

Zadanie Algorytm wyznaczający rozwiązanie układu z daną macierzą trójkątną z dominującą przekątną.

~~Przykład~~ Przykład macierzy trójkątnej:

$$a_1=0 \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

$c_n=0$

Możemy zapisać w sposób

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \quad (1) \quad \text{dla } i=1, 2, \dots, n$$

$a_n=0$
 $c_n=0$

$$\boxed{x_{i-1}} = \beta_{i-1} x_i + \gamma_{i-1} \quad (2)$$

* podstawiamy z (2) ~~do~~ x_{i-1} do (1)

$$a_i (\beta_{i-1} x_i + \gamma_{i-1}) + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$$

* wyliczamy x_i i upraszczamy

$$x_i (a_i \beta_{i-1} + b_i) + a_i \gamma_{i-1} + c_i x_{i+1} = d_i$$

$$\frac{x_i (a_i \beta_{i-1} + b_i) + a_i \gamma_{i-1} + c_i x_{i+1} = d_i}{a_i \beta_{i-1} + b_i} \Rightarrow (4) \quad x_i = - \frac{c_i}{a_i \beta_{i-1} + b_i} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{a_i \beta_{i-1} + b_i}$$

$$x_i = \beta_i x_{i+1} + \gamma_i \rightarrow \text{odnie (3)}$$

* ~~(3)~~ (3) = (4) \rightarrow wyliczam β_i oraz γ_i

$$\beta_i x_{i+1} + \gamma_i = \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{a_i \beta_{i-1} + b_i} - \frac{c_i}{a_i \beta_{i-1} + b_i} x_{i+1}$$

$$\underbrace{\beta_i}_{\text{winn}} + \underbrace{\gamma_i}_{\text{winn}} = \underbrace{\frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{a_i \beta_{i-1} + b_i}}_{\text{winn}} - \underbrace{\frac{c_i}{a_i \beta_{i-1} + b_i}}_{\text{winn}}$$

$$\beta_i = - \frac{c_i}{a_i \beta_{i-1} + b_i}$$

$$\gamma_i = \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{a_i \beta_{i-1} + b_i}$$

~~(5)~~ (5)

* wyliczam z (1) dla $i=1$

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \quad i=1$$

$$\underbrace{a_1}_{=0} x_0 + b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1$$

$$b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1$$

$$x_1 = -\frac{c_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1} \quad (6)$$

* wyliczam z (3) dla $i=1$

$$x_1 = \beta_1 x_2 + \gamma_1 \quad (7)$$

* porównujemy (7) i (6)

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{c_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1} \\ x_1 = \beta_1 x_2 + \gamma_1 \end{cases}$$

$$\beta_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \quad \gamma_1 = \frac{d_1}{b_1} \quad (8)$$

* wyliczam z (1) dla $i=n$

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n$$

* wyliczam z (2) dla $i=n$

$$a_n (\beta_{n-1} x_n + \gamma_{n-1}) + b_n x_n = d_n$$

$$x_n = \frac{d_n - a_n (\beta_{n-1} x_n + \gamma_{n-1})}{b_n}$$

$$x_n = \frac{d_n - a_n \gamma_{n-1}}{a_n \beta_{n-1} + b_n} = \gamma_n$$

dla $i \geq (5)$

Kolejny algorytm uzyskuje następująco

$$\beta_i = -\frac{c_i}{b_i} \quad \gamma_i = \frac{d_i}{b_i}$$

$$\beta_i = -\frac{c_i}{a_i \beta_{i-1} + b_i}$$

$$\gamma_i = \frac{d_i - a_i \gamma_{i-1}}{a_i \beta_{i-1} + b_i}$$

$i=2, 3, \dots, n$

$$x_n = y_n$$

$$x_i = \beta_i x_{i+1} + y_i \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

Wykonaj

Adam

Majchrzak

s176708