

Sprawozdanie

Komputerowa symulacja jednowymiarowego ruchu ciała z wykorzystaniem formalizmu Newtona.

Celem ćwiczenia jest wykonanie komputerowej symulacji ruchu ciała w polu sił ciężkości oraz analiza i dyskusja wyników.

Rozpatrujemy jednowymiarowy ruch ciała w polu sił ciężkości. Korzystając z praw Newtona uzyskujemy równanie ruchu ciała :

$$\ddot{x} = -g$$

Równanie to daje się łatwo rozwiązać analitycznie, uzyskujemy wtedy :

$$x(t) = x_0 + V_0 t - gt^2/2$$

W celu rozwiązania numerycznego, równanie różniczkowe drugiego rzędu zastępujemy układem równań różniczkowych rzędu pierwszego, korzystając z prędkości :

$$\dot{x}(t) = V(t)$$

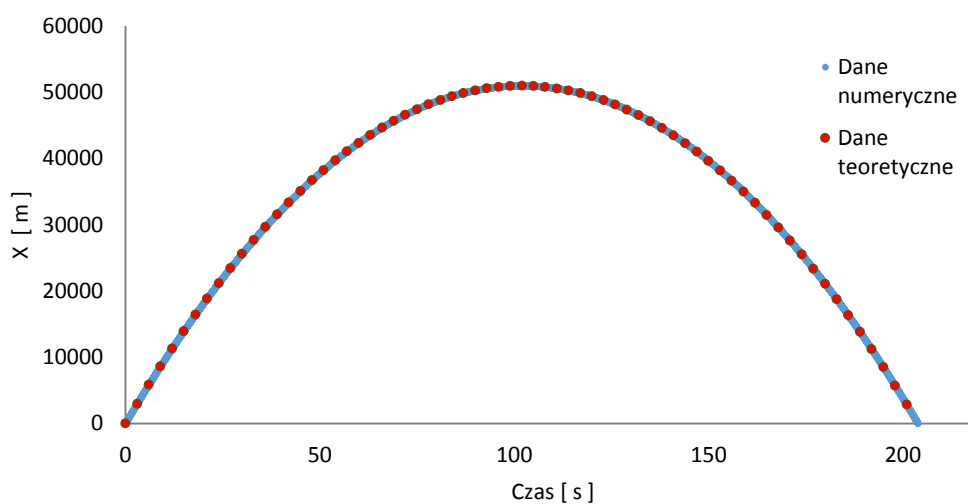
Różniczki w równaniach zastępujemy wyrazami różnicowymi w myśl metody Eulera i po przekształceniach otrzymujemy równania rekurencyjne na położenie oraz prędkość :

$$\begin{aligned} V(t_{i+1}) &= V(t_i) - g\Delta t \\ x(t_{i+1}) &= x_i + V_i\Delta t \end{aligned}$$

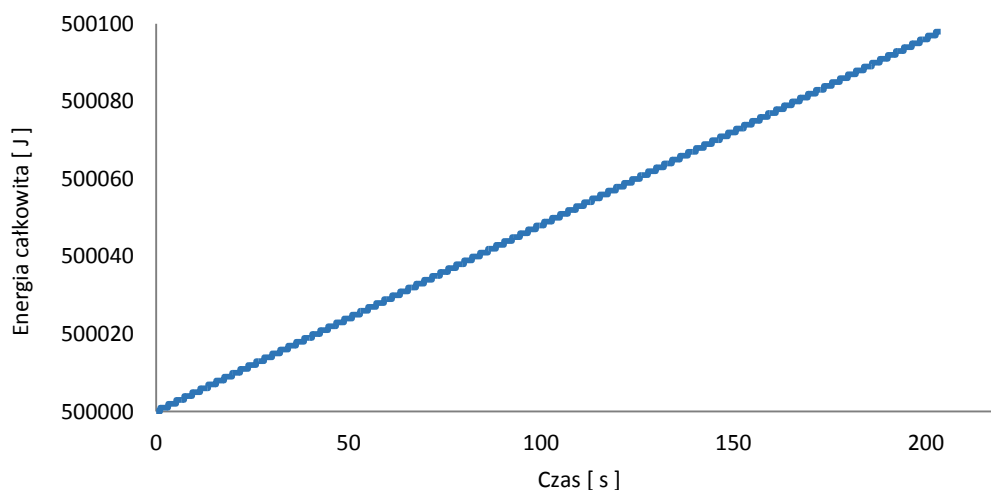
Gdzie Δt jest skończonym ale małym krokiem czasowym, za pomocą którego tworzymy siatkę kroków czasowych. Symulację rozpoczynamy od znanych wartości początkowych x_0 oraz V_0 .

