

Sprawozdanie

Komputerowa symulacja jednowymiarowego ruchu ciała z wykorzystaniem formalizmu Newtona.

Celem ćwiczenia jest wykonanie komputerowej symulacji ruchu wahadła matematycznego oraz analiza i dyskusja wyników.

Korzystając z praw Newtona uzyskujemy równanie ruchu wahadła matematycznego :

$$R\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$$

Powyższego równania nie da się rozwiązać analitycznie, natomiast można je rozwiązać przy zastosowaniu przybliżenia $\sin\varphi \approx \varphi$ prawdziwego dla małych kątów $\varphi \approx 0$, wtedy otrzymujemy :

$$\ddot{\varphi} = -\beta^2\varphi \quad , \text{ gdzie } \beta = \sqrt{g/R}$$

Rozwiązanie tego równania jest następujące :

$$\varphi(t) = A\sin(\beta t + \alpha)$$

Gdzie A stanowi amplitudę, natomiast α fazę początkową. Stałe te określają warunki początkowe. Zgodnie z przybliżeniem, równanie ruchu będzie spełnione gdy $A \ll 1$.

W celu rozwiązania numerycznego, równanie różniczkowe drugiego rzędu zastępujemy układem równań różniczkowych rzędu pierwszego, korzystając z prędkości :

$$\dot{\varphi}(t) = \omega(t)$$

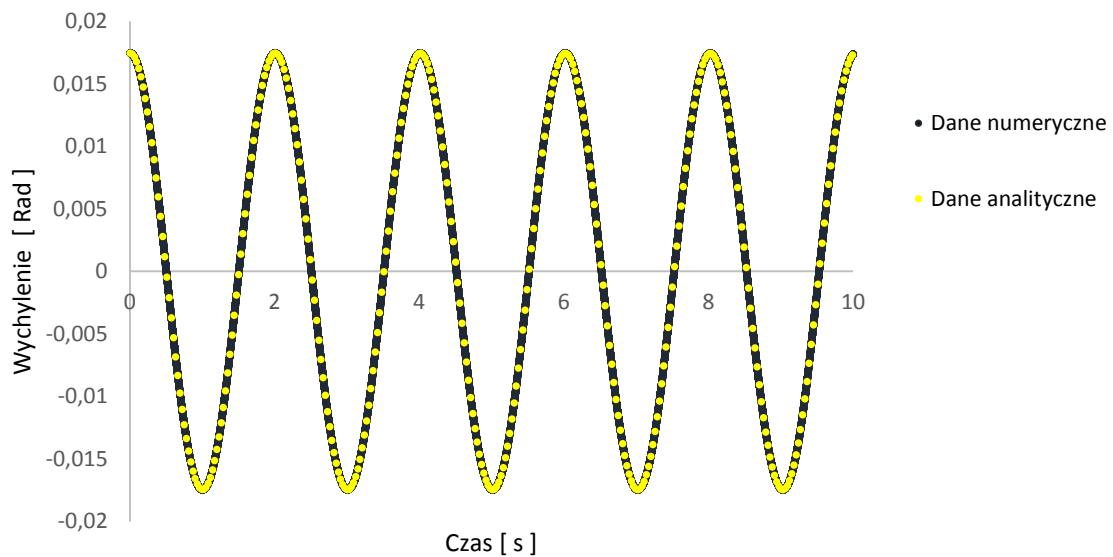
Różniczki w równaniach zastępujemy wyrazami różnicowymi i po przekształceniach otrzymujemy równania rekurencyjne na położenie oraz prędkość :

$$\begin{aligned}\omega(t_{i+1}) &= \omega(t_i) - \beta^2\sin\varphi(t_i)\Delta t \\ \varphi(t_{i+1}) &= \varphi(t_i) + \omega(t_{i+1})\Delta t\end{aligned}$$

Gdzie Δt jest skończonym ale małym krokiem czasowym, za pomocą którego tworzymy siatkę kroków czasowych. Symulację rozpoczynamy od znanych wartości początkowych φ_0 oraz ω_0 .

