Sprawozdanie

Model Taylora – metody jawna oraz niejawna

Amadeusz Filipek

Laboratorium komputerowe WFiIS AGH

1. Wstęp

Celem ćwiczenia jest wykonanie symulacji przepływu znacznika w rzece przy wykorzystaniu adwekcyjno dyspersyjnego równania transportu za pomocą dwóch metod: jawnej QUICKEST oraz niejawnej Cranka-Nicolsona.

Równanie adwekcyjno dyspersyjne transportu w modelu Taylora wyraża zmianę stężenia c znacznika w czasie oraz przestrzeni:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U\frac{\partial c}{\partial x} - D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0$$

gdzie U jest średnią prędkością przepływu a D współczynnikiem dyspersji.

Rozpatrywanym w ćwiczeniu obiektem jest kanał o długości $L = 100\ m$, szerokości $W = 5\ m$ oraz głębokości $H = 1\ m$. Ze względu na geometrię obiektu, rozkład stężenia znacznika rozpatrujemy w jednym wymiarze przestrzennym wzdłuż długości kanału.

Pierwszą analizowaną metodą rozwiązania numerycznego równania transportu znacznika jest metoda jawna QUICKEST, która pozwala wyznaczyć wartość stężenia znacznika w danym punkcie węzłowym w kolejnym kroku czasowym na podstawie czterech punktów w kroku poprzednim:

$$c_j^{n+1} = c_j^n + \left[C_d(1-C_a) - \frac{C_a}{6}({C_a}^2 - 3C_a + 2)\right]c_{j+1}^n - \left[C_d(2-3C_a) - \frac{C_a}{2}({C_a}^2 - 2C_a - 1)\right]c_j^n + \left[C_d(1-3C_a) - \frac{C_a}{2}({C_a}^2 - C_a - 2)\right]c_{j-1}^n + \left[C_dC_d + \frac{C_a}{6}({C_a}^2 - 1)\right]c_{j-2}^n$$

gdzie $C_a = \frac{\mathrm{U}\Delta t}{\Delta x}$ $\quad C_d = \frac{\mathrm{D}\Delta t}{\Delta x^2}$

stanowią adwekcyjną oraz dyspersyjną liczbę Couranta.

Drugą analizowaną metodą jest niejawna metoda Cranka-Nicolsona, która pozwala wyznaczyć wartość stężenia znacznika w danym punkcie węzłowym w następnym kroku czasowym na podstawie trzech punktów w kroku poprzednim oraz punktów sąsiednich w następnym kroku. Rozwiązanie jest zatem uwikłane, należy bowiem znaleźć wszystkie wartości stężenia w następnym kroku czasowym jednocześnie. Rozwiązanie jest zatem układem Nx równań i w postaci macierzowej wygląda następująco:

$$c^{n+1} = A^{-1} \cdot B \cdot c^n$$

gdzie macierze A oraz B mają postać:

$$A = \begin{pmatrix} 1+C_d & -\frac{C_d}{2}+\frac{C_a}{4} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{C_d}{2}-\frac{C_a}{4} & 1+C_d & -\frac{C_d}{2}+\frac{C_a}{4} & 0 & \vdots \\ 0 & -\frac{C_d}{2}-\frac{C_a}{4} & 1+C_d & -\frac{C_d}{2}+\frac{C_a}{4} & 0 \\ \vdots & 0 & -\frac{C_d}{2}-\frac{C_a}{4} & \ddots & -\frac{C_d}{2}+\frac{C_a}{4} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{C_d}{2}-\frac{C_a}{4} & 1+C_d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1+C_d & \frac{C_d}{2}-\frac{C_a}{4} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{C_d}{2}+\frac{C_a}{4} & 1+C_d & \frac{C_d}{2}-\frac{C_a}{4} & 0 & \vdots \\ 0 & \frac{C_d}{2}+\frac{C_a}{4} & 1+C_d & \frac{C_d}{2}-\frac{C_a}{4} & 0 \\ \vdots & 0 & \frac{C_d}{2}+\frac{C_a}{4} & \ddots & \frac{C_d}{2}-\frac{C_a}{4} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{C_d}{2}+\frac{C_a}{4} & 1+C_d \end{pmatrix}$$

