

Sprawozdanie

Symulacja pękającej tamy

Amadeusz Filipek

Laboratorium komputerowe WFILS AGH

1. Wstęp

Celem ćwiczenia jest wykonanie numerycznej symulacji fali powodziowej powstałej w wyniku awarii zapory wodnej.

Ewolucję poziomu wody i prędkości przepływu w rzekach czy kanałach można zasymulować przy użyciu modelu FLDWAV. Uproszczona jednowymiarowa wersja tego modelu oparta jest o równania Saint Venanta, które wyrażają zasadę zachowania pędu oraz masy:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial(Q(x, t) \cdot V(x))}{\partial x} + \frac{F_{dw}}{8R(x, t)} |V(x)| Q(x, t) + gA(x, t) \left(\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} - S(x) \right) = 0$$
$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = 0$$

gdzie $Q(x, t)$ – stanowi strumień wody, $V(x)$ – prędkość przepływu wody, $R(x, t)$ – promień hydrauliczny, $A(x, t)$ – pole przekroju poprzecznego rzeki, $h(x, t)$ – głębokość rzeki, $S(x)$ – nachylenie dna, F_{dw} – współczynnik tarcia Darcy'ego – Weißbacha oraz g – przyspieszenie grawitacyjne. W równaniach tych zaniedbana jest pozioma dyfuzja pędu a uwzględniona jest jedynie adwekcja. Między funkcjami zachodzą następujące relacje:

$$Q(x, t) = A(x, t) \cdot V(x)$$

$$R(x) = \frac{A(x, 0)}{l(x, 0)}$$

gdzie $l(x, t)$ jest długością zwilżania dna rzeczno. Jeżeli pole przekroju poprzecznego przybliżymy prostokątem o wysokości $h(x, t)$ i szerokości $T(x)$ to:

$$l(x, t) = 2h(x, t) + T(x), \quad A(x, t) = T(x) \cdot h(x, t)$$

W celu numerycznego obliczenia powyższych równań, pochodne przybliżamy ilorazami różnicowymi i otrzymujemy dwa równania na ewolucję h oraz Q :

$$h_i^{n+1/2} = h_i^{n-1/2} - \frac{2\Delta t}{T_i + T_{i+1}} \left(\frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} \right)$$
$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\frac{(Q_{i+1}^n)^2}{A_{i+1}^n} - \frac{(Q_{i-1}^n)^2}{A_{i-1}^n} \right) - \frac{F_{dw}\Delta t}{8R_i} |V_i^n| Q_i^n - \Delta t g A_i^n \left(\frac{h_i^{n+1/2} - h_{i-1}^{n-1/2}}{\Delta x} - S_i \right)$$

gdzie i stanowi i – ty krok przestrzenny a n stanowi n – ty krok czasowy. W równaniach $n + 1/2$ oznacza, że obliczanie rozkładu głębokości h jest pierwsze w kolejności wobec strumienia Q .

2. Ewolucja fali rzecznej

Aby wykonać symulację rozplywu fali w rzece, należy do powyższych równań dodać warunki początkowe oraz brzegowe. Obliczenia przeprowadziłem dla odcinka rzeki o długości 10 m z podziałem na $N = 101$ węzłów siatki obliczeniowej o kroku $\Delta x = 0.1\text{ m}$. W ćwiczeniu zakładamy, że szerokość rzeki jest stała i wynosi $T = 2\text{ m}$ a rzeka na odcinku 10 m ma spadek wysokości 0.5 m . Wartość kroku czasowego jest zmienna w trakcie symulacji i wynosi:

$$\Delta t^n = \frac{0.1\Delta x}{\left| \max(V_i^{n-1}) \pm \sqrt{g \cdot \max(h_i^{n-1})} \right|}$$

Początkowy stan głębokości rzeki wygląda następująco:

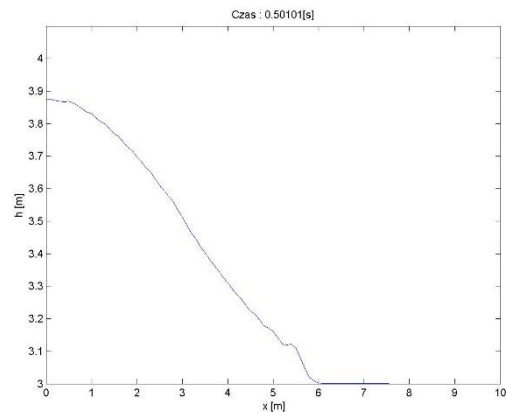
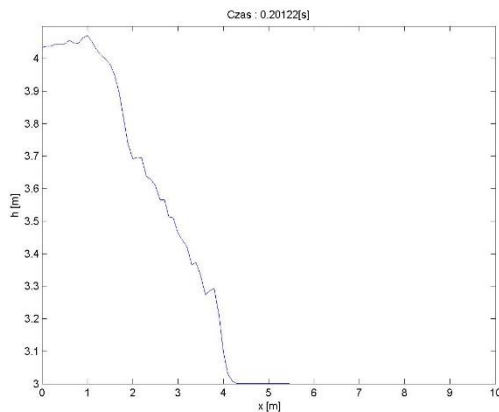
$$h(x, 0) = \begin{cases} 4\text{ m}, & x < 3\text{ m} \\ 3\text{ m}, & x \geq 3\text{ m} \end{cases}$$

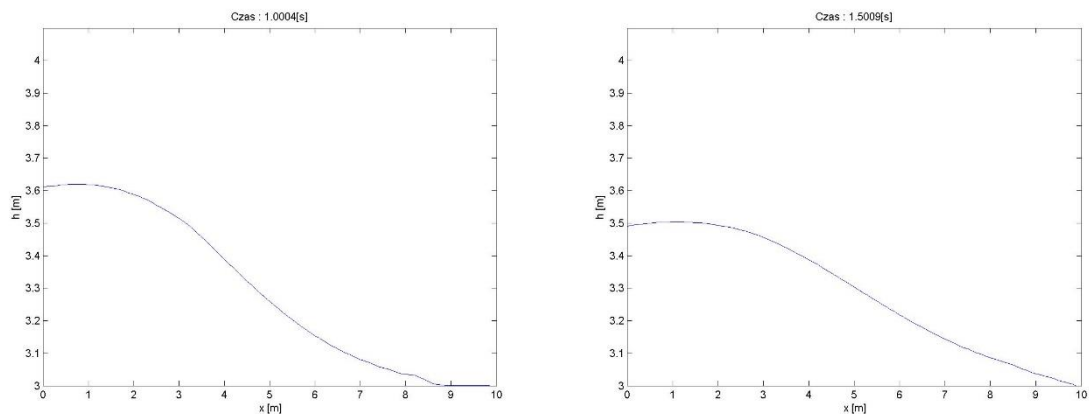
Początkowy rozkład prędkości przepływu wynosi $V(x, 0) = 0$. Przyjęte warunki brzegowe wyglądają następująco :

$$Q_0^n = 1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}, \quad Q_N^n = Q_{N-1}^n$$

