Sprawozdanie

Symulacja transportu ciepła

Amadeusz Filipek

Laboratorium komputerowe WFiIS AGH

1. Wstęp

Celem ćwiczenia jest wykonanie symulacji komputerowej procesu propagacji ciepła dla miedzianej blaszki o zadanej geometrii.

Rozkład temperatury obiektu w czasie opisany jest równaniem przewodnictwa cieplnego :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{c_w \rho} \Delta T \tag{1}$$

gdzie K stanowi współczynnik przewodnictwa materiału, c_w – ciepło właściwe oraz ρ – gęstość materiału. Powyższe równanie daje się analitycznie rozwiązać tylko dla prostych przypadków szczególnych. Dla bardziej skomplikowanych układów możemy przeprowadzić obliczenia numeryczne. W tym celu przestrzeń oraz czas dzielimy na węzły siatki obliczeniowej a pochodne przybliżamy ilorazami różnicowymi:

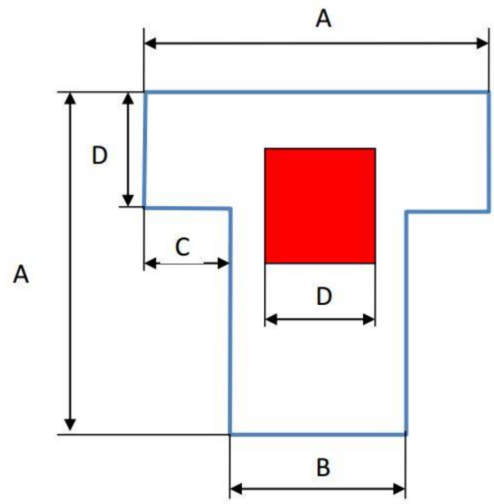
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T^{i+1} - T^{i-1}}{\Delta t} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(\Delta x)^2} \tag{3}$$

Rozkład temperatury badanej blaszki badamy w dwóch wymiarach – na jej płaszczyźnie. Równanie (1) przyjmuje zatem postać:

$$\mathrm{T}_{i,j}^{n+1} = \mathrm{T}_{i,j}^{n} + \frac{K\Delta t}{c_w \rho (\Delta x)^2}\left(\mathrm{T}_{i+1,j}^{n} - 2\mathrm{T}_{i,j}^{n} + \mathrm{T}_{i-1,j}^{n}\right) + \frac{K\Delta t}{c_w \rho (\Delta y)^2}\left(\mathrm{T}_{i,j+1}^{n} - 2\mathrm{T}_{i,j}^{n} + \mathrm{T}_{i,j-1}^{n}\right) \tag{4}$$

Schemat badanej blaszki przedstawiony jest poniżej :



Rysunek 1. Schemat powierzchni badanej blaszki wraz z grzałką

Analizowana blaszka ma kształt litery „T” , na środku kolorem czerwonym została zaznaczona grzałka, która w procesie symulacji grzeje blaszkę. Wymiary blaszki wynoszą kolejno $A = 0.4\ m, B = 0.3\ m, C = 0.05\ m$ oraz $D = 0.1\ m$. Grubość blaszki wynosi $h = 1\ mm$. Grzałka została umieszczona w centrum analiozowanego kwadratu obliczeniowego w punkcie (A/2, A/2). Obszar blaszki został podzielony na $Nx = 41, Ny = 41$ węzłów odległych o $dx = 0.01\ m, dy = 0.01\ m$. Krok czasowy wynosi $dt = 0.1\ s$.

