

## Sprawozdanie

### Modelowanie trajektorii cząstek naładowanych w polu magnetycznym.

Celem ćwiczenia jest wykonanie symulacji oraz analiza ruchu cząstki naładowanej w polu magnetycznym z wykorzystaniem formalizmu Hamiltona.

Rozpatrujemy ruch elektronu w polu magnetycznym, w tym celu wychodzimy od funkcji Lagrange'a :

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{e}{2} \vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{B})$$

Przechodzimy do cylindrycznego układu współrzędnych, dla którego oś  $z$  jest skierowana równolegle do wektora indukcji pola magnetycznego. Możemy teraz zapisać funkcję Hamiltona :

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_z^2 + p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\phi^2 \right) - \frac{eB}{2m} p_\phi + \frac{e^2 B^2}{8m} r^2$$

Za pomocą równania Hamiltona uzyskujemy układ sześciu równań ruchu :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{p_z}{m}, & \dot{p}_z &= 0 \\ \dot{\phi} &= \frac{p_\phi}{mr^2} - \frac{eB}{2m}, & \dot{p}_\phi &= 0 \\ \dot{r} &= \frac{p_r}{m}, & \dot{p}_r &= \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{e^2 r B^2}{4m} \end{aligned}$$

Można zauważyć, że ruch w kierunku osi  $z$  jest odseparowany od ruchu w kierunku prostopadłym do wektora indukcji pola magnetycznego i stanowi ruch jednostajny. W rozważaniach skupiamy się zatem na ruchu poprzecznym. Z równania na pęd kątowy  $\dot{p}_\phi = 0$  wynika, że pęd ten jest stały. Jest on zatem całką ruchu i stanowi jeden z warunków początkowych układu. W celu rozwiązania numerycznego pochodne zastępujemy ilorazami różnicowymi i otrzymujemy układ trzech pozostałych równań iteracyjnych :

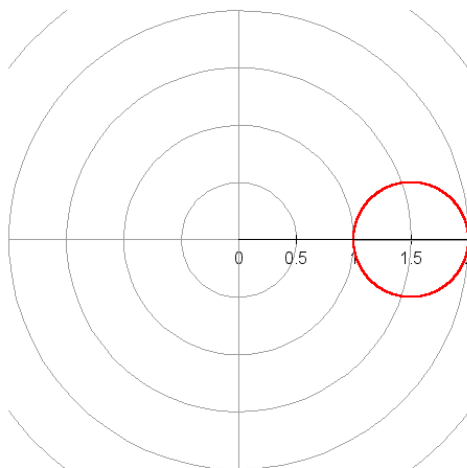
$$\begin{aligned} \varphi(t + \Delta t) &= \varphi(t) + \left( \frac{p_\phi}{mr^2(t)} - \frac{eB}{2m} \right) \Delta t \\ r(t + \Delta t) &= r(t) + \frac{p_r(t)}{m} \Delta t \\ p_r(t + \Delta t) &= p_r(t) + \left( \frac{p_\phi^2}{mr^3(t)} - \frac{e^2 r(t) B^2}{4m} \right) \Delta t \end{aligned}$$

Parametry układu takie jak  $m$ ,  $e$ ,  $B$  oraz  $p_\varphi$  przyjmujemy równe 1 w celu uproszczenia rachunków. W powyższych równaniach  $\Delta t$  jest możliwie małym ale skończonym krokiem czasowym, na podstawie którego tworzona jest siatka kroków czasowych. Symulację realizujemy dla zadanych warunków początkowych  $\varphi(0)$ ,  $r(0)$  oraz  $p_r(0)$ . W celu weryfikacji poprawności oraz zakresu błędu symulacji numerycznej możemy skorzystać z energii całkowitej układu, która wyrażona jest poprzez funkcję Hamiltona. Pomijamy w niej jedynie ruch względem osi z :

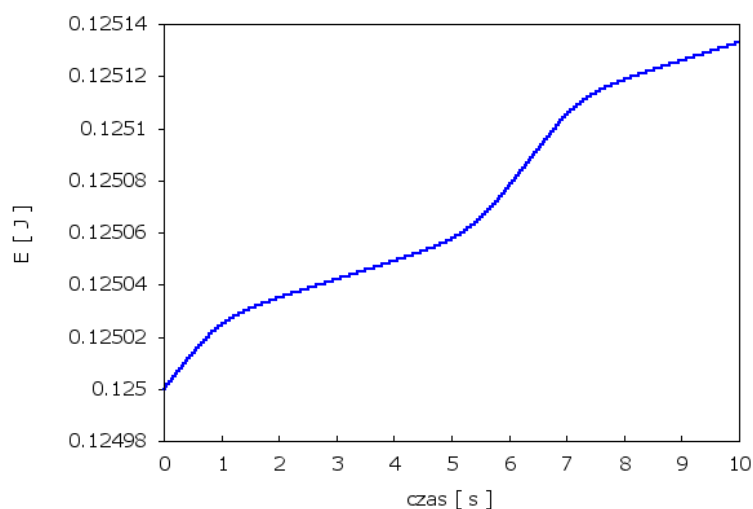
$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2(t) + \frac{p_\varphi^2}{r^2(t)} \right) - \frac{eB}{2m} p_\varphi + \frac{e^2 B^2}{8m} r^2(t)$$