Niezależnie od metody na równania trzeba nałożyć warunki początkowe oraz brzegowe. Warunki brzegowe dla rozpatrywanego kanału przyjmujemy w sposób następujący:

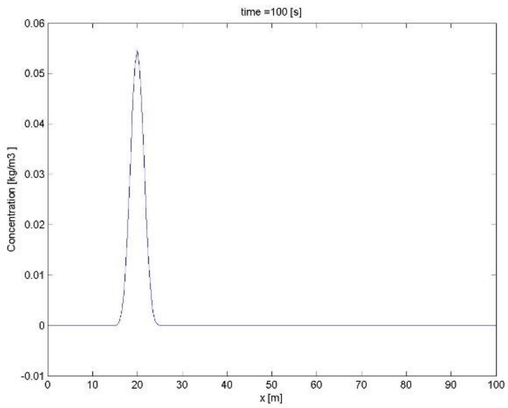
- warunek Dirichleta dla lewego brzegu
$$c(0,t) = 0$$
- warunek von Neumanna dla brzegu prawego
$$\frac{\partial c}{\partial x}(L,t) = 0.$$

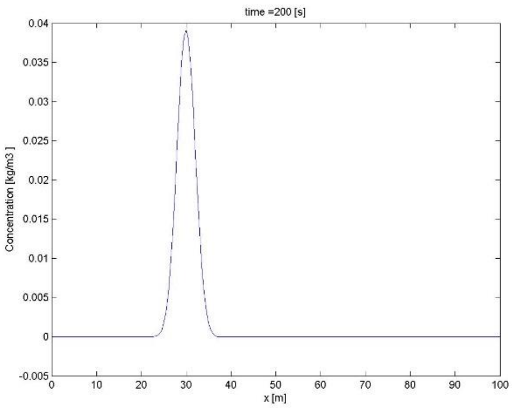
2. Ewolucja czasowa stężenia znacznika

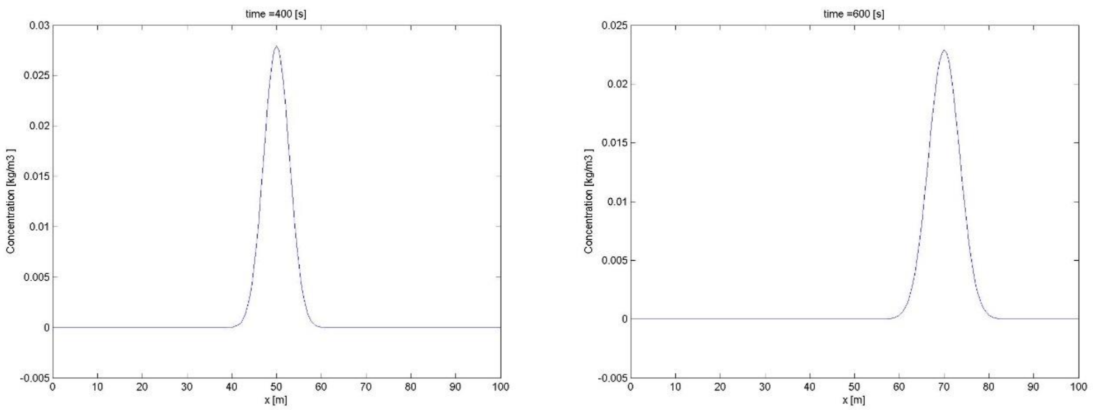
Pierwszą symulację przeprowadziłem przy punktowym warunku początkowym:

$$c(x,0) = \begin{cases} C_1 \; dla \; x = 10\,m \\ 0 \quad dla \; x \neq 10\,m \end{cases}$$

