

TP Calcul Parallel - Code Rmarkdown

Table des matières

1	Objectifs et Importance de la programmation parallèle	2
2	Principe général	2
3	Notions de base	3
4	Etapas du calcul parallèle	3
5	Programmation parallèle avec R	3
6	Quelques fonctions importantes	3
7	Preliminaire	4
7.1	garbage collector	4
7.2	Packages	4
8	Définition de la fonction pour calculer le Min	5
9	Application de la programmation parallèle pour déterminer le Min	6
9.1	Calcul direct (sans paralleliser)	6
9.2	Calcul en utilisant la programmation parallèle	6
10	Avec les packages Doparallel et Foreach	9
11	La regression en parallèle	10
12	MAP REDUCE	13

1 Objectifs et Importance de la programmation parallèle

De manière générale, l'exécution d'une opération sur un ordinateur se fait suivant le principe du calcul séquentiel qui consiste en l'exécution de l'opération à travers des étapes successives, où chaque étape ne se déclenche que lorsque l'étape précédente est terminée, y compris lorsque les deux étapes sont indépendantes a priori sur une seule ressource. L'implémentation d'un programme sur R obéit par défaut au principe du calcul séquentiel. Ceci étant, à mesure que les opérations effectuées portent sur des jeux de données relativement grands, ce principe de calcul révèle un certain nombre de limites :

- Il est trop coûteux en temps de calcul, en mémoire ;
- Les volumes de données à traiter sont trop importants, trop longs à écrire ;
- Les performances sont moins bonnes que sur des machines plus vieilles,...

Lorsque l'exécution d'un programme sur R s'avère lent aux besoins de ses utilisateurs, son temps d'exécution doit être optimisé. Il existe plusieurs stratégies pour arriver à cette optimisation : il est recommandé utiliser des fonctions déjà optimisées et disponibles publiquement ; exploiter les calculs vectoriels et matriciels, qui sont plus rapides que des boucles en R ; éviter les allocations mémoire inutiles, notamment les objets de taille croissante et les modifications répétées d'éléments dans un data frame. Malgré ces méthodes d'optimisation, la programmation peut toujours être aussi lente. Une solution appropriée sur R pour optimiser le temps d'exécution est alors le calcul en parallèle.

Ainsi, l'objectif du calcul en parallèle est d'effectuer plus rapidement un calcul informatique en exploitant simultanément plusieurs unités de calcul.

2 Principe général

1. Briser un calcul informatique en blocs de calcul indépendants ;
2. Exécuter simultanément (en parallèle) les blocs de calcul sur plusieurs unités de calcul ;
3. Rassembler les résultats et les retourner.

Paralléliser un problème consiste à décomposer ce problème en plusieurs sous problèmes à résoudre simultanément à travers différentes ressources, pour ressortir la solution du problème initial, dans un délai optimal. Ainsi, le principe du **calcul parallèle** est d'effectuer simultanément une même tâche ou exécuter un même programme de manière parallèle. Cela est aussi possible à travers différentes machines connectées par un réseau où chacun d'eux reçoit une tâche à exécuter. Sur R, L'utilité du calcul en parallèle réside dans le fait qu'il permet d'effectuer plus rapidement et de manière asynchrone l'exécution de programme sur des bases de données volumineuses en exploitant simultanément plusieurs unités de calcul d'un ordinateur appelées cœurs.