Poniżej prezentuję wyniki numeryczne wraz z rozwiązaniem analitycznym dla wybranych warunków początkowych.

Pierwsza symulacja z wartościami $x_0 = 0 \text{ m}$ oraz $V_0 = 1000 \text{ m/s}$ przy kroku czasowym $\Delta t = \frac{1}{100} \text{ s}$:



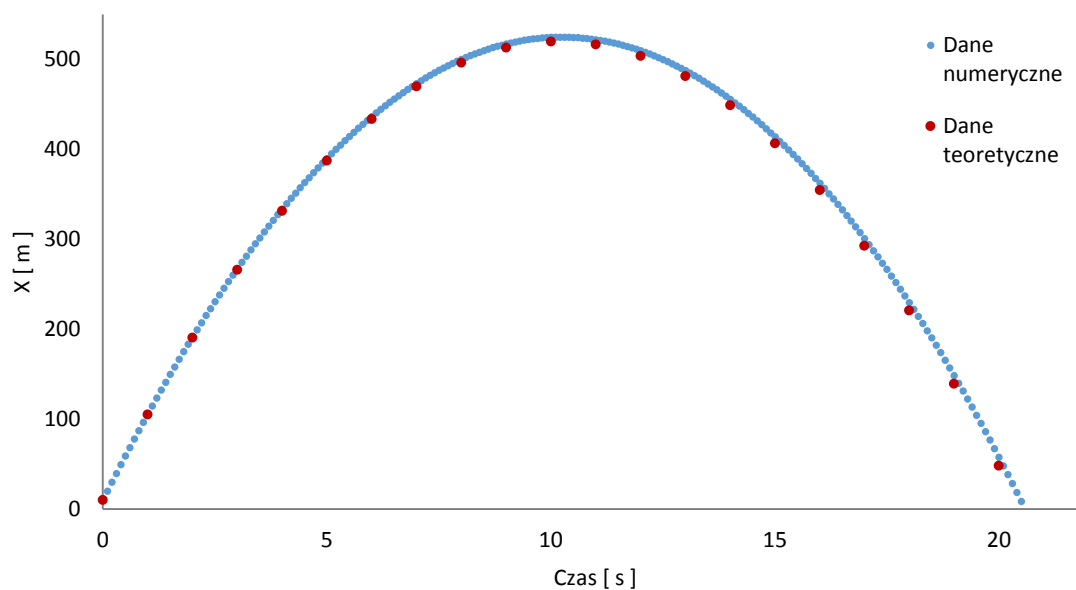
Wykres 1. Trajektoria cząstki dla pierwszej symulacji



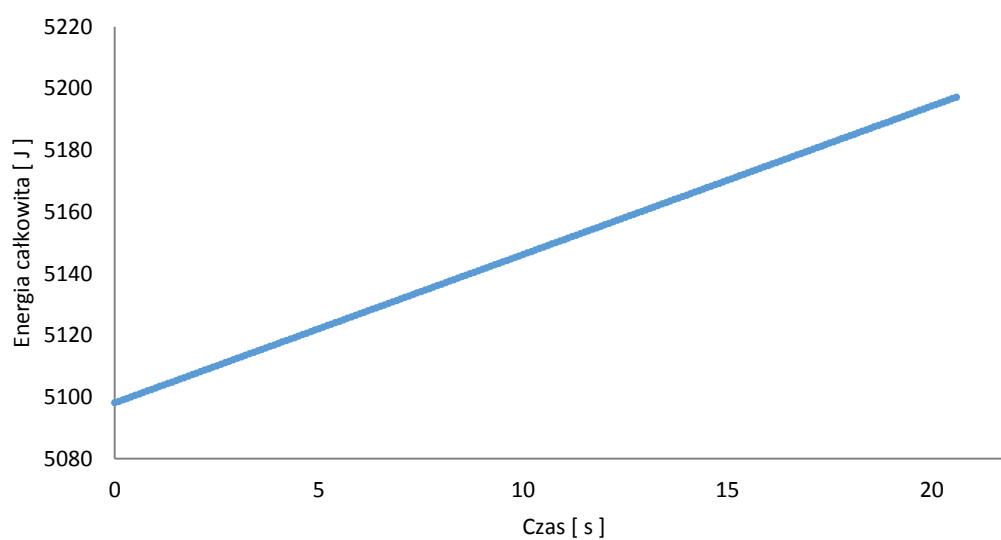
Wykres 2 . Energia całkowita cząstki dla pierwszej symulacji

Trajektoria cząstki na wykresie pokrywa się z krzywą teoretyczną. Wykres energii całkowitej cząsteczki w funkcji czasu pokazuje minimalne odchylenie od energii początkowej, energia cząstki na końcu symulacji jest zachowana z dokładnością do 0.02% względem energii początkowej.

