

Sprawozdanie

Filtry cyfrowe o nieskończonej odpowiedzi impulsowej IIR

Amadeusz Filipek

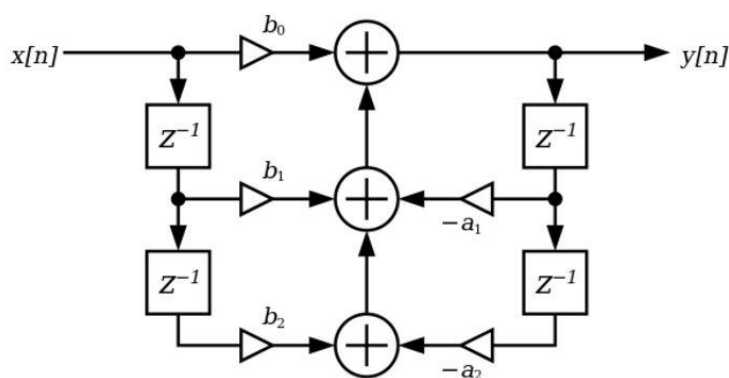
Laboratorium komputerowe WFiIS AGH

1. Wstęp

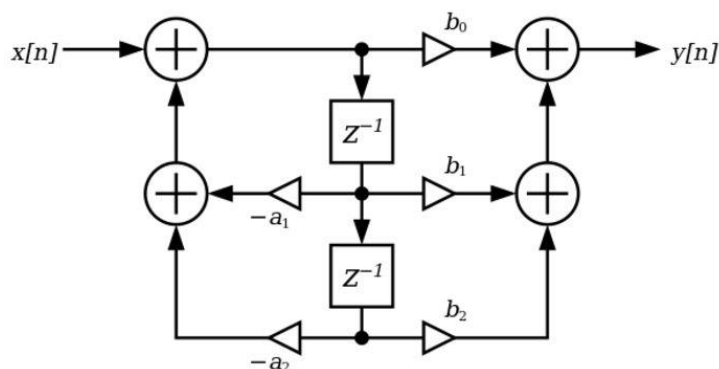
1.1 Struktura filtrów cyfrowych

Celem ćwiczenia jest wykonanie symulacji cyfrowego filtra dolnoprzepustowego IIR oraz zbadanie jego charakterystyk i warunków stabilności.

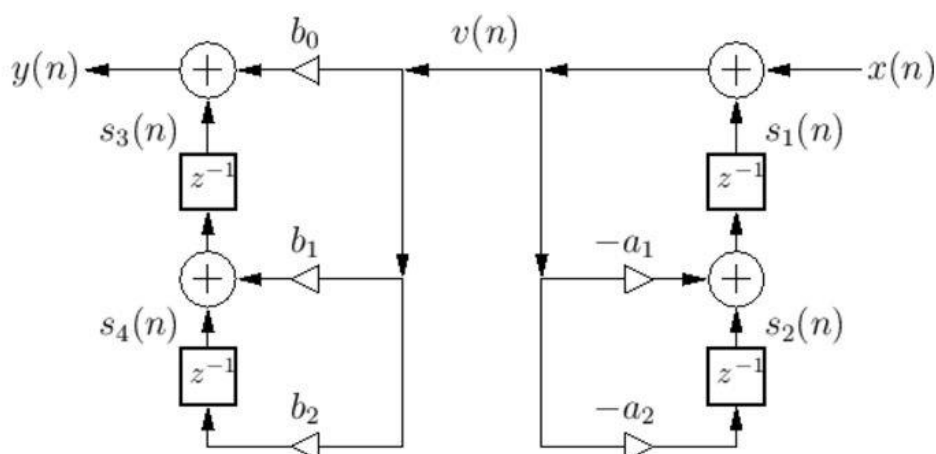
Filtr cyfrowy jest układem przetwarzającym sygnał w dziedzinie dyskretniej w sposób analogiczny do filtrów analogowych. Realizuje on zadaną funkcję $y(n)$ lub też w $y(z)$ dziedzinie transformaty Z . Filtry IIR charakteryzują się teoretycznie nieskończoną odpowiedzią na skończony impuls. W filtrach tych występuje pętla sprzężenia zwrotnego. Na schematach 1,2,3 przedstawiono przykłady filtrów IIR drugiego rzędu, komórka z^{-1} oznacza opóźnienie sygnału o jeden krok czasowy.