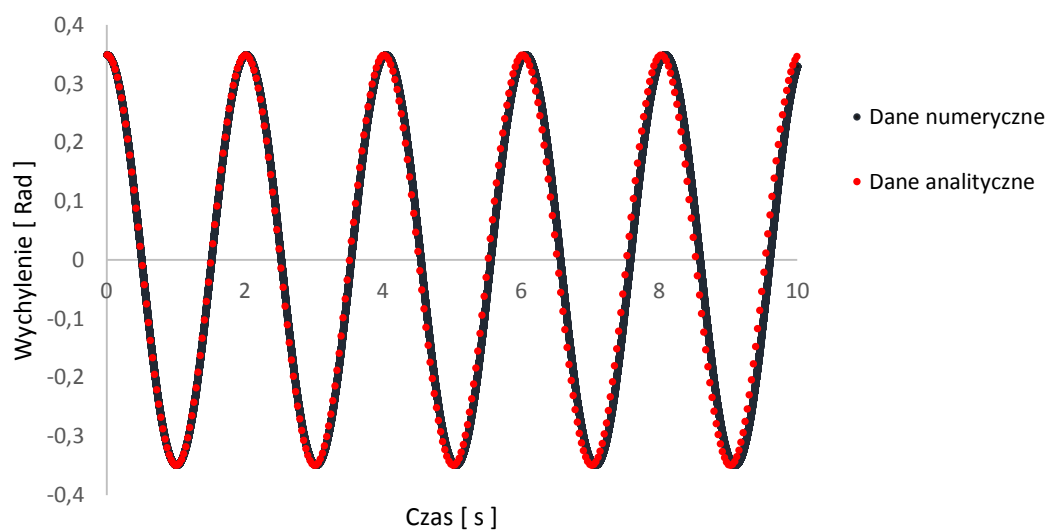
Poniżej prezentuję uzyskane przeze mnie wyniki symulacji numerycznej na tle rozwiązań analitycznych z przybliżeniem małych kątów.

Symulacja pierwsza o wartościach $A = 1^\circ$, $\omega_0 = 0$ oraz $\Delta t = \frac{1}{10000}$:



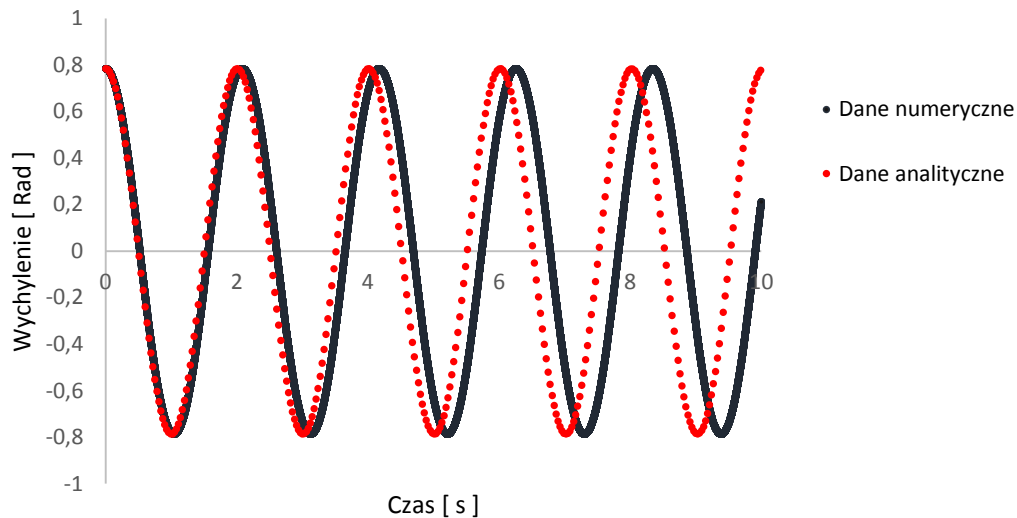
Wykres 1. Rozwój wychylenia wahadła w czasie dla pierwszej symulacji

Symulacja druga o wartościach $A = 20^\circ$, $\omega_0 = 0$ oraz $\Delta t = \frac{1}{10000}$:



Wykres 2. Rozwój wychylenia wahadła w czasie dla drugiej symulacji

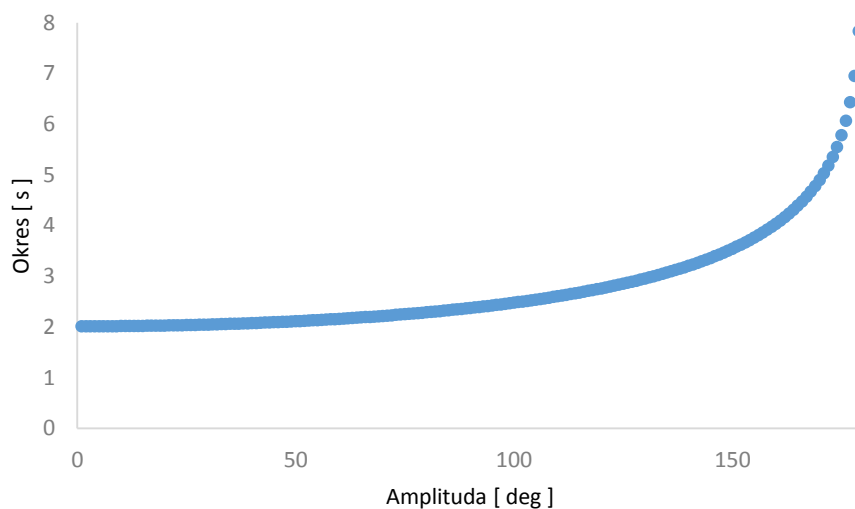
Symulacja trzecia o wartościach $A = 45^\circ$, $\omega_0 = 0$ oraz $\Delta t = \frac{1}{10000}$:



Wykres 3. Rozwój wychylenia wahadła w czasie dla trzeciej symulacji

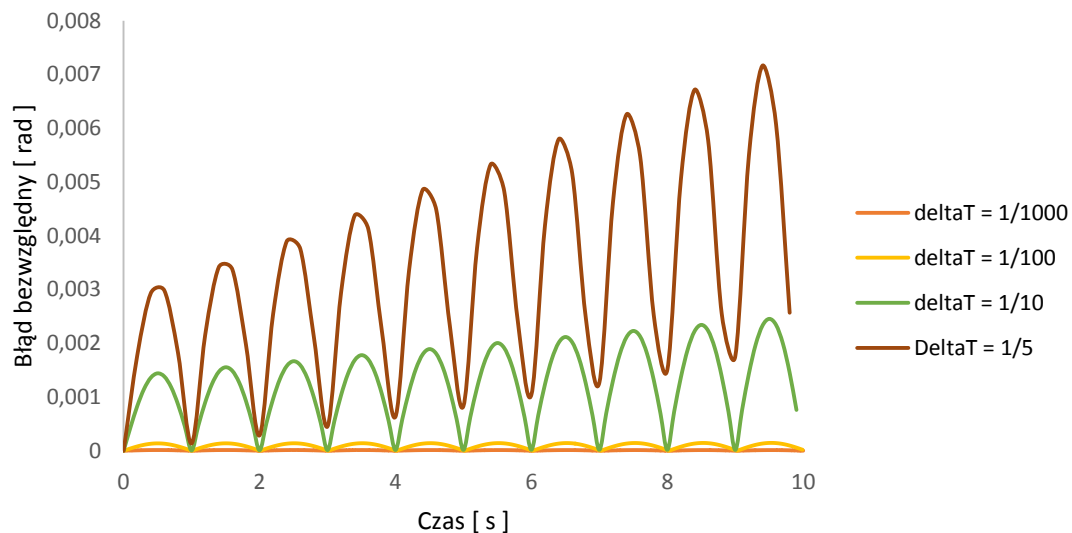
Dla wykresu pierwszego dane numeryczne dobrze pokrywają się z rozwiązaniem analitycznym, dla większej amplitudy rozwiązania zaczynają się rozjeżdżać. Na wykresie 2. widać drobne odchylenia natomiast na wykresie 3. Dla amplitudy 45° wyniki numeryczne znacząco różnią się od rozwiązania analitycznego. Rosnąca wraz z amplitudą rozbieżność wyników wynika z zastosowanego przybliżenia, które jest prawdziwe dla małych kątów, natomiast dla dużych amplitud rozwiązanie analityczne obarczone jest istotnym błędem.

Korzystając z symulacji numerycznej wyznaczyłem zależność okresu drgań wahadła od amplitudy w zakresie $[1^\circ, 179^\circ]$ z krokiem co 1° :



Wykres 4. Zależność okresu drgań wahadła od Amplitudy

Badanie wpływu długości kroku czasowego Δt na dokładność wyników przeprowadziłem dla amplitudy równej 0.5° ze względu na przybliżenie zastosowane przy wyznaczaniu równania analitycznego.



Wykres 5. Zależność błędu symulacji numerycznej od czasu dla wybranych kroków czasowych

Wykres 5. Przedstawia wyniki błęd symulacji dla wybranych kroków czasowych. Wartości błęd oraz prędkość wzrostu błęd rosną w miarę wzrostu kroku czasowego. Rozwój błęd w czasie ma charakter oscylacyjny. Maksima lokalne błędów występują przy zerowym wychyleniu wahadła, w okolicy zera błędy numeryczne się zwiększają. Wielkość kroku czasowego ma istotny wpływ na dokładność rozwiązania. W celu zminimalizowania błęd należy dobrać możliwie mały krok czasowy.