Druga symulacja z wartościami $x_0 = 10\text{ m}$ oraz $V_0 = 100\text{ m/s}$ przy kroku czasowym $\Delta t = \frac{1}{10}\text{ s}$:



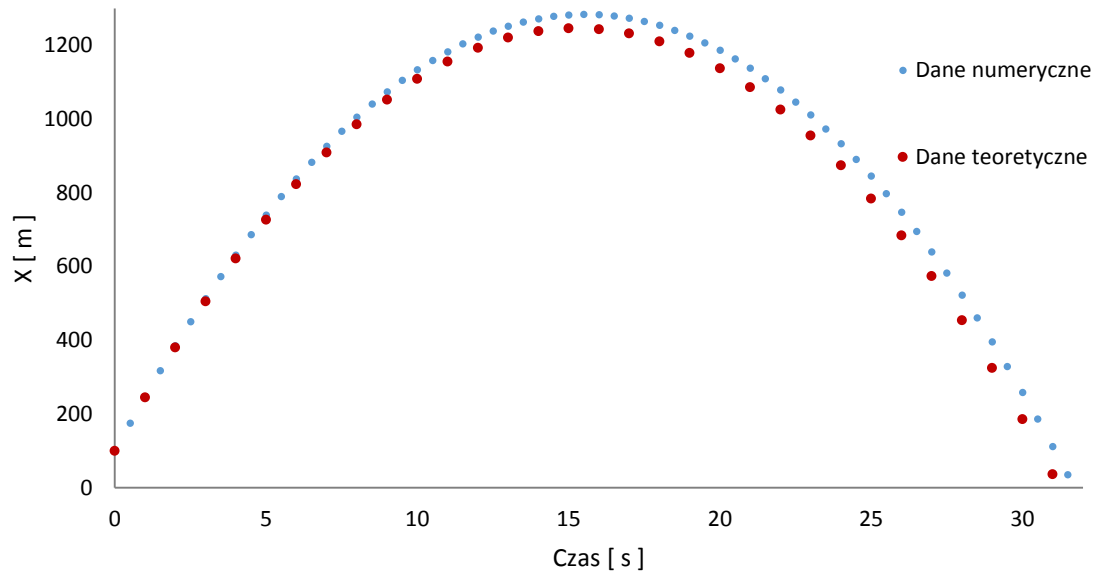
Wykres 3. Trajektoria cząstki dla drugiej symulacji



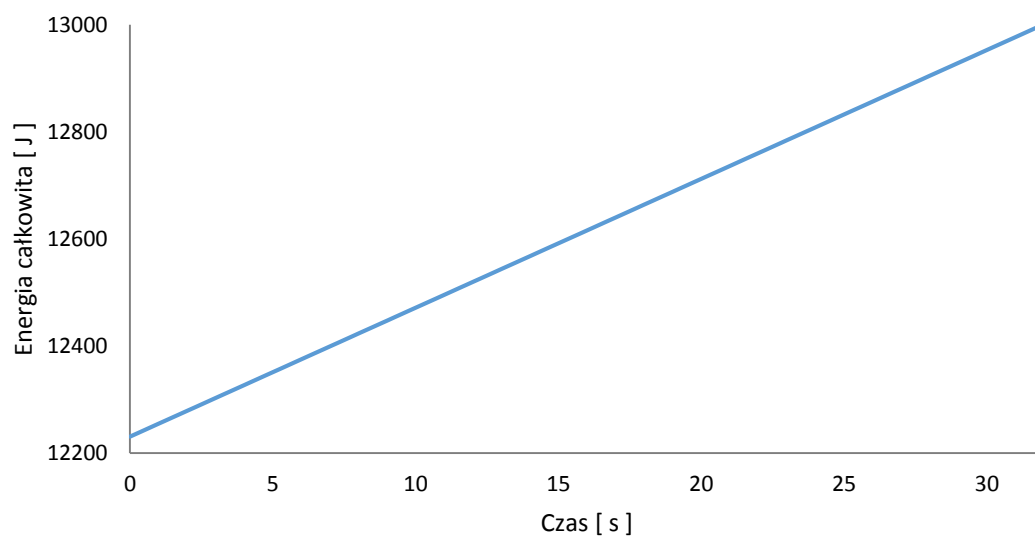
Wykres 4. Energia całkowita cząstki dla drugiej symulacji

Po zwiększeniu kroku czasowego trajektoria numeryczna nieznacznie odbiega od trajektorii rzeczywistej. Natomiast energia całkowita na końcu symulacji jest zachowana z dokładnością do 2% względem energii początkowej.