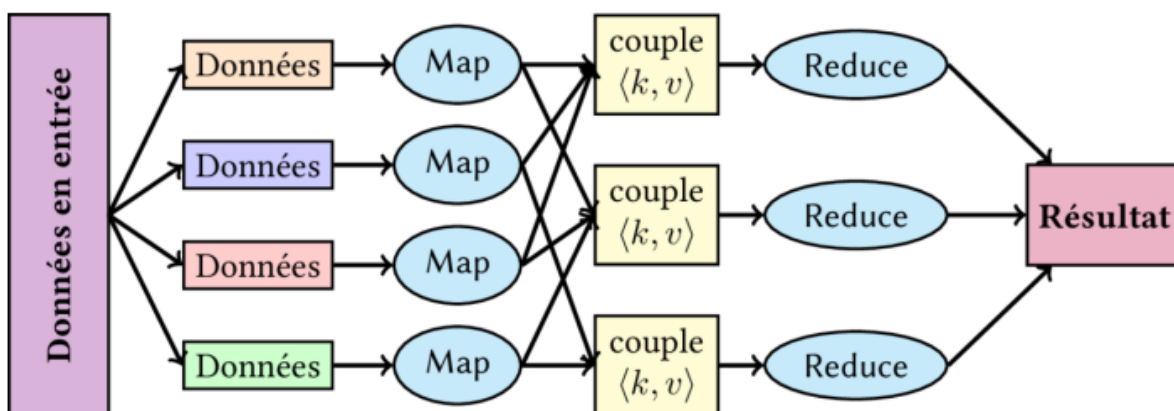


FIGURE 1 – Modèle de programmation MapReduce

3 Notions de base

1. **Processeur ou CPU** : Son rôle est de lire et d'exécuter les instructions provenant d'un programme.
 - Les processeurs sont de nos jours la plupart du temps **divisés en plus d'une unité de calcul**, nommée coeur (en anglais core). Il s'agit alors de **processeurs multi-coeurs**. Ce type de matériel permet de faire du calcul en parallèle sur une seule machine, en exploitant plus d'un coeur de la machine.
 - **Threads** : Les coeurs exécutent ce que l'on appelle des **fil d'exécution** (en anglais **threads**). Un fil d'exécution est une petite séquence d'instructions en langage machine.
 - **Processus monothread** : Lorsque les fils d'exécution sont exécutés séquentiellement par un coeur soit un après l'autre.
 - **Processus multithreads** : Il existe cependant une technologie permettant à un seul coeur physique d'exécuter plus d'un fil d'exécution simultanément. On dit alors que le coeur physique est séparé en **coeurs logiques**. On parle alors d'un coeur multithread.
2. **Hadoop** : Hadoop est un framework open source largement utilisé pour le traitement et le stockage distribués de données volumineuses (big data). Il fournit une plate-forme pour le traitement parallèle de grandes quantités de données en les répartissant sur un cluster de serveurs.

4 Etapes du calcul parallèle

1. Démarrer m processus "travailleurs" (i.e. coeurs de calcul) et les initialiser ;
2. Envoyer les fonctions et données nécessaires pour chaque tâche aux travailleurs ;
3. Séparer les tâches en m opérations d'envergure similaire et les envoyer aux travailleurs ;
4. Attendre que tous les travailleurs aient terminé leurs calculs et obtenir leurs résultats ;
5. Rassembler les résultats des différents travailleurs ;
6. Arrêter les processus travailleurs

Le package `parallel` permet de démarrer et d'arrêter un "cluster" de plusieurs processus travailleur (étape 1). En plus du package `parallel`, on va donc utiliser le package `doParallel` qui permet de gérer les processus travailleurs et la communication (étapes 1) et l'articulation avec le package `foreach` qui permet lui de gérer le dialogue avec les travailleurs (envois, réception et rassemblement des résultats - étapes 2, 3, 4 et 5).

5 Programmation parallèle avec R

- Package **Parallel** : inclus dans la distribution de base de R : Il se base sur l'utilisation de fonctions de la famille des `apply`.
- Package `doParallel` et `Foreach` :
- Le package `rnr2` (MapReduce)
- Etc.

6 Quelques fonctions importantes

- Du package `Parallel`
 - **Detectcores()** : permet de détecter le nombre coeurs de la machine.
 - **Makecluster()** :
 - **Stopcluster()** : est utilisé pour arrêter et libérer les différents workers.
- La famille des fonctions **Apply**, adaptées au calcul parallèle sous R permet d'exécuter simultanément les opérations sur les différents blocs.
 - `parApply()` permet d'effectuer des calculs en parallèle sur une matrice ou un tableau en utilisant un cluster de travailleurs