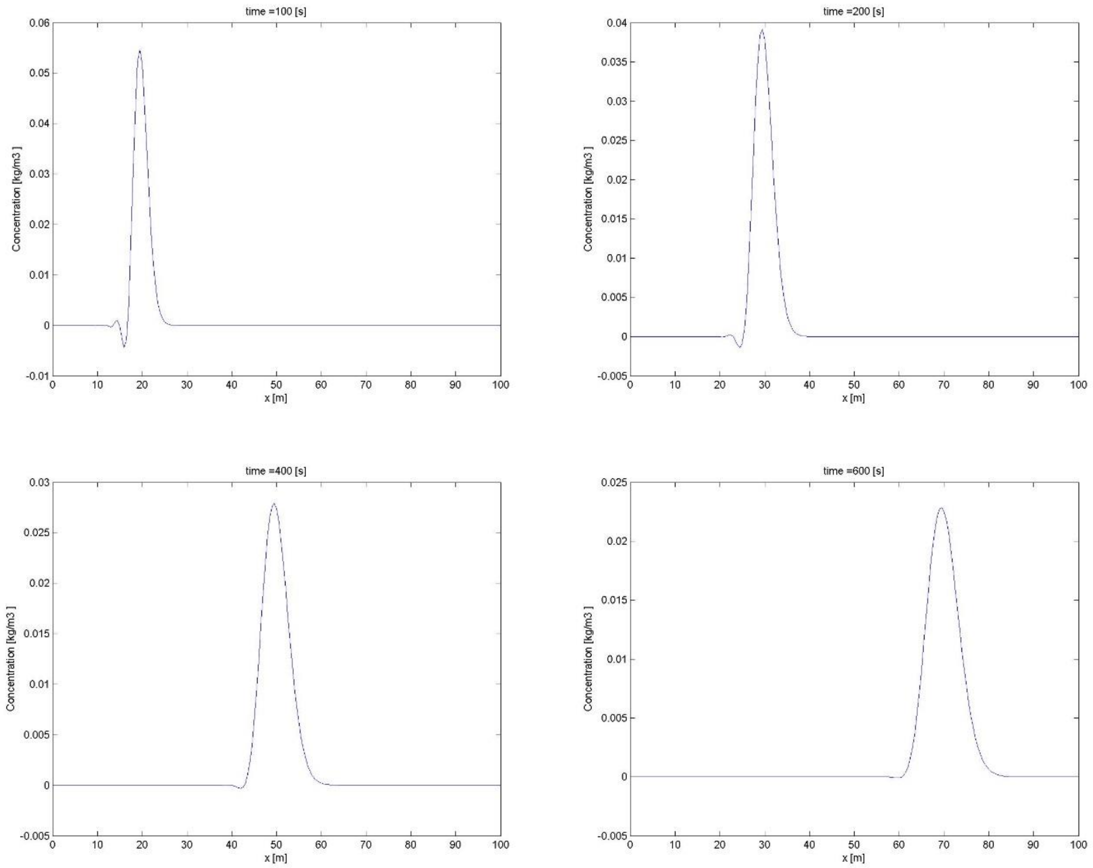
Analizowany obszar podzieliłem na $Nx = 201$ węzłów odległych o $dx = 0{,}5\,m$. Krok czasowy przyjąłem równy $dt = 1\,s$. Wprowadzone stężenie C_1 ma wartość odpowiadającą wprowadzeniu masy $m = 1\,kg$ znacznika. Uzyskane symulacje ewolucji stężenia znacznika przy użyciu obu metod dla wybranych punktów czasowych zostały przedstawione poniżej:







Wykres 1. Rozkład stężenia znacznika w kanale dla wybranych punktów czasowych uzyskany metodą QUICKEST