2. Blaszka w termostacie

Aby rozwiązać równanie (1), na badaną blaszkę należy nałożyć warunki początkowe oraz brzegowe. Warunki te mają odzwierciedlenie w rzeczywistości i determinują charakter rozwiązań. Pierwsza symulacja została przeprowadzona przy warunkach brzegowych Dirichleta, które zadają wartość temperatury na brzegach:

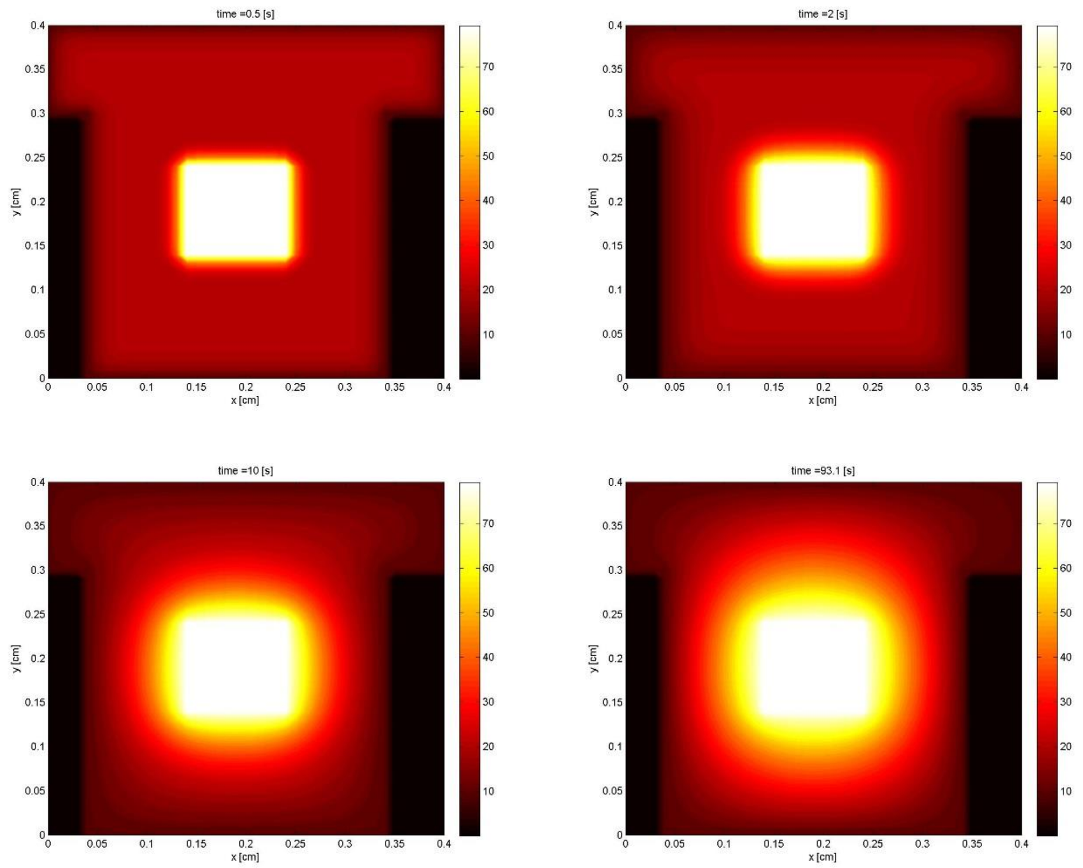
$$T(r_1, t) = T(r_1) = 80\ °C$$

$$T(r_2, t) = T(r_2) = 10\ ℃$$

gdzie r_1 to obszar grzałki natomiast r_2 to brzeg blaszki. Warunki te odpowiadają sytuacji gdy brzegi blaszki są w kontakcie z dużym zbiornikiem cieplnym o stałej temperaturze (np. woda) natomiast grzałka utrzymuje stałą temperaturę. Ustalony warunek początkowy blaszki zadaje jej temperaturę na początku symulacji:

$$T(r, 0) = 20\ ℃$$

Uzyskane przeze mnie wyniki symulacji przedstawione są na poniższych wykresach:



Wykres 1. Izotermy powierzchni blaszki dla wybranych kroków czasowych

W miarę upływu czasu temperatura rozpływa się od grzałki do brzegów blaszki aż dochodzi do stanu ustalonego przedstawionego na wykresie 1. dla czasu $t = 93.1\ s$. Jako warunek zakończenia symulacji przyjąłem wyrażenie :

$$\sum_{i}^{Nx} \sum_{j}^{Ny} \left(T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}\right)^2 < \varepsilon$$

z wartością parametru $\varepsilon = 0.0001$.