- `parLapply()` permet d’appliquer une fonction à chaque élément d’une liste en utilisant un cluster de travailleurs pour exécuter les calculs en parallèle.
- `parSapply()` permet d’appliquer une fonction de manière parallèle à des éléments d’une liste. Elle prend en argument le jeu de données et la fonction et retourne un vecteur ou une matrice.
- `clusterEvalQ()` : Elle est utilisée pour évaluer une expression sur tous les nœuds d’un cluster parallèle. Elle est utile lorsque vous avez besoin d’exécuter une expression ou de charger des bibliothèques spécifiques sur chaque nœud du cluster avant d’exécuter des tâches parallèles.
- Du package `Doparallel` et `Foreach`
 - `Foreach` : Il constitue une alternative aux fonctions `apply` utilisé dans le package `parallel`. Il fournit une approche simplifiée pour effectuer des boucles parallèles en R, en permettant d’exploiter efficacement les ressources de calcul disponibles sur un système. Il s’appuie généralement sur d’autres packages parallèles, tels que “`doParallel`” ou “`doSNOW`”, pour exécuter les boucles en parallèle.
 - `%dopar%` est un opérateur spécifique du package “`foreach`” en R, qui permet d’effectuer des itérations parallèles sur des objets itérables tels que des vecteurs, des listes ou des data frames.
 - `registerDoParallel()` fait le même que `Makecluster`
- Package `rnr2` (Disponible seulement pour les versions antérieures de R)
 - `mapreduce()` : La fonction `mapreduce()` est une fonction clé du package R “`rnr2`” (ou “`RHadoop`”) qui fournit une interface pour exécuter des calculs distribués sur des systèmes de fichiers distribués tels que Hadoop.
 - `keyval()` : elle est utilisée pour définir des paires clé-valeur qui serviront de données d’entrée pour les opérations de MapReduce. Cette fonction prend deux arguments : une clé et une valeur, et retourne une structure de données représentant une paire clé-valeur.

7 Préliminaire

7.1 garbage collector

```
#vider la mémoire
rm(list=ls())
```

```
#lancer le garbage collector
gc()
```

```
##          used (Mb) gc trigger (Mb) max used (Mb)
## Ncells 520845 27.9   1166272 62.3   643711 34.4
## Vcells 911292  7.0    8388608 64.0   1648775 12.6
```

Le garbage collector permet de gérer automatiquement la mémoire allouée aux objets.

Lorsqu’un programme s’exécute, il alloue de la mémoire pour créer des objets et stocker des données. Cependant, il arrive souvent que certains objets ne soient plus utilisés par le programme, ce qui crée des “déchets” ou des “objets morts” en mémoire. Si ces objets morts ne sont pas libérés, ils peuvent occuper de l’espace précieux en mémoire et entraîner des problèmes tels que des fuites de mémoire.

7.2 Packages

```
#information sur les versions
sessionInfo()
```

```
## R version 4.1.2 (2021-11-01)
## Platform: x86_64-w64-mingw32/x64 (64-bit)
## Running under: Windows 10 x64 (build 19045)
##
## Matrix products: default
```

```
##
## locale:
## [1] LC_COLLATE=French_France.1252 LC_CTYPE=French_France.1252
## [3] LC_MONETARY=French_France.1252 LC_NUMERIC=C
## [5] LC_TIME=French_France.1252
##
## attached base packages:
## [1] parallel stats graphics grDevices utils datasets methods
## [8] base
##
## other attached packages:
## [1] snow_0.4-4 doParallel_1.0.17 iterators_1.0.14 foreach_1.5.2
## [5] tictoc_1.2
##
## loaded via a namespace (and not attached):
## [1] codetools_0.2-18 digest_0.6.29 lifecycle_1.0.3 magrittr_2.0.3
## [5] evaluate_0.21 rlang_1.1.0 stringi_1.7.12 cli_3.1.1
## [9] rstudioapi_0.14 vctrs_0.6.1 rmarkdown_2.22 tools_4.1.2
## [13] stringr_1.5.0 glue_1.6.2 xfun_0.39 yaml_2.2.2
## [17] fastmap_1.1.0 compiler_4.1.2 htmltools_0.5.2 knitr_1.37

#help(package='parallel')
```

8 Définition de la fonction pour calculer le Min

```
mon_min <- function(v) {
  #copie locale
  temp <- v
  #longueur du vecteur
  n <- length(temp)
  #tri par selection si (n > 1)
  if (n > 1) {
    #recherche des minimums successifs
    for (i in 1:(n - 1)) {
      i_mini <- i
      for (j in (i + 1):n) {
        if (temp[j] < temp[i_mini]) {
          i_mini <- j
        }
      }
      #Echanger
      if (i_mini != i) {
        tempo <- temp[i]
        temp[i] <- temp[i_mini]
        temp[i_mini] <- tempo
      }
    }
  }
  #la plus petite valeur est le min.
  return(temp[1])
}
```