Poniżej prezentuję wyniki wykonanych przeze mnie symulacji wraz z analizą wyników. Za krok czasowy przyjąłem  $\Delta t = 1/10000$ .

Pierwszą symulację wykonałem dla  $\varphi(0) = 0$ ,  $r(0) = 1$  oraz  $p_r(0) = 0$ .



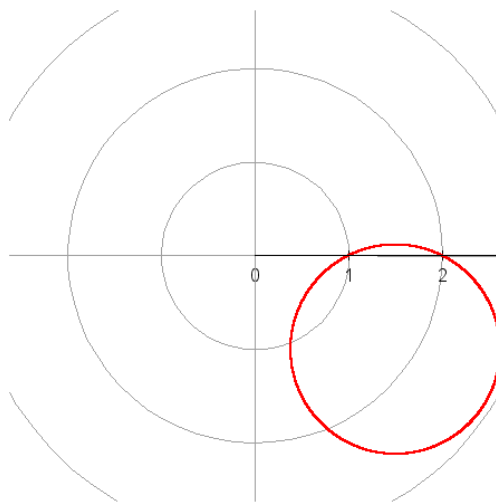
Wykres 1. Trajektoria cząstki w układzie biegunowym dla symulacji pierwszej



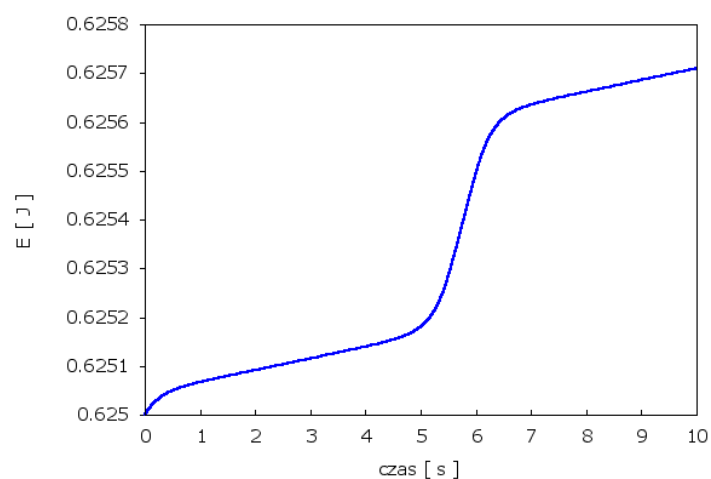
Wykres 2. Energia całkowita cząstki dla symulacji pierwszej

Cząstka porusza się ruchem jednostajnym po okręgu. Pole magnetyczne oddziałuje jedynie z ładunkami w ruchu. Ponieważ początkowy pęd radialny równy jest zero za ruch początkowy cząstki odpowiedzialny jest pęd kątowy  $p_\varphi$ . Trajektoria przesunięta jest na zewnątrz układu zatem początkowa prędkość kątowa jest dodatnia. Energia całkowita cząstki jest zachowana z dokładnością do 0.11% względem energii początkowej.

Dla drugiej symulacji przyjąłem  $\varphi(0) = 0$ ,  $r(0) = 1$  oraz  $p_r(0) = 1$  aby sprawdzić jak zmieni się trajektoria gdy cząstka będzie mieć początkowy pęd radialny.



