Chapitre 2 : Calcul des intégrales multiples

ANALYSE MATHEMATIQUE 4 (2 CPI)-2018/2019

.

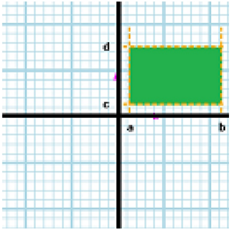
Hamid HADDADOU

Plan

Quadrillage d'un rectangle

Soit R un rectangle du plan $\mathbb{R}^2$ défini par

$$R = [a, b] \times [c, d]$$



Définition

On appelle une subdivision (quadrillage) du rectangle R tout découpage de R en des rectangles $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ *avec*

- $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ *(subdivision de l'intervalle* $[a, b]$*),*
- $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$ *(subdivision de l'intervalle* $[c, d]$*).*

Si pour $i \in \{0, ..., n\}$ *et* $j \in \{0, ..., m\}$ *on a :* $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ *et* $y_j - y_{j-1} = \frac{d-c}{m}$*, la subdivision est dite régulière.*

Notion d'intégrale double sur un rectangle

Soient un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ (avec $a < b, c < d$), et une fonction f définie sur sur R. Pour tout quadrillage $\{R_{ij}\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ régulier de R, soit

$p_{ij} \in]x_{i-1}, xi[\times\ ]y_{j-1}, yj[$ et posons

$$V_{nm} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) f(p_{ij}).$$

Alors, si la limité de V_{nm}, quand $n,m \to \infty$ existe et finie, cette limite est appelée l'intégrale double de f sur R et notée $\int \int_R f \ dxdy$.

Remarque

• *L'intégral de f sur R est noté aussi* $\int\int_R f(x,y)\ dxdy$.

• *Lorsque f est positive, l'intégrale double peut représenter un volume. par exemple, si f est une fonction constante sur chaque sous-rectagle d'une certaine subdivion du R, on aura*

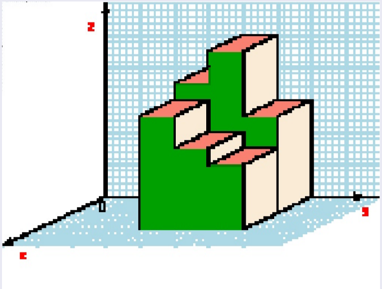


Figure prise du cours de J. Yameogo-2010

• *La définition précédente a un sens car on peut montrer que la somme*

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) f(p_{ij})$$

ne dépend pas ni du quadrillage,ni du point p_{ij} choisis.

Propriétés de l'intégrable double des fonctions continues

Théorème

Soit un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ *(avec* $a < b, c < d$*). Si une fonction* f *est continue sur* R *alors elle est intégrable sur* R.

Soit un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ (avec $a < b, c < d$). On a les propriétés suivantes :

Proposition (Linéarité)

Si f *et* g *sont continues sur* R, *alors*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2, \quad \int\int_R (\alpha f + \beta g)\ dxdy = \alpha \int\int_R f\ dxdy + \beta \int\int_R g\ dxdy.$$

Proposition (Croissance)

Si f *et* g *sont continues sur* R, *alors*

$$f \leq g \Longrightarrow \int\int_R f\ dxdy \leq \int\int_R g\ dxdy.$$

Propriétés de l'intégrable double des fonctions continues (suite)

Proposition (Additivité par rapport au domaine)

Soient $r \in]a,b[$ *et* $s \in]c,d[$. *Alors, si une* f *est continue sur* R, *alors*

$$\int\int_R f \; dxdy = \int\int_{[a,r]\times[c,d]} f \; dxdy + \int\int_{[r,b]\times[c,d]} f \; dxdy$$

et

$$\int\int_R f \; dxdy = \int\int_{[a,b]\times[c,s]} f \; dxdy + \int\int_{[a,b]\times[s,d]} f \; dxdy.$$

Calcul de l'intégrale double d'une fonction continue sur un rectangle

Proposition (Théorème de Fubini)

Soient un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ (avec $a < b, c < d$) et f une fonction continue sur R. Alors, on a

$$\int\int_R f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

Remarque

- *Dans* $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx$*, on intégre par rapport à* y*, puis par rapport à* x.
- *Dans* $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy$*, on intégre par rapport à* x*, puis par rapport à* y

Corollaire

Soient $g \in C([a, b])$ *et* $h \in C([c, d])$*. Alors,*

$$\int\int_R g(x)h(y)\ dxdy = \left(\int_a^b g(x)dx \right) \left(\int_c^d h(y)dy \right).$$

Exemples

Exemple

Calculer de $I = \int\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{1}{x+y+1} dxdy$.