9 Application de la programmation parallèle pour déterminer le Min

```
# Génération d'un vecteur de données
n <- 10
a <- runif(n)
a

## [1] 0.1268973 0.2190160 0.4429761 0.1406081 0.5884293 0.9038375 0.4424940
## [8] 0.9737582 0.7543901 0.4391870
```

9.1 Calcul direct (sans paralléliser)

```
#appel de la fonction sur la totalité du vecteur
tic()
print(paste('Min direct =',mon_min(a)))

## [1] "Min direct = 0.126897253561765"
print('>> Temps de calcul - fonction mon_min direct')

## [1] ">> Temps de calcul - fonction mon_min direct"
toc()

## 0.2 sec elapsed
```

9.2 Calcul en utilisant la programmation parallèle

```
#affichage nombre de coeurs dispo
print(parallel::detectCores())

## [1] 4

#nombre de blocs des donnees = nombre de coeurs
k <- 4
#partition en blocs des donn?es
blocs <- split(a,1+(1:n)%k)
print(blocs)

## $`1`
## [1] 0.1406081 0.9737582
##
## $`2`
## [1] 0.1268973 0.5884293 0.7543901
##
## $`3`
## [1] 0.2190160 0.9038375 0.4391870
##
## $`4`
## [1] 0.4429761 0.4424940

#appel de la fonction sur la totalité du vecteur
tic()
print(paste('Min direct =',mon_min(a)))

## [1] "Min direct = 0.126897253561765"
```

```

print('>> Temps de calcul - fonction mon_min direct')

## [1] ">> Temps de calcul - fonction mon_min direct"
toc()

## 0.02 sec elapsed
#pour mesurer le processus global de **parallel**
tic()
#Demarrage des moteurs (workers)
clust <- parallel::makeCluster(4)
#lancement des min en parallele
res <- parallel::parSapply(clust,blocs,FUN = mon_min)
#résultats intermédiaires
print(res)

##          1          2          3          4
## 0.1406081 0.1268973 0.2190160 0.4424940
#fonction de consolidation
print(paste('Min parallel =',mon_min(res)))

## [1] "Min parallel = 0.126897253561765"
#Eteindre les moteurs
parallel::stopCluster(clust)
#affichage temps de calcul
print('>> Temps de calcul total avec parSapply min par bloc')

## [1] ">> Temps de calcul total avec parSapply min par bloc"
#temps de calcul
toc()

## 3.31 sec elapsed

```

9.2.1 Calcul de la moyenne

```

#appel de la fonction sur la totalité du vecteur
tic()
print(paste('Moyenne direct =',mean(a)))

## [1] "Moyenne direct = 0.503159347549081"
print('>> Temps de calcul - fonction moyenne direct')

## [1] ">> Temps de calcul - fonction moyenne direct"
toc()

## 0.02 sec elapsed
#pour mesurer le processus global de **parallel**
tic()
#Demarrage des moteurs (workers)
clust <- parallel::makeCluster(4)
#lancement des min en parallele
res <- parallel::parSapply(clust,blocs,FUN = mean)
poids<-parallel::parSapply(clust,blocs,FUN = length)