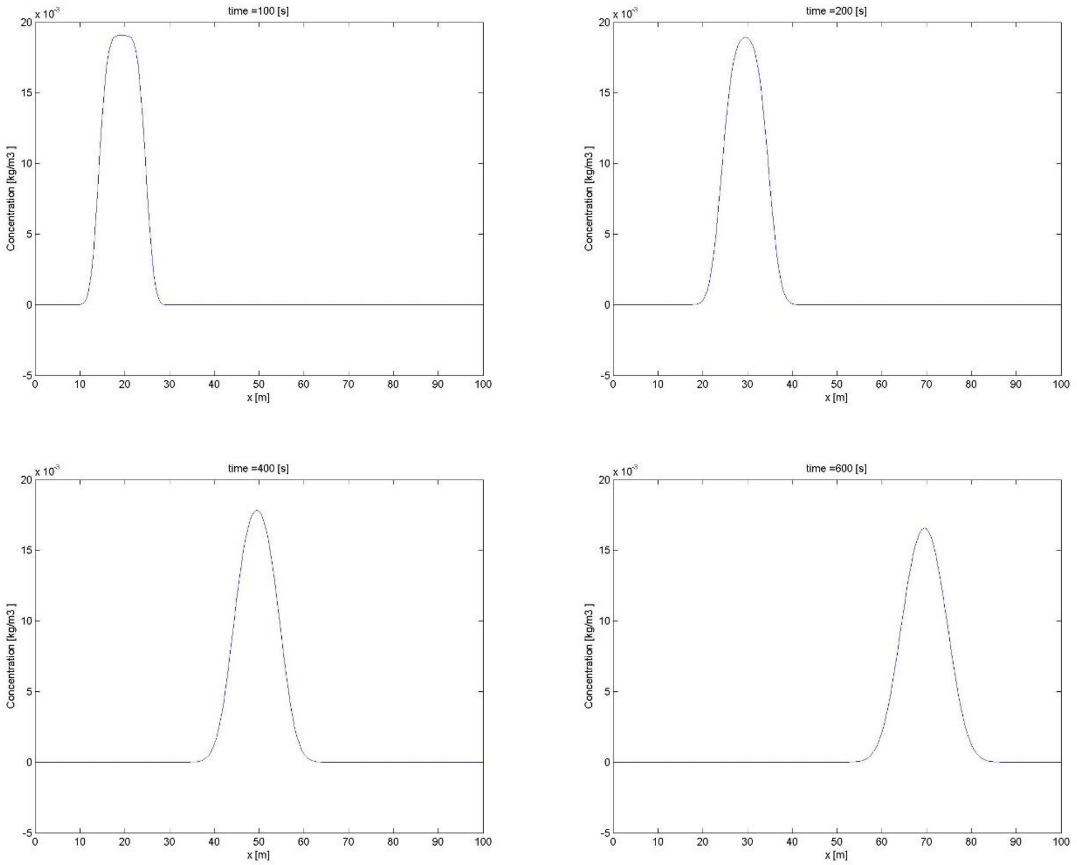
Wykres 2. Rozkład stężenia znacznika w kanale dla wybranych punktów czasowych uzyskany metodą Cranka-Nicolsona

Wyniki uzyskane niezależnie oboma metodami są zgodne. Rozkład znacznika wraz z biegiem czasu przesuwa się w prawo oraz rozpływa się wszerz. Wynik uzyskany metodą Crancka-Nicolsona posiada niewielkie oscylacje na końcu lewego zbocza rozkładu, które z biegiem czasu symulacji zanikają. Zwiększenie dokładności symulacji poprzez zmniejszenie wartości dx i dt eliminuje powyższe oscylacje.