Schemat 1. Filtr IIR drugiego rzędu w architekturze Direct Form I



Schemat 2. Filtr IIR drugiego rzędu w architekturze Direct Form II



Schemat 3. Filtr IIR drugiego rzędu w architekturze Transposed Form

2. Analiza odpowiedzi filtru IIR

2.1 Budowa filtru IIR

Pierwszym etapem ćwiczenia jest wykonanie symulacji filtru cyfrowego IIR w architekturze Direct Form I przy użyciu pakietu Simulink oprogramowania Matlab . Projektowany filtr ma spełniać realizować odpowiedź o następującym równaniu:

$$y(n) = 0.0605x(n) + 0.121x(n-1) + 0.0605x(n-2) + 1.194y(n-1) - 0.436y(n-2).$$

Aby wykonać model filtru przy użyciu podstawowych bloków, dokonujemy dyskretniej transformaty Z powyższego równania wiedząc, że opóźnienie sygnału o jeden krok odpowiada przemnożeniu funkcji o z^{-1} w dziedzinie Z:

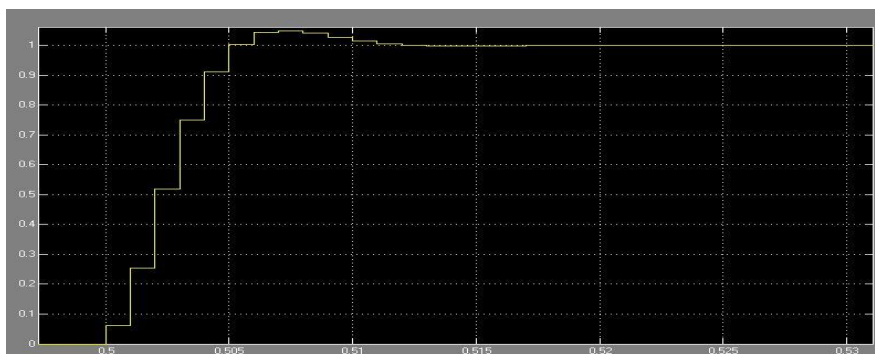
$$y(z) = 0.0605x(z) + 0.121z^{-1}x(z) + 0.0605z^{-2}x(z) + 1.194z^{-1}y(z) - 0.436z^{-2}y(z).$$

Po przekształceniach uzyskujemy ostatecznie funkcję przenoszenia filtru:

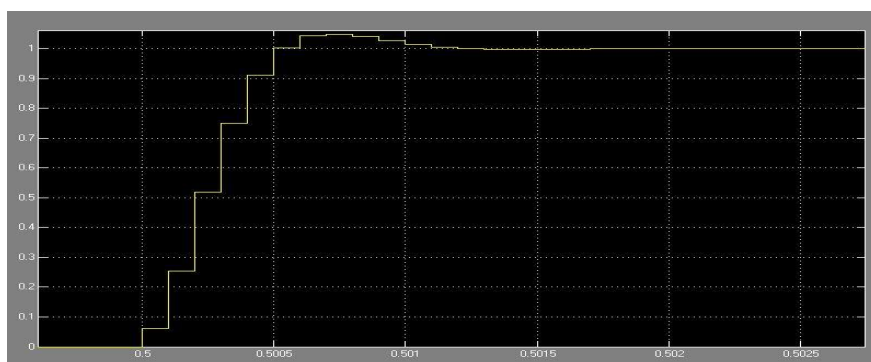
$$H(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{0.0605 + 0.121z^{-1} + 0.0605z^{-2}}{1 - 1.194z^{-1} + 0.436z^{-2}}$$