$$h_N^n = 3\text{ m}$$

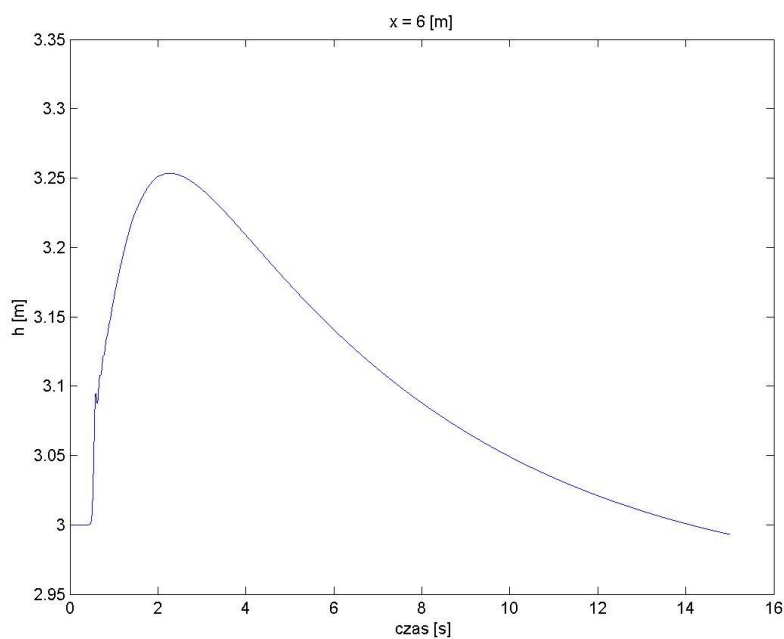
Pierwszy warunek ustala stały strumień wpływający do obszaru rzeki, drugi warunek ustala ciągłość nurtu a ostatni ustala stałą wysokość na końcu odcinka rzeki. Wartość współczynnika została przyjęta jako $F_{dw} = 80$. Uzyskany rozkład głębokości rzeki dla wybranych chwil czasowych wygląda następująco:





Wykres 1. Rozkład przestrzenny głębokości wody dla czterech wybranych punktów czasowych

Powyższe wykresy przedstawiają ewolucję fali w czasie. Początkowy rozkład podlega pewnym oscylacjom ze względu na nieciągły warunek początkowy w postaci schodkowej. Czoło fali w miarę propagacji jest coraz niższe, fala jest coraz szersza. W miarę upływu czasu zbocze fali się wygładza. . Następnie zbadałem rozkład głębokości wody w funkcji czasu dla wybranego punktu $x = 6\text{ m}$:



Wykres 2. Rozkład czasowy głębokości wody dla wybranego punktu

Rozkład czasowy wysokości fali jest niesymetryczny i wzrasta dużo szybciej niż opada. Głębokość rzeki w tym punkcie sięga maksymalnie do 3.25 m po czasie 2.25 s .

3. Stabilność numeryczna

W ramach ćwiczenia zbadałem także stabilność numeryczną symulacji na podstawie formuły:

$$\frac{\Delta t | \max(V) \pm \sqrt{g \cdot \max(h)} |}{\Delta x} = \frac{\Delta t}{\lambda} \leq 1$$

Kryterium stabilności zweryfikowałem zmieniając wartość kroku czasowego Δt (obliczenia w pkt. 2 przeprowadzone dla $\Delta t = 0.1\lambda$). Stabilność obliczeń przedstawiłem w poniższej tabelce:

$\Delta t [\lambda]$	0.83	0.87	0.89	0.9
Rozwiązanie	stabilne	stabilne	stabilne	Nie stabilne

Uzyskana wartość graniczna wynosi $\Delta t = 0.9\lambda$ podczas gdy teoretycznie powinna wynosić 1λ . Dla kroku o wartości granicznej rozwiązanie w obszarze oscylującym rośnie do nieskończoności. Dla wartości bliskiej $\Delta t = 0.89\lambda$ rozwiązanie jest stabilne jednak wynikowy rozkład podlega znacznym oscylacjom.

4. Podsumowanie

W ramach ćwiczenia wykonałem symulację propagacji fali w rzece wykorzystując jednowymiarowy model FLDWAV. Na podstawie uzyskanych wyników wykonałem rozkłady przestrzenne wysokości tafli wody dla wybranych punktów czasowych oraz rozkład czasowy wysokości tafli dla wybranego punktu rzeki. Następnie zweryfikowałem kryterium stabilności numerycznej. Symulowanie fal powodziowych jest istotne z punktu widzenia przewidywania i alarmowania zagrożeń powodziowych.