

Sprawozdanie

Filtry cyfrowe o nieskończonej odpowiedzi impulsowej IIR – projekt

Amadeusz Filipek

Laboratorium komputerowe WFILS AGH

1. Wstęp

1.1 Projektowanie filtru IIR metodą transformaty biliniowej

Celem ćwiczenia jest zaprojektowanie filtru cyfrowego IIR typu Butterwortha na podstawie jego analogowej postaci przy użyciu transformaty biliniowej.

Metoda transformaty biliniowej pozwala nam zaprojektować filtr cyfrowy IIR korzystając z jego analogowego odpowiednika. Wychodzimy z funkcji przenoszenia filtru analogowego w dziedzinie s :

$$H(s) = \frac{c}{s^2 + b \cdot s + c}$$

i korzystamy z transformaty biliniowej:

$$z = \frac{1 + \frac{s}{2F_S}}{1 - \frac{s}{2F_S}} \Rightarrow s = 2F_S \frac{z - 1}{z + 1} = 2F_S \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

gdzie F_S stanowi częstotliwość próbkowania. Zatem:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{c}{\left[2F_S \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right]^2 + 2F_S b \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + c} = \\ &= \frac{c(1 + z^{-1})^2}{[2F_S(1 - z^{-1})]^2 + 2F_S b(1 - z^{-1})(1 + z^{-1}) + c(1 + z^{-1})^2} = \\ &= \frac{c(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{4F_S^2 - 4F_S z^{-1} + 4F_S^2 z^{-2} + 2F_S b(1 - z^{-2}) + c(1 + 2z^{-1} + z^{-2})} = \\ &= \frac{c(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{z^{-2}(4F_S^2 - 2F_S b + c) + z^{-1}(2c - 8F_S^2) + c + 2F_S b + 4F_S^2} \end{aligned}$$

Wprowadzając podstawienie

$$\lambda = c + 2F_S b + 4F_S^2$$

oraz dzieląc obustronnie przez λ uzyskujemy funkcję przenoszenia projektowanego filtru cyfrowego:

$$H(z) = \frac{\frac{c}{\lambda}(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 + \frac{1}{\lambda}(2c - 8F_S^2)z^{-1} + \frac{1}{\lambda}(4F_S^2 - 2F_S b + c)z^{-2}} \quad (1)$$

2. Filtr cyfrowego typu IIR Butterwortha

2.1 Projektowanie filtru

Należało zaprojektować filtr cyfrowy IIR Butterwortha o zadanej częstotliwości granicznej $F_g = 3.35 \text{ kHz}$ przy częstotliwości próbkowania równej $F_s = 10 \text{ kHz}$. Aby wyznaczyć odpowiednie współczynniki na podstawie wzoru (1), należy najpierw wyznaczyć postać analogową $H(s)$ szukanego filtru. Aby uzyskany filtr cyfrowy miał zadaną częstotliwość graniczną F_g , filtr analogowy, od którego wychodzimy musi mieć częstotliwość odpowiednio przeskalowaną ze względu na efekt przesunięcia częstotliwości granicznej (frequency warping). Częstotliwość graniczna filtru analogowego F_a wynosi zatem:

$$F_a = \frac{F_s}{\pi} \operatorname{tg} \left(\pi \frac{F_g}{F_s} \right) = 5.5806 \text{ kHz}$$

Następnie zaczytałem z ogólnie dostępnych tablic postać funkcji przenoszenia odpowiadającej filtrowi Butterwortha II rzędu o $F_a = 1 \text{ kHz}$:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2} \cdot s + 1}$$

Aby przeskalować postać funkcji przenoszenia dzielimy s w powyższej funkcji przenoszenia przez pożądaną częstość graniczną w_a i uzyskujemy:

$$H(s) = \frac{w_a^2}{s^2 + w_a \sqrt{2} \cdot s + w_a^2}$$

Zatem szukane parametry filtru analogowego wynoszą:

$$w_a = 2\pi F_a = 35.064 \text{ k} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$b = 49.588 \text{ k} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