2.2 Analiza odpowiedzi na skok jednostkowy

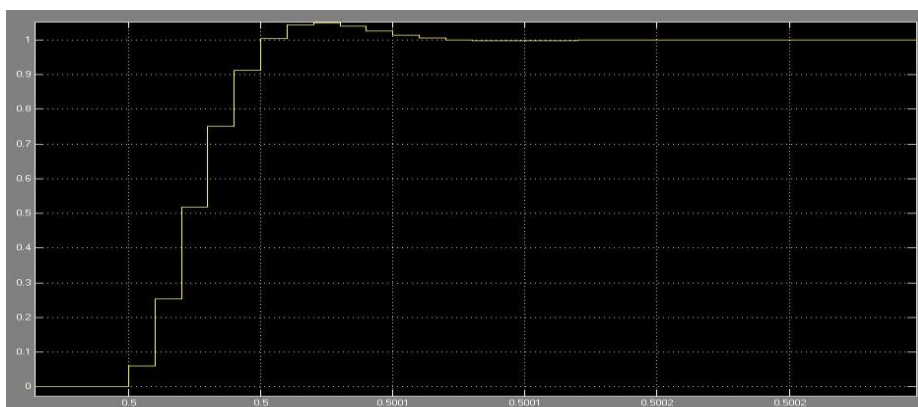
Zbadałem odpowiedź uzyskanego filtru na skok jednostkowy o jednostkowej amplitudzie przy trzech częstotliwościach próbkowania f_{SMD} wynoszących 1, 10 oraz 100 kHz. Uzyskane przebiegi odpowiedzi filtru przedstawione są poniżej:



Wykres 1. Odpowiedź filtra na skok jednostkowy, częstotliwość próbkowania 1 kHz



Wykres 2. Odpowiedź filtra na skok jednostkowy, częstotliwość próbkowania 10 kHz



Wykres 3. Odpowiedź filtra na skok jednostkowy, częstotliwość próbkowania 100 kHz

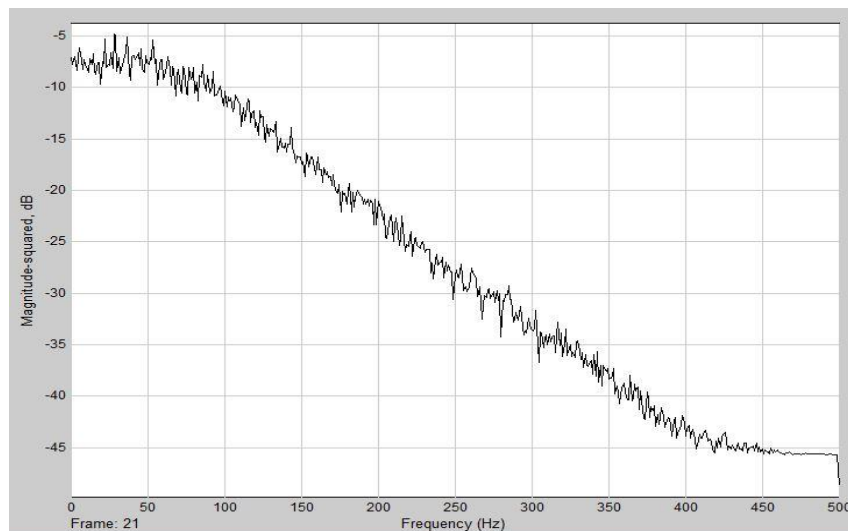
Na podstawie uzyskanych przebiegów wyznaczyłem czas narastania τ_r , zbocza oraz wzmocnienie stałoprądowe K :

Częstotliwość próbkowania [kHz]	Czas narastania [ms]	Wzmocnienie stałoprądowe [dB]
1	3	1
10	0.3	1
100	0.03	1

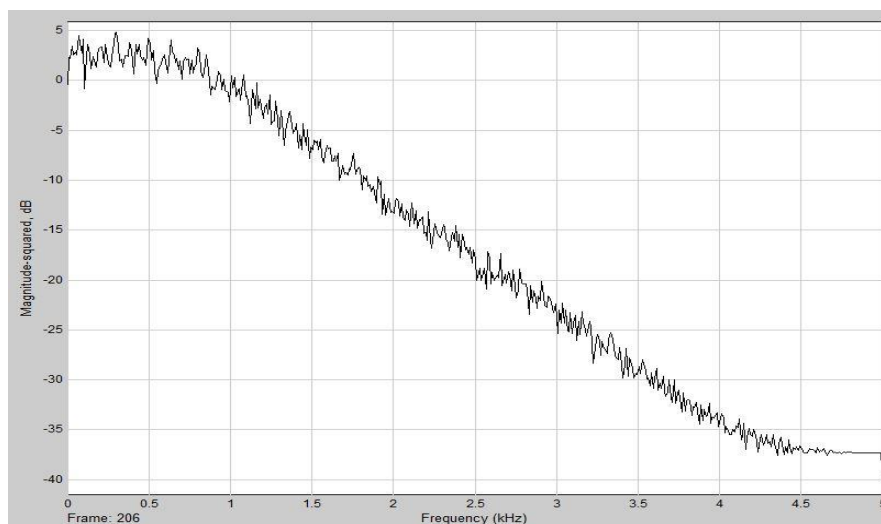
Czas narastania spada wraz ze wzrostem częstotliwości próbkowania. Im częściej bierzemy próbki tym szybciej odpowiedź filtru zbiega do wartości granicznej wynikającej z realizowanego przez filtr matematycznego wzoru. Odpowiedź filtru jest zdeterminowana szeregiem wartości wejściowych, czas próbkowania determinuje skalę czasową tej odpowiedzi.

