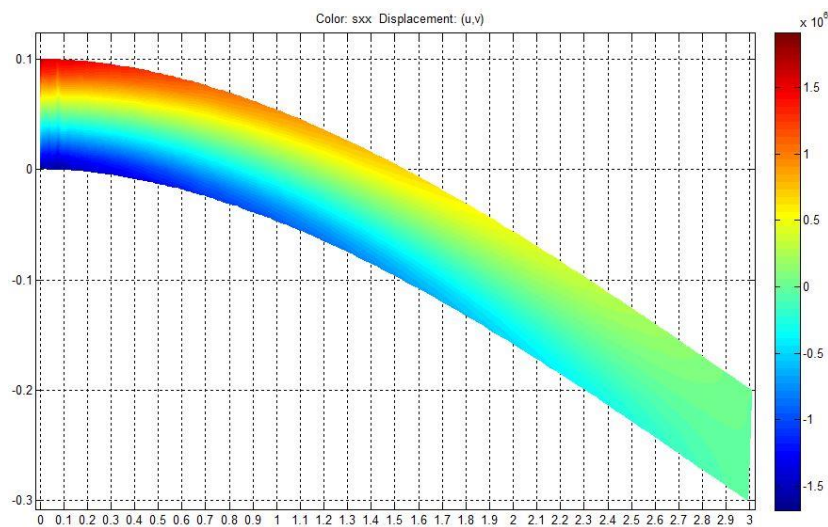
Rysunek 1. Schemat analizowanego układu wygiętej belki z przyłożoną siłą F

Na analizowany układ nałożyłem odpowiednie warunki brzegowe tzn. na obszar belki w ścianie brak przemieszczenia, na dolną i górną krawędź brak sił oraz siła skierowana pionowo w dół o wartości $F = 1000\text{ N}$ dla prawego brzegu belki. Analizowany obszar podzieliłem na siatkę trójkątów w sposób następujący:

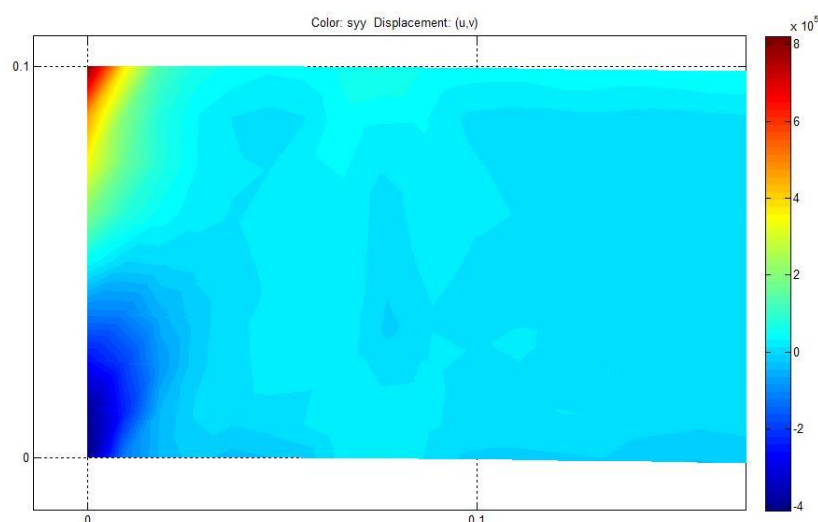


Rysunek 2. Analizowana belka z naniesioną siatką trójkątów

Dla tak przygotowanego układu wykonałem obliczenia. Uzyskany rozkład naprężeń w kierunkach x, y wygląda następująco (na wykresach uwzględniono przemieszczenie belki):