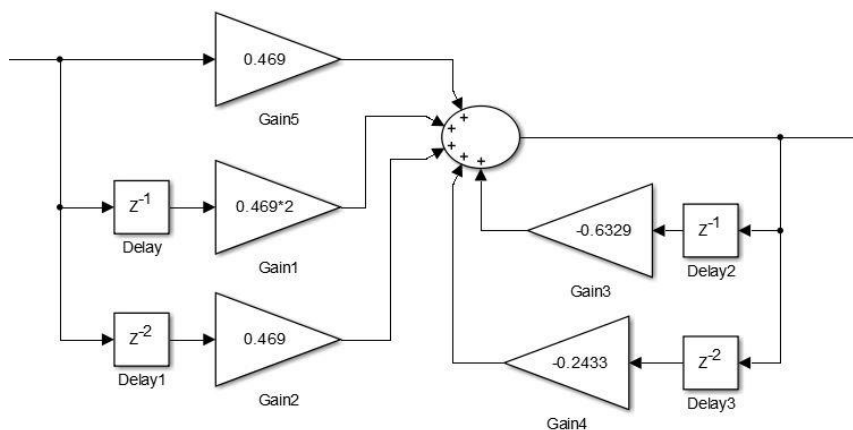
$$c = 1.2295 \text{ G} \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}$$

Na ich podstawie wyznaczamy funkcję przenoszenia filtru cyfrowego w dziedzinie z korzystając ze wzoru (1):

$$\lambda = 2.6212 \text{ G} \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}$$

$$H(z) = \frac{0.469 + 0.938z^{-1} + 0.469z^{-2}}{1 + 0.6329z^{-1} + 0.2433z^{-2}}$$

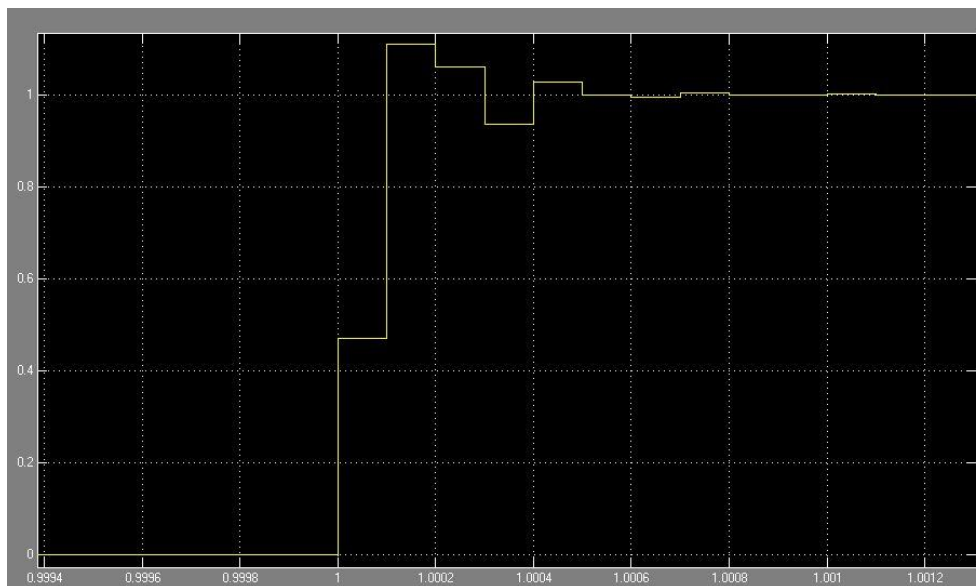
Na podstawie uzyskanej funkcji przenoszenia zrealizowałem model projektowanego filtru w konfiguracji direct form I korzystając z pakietu obliczeniowego simulink zawartego w oprogramowaniu Matlab:



Rysunek 1. Schemat blokowy zaprojektowanego filtra cyfrowego w konfiguracji direct form I

2.2 Odpowiedź na skok napięcia

Zbadałem odpowiedź uzyskanego filtra cyfrowego na jednostkowy skok napięcia. Uzyskana odpowiedź przedstawiona jest poniżej:

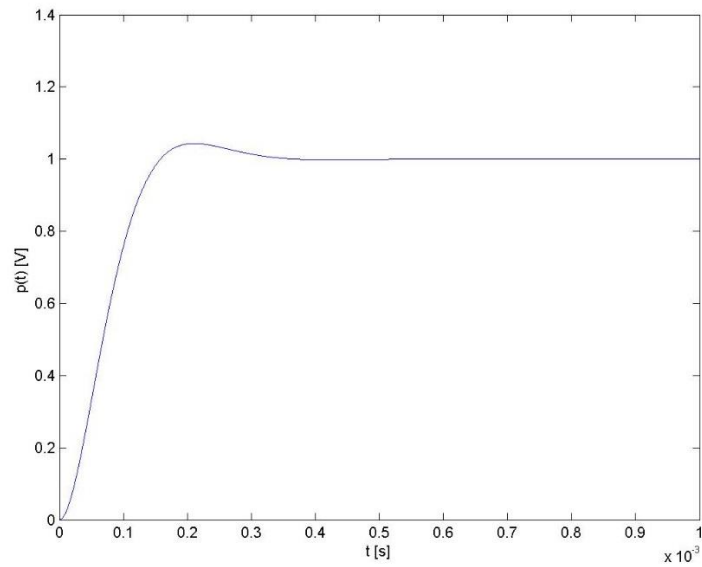


Wykres 1. Odpowiedź filtra cyfrowego IIR Butterwortha na skok napięcia

Na wykresie widoczne są niewielkie przerzuty w odpowiedzi na skok napięcia. Uzyskane wzmocnienie stałoprądowe wynosi $K = 1$, natomiast czas narastania zbocza wynosi $\tau_r \cong 0.1 \text{ ms}$. Przebieg porównać można z odpowiedzią teoretyczną, która dla filtra Butterwortha II rzędu ma postać:

$$p(t) = 1 - \frac{\exp(-\zeta w_g t)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin\left(w_g t \sqrt{1 - \zeta^2} + \arctg \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right)$$

gdzie $w_g = 2\pi F_g$ oraz ζ stanowi stałą tłumienia filtra. Dla projektowanego filtra typu Butterwortha $\zeta = \sqrt{2}/2$. Przebieg teoretyczny przedstawiony jest na poniższym wykresie:

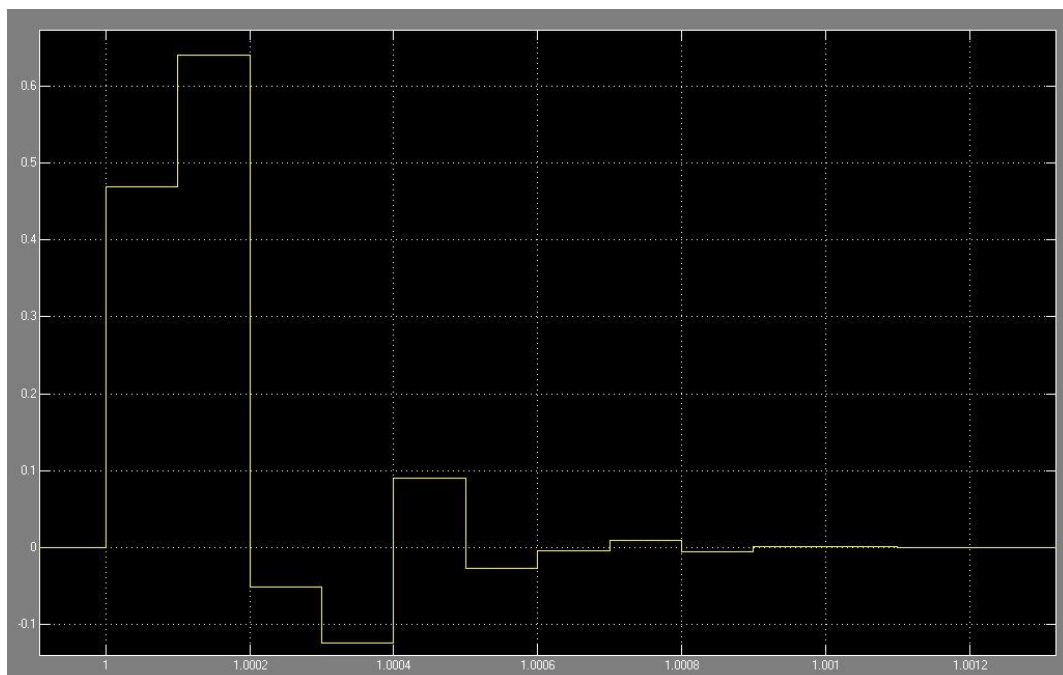


Wykres 1. Teoretyczna odpowiedź filtru cyfrowego IIR Butterwortha na skok napięcia