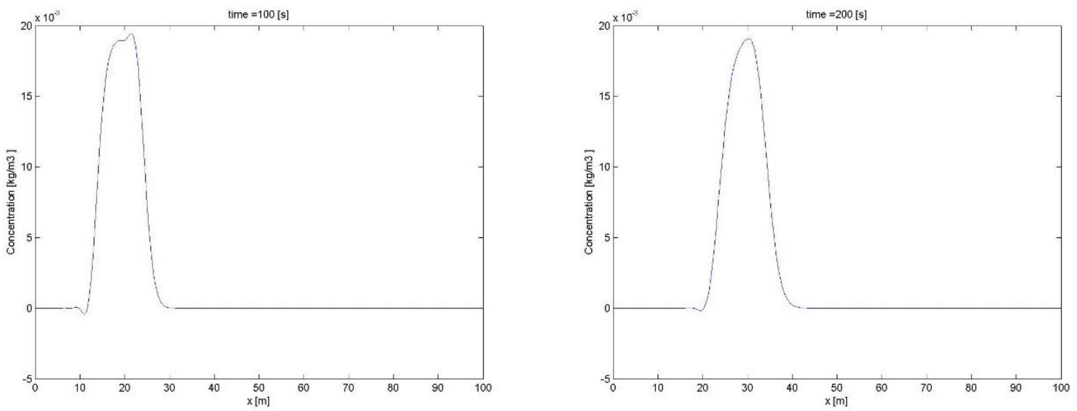
Drugą symulację przeprowadziłem przy punktowym warunku początkowym:

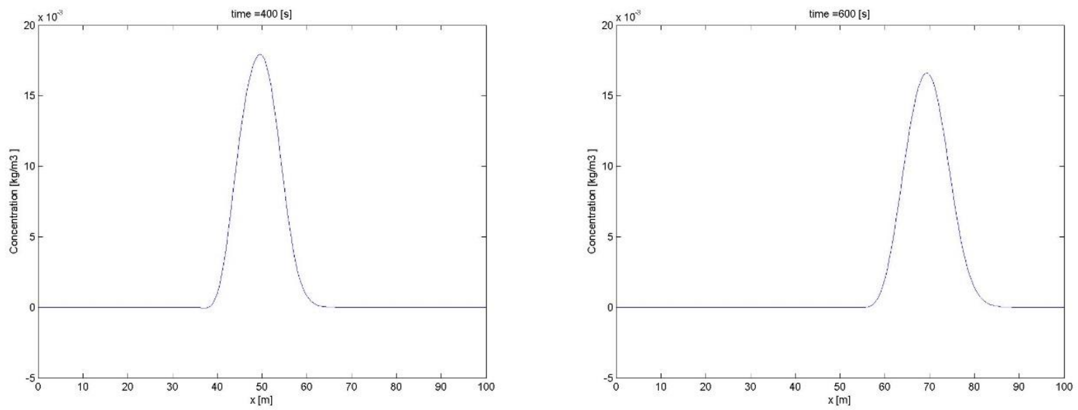
$$c(x,0) = \begin{cases} C_2 \ dla \ x \in \ [5,15] \\ 0 \ \ dla \ x \ \notin [5,15] \end{cases}$$

Wprowadzone stężenie C_2 ma także wartość odpowiadającą wprowadzeniu masy $m = 1 \, kg$ znacznika. Uzyskane symulacje ewolucji stężenia znacznika przy użyciu obu metod dla wybranych punktów czasowych zostały przedstawione poniżej:



Wykres 3. Rozkład stężenia znacznika dla wybranych punktów czasowych uzyskany metodą QUICKEST



