Równanie przewodnictwa cieplnego w pręcie ograniczonym jednorodnymi warunkami brzegowymi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$u(t,0) = u(t,10) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(0,x) = \exp\left(-(x-5)^2\right), \quad 0 \leq x \leq 10,$$

Zadanie zacząłem od rozwiązania na kartce powyższej równości. Plik PDF z rozwiązaniem załączam w osobnym pliku symboliczne_kartka.pdf.

Cały tok rozumowania jest przedstawiony w załączonym pliku pdf do momentu liczenia Cm. Do policzenia Cm skorzystałem ze wzoru:

$$C_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\sqrt{\lambda_m}\,x\right)dx,$$

Gdzie L = 10, f(x) = exp (−(x − 5)^2), λ = (kπ/L)^2

Cm w zależności od k przyjmuje różne wyniki.

Następnie otrzymane wartości wstawiłem do wzoru

$$U(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \exp\left(-\kappa\,\lambda_k\,t\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\,x\right)$$

We wzorze naniosłem małe poprawki w moim przykładzie U(t, x) oraz indeks k zamieniłem na indeks m.

Program przetestowałem dla różnych wartości   t = (1, 5, 10, 15) oraz wartości x od 0 do 10 oraz dla 100 sum poniżej przedstawiam zrzut z ekranu działania programu:

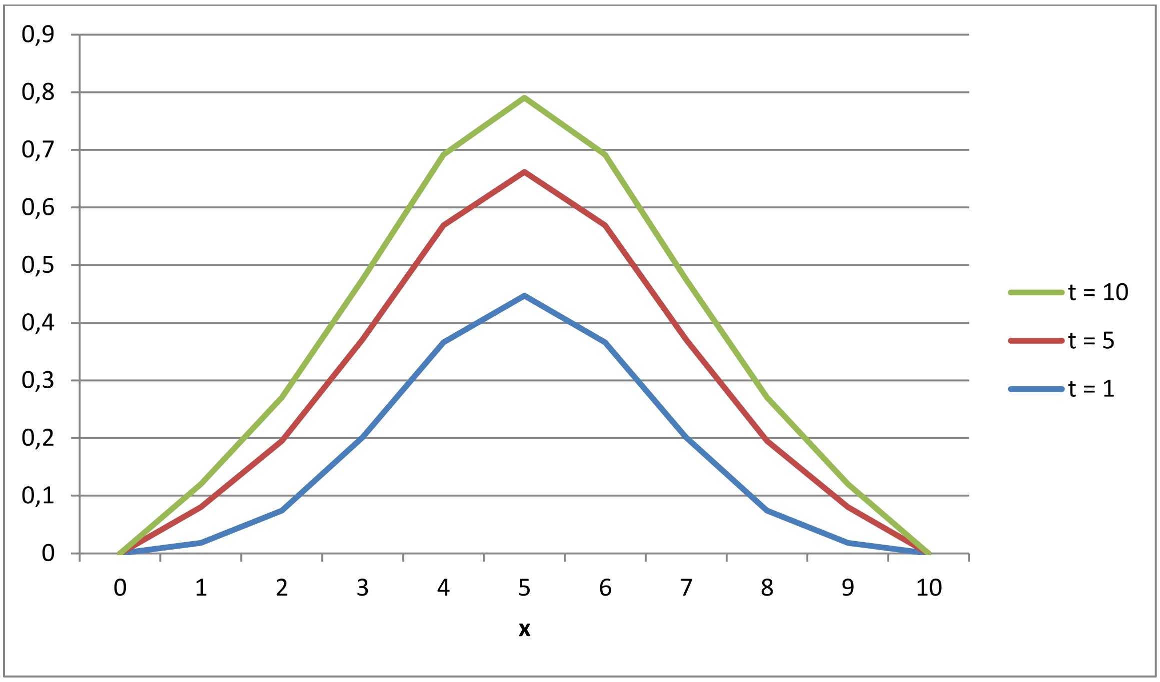
Microsoft Visual Studio Debug Console

```
Rownanie przewodnictwa cieplnego w precie ograniczonym jednorodnymi warunkami brzegowymi.
------------------------------------------------------------------------------------------
Warunki brzegowe:
u(t,10) = 0
u(t,0) = 0
Nasze rownanie:
u(t,x) = X(x)*T(t)
Warunek poczatkowy:
u(0,x) = f(x)    dla 0 < x < lf(x) = exp(-(x-5)^2)Na pocz�tku rozdzielam zmienne:
d^2X/dx^2 + lambda*X(x) = 0
dT/dt + lambda*T(t) = 0
T(t) = Ce^(-lambda*t)
X(x) = A*cos(sqrt(lambda)*x) + B*sin(sqrt(lambda)*x)u(t,x) = Ce^(-lambda*t)*A*cos(sqrt(lambda)*x) + B*sin(sqrt(lambda)*x)
Korzystajac z warunkow brzegowych obliczam lambda
Wstawiam do wzoru na Cm, obliczone wstawiam do Sumy i otrzymuje wyniki:
Przyjete granice calkowania 0 - 10, ilosc sum = 100,
liczba prostokatow do przyblizenia na przedziale - 100
Przyjeta precyzja do 15 liczb po przecinku.
t = 1
0.000000000000000
0.017895528477981
0.073899111424587
0.200944786949978
0.366147482612097
0.447213593656407
0.366147482612097
0.200944786949978
0.073899111424587
0.017895528477981
0.000000000000000


t = 5
0.000000000000000
0.062541426522499
0.120925069009240
0.169782662763534
0.202773212400815
0.214486668012287
0.202773212400815
0.169782662763534
0.120925069009240
0.062541426522499
0.000000000000000


t = 10
0.000000000000000
0.039800852632319
0.075728878345399
0.104271257499974
0.122615684989340
0.128940809753713
0.122615684989340
0.104271257499974
0.075728878345399
0.039800852632319
0.000000000000000


t = 15
0.000000000000000
0.024317425490143
0.046254764751562
0.063664686067906
0.074842768537248
0.078694521155526
0.074842768537248
0.063664686067906
0.046254764751562
0.024317425490143
0.000000000000000
```