```

```

#résultats intermédiaires
print(res)

##           1           2           3           4
## 0.5571831 0.4899055 0.5206802 0.4427351

#fonction de consolidation
moy<-weighted.mean(res,poids)
print(paste('Moyenne parallel =',moy))

## [1] "Moyenne parallel = 0.503159347549081"

#Eteindre les moteurs
parallel::stopCluster(clust)
#affichage temps de calcul
print('>> Temps de calcul total avec parSapply moy par bloc')

## [1] ">> Temps de calcul total avec parSapply moy par bloc"

#temps de calcul
toc()

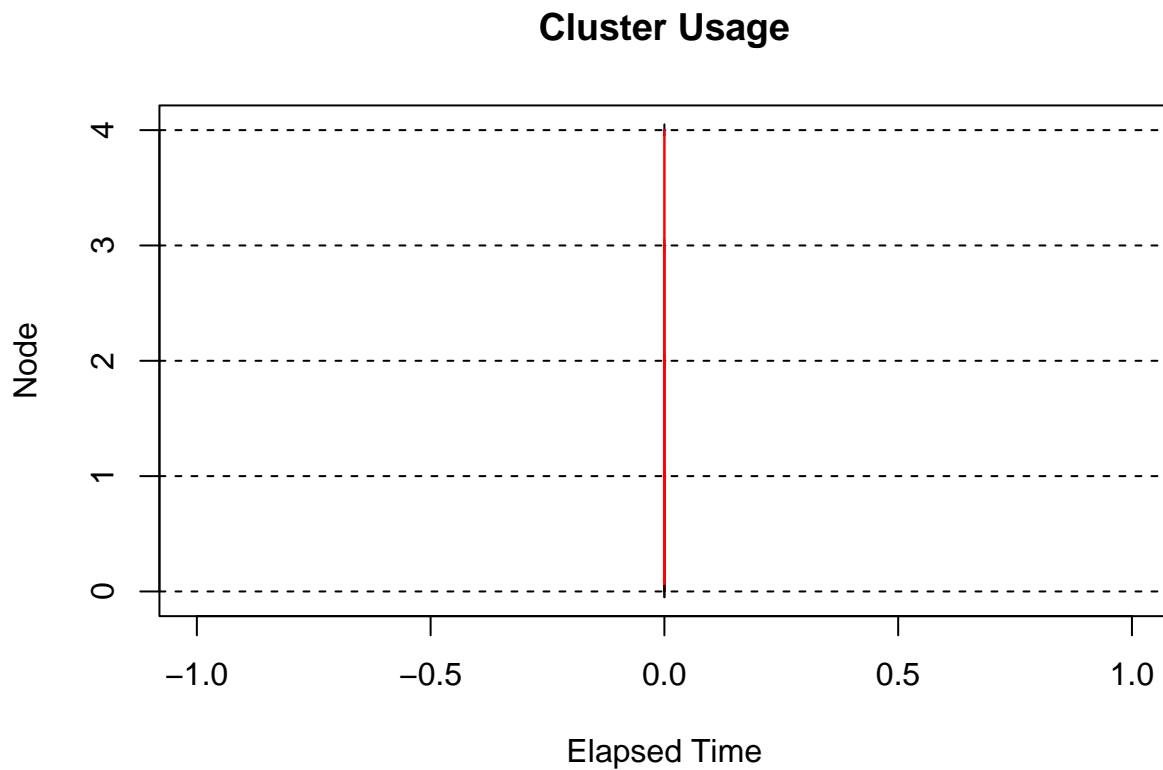
## 4.48 sec elapsed

Rapport sur l'usage des coeurs

# Rapport sur l'usage des coeurs
cl <- snow::makeCluster(k)
ctime1 <- snow.time(clusterApply(cl,blocs,fun=mean))

plot(ctime1)

```

10 Avec les packages Doparallel et Foreach

```
#nombre de coeurs à exploiter
#k <- 4
tic()
#partition en blocs des donnees
blocs <- split(a,1+(1:n)%%k)
#print(blocs)

#configurer les coeurs
doParallel::registerDoParallel(k)

#itérer sur les blocs
res <- foreach::foreach(b = blocs, .combine = c) %dopar% {
  return(mon_min(b))
}

#résultats intermédiaires
#print(res)

#minimum global
print(paste('Min foreach/dopar =',mon_min(res)))

## [1] "Min foreach/dopar = 0.126897253561765"
```

```

#stopper les cores
doParallel::stopImplicitCluster()

#affichage temps de calcul
print('>> Temps de calcul total avec foreach/dopar (split + min par bloc)')

## [1] ">> Temps de calcul total avec foreach/dopar (split + min par bloc)"

#temps de calcul
toc()

## 3.22 sec elapsed