- La fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{x+y+1}$ est continue sur le rectangle $[0, 1] \times [0, 1]$
- En utilisant la formule de Fubini, on trouve

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{x+y+1} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 [\ln(x+y+1)]_{y=0}^{y=1} \ dx \\ &= \int_0^1 [\ln(x+2) - \ln(x+1)] \ dx \\ &= 3\ln 3 - 4\ln 2. \end{aligned}$$

On remarque que dans ce cas on aura la même facilité si on calcul I, en intégrant par rapport à x puis par rapport à y.

Exemples (suite)

Exemple

Calculer de $I = \int\int_{[1,2]\times[0,3]} \left(xy + y^2 + 1\right) dxdy$.

- La fonction $f : (x, y) \mapsto xy + y^2 + 1$ est continue sur le rectangle $[1, 2] \times [0, 3]$
- En utilisant la formule de Fubini, on trouve

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \left(\int_0^3 xy + y^2 + 1 dy \right) dx \\ &= \int_1^2 \left[\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + y \right]_{y=0}^{y=3} dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{9}{2}x + 12 \right) dx \\ &= \left[\frac{9}{4}x^2 + 12x \right]_1^2 = \frac{75}{4}. \end{aligned}$$

On remarque que dans ce cas on aura la même facilité si on calcul I, en intégrant par rapport à y puis par rapport à x.

Exemples (suite)

Exemple

Calculer de $I = \int\int_{[0,1]\times[0,1]} ye^{xy}\,dxdy$.

- La fonction $f : (x, y) \mapsto ye^{xy}$ est continue sur le rectangle $[1, 2] \times [0, 2]$
- En utilisant la formule de Fubini, on trouve

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left(\int_1^2 ye^{xy}\,dx \right) dy \\ &= \int_0^2 [e^{xy}]_{x=1}^{x=2}\ dy \\ &= \int_0^3 \left[e^{2y} - e^{y} \right]\ dx \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2y} - e^{y} \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}e^4 - e^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On remarque que dans ce cas on n'aura pas la même facilité si on calcul I en intégrant par rapport à y puis par rapport à x (exercice). Donc, le choix de l'ordre de l'intégration est important pour faciliter le calcul d'une intégrale double.

Intégrale double sur un domaine borné quelconque

Définition

Soient D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, f une fonction bornée de D dans $\mathbb{R}$ et R un rectangle contenant D. On dit que f est intégrable sur D si la fonction f définie sur R par

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & si\ (x,y) \in D, \\ 0 & si\ (x,y) \notin D \end{cases}$$

est intégrable sur R et l'on pose

$$\int\int_D \widetilde{f}(x,y)\ dxdy = \int\int_R f(x,y)\ dxdy$$

Remarque

• *La définition précédente ne dépend pas du choix du rectangle enveloppant R.*
• *Il y a une autre définition (équivalente) de l'intégrale double sur un domaine qui utilise la subdivision du domaine.*

Propriètés

Théorème

Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$. Si $f : D \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est intégrable sur D.