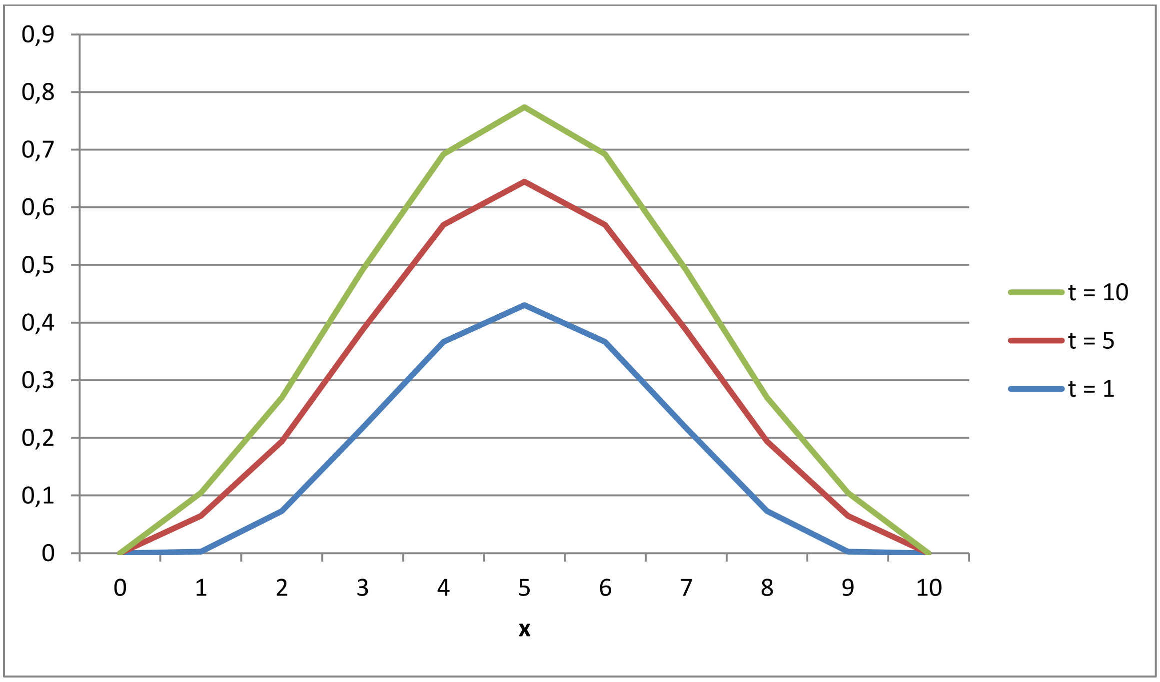
Jak zmieniają się wykresy, gdy bierzemy coraz większą ilość sum początkowych i dlaczego?

Zmieniając ilość sum początkowych na mniejszą dostajemy mniej dokładne wyniki co przekłada się na troszkę inny wykres, mniejsze przybliżenie.

Wykres przedstawia zależności od temperatury jak widać na wykresie im większa temperatura tym wykres przyjmuje wyższe wartości. Wykres dla 100 sumowań.



Dla liczby sumowań równej 5.



Pracę wykonał Adam Majchrzak s176708