```

11 La regression en parallèle

Données : Nous utilisons les données mtcars. Nous cherchons à expliquer la consommation (mpg) en fonction des autres variables.

```

data<-(data(mtcars))
#View(mtcars)

alea <- runif(nrow(mtcars))
cle <- ifelse(alea < 0.5, 1, 2)
blocs <- split(mtcars,cle)
print(blocs)

## $`1`
##          mpg cyl  disp  hp drat   wt  qsec vs am gear carb
## Mazda RX4      21.0   6  160.0  110 3.90 2.620 16.46  0  1    4    4
## Datsun 710      22.8   4  108.0   93 3.85 2.320 18.61  1  1    4    1
## Hornet 4 Drive  21.4   6  258.0  110 3.08 3.215 19.44  1  0    3    1
## Hornet Sportabout 18.7   8  360.0  175 3.15 3.440 17.02  0  0    3    2
## Merc 240D       24.4   4  146.7   62 3.69 3.190 20.00  1  0    4    2
## Merc 230        22.8   4  140.8   95 3.92 3.150 22.90  1  0    4    2
## Merc 280        19.2   6  167.6  123 3.92 3.440 18.30  1  0    4    4
## Merc 280C       17.8   6  167.6  123 3.92 3.440 18.90  1  0    4    4
## Merc 450SE      16.4   8  275.8  180 3.07 4.070 17.40  0  0    3    3
## Cadillac Fleetwood 10.4   8  472.0  205 2.93 5.250 17.98  0  0    3    4
## Lincoln Continental 10.4   8  460.0  215 3.00 5.424 17.82  0  0    3    4
## Fiat 128        32.4   4   78.7   66 4.08 2.200 19.47  1  1    4    1
## Toyota Corona   21.5   4  120.1   97 3.70 2.465 20.01  1  0    3    1
## Dodge Challenger 15.5   8  318.0  150 2.76 3.520 16.87  0  0    3    2
## AMC Javelin     15.2   8  304.0  150 3.15 3.435 17.30  0  0    3    2
## Pontiac Firebird 19.2   8  400.0  175 3.08 3.845 17.05  0  0    3    2
## Fiat X1-9       27.3   4   79.0   66 4.08 1.935 18.90  1  1    4    1
## Ferrari Dino    19.7   6  145.0  175 3.62 2.770 15.50  0  1    5    6
##
## $`2`
##          mpg cyl  disp  hp drat   wt  qsec vs am gear carb
## Mazda RX4 Wag   21.0   6  160.0  110 3.90 2.875 17.02  0  1    4    4
## Valiant         18.1   6  225.0  105 2.76 3.460 20.22  1  0    3    1
## Duster 360      14.3   8  360.0  245 3.21 3.570 15.84  0  0    3    4
## Merc 450SL      17.3   8  275.8  180 3.07 3.730 17.60  0  0    3    3
## Merc 450SLC     15.2   8  275.8  180 3.07 3.780 18.00  0  0    3    3
## Chrysler Imperial 14.7   8  440.0  230 3.23 5.345 17.42  0  0    3    4