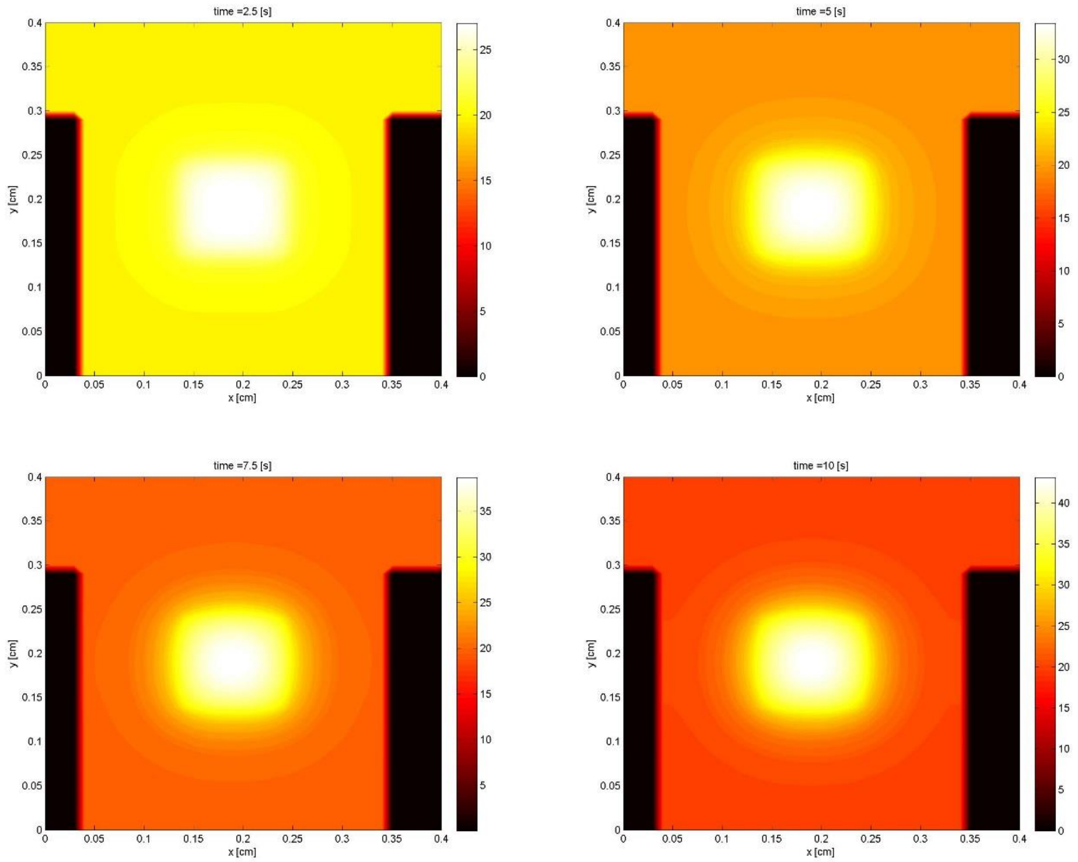
3. Blaszka w próżni

Kolejna symulacja została przeprowadzona przy warunkach brzegowych typu Neumanna, które zadają wartość pochodnej temperatury na brzegach :