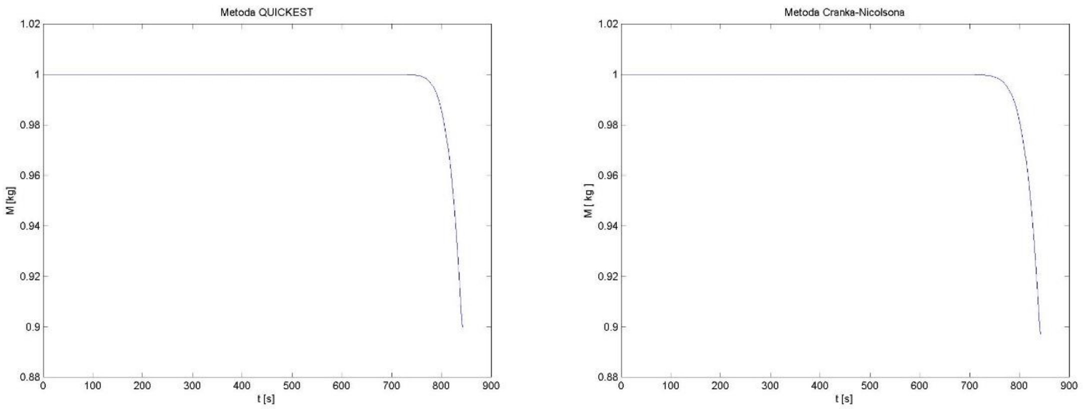


Wykres 4. Rozkład stężenia znacznika dla wybranych punktów czasowych uzyskany metodą Cranka-Nicolsona

Dla tego przypadku obie metody także dają zgodne wyniki. Ponownie wynik uzyskany metodą Crancka-Nicolsona na początku symulacji posiada niewielkie oscylacje.

3. Prawo zachowania masy

W celu zbadania poprawności uzyskanych symulacji można zweryfikować prawo zachowania masy. W obu symulacjach masa wprowadzona do układu wynosi $m = 1\ kg$ i w czasie symulacji powinna zostać zachowana aż do momentu gdy znacznik wypływa poza analizowany obszar kanału.

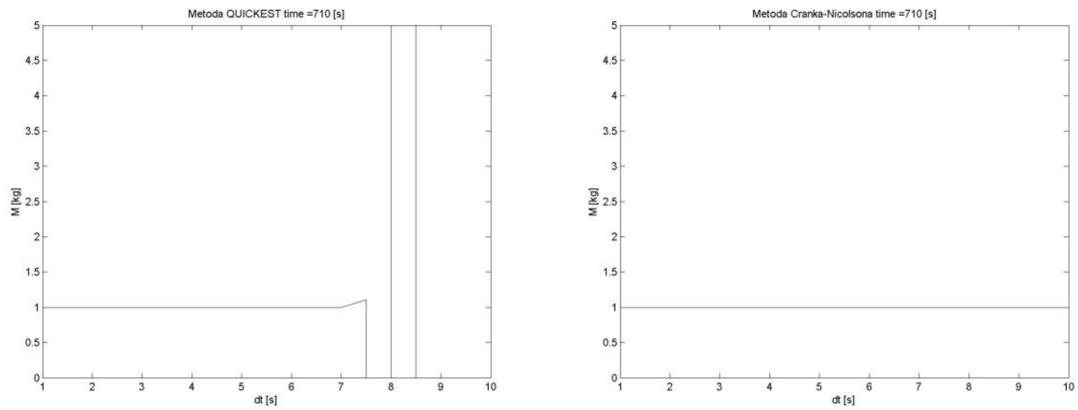


Wykres 5. Całkowita masa znacznika w funkcji czasu dla obu metod

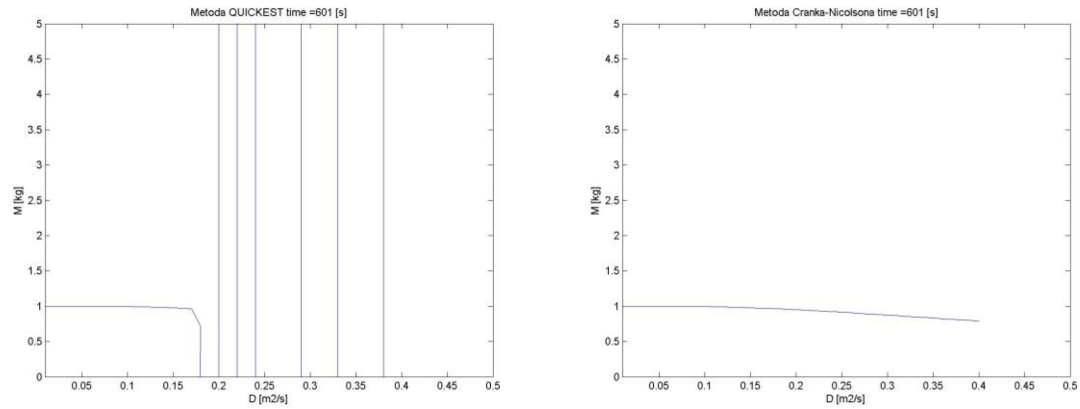
Dla obu metod masa w trakcie symulacji jest zachowana do momentu kiedy stężenie nie wypływa poza analizowany obszar. Prawo zachownia masy jest dobrym kryterium stabilności symulacji.