Uzyskana odpowiedź na wykresie 1. pokrywa się z odpowiedzią teoretyczną na wykresie 2. z dokładnością do rozdzielczości wynikającej z czasu próbkowania. Czas odpowiedzi filtru na skok jest niewielki w stosunku do czasu próbkowania dlatego przebieg nie jest odtworzony gładko.

2.2 Odpowiedź na pojedynczy impuls napięcia

W następnej kolejności zbadałem odpowiedź zaprojektowanego filtru na pojedynczy impuls napięcia o jednostkowej amplitudzie. Uzyskana odpowiedź wygląda następująco:

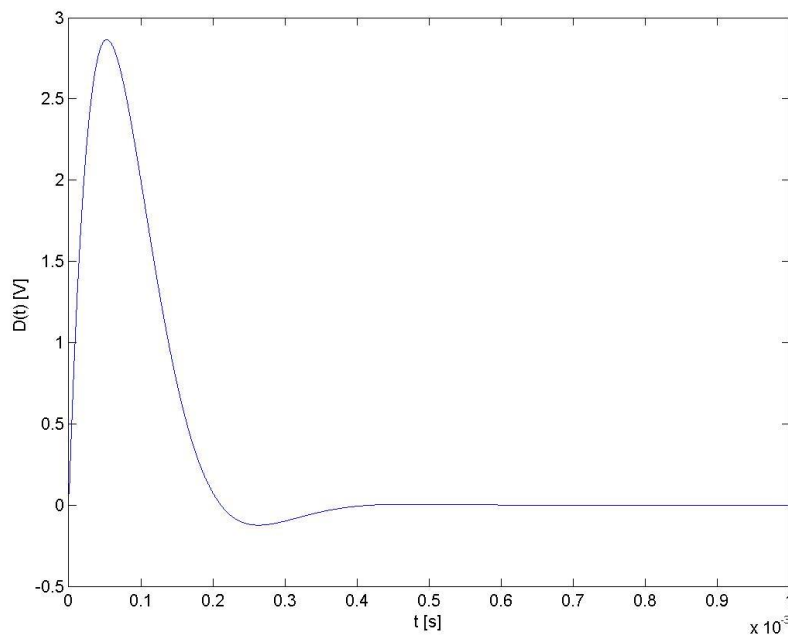


Wykres 3. Odpowiedź impulsowa filtru cyfrowego IIR Butterwortha

Powyższy przebieg posiada charakter oscylacyjny z przerzutami na wartości ujemne. Teoretyczny przebieg odpowiedzi impulsowej zaprojektowanego filtra opisany jest funkcją:

$$d(t) = \frac{w_g^2}{w_g \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta w_g t} \sin(w_g t \sqrt{1 - \zeta^2})$$

Odpowiedź ta obliczona jest dla sygnału w postaci delty Diraca, natomiast sygnał wejściowy, którego odpowiedź testowałem, to pojedynczy impuls napięcia o jednostkowej amplitudzie. Pole pod wykresem pojedynczego impulsu nie wynosi 1 ale jest równe czasowi próbkowania. Przebieg teoretyczny należy zatem przeskalować o czas próbkowania. Odpowiedź teoretyczna ma postać:

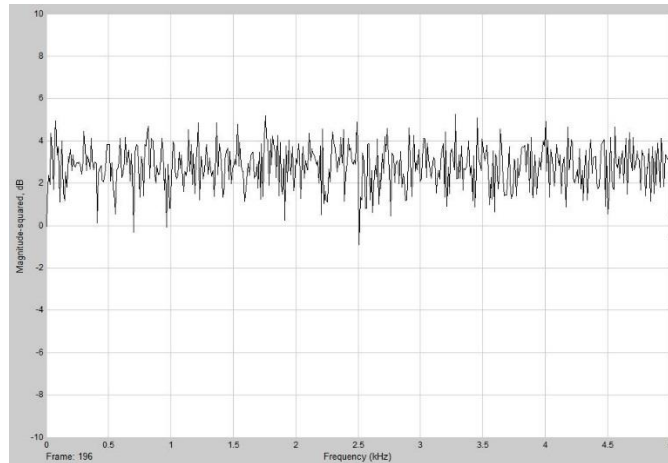


Wykres 4. Teoretyczna odpowiedź impulsowa filtra cyfrowego IIR Butterwortha

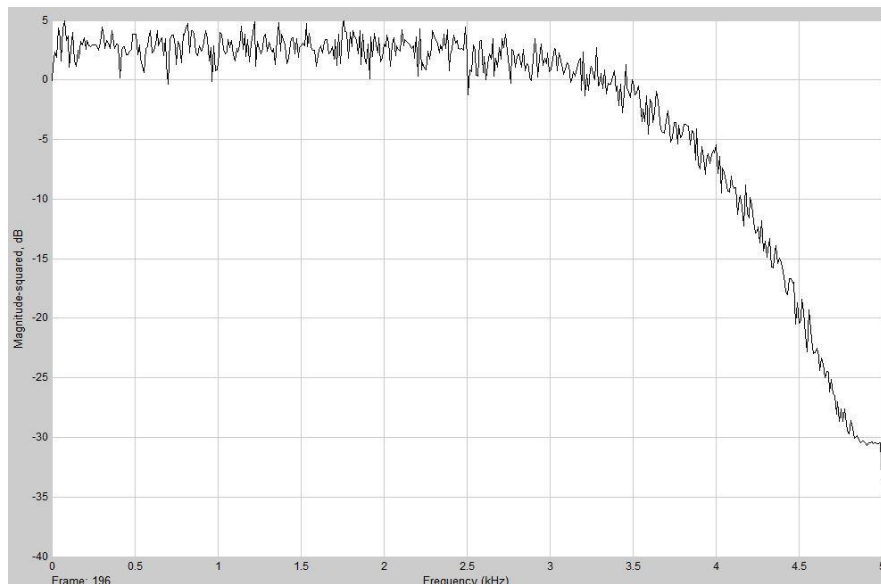
Uzyskany przebieg na wykresie 3. wykazuje pewne rozbieżności w stosunku do wykresu 4. Za te rozbieżności odpowiedzialna jest, tak samo jak przy odpowiedzi na skok, ograniczona rozdzielczość wynikająca z czasu próbkowania.

2.3 Charakterystyka częstotliwościowa

Ostatnim etapem ćwiczenia było zbadanie charakterystyki częstotliwościowej zaprojektowanego filtra. Na wejście filtra zadałem szum biały. Uzyskane przebiegi wejściowy oraz wyjściowy przedstawione są na poniższych wykresach:



Wykres 5. Sygnał wejściowy w postaci szumu białego



Wykres 6. Uzyskana charakterystyka częstotliwościowa zaprojektowanego filtra IIR

Uzyskana charakterystyka ma gładki przebieg w paśmie przenoszenia zgodnie z cechą filtra Butterwortha. Wzmocnienie w paśmie przenoszenia wynosi 0 dB . Wyznaczona częstotliwość graniczna wynosi 3.35 kHz i pokrywa się z wartością oczekiwaną.

4. Podsumowanie

W ramach ćwiczenia zaprojektowałem filtr cyfrowy IIR Butterwortha drugiego rzędu. Wychodząc od funkcji przenoszenia filtra analogowego i korzystając z transformaty biliniowej doszedłem do funkcji przenoszenia filtra cyfrowego. Zbadałem odpowiedź na skok napięcia oraz impuls jednostkowy zaprojektowanego filtra. Wyniki porównałem z odpowiedziami teoretycznymi. Wyzaczyłem także charakterystykę częstotliwościową zaprojektowanego filtra. Zauważyłem, że filtr ten ma gładką charakterystykę częstotliwościową ale odpowiedź na impuls oraz na skok napięcia posiadają przerzuty z oscylacjami.