Proposition

1) Si f et g sont deux fonctions réelles continues sur un domaine borné D, alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int\int_D (\alpha f + \beta g)\ dxdy = \alpha \int\int_D f\ dxdy + \beta \int\int_D g\ dxdy.$$

2) Si D et D' sont deux domaines bornés de $\mathbb{R}^2$ tels que $D \cap D' = \emptyset$ ou points isolés ou une courbe, et f est une fonction réelle continue sur D et D', alors

$$\int\int_{D\cup D'} f\ dxdy = \int\int_D f\ dxdy + \int\int_{D'} f\ dxdy.$$

3) Si f et g sont deux fonctions réelles continues sur D avec $f \leq g$, alors

$$\int\int_D f\ dxdy \leq \int\int_D g\ dxdy.$$

Difficulté du calcul d'une intégrale double sur un domaine quelconque

Dans le cas d'un domaine borné d'intégration non rectangulaire on peut adopter la même démarche que précédemment(sur les rectangles) en ramenant le calcul d'une intégrale double à celui de deux intégrales simples. La difficulté se résume à trouver les bonnes bornes des intégrales simples associées, car certaines bornes peuvent être dépendantes soit de x soit de y.
Par exemple si on veut exprimer $\int\int_D f(x,y)\ dxdy$ comme

$$\int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\ dx \right) dy,$$

Le segment $[c,d]$ est la projection de D sur l'axe des y et le segment $[g(y),h(y)]$ est la projection sur l'axe des x de l'intersection de D avec la droite parallèle à l'axe des x d'ordonnée y. Gémétriquement les courbes dont les équations $x=g(y)$ et $x=h(y)$ limitent le domaine D "à gauche" et "à droite".

Généralisation du théorème de Fubini

Le théorème de Fubini se généralise à des parties bornées.

Proposition

Soit

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ t.q. \ a \leq x \leq b \quad et \quad g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

où g et h sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $g \leq h$.
Si f est une fonction continue sur le domaine D, alors elle est intégrable sur D et l'on a

$$\int\int_D f(x,y)\ dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\ dy \right) dx.$$

Proposition

Soit

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ t.q. \ c \leq y \leq d \quad et \quad g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

où g et h sont deux fonctions continues sur $[c,d]$ avec $g \leq h$.
Si f est une fonction continue sur la partie D, alors elle est intégrable sur D et l'on a

$$\int\int_D f(x,y)\ dxdy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\ dx \right) dy.$$

Exemples

Exemple

Calculer de $I = \int\int_D \frac{1}{x+y+1}\ dxdy$ où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 0 \leq x \leq 1 \ \text{ et } \ x \leq y \leq x+1\}$$

- La fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{1}{x+y+1}$ est continue sur D
- Les fonctions $g : x \mapsto x$, $h : x \mapsto x+1$ sont continues sur $[0,1]$
- En utilisant la premère proposition, on trouve

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_x^{x+1} \frac{1}{x+y+1} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 [\ln(x+y+1)]_x^{x+1} \ dx \\ &= \int_0^1 [\ln(2x+2) - \ln(2x+1)] \ dx \\ &= \textit{...continuez les calculs} . \end{aligned}$$

Exemples (suite)

Exemple

Calculer de $I = \int\int_D (x^2 + y^2)\, dxdy$ où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 0 \leq x \leq 2 - \frac{y^2}{2}\}$$

Reformulons l'ensemble D. Soit $(x, y) \in D$, alors

$$0 \leq 2 - \frac{y^2}{2} \Rightarrow -2 \leq y \leq 2.$$

Donc,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } -2 \leq y \leq 2 \; et \; 0 \leq x \leq 2 - \frac{y^2}{2}\}$$

- La fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est continue sur D.
- Les fonctions $g : y \mapsto 0$, $h : y \mapsto 2 - \frac{y^2}{2}$ sont continues sur $[-2, 2]$
- En utilisant la deuxième proposition, on trouve

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{2} \left(\int_{0}^{2-\frac{y^2}{2}} (x^2 + y^2) dx \right) dy \\ &= \ldots. \end{aligned}$$

Une application pratique du calcul d'une intégrale double

Définition

Une partie bornée D est mesurable si la fonction constante 1 est intégrable sur D. On appelle aire (mesure) d'une partie mesurable D est donné par

$$\mu(D) = \int\int_D dxdy$$

Exemple

Calculer l'air du disque de centre O (origine) et rayon R. On a

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 \leq R^2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } -R \leq x \leq R \text{ et } -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mu(D) = \int\int_D dxdy = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right) dx \underset{t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}{\overset{x = R\sin t}{=}} \pi R^2.$$