4. Stabilność numeryczna

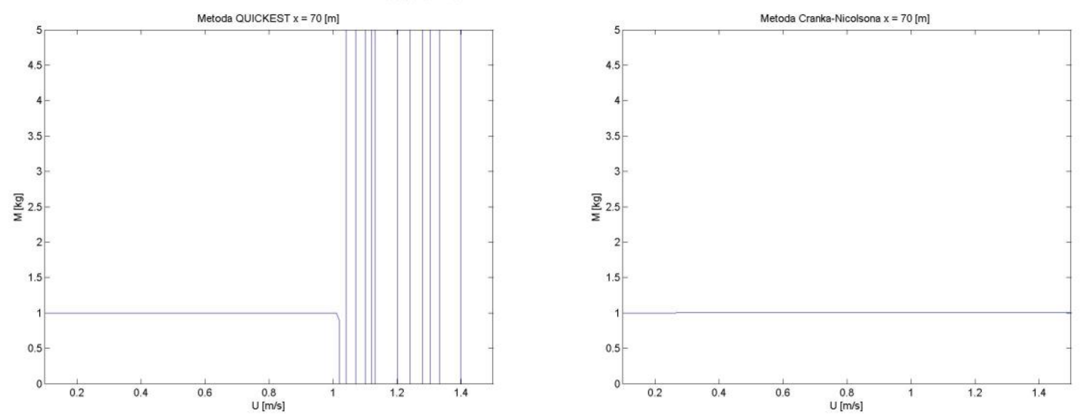
W następnej kolejności zbadałem stabilność numeryczną obu metod w zależności od parametrów U, D oraz dt. Jako czynnik determinujący stabilność obliczeń przyjąłem prawo zachowania masy. Analizę stabilności przeprowadziłem przy drugim warunku początkowym. Uzyskane wykresy stabilności przedstawione są poniżej:



Wykres 6. Stabilność masy znacznika w funkcji kroku czasowego obliczeń dla obu metod po czasie 710 s symulacji



Wykres 7. Stabilność masy znacznika w funkcji współczynnika dyspersji dla obu metod po czasie 600 s symulacji



Wykres 8. Stabilność masy znacznika w funkcji prędkości średniej dla obu metod w punkcie x = 70 m

Na powyższych wykresach widać zaletę metody Cranka-Nicolsona nad metodą QUICKEST. Metoda jawna posiada ograniczenia na wartości parametrów U, D oraz dt podczas gdy metoda niejawna jest stabilna niezależnie od wartości tych parametrów. Masa na wykresie 7 dla metody Cranka-Nicolsona nieznacznie maleje, wynika to z faktu że przy rosnącej dyspersji część znacznika zaczyna uciekać poza analizowany obszar, nie ma to związku z destabilizacją symulacji.

5. Podsumowanie

Wykonałem symulację transportu znacznika w kanale przy użyciu dwóch metod QUICKEST oraz Cranka-Nicolsona. Zbadałem ewolucję rozkładu znacznika w czasie dla dwóch różnych stanów początkowych. Przeprowadziłem analizę prawa zachowania masy dla wykonanych symulacji. Na podstawie prawa zachownia masy zbadałem stabilność numeryczną obu metod pod względem trzech parametrów wejściowych U, D oraz dt. Metoda Cranka-Nicolsona okazała się być stabilna w całym zakresie badanych wartości podczas gdy metoda QUICKEST posiada parametry krytyczne powyżej których rozwiązanie jest niestabilne.