$$\Delta T(r_1, t) = \frac{P \cdot \Delta t}{c_w \cdot D^2 \cdot h \cdot \rho}$$

$$\frac{\partial T(r_2, t)}{\partial r} = 0$$

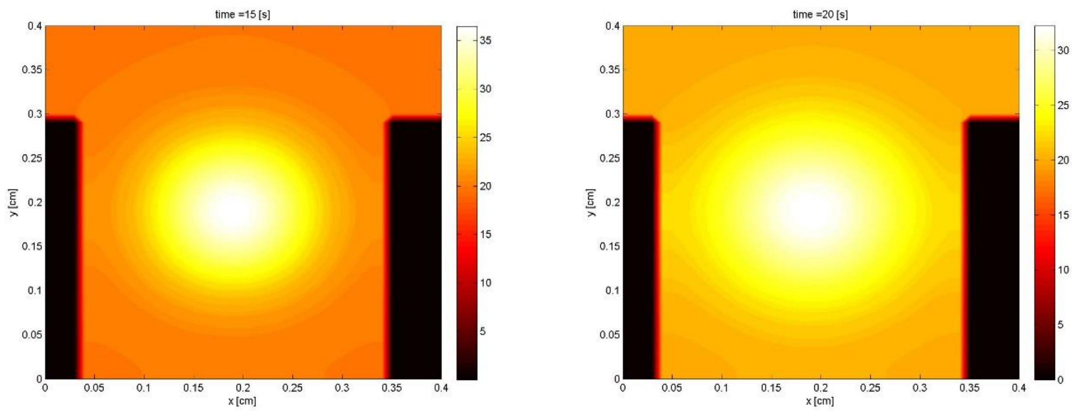
Warunki te odpowiadają sytuacji gdy grzałka grzeje z ustaloną mocą P natomiast brzegi blaszki są odizolowane od otoczenia (np. w próżni). Przyjęta moc grzałki wynosi $P = 100\,W$. Warunek początkowy pozostaje bez zmian. Po $t = 10\,s$ grzałka zostaje wyłączona. Poniżej przedstawione są wyniki symulacji w okresie podgrzewania dla wybranych kroków czasowych:

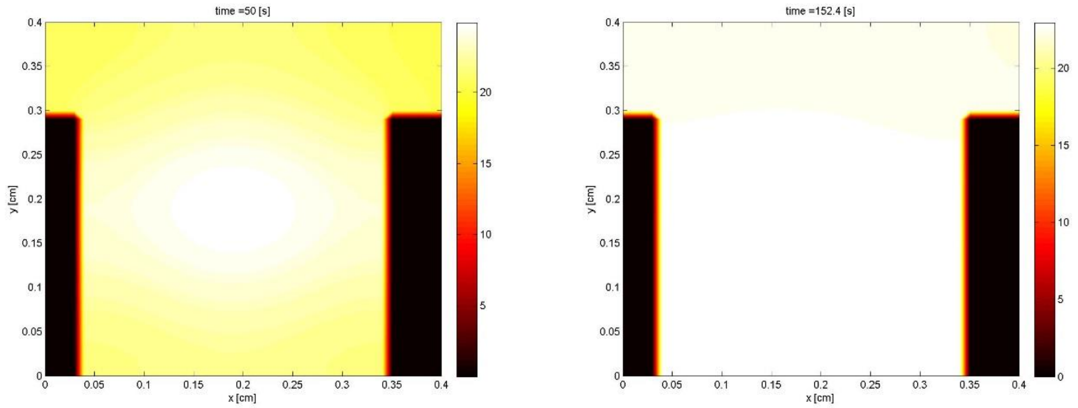


Wykres 2. Izotermy powierzchni blaszki dla wybranych kroków czasowych podczas grzania

Temperatura podczas grzania wzrosła głównie w obszarze styku blaszki z grzałką, natomiast pozostały obszar blaszki nieznacznie zmienił swoją temperaturę.

Dalszy przebieg symulacji po wyłączeniu grzałki wygląda następująco:





Wykres 3. Izotermy powierzchni blaszki dla wybranych kroków czasowych po wyłączeniu grzałki

W miarę upływu czasu temperatura rozpływa się po blaszce i układ dąży do stanu jednorodnego o ustalonej temperaturze około $23\ ^\circ\mathrm{C}$. Poprawność obliczeń można zweryfikować przeprowadzając bilans energetyczny. Do układu zostało wprowadzone poprzez grzałkę $E = P \cdot t = 1\ kJ$ energii. Energia wprowadzona na końcu symulacji wynosi :

$$E = \sum_{i}^{Nx} \sum_{j}^{Ny} c_w \cdot V_{i,j} \cdot \rho \cdot \Delta T_{i,j} = 1.28\ kJ$$