```

```
## Honda Civic      30.4   4  75.7  52 4.93 1.615 18.52  1  1   4   2
## Toyota Corolla  33.9   4  71.1  65 4.22 1.835 19.90  1  1   4   1
## Camaro Z28      13.3   8 350.0 245 3.73 3.840 15.41  0  0   3   4
## Porsche 914-2   26.0   4 120.3  91 4.43 2.140 16.70  0  1   5   2
## Lotus Europa    30.4   4  95.1 113 3.77 1.513 16.90  1  1   5   2
## Ford Pantera L  15.8   8 351.0 264 4.22 3.170 14.50  0  1   5   4
## Maserati Bora   15.0   8 301.0 335 3.54 3.570 14.60  0  1   5   8
## Volvo 142E      21.4   4 121.0 109 4.11 2.780 18.60  1  1   4   2
```

```
#reduce
reduce_lm <- function(D){
  #nombre de lignes
  n <- nrow(D)
  #récupération de la cible
  y <- D$mpg
  #prédictives
  X <- as.matrix(D[,-1])
  #rajouter la constante en première colonne
  X <- cbind(rep(1,n),X)
  #calcul de X'X
  XtX <- t(X) %*% X
  #calcul de X'y
  Xty <- t(X) %*% y
  #former une structure de liste
  res <- list(XtX = XtX, Xty = Xty)
  #renvoyer le tout
  return(res)
}
```

```
#Demarrage des moteurs (workers)
clust <- parallel::makeCluster(4)
#lancement des min en parallele
res <- parallel::parSapply(clust,blocs,FUN = reduce_lm)

#résultats intermédiaires
print(res)
```

```
##      1      2
## XtX numeric,121 numeric,121
## Xty numeric,11 numeric,11

#fonction de consolidation
#consolidation
#X'X
MXtX <- matrix(0,nrow=ncol(mtcars),ncol=ncol(mtcars))
for (i in seq(1,length(res)-1,2)){
  MXtX <- MXtX + res[[i]]
}
print(MXtX)
```

```
##           cyl      disp      hp      drat      wt      qsec
##      32.000  198.000  7383.10  4694.00  115.0900  102.9520  571.160
## cyl  198.000 1324.000  51872.40 32204.00  691.4000  679.4040 3475.560
## disp 7383.100 51872.400 2179627.47 1291364.40 25094.7960 27091.4888 128801.504
## hp   4694.000 32204.000 1291364.40  834278.00 16372.2800 16471.7440 81092.160
## drat 115.090   691.400  25094.80  16372.28  422.7907  358.7190 2056.914
```

```
## wt      102.952   679.404   27091.49   16471.74   358.7190   360.9011   1828.095
## qsec    571.160  3475.560  128801.50  81092.16  2056.9140  1828.0946  10293.480
## vs       14.000   64.000   1854.40    1279.00    54.0300    36.5580    270.670
## am       13.000   66.000   1865.90    1649.00    52.6500    31.3430    225.680
## gear    118.000   710.000  25650.30  17112.00  432.9500  366.5820  2097.460
## carb     90.000   604.000  23216.10  15776.00  321.2600  310.5020  1547.670
##          vs      am      gear      carb
##          14.000   13.000   118.000   90.000
## cyl      64.000   66.000   710.000   604.000
## disp    1854.400  1865.900  25650.300  23216.100
## hp      1279.000  1649.000  17112.000  15776.000
## drat     54.030   52.650   432.950   321.260
## wt       36.558   31.343   366.582   310.502
## qsec     270.670  225.680  2097.460  1547.670
## vs       14.000    7.000    54.000    25.000
## am        7.000   13.000    57.000    38.000
## gear     54.000   57.000   452.000   342.000
## carb     25.000   38.000   342.000   334.000
```

```
#X'y
MXty <- matrix(0,nrow=ncol(mtcars),ncol=1)
for (i in seq(2,length(res),2)){
  MXty <- MXty + res[[i]]
}
print(MXty)
```

```
##          [,1]
##          642.900
## cyl      3693.600
## disp    128705.080
## hp       84362.700
## drat     2380.277
## wt       1909.753
## qsec     11614.745
## vs        343.800
## am        317.100
## gear     2436.900
## carb     1641.900
```

```
#Eteindre les moteurs
parallel::stopCluster(clust)
```

Estimation des paramètres de la régression. Les estimateurs \hat{a} sont produits à l'aide de procédure solve() de R.

```
#coefficients de la régression
a.chapeau <- solve(MXtX,MXty)
print(a.chapeau)
```

```
##          [,1]
##          12.30337416
## cyl     -0.11144048
## disp     0.01333524
## hp      -0.02148212
## drat     0.78711097
## wt      -3.71530393
```

```
## qsec 0.82104075
## vs 0.31776281
## am 2.52022689
## gear 0.65541302
## carb -0.19941925
```

Vérification - Procédure `lm()` de R. A titre de vérification, nous avons effectué la régression à l'aide de la procédure `lm()` de R.

```
print(summary(lm(mpg~.,data=mtcars)))
```

```
##
## Call:
## lm(formula = mpg ~ ., data = mtcars)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -3.4506 -1.6044 -0.1196  1.2193  4.6271
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 12.30337    18.71788   0.657  0.5181
## cyl         -0.11144     1.04502  -0.107  0.9161
## disp         0.01334     0.01786   0.747  0.4635
## hp          -0.02148     0.02177  -0.987  0.3350
## drat         0.78711     1.63537   0.481  0.6353
## wt          -3.71530     1.89441  -1.961  0.0633 .
## qsec         0.82104     0.73084   1.123  0.2739
## vs          0.31776     2.10451   0.151  0.8814
## am          2.52023     2.05665   1.225  0.2340
## gear         0.65541     1.49326   0.439  0.6652
## carb        -0.19942     0.82875  -0.241  0.8122
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 2.65 on 21 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.869, Adjusted R-squared:  0.8066
## F-statistic: 13.93 on 10 and 21 DF, p-value: 3.793e-07
```

12 MAP REDUCE