Wykres 1. Rozkład naprężeń w kierunku x ugiętej belki

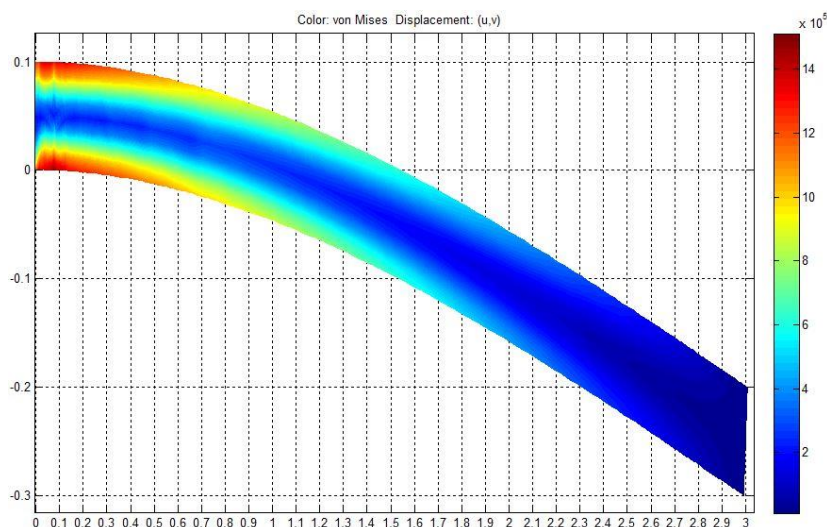


Wykres 2. Rozkład naprężeń w kierunku y ugiętej belki, przybliżenie na obszar styku ze ścianą

Na uzyskanych wykresach widać, że obie składowe naprężeń mają charakter rozciągający dla górnej części belki oraz ściskający dla dolnej. Naprężenia poziome występują w całym obszarze belki, podczas gdy naprężenia pionowe przyjmują znaczne wartości tylko w obszarze bezpośredniego kontaktu ze ścianą. Na podstawie tych naprężeń można obliczyć naprężenia von Misesa wyrażone wzorem:

$$\sigma_M = \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)(\nu^2 - \nu + 1) + \sigma_x \sigma_y (2\nu^2 - 2\nu - 1)}$$

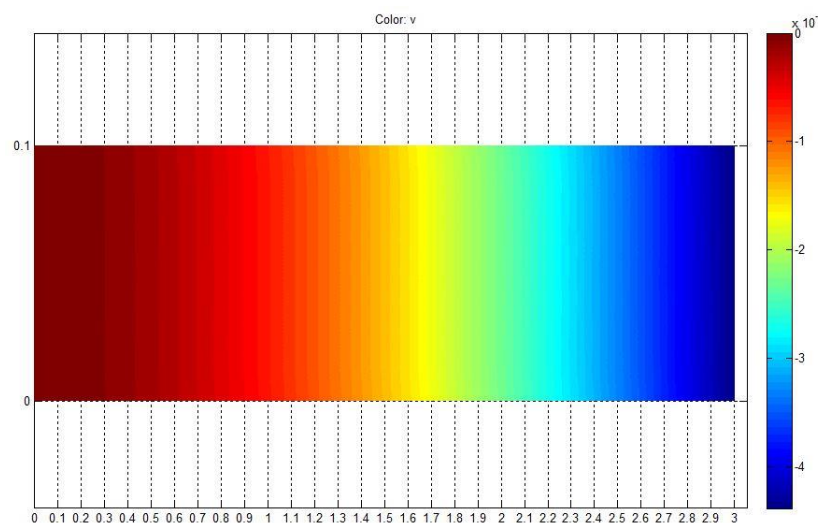
Rozkład naprężeń von Misesa dla ugiętej belki wygląda następująco:



Wykres 3. Rozkład naprężeń von Misesa ugiętej belki

Naprężenia von Misesa pozwalają wskazać obszary krytyczne konstrukcji. Obszar o największej wartości naprężeń von Misesa jest najbardziej narażony na pęknięcia. Dla ugiętej belki obszar ten występuje w bliskiej odległości od styku ze ścianą przy obu krawędziach belki, podczas gdy środek belki jest wolny od naprężeń.