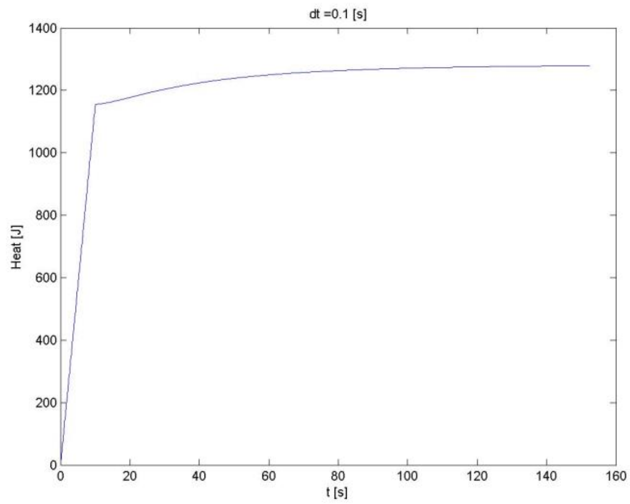
Błąd bilansu energetycznego jest stosunkowo wysoki i wynosi 28%. Dodana wartość energii wynika z błędów obliczeniowych. Zwiększenie dokładności obliczeń czyli zmniejszenie dx, dy, dt prowadzi do mniejszego błędu energetycznego.

4. Stabilność numeryczna

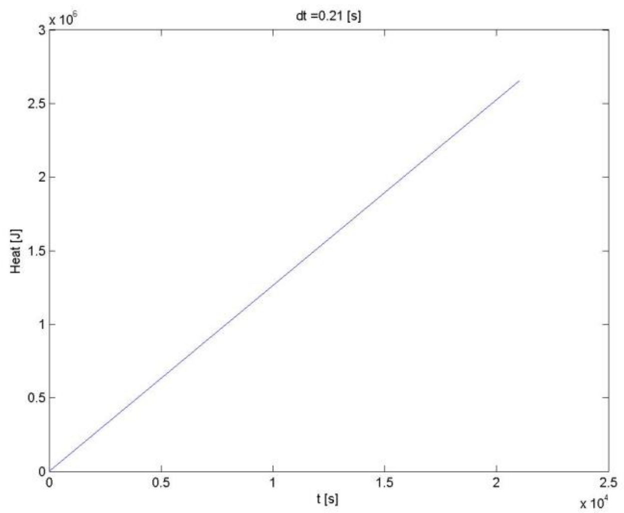
Przy zwiększaniu dokładności obliczeń należy uważać na odległości węzłów dx, dy, dt. Dobranie nieodpowiednich wartości może prowadzić do niestabilności rozwiązania. Warunek stabilności wyrażony jest wzorem:

$$dt \leq \frac{1}{4} (dx)^2 \frac{c_w \rho}{K}$$

Wartość graniczna dla uprzednio przyjętych parametrów wynosi około $dt = 0.2$. Warunek ten wymaga aby funkcja nie zmieniała się za jednym krokiem czasowym szybciej niż w obrębie jednej komórki obliczeniowej. Stabilność numeryczną badam za pomocą bilansu cieplnego przedstawionego powyżej.



Wykres 4. Ciepło wprowadzone do blaszki w funkcji czasu, symulacja stabilna



Wykres 5. Ciepło wprowadzone do blaszki w funkcji czasu, symulacja niestabilna dla $dt = 0.21$

Jeżeli warunek stabilności nie jest spełniony to obliczenia są niefizyczne, ciepło wprowadzone do układu dąży do nieskończoności pomimo, że grzałka zostaje wyłączona po 10 sekundach. Analiza zasady zachowania energii układu jest dobrym kryterium poprawności obliczeń.

5. Podsumowanie

Wykonałem symulacje rozpływu temperatury w analizowanej miedzianej blaszce w dwóch wymiarach dla dwóch różnych warunków brzegowych typu Dirichleta oraz Neumanna. Dla uzyskanych rozkładów temperatury wykonałem mapy izoterminczne powierzchni blaszki w wybranych krokach czasowych. Dodatkowo, do symulacji z warunkami Neumanna wykonałem analizę bilansu cieplnego i zbadałem kryterium stabilności obliczeń. Zauważyłem, że analiza bilansu energetycznego jest dobrym wyznacznikiem poprawności wykonanych obliczeń.