2.3 Analiza częstotliwościowa filtru

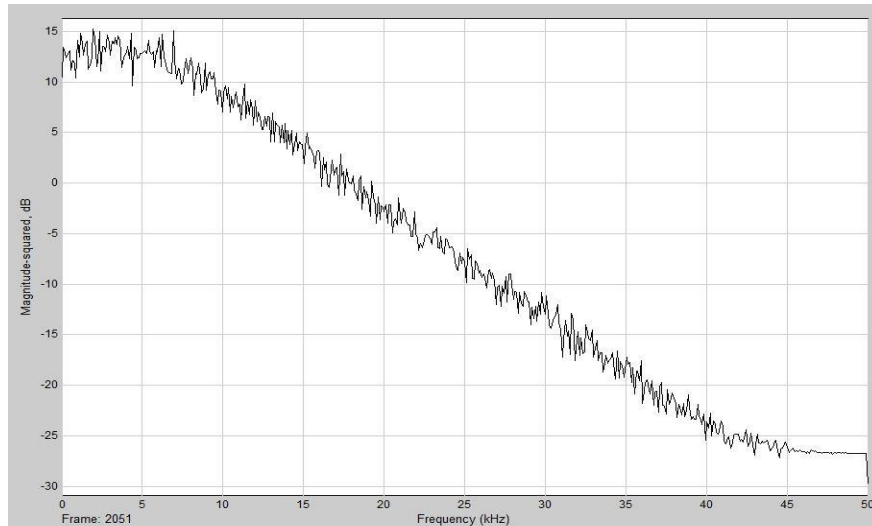
Następnie zbadałem charakterystykę częstotliwościową filtru za pomocą szumu białego na wejściu. Uzyskane charakterystyki dla trzech częstotliwości próbkowania wyglądają następująco:



Wykres 4. Charakterystyka częstotliwościowa filtru, częstotliwość próbkowania 1 kHz



Wykres 5. Charakterystyka częstotliwościowa filtru, częstotliwość próbkowania 10 kHz



Wykres 6. Charakterystyka częstotliwościowa filtru, częstotliwość próbkowania 100 kHz

Dla każdej z uzyskanych charakterystyk wyznaczyłem częstotliwości graniczną filtru f_g oraz wzmocnienie w paśmie przenoszenia (uzyskane wartości zostały oszacowane z szumu):

Częstotliwość próbkowania [kHz]	Częstotliwość graniczna [kHz]	Wzmocnienie [dB]
1	0.1	0
10	1	0
100	10	0

Częstotliwość graniczna filtru rośnie wraz ze wzrostem częstotliwości próbkowania. Jest to związane z faktem, że funkcja przenoszenia $H(z)$ jest związana z transformatą $z = e^{j\omega T}$, gdzie T to czas próbkowania a ω to częstotliwość sygnału. Uzyskana charakterystyka częstotliwościowa czyli $|H(z)|_\omega$ jest bezpośrednio związana z czasem próbkowania. Częstotliwość graniczna jest zatem funkcją czasu próbkowania.