Trzecia symulacja z wartościami $x_0 = 100\text{ m}$ oraz $V_0 = 150\text{ m/s}$ przy kroku czasowym $\Delta t = \frac{1}{2}\text{ s}$:

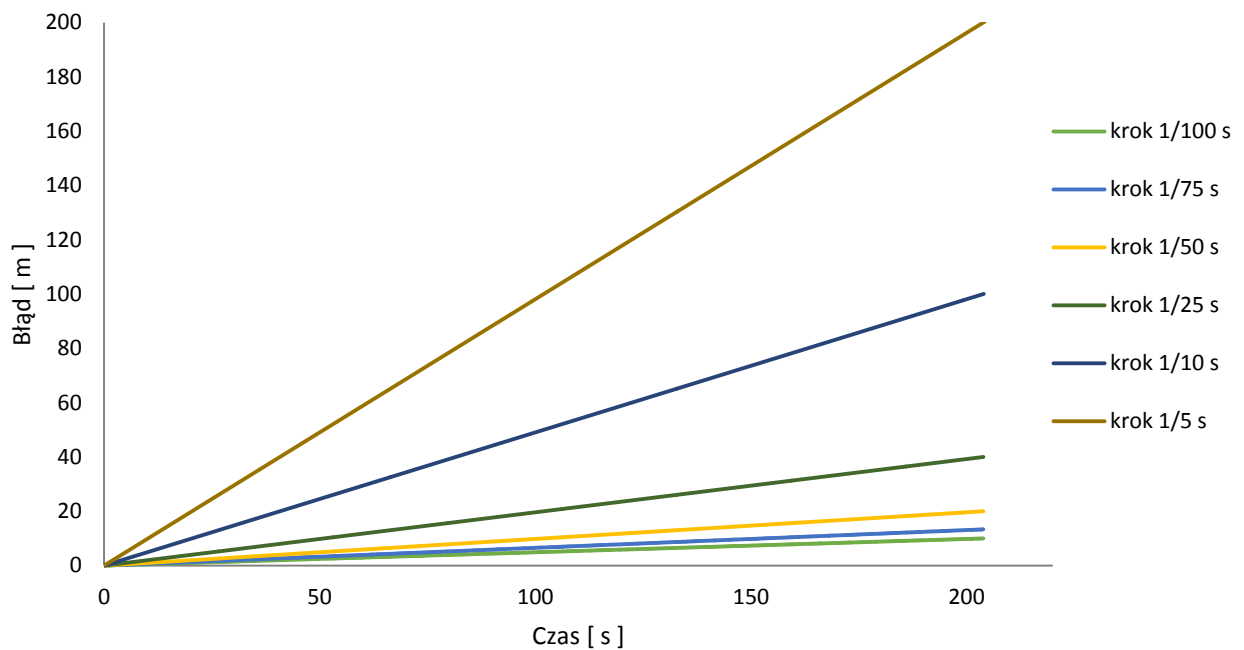


Wykres 5. Trajektoria cząstki dla trzeciej symulacji



Wykres 6. Energia całkowita cząstki dla trzeciej symulacji

Przy zwiększeniu kroku czasowego do $\frac{1}{2}\text{ s}$ trajektoria numeryczna znacznie odbiega od trajektorii teoretycznej. Energia całkowita po czasie symulacji różni się o 6.3 % względem energii początkowej. W miarę wzrostu kroku czasowego symulacja numeryczna obarczona jest coraz większym błędem. Dla wartości początkowych z pierwszej symulacji wykonałem wykres błędu wartości numerycznych względem wartości teoretycznych w funkcji czasu dla wybranych kroków czasowych.



Wykres 7. Błąd bezwzględny symulacji numerycznej dla wybranych kroków czasowych

Wykres nr. 7 przedstawia zależność błędów rozwiązania numerycznego od wyboru kroku czasowego. W miarę wzrostu kroku czasowego szybkość wzrostu błędów rośnie. Zastosowana metoda numeryczna charakteryzuje się kumulatywnym błędem, kolejne punkty na sieci kroku czasowego obciążone są coraz większym błędem. Dobór kroku czasowego jest istotny dla dokładności rozwiązania numerycznego. Aby zminimalizować błąd należy zatem dobrać możliwie mały krok czasowy.