Kolejną interesującą wartością jest ugięcie całkowite belki w osi y. Rozkład przemieszczenia belki w osi y przedstawiony jest na poniższym wykresie:



Wykres 4. Rozkład przemieszczenia belki w osi y

Belka w końcowym punkcie uzyskuje przemieszczenie równe:

$$h = 4.7 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Wynik ten można porównać z wartością teoretyczną, którą można wyliczyć na podstawie wzorów:

$$h_{teor} = \frac{FL^3}{3 \cdot E \cdot J}, \quad J = \frac{gd^3}{12}$$

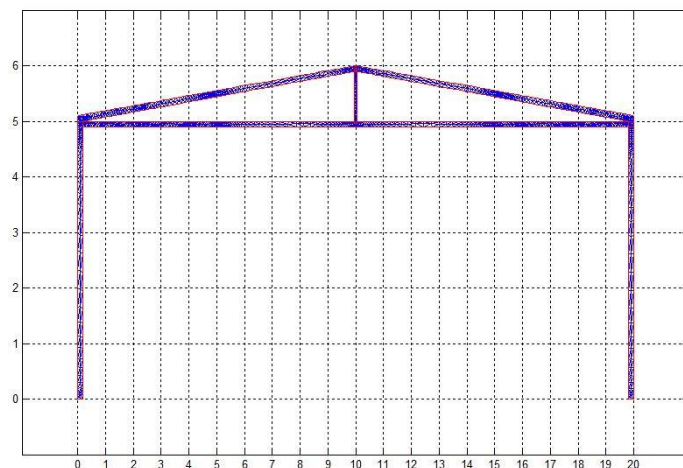
gdzie J stanowi moment bezwładności belki dla przekroju prostokąta a g szerokość belki. Problem rozpatrujemy w dwóch wymiarach więc przyjmujemy jednostkową szerokość belki. Wartość teoretyczna wynosi zatem:

$$h_{teor} = 5.4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Względny wyznaczony przemieszczenia wynosi 13%.

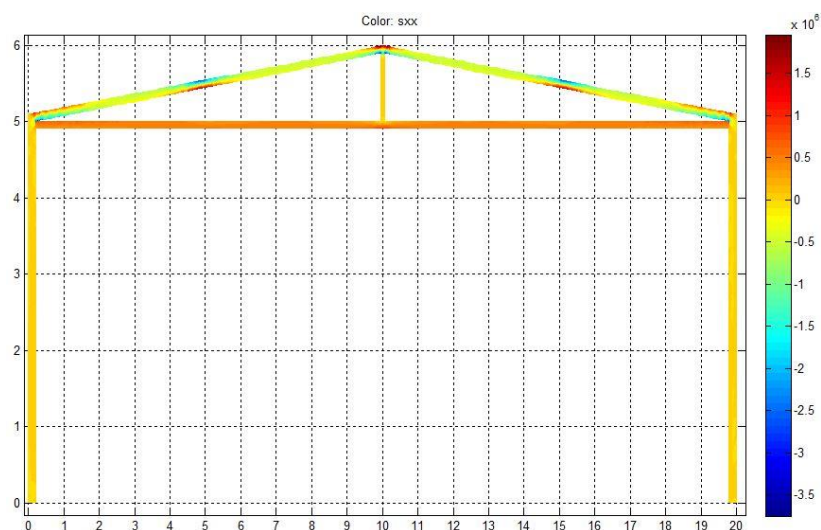
3. Konstrukcja stalowego szkieletu hali

W drugiej części ćwiczenia zamodelowałem prostą stalową konstrukcję szkieletu hali (rysunek 3.). Hala ma długość 20 metrów i złożona jest z metalowych belek grubości 0.2 metra. Hala jest wysoka na 6 metrów w punkcie szczytowym.