3. Wpływ przybliżeń na stabilność filtru

3.1 Budowa filtru IIR 4 – rzędu

Kolejnym zadaniem jest zrealizowanie modelu sygnału filtru dolnoprzepustowego czwartego rzędu o zadanej funkcji przenoszenia:

$$H(z) = \left[\frac{1}{1 + 0.9z^{-1}} \right]^4$$

Pierwszą wersją realizacji modelu jest połączenie kaskadowe czterech filtrów pierwszego rzędu wiedząc, że przenoszenie wypadkowe układu szeregu filtrów jest iloczynem ich funkcji przenoszenia. Równanie realizowane przez pojedynczy filtr ma zatem postać:

$$y(z) = x(z) - 0.9z^{-1}y(z)$$

Drugą wersją realizacji modelu jest wykonanie pojedynczego filtra czwartego rzędu. Aby to wykonać, trzeba najpierw rozpisać funkcję przenoszenia na postać $y(z) = f(x(z), y(z))$ realizowaną przez filtr:

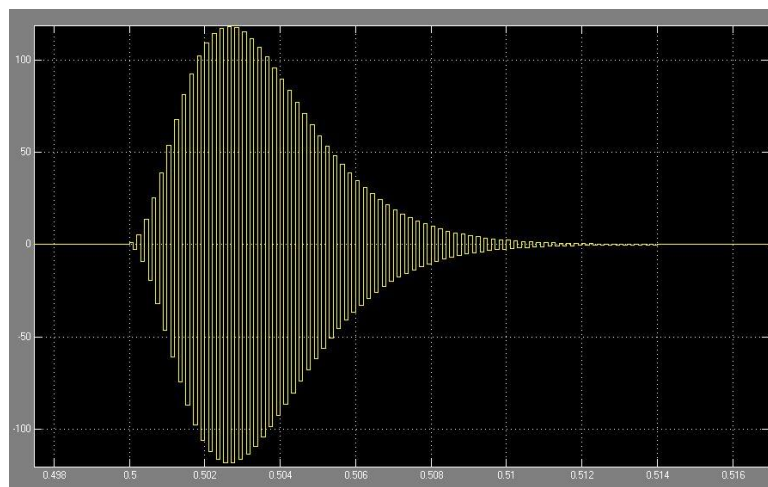
$$H(z) = 1/(1 + 4 \cdot 0.9z^{-1} + 6 \cdot 0.9^2z^{-2} + 4 \cdot 0.9^3z^{-3} + 0.9^4z^{-4})$$

zatem

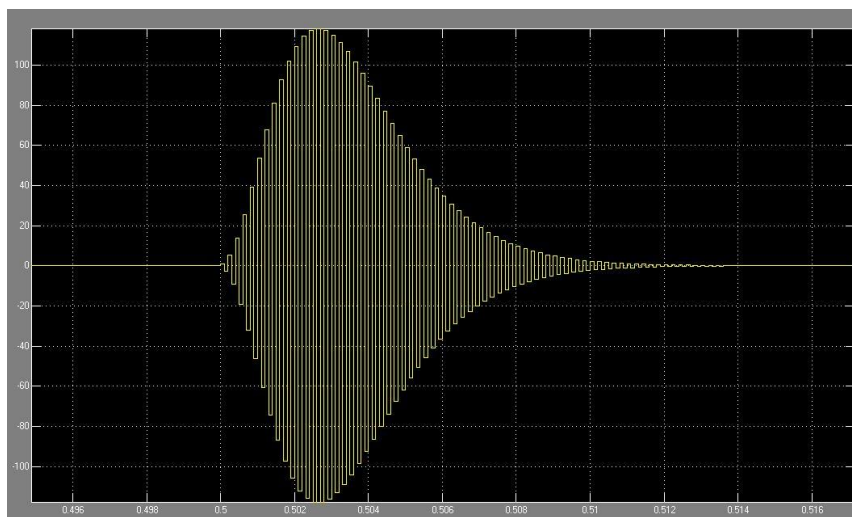
$$y(z) = x(z) - 3.6z^{-1}y(z) - 4.86z^{-2}y(z) - 2.916z^{-3}y(z) - 0.6561z^{-4}y(z).$$

3.2 Badanie odpowiedzi filtrów na skok jednostkowy

Uzyskane odpowiedzi obu wersji modelowanego filtra czwartego rzędu na skok jednostkowy przedstawione są poniżej:

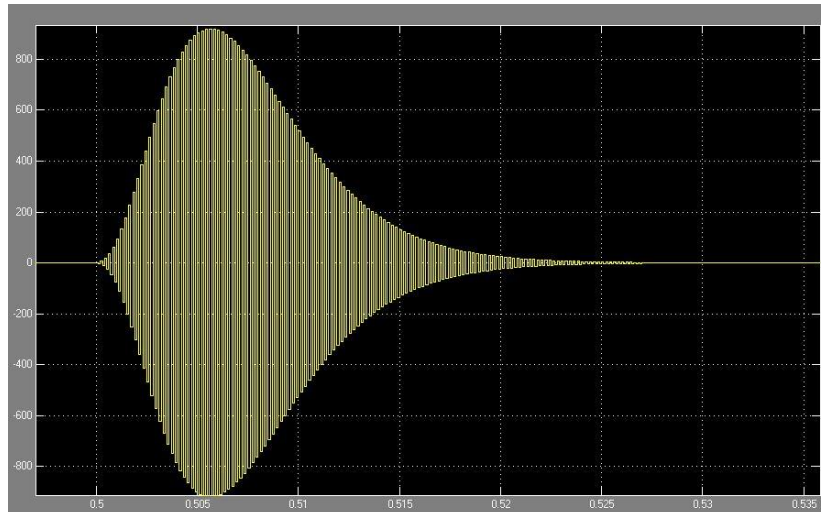


Wykres 7. Odpowiedź filtra 4-rzędu na skok jednostkowy w wersji kaskadowej, częstotliwość próbkowania 10 kHz



Wykres 8. Odpowiedź filtra 4-rzędu na skok jednostkowy w wersji bezpośredniej, częstotliwość próbkowania 10 kHz

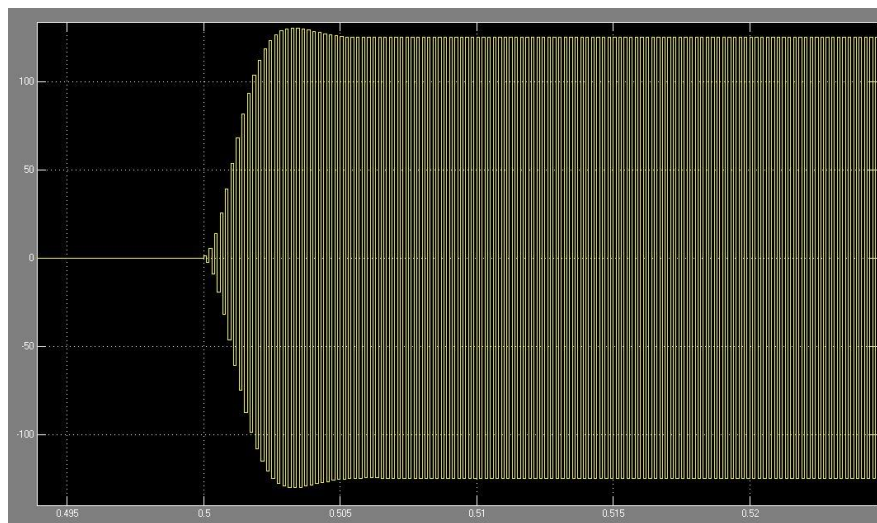
Uzyskane odpowiedzi na skok jednostkowy są ze sobą zgodne, obie wersje realizują ten sam filtr. Kolejnym krokiem jest zmiana wartości współczynnika funkcji przenoszenia z 0.9 na 0.95 w realizacji kaskadowej. Odpowiedź na skok jednostkowy filtra po zmianie współczynnika wygląda następująco:



Wykres 9. Odpowiedź filtru 4-rzędu na skok jednostkowy w wersji kaskadowej, częstotliwość próbkowania 10 kHz

Uzyskana odpowiedź ma taki sam kształt przebiegu jak przed zmianą parametru, wydłużył się jednak czas relaksacji do wartości końcowej. Jest to związane z faktem, że przybliżyliśmy się z biegunem do granicy koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej. Wartość parametru równa 1 zdestabilizowałaby filtr.