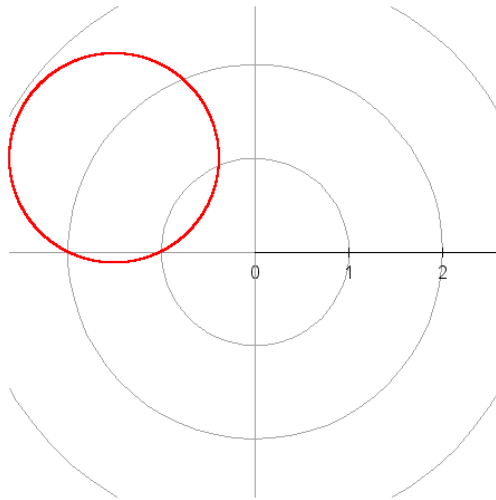
Wykres 3. Trajektoria cząstki w układzie biegunowym dla symulacji drugiej



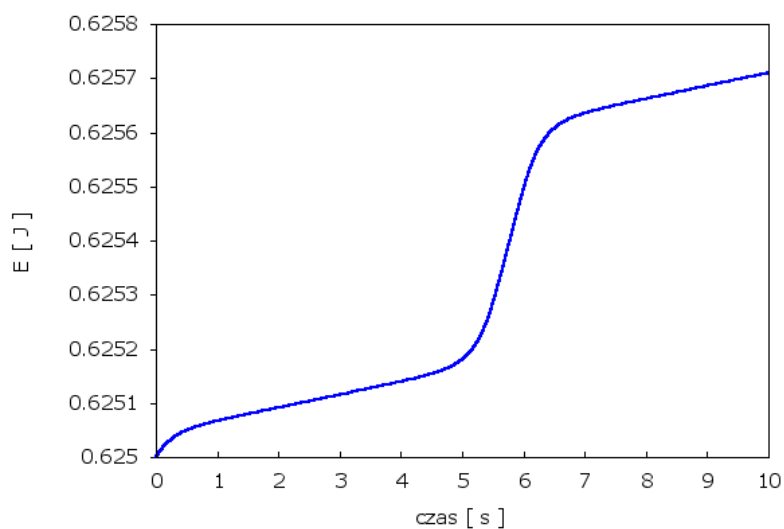
Wykres 4. Energia całkowita cząstki dla symulacji drugiej

Trajektoria cząstki na wykresie 3. różni się od trajektorii z symulacji pierwszej zarówno współrzędnymi środka okręgu jak i promieniem okręgu. Dodany początkowy pęd radialny wpływa na energię całkowitą cząstki, która teraz jest większa, oraz na wypadkową prędkość początkową cząstki. Wynika stąd zmiana kierunku działania siły Lorentza stanowiącej siłę dośrodkową dla ruchu jednostajnego po okręgu. Zmiana współrzędnych środka okręgu względem pierwszej symulacji wynika ze zmiany kierunku działania tej siły natomiast zmiana promienia okręgu wynika ze zmiany wartości prędkości początkowej. Energia całkowita cząsteczki zachowana jest z dokładnością do 0.08% względem energii początkowej.

Symulację trzecią przeprowadziłem dla  $\varphi(0) = \pi$ ,  $r(0) = 1$  oraz  $p_r(0) = 1$ . Zmienione jest położenie początkowe cząstki.



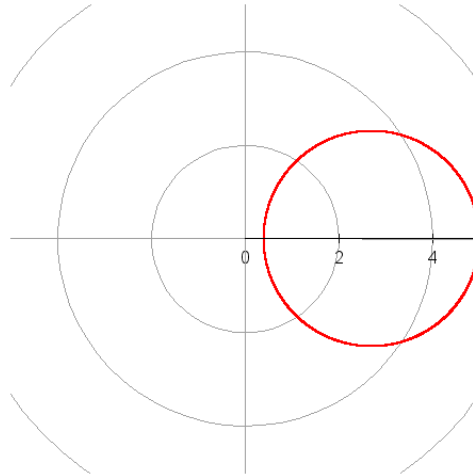
Wykres 5. Trajektoria cząstki w układzie biegunowym dla symulacji trzeciej



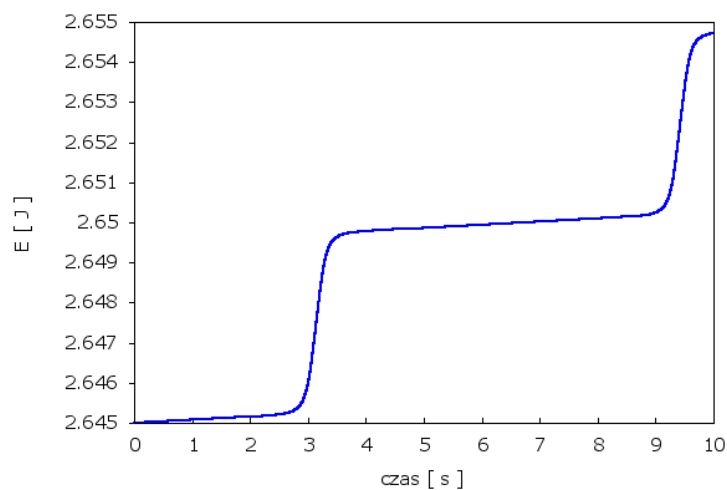
Wykres 6. Energia całkowita cząstki dla symulacji czwartej

Energia początkowa oraz błąd pozostają niezmienione w porównaniu do poprzedniej symulacji. Zmieniają się tylko współrzędne środka okręgu po którym porusza się cząstka. Zmiana początkowej współrzędnej kątowej o  $\pi$  powoduje obrót trajektorii o ten sam kąt.