Rysunek 3. Schemat modelowanego szkieletu hali z nałożoną siatką obliczeniową

Założyłem, że belki pionowe są przymocowane do podłoża na sztywno a reszta konstrukcji jest do nich przymocowana. Rozważyłem sytuację, w której na dachu hali zalega dwumetrowa warstwa średnio zbitego śniegu o gęstości $500 \frac{kg}{m^3}$, zatem ciśnienie wywierane na każdy z boków dachu jest równe $1 kPa$ (zakładamy jednostkową szerokość dachu w osi z). Uzyskane rozkłady naprężeń szkieletu w obu osiach wyglądają następująco:

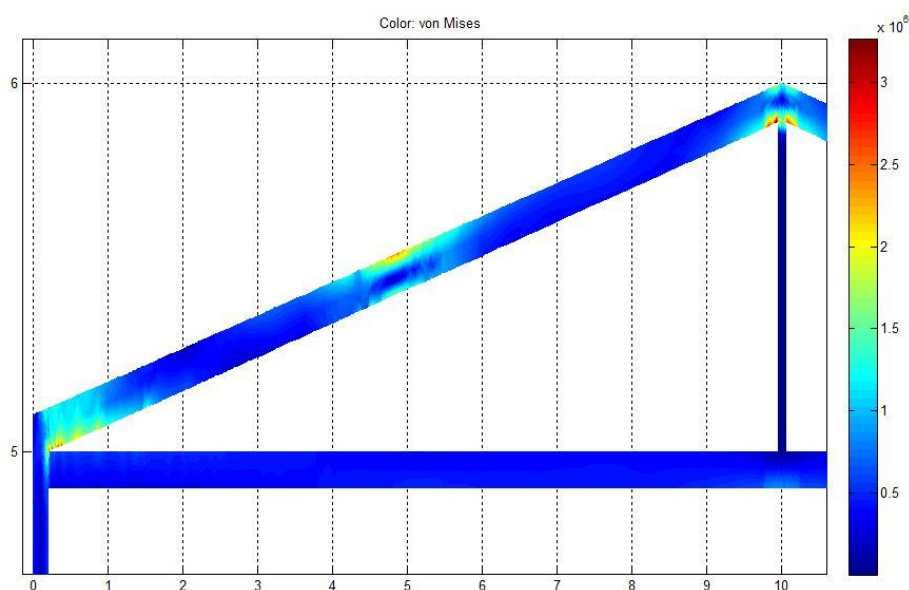


Wykres 5. Rozkład naprężeń w osi x modelowanego szkieletu hali



Wykres 6. Rozkład naprężeń w osi y modelowanego szkieletu hali

Na uzyskanych rozkładach naprężeń widać, że największym naprężeniom w obu osiach poddane są belki dachowe. Naprężenia w osi x dla belek dachowych wykazują duże gradienty i osiągają duże wartości zarówno dodatnie jak i ujemne. Naprężenia w osi y są równomiernie rozłożone na belce dachowej oraz poziomej belce podporowej, przyjmują jednak duże wartości dla obszaru spójnię belek pionowych z dachowymi i podporowymi. Na podstawie tych naprężeń obliczyłem rozkład naprężeń von Misesa, wykres ograniczyłem do obszaru istotnych wartości i do jednej połowy ze względu na symetrię :



Wykres 7. Rozkład von Misesa modelowanego szkieletu hali, przybliżenie na spójnia

Naprężenia von Misesa pokazują, że punktami krytycznymi szkieletu hali są spójnia belek pionowych z dachowymi oraz podporowymi, środki belek dachowych oraz spójnia belek dachowych z pionową belką podporową.

4. Podsumowanie

W ramach ćwiczenia zasymulowałem ugięcie belki przymocowanej do ściany oraz szkielet hali przy użyciu metody elementów skończonych. Dla obu obiektów obliczyłem rozkład naprężeń w obu osiach. Uzyskana wartość przemieszczenia końca belki pokrywa się z wartością teoretyczną w zakresie 13% względnego błędu. Metoda elementów skończonych jest skuteczna do modelowania skomplikowanych konstrukcji i układów.