Następnym krokiem jest zmiana wartości współczynnika z 0.6561 na 0.656 w realizacji bezpośredniej filtru 4 – rzędu. Poniżej przedstawiona jest odpowiedź filtru na skok jednostkowy po zmianie:



Wykres 8. Odpowiedź filtru 4-rzędu na skok jednostkowy w wersji bezpośredniej po zmianie parametru, częstotliwość próbkowania 10 kHz

Uzyskana odpowiedź filtru przedstawia sytuację stabilności chwiejnej z niekończącymi się oscylacjami. Jest to sytuacja przejściowa między stabilnością a destabilizacją kiedy to sygnał zbiega do nieskończoności. Jeden z biegunów filtru jest zatem na granicy koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej.

3.3 Stabilność filtru 4 – rzędu

Ostatnim zadaniem jest zweryfikowanie czy zmiana współczynnika z 4.86 na 4.8 w realizacji bezpośredniej wprowadza niestabilność filtru. Filtr realizuje zatem równanie:

$$y(z) = x(z) - 3.6z^{-1}y(z) - 4.8z^{-2}y(z) - 2.916z^{-3}y(z) - 0.6561z^{-4}y(z)$$

Należy policzyć bieguny zespolone funkcji:

$$H(z) = \frac{z^4}{z^4 + 3.6z^3 + 4.8z^2 + 2.916z + 0.6561}$$

Korzystając z rozwiązania numerycznego uzyskujemy cztery pierwiastki:

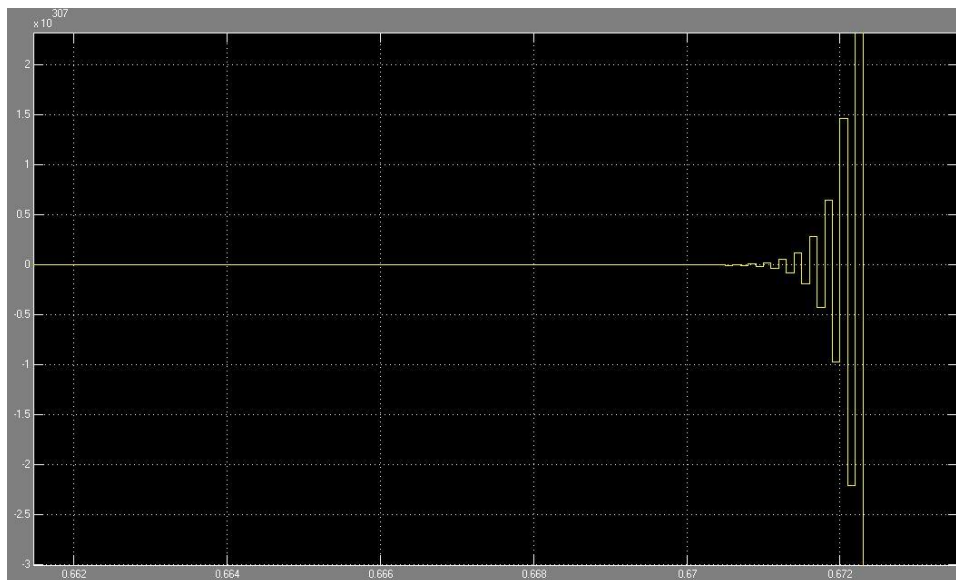
$$z_1 \approx -1.508$$

$$z_2 \approx -0.537$$

$$z_3 \approx -0.777 - 0.453i$$

$$z_4 \approx -0.77 + 0.453i$$

Pierwiastek z_1 leży poza obszarem jednostkowego koła na płaszczyźnie zespolonej zatem uzyskany filtr powinien być niestabilny. Wykonana symulacja pozwala nam zweryfikować przypuszczenia:



Wykres 8. Odpowiedź filtru 4-rzędu na skok jednostkowy w wersji bezpośredniej po zmianie parametru, częstotliwość próbkowania 10 kHz

W istocie uzyskana odpowiedź na skok jednostkowy pokazuje, że filtr jest niestabilny. Odpowiedź filtru rozbiega się do nieskończoności.

4. Podsumowanie

W ramach ćwiczenia wykonałem symulacje zadanych filtrów cyfrowych o nieskończonej odpowiedzi impulsowej. Dla wykonanych modeli zbadałem odpowiedź na skok jednostkowy oraz charakterystykę częstotliwościową. Zauważyłem że czas narastania odpowiedzi oraz częstotliwość graniczna filtru cyfrowego są bezpośrednio związane z czasem próbkowania. Przeanalizowałem także stabilność wykonanych filtrów w zależności od ich biegunów.