Dla symulacji czwartej przyjąłem  $\varphi(0) = 0$ ,  $r(0) = 5$  oraz  $p_r(0) = 0$ . Zmieniona została początkowa współrzędna radialna względem pierwszej symulacji.



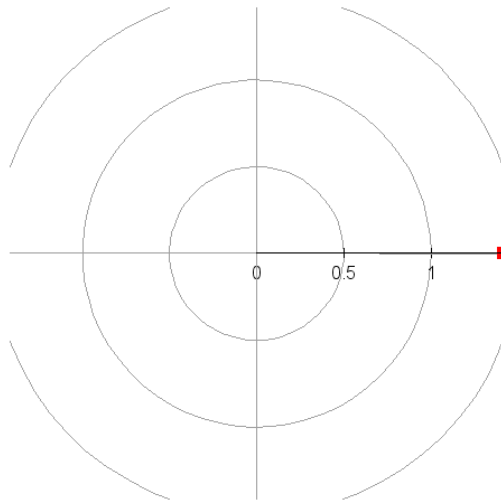
Wykres 7. Trajektoria cząstki w układzie biegunowym dla symulacji czwartej



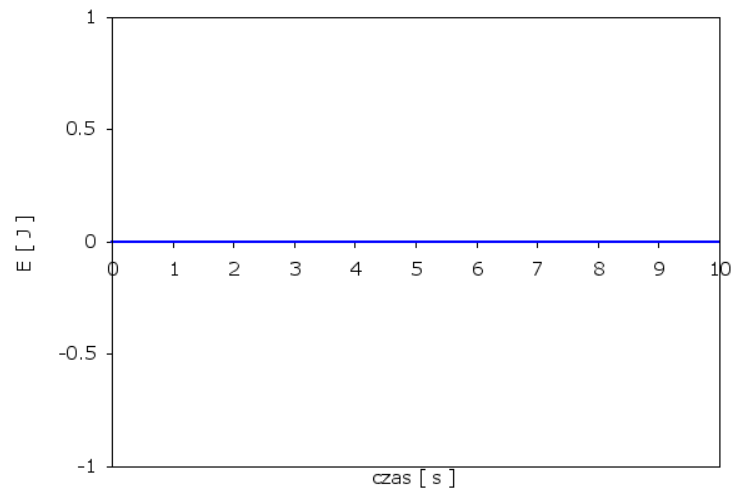
Wykres 8. Energia całkowita dla symulacji czwartej

Trajektoria cząstki dla symulacji czwartej różni się od trajektorii dla symulacji pierwszej paroma cechami. Zwiększenie początkowego położenia radialnego wpływa na wzrost energii całkowitej cząstki. Promień okręgu trajektorii także się zwiększył, co świadczy o tym, że wartość początkowej prędkości jest większa. Zmienił się również zwrot siły Lorentza, ponieważ prędkość początkowa ma znak ujemny co wynika ze wzoru na prędkość kątową  $\dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{mr^2} - \frac{eB}{2m}$ , wyraz dodatni jest teraz mniejszy od wyrazu ujemnego. Jeśli oba te wyrazy będą się znosić to cząstka nie powinna posiadać prędkości początkowej, zatem nie powinna się poruszać.

W symulacji piątej przedstawiam ten szczególny przypadek dla  $\varphi(0) = 0$ ,  $r(0) = \sqrt{2}$  oraz  $p_r(0) = 0$



Wykres 9. Trajektoria cząstki w układzie biegunowym dla symulacji piątej



Wykres 10. Energia całkowita cząstki dla symulacji piątej

Energia całkowita takiego układu jest zerowa. Dla takich warunków początkowych cząstka nie posiada prędkości początkowych i pozostaje w spoczynku pomimo niezerowego pędu kątowego. Należy zauważyć, że przyczynek prędkości kątowej od pola magnetycznego jest przeciwnie skierowany do dodatniego zwrotu prędkości kątowej w układzie biegunowym. Dla cząstki naładowanej przeciwnym znakiem wielkości te byłyby skierowane zgodnie.