Calcul d'intégrales doubles par un changement de variables

Soit lintégrale double

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

Supposons qu'il y a une bijection Φ entre un autre domaine A et D telle que $D = \Phi(A)$ avec

$$\Phi(u,v) = (a(u,v), b(u,v)),$$

c'est à dire

$$(u,v) \in A \Leftrightarrow (x,y) \doteq \Phi(u,v) \in D$$

On suppose que C^1-difféomorphisme, et on considère $J(u,v)$ la matrice jacobienne associée, c'est à dire

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial a}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial b}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial a}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix},$$

Dans ce cas, on a

$$dxdy = |\det(J(u,v))|dudv$$

On a les résultat suivant :

Proposition

Sous les notations précédentes. Alors, on a

$$\int\int_{D=\Phi(A)} f(x,y)dxdy = \int\int_A f\left(a(u,v), b(u,v)\right)\left|\det(J(u,v))\right| dudv$$

Cas particulier : Changement de variables en coordonnées polaires
Soit Φ la fonction définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

Dans ce cas, $dxdy = r\ dudv$ et il vient

Proposition

Soient α un réel et A un domaine borné de $\mathbb{R}_+\times[\alpha,\alpha+2\pi]$. Si f est une fonction intégrable sur $\Phi(A)$, alors la fonction $(r,\theta)\mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est intégrable sur A et l'on a

$$\int\int_{\Phi(A)} f(x,y)dxdy = \int\int_A f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ drd\theta$$

Exemples

Exemple

Soit D le disque

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 \leq R\right\}$$

Calculons l''air de D en utilisant un changement de variable. Le système des coordonnées polaires donne $D = \Phi(A)$ avec

$$A = \{(r,\theta) \text{ t.q. } 0 \leq r \leq R \ \text{ et } \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\mu(D) &= \int\int_{[0,R]\times[0,2\pi]} r \; drd\theta \\
&= \left(\int_0^R rdr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = \pi R^2
\end{aligned}$$

Exemple

Calculer $\int\int_D x^2 dxdy$ avec

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{et } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\right\}$$

Le système des coordonnées polaires donne $D = \Phi(A)$ avec

$$A = \left\{(r, \theta) \text{ t.q. } 1 \leq r \leq 3 \ \text{ et } \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int\int_D x^2 dxdy &= \int\int_{[1,3]\times[0,2\pi]} r^3 \cos^2(\theta)\ drd\theta \\
&= \left(\int_1^3 r^3\ dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\ d\theta\right) \\
&= \left(\int_1^3 r^3\ dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos(2\theta))}{2}\ d\theta\right) \\
&= \ldots\ldots.
\end{aligned}$$

Exemple (Exo4-CI-2016/2017)

On pose

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; y \geq 1,\ 3y - 2x \leq 1 \text{ et } 4(x-1)^2 + 9(y-1)^2 \leq 36\right\}.$$

1. Détreminer Δ le transformé de D par le changement de variables

$$\begin{cases} u = \dfrac{x-1}{3}, \\ v = \dfrac{y-1}{2}. \end{cases}$$

2. Représenter Δ grapphiquement.
3. Calculer

$$\iint_D (x-1)(y-1)\ dx\ dy.$$

Solution

On a

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\;\; y \geq 1,\, 3y - 2x \leq 1 \text{ et } 4(x-1)^2 + 9(y-1)^2 \leq 36\right\}.$$

1) Détremination de Δ. On a

$$\begin{cases} u = \dfrac{x-1}{3}, \\ v = \dfrac{y-1}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3u+1, \\ y = 2v+1. \end{cases}$$

Donc, $(x,y) \in D$ est équivalent à

$$\begin{cases} y \geq 1, \\ 3y - 2x \leq 1\;, \\ 4(x-1)^2 + 9(y-1)^2 \leq 36. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \geq 0, \\ v - u \leq 0, \\ u^2 + v^2 \leq 1. \end{cases}$$

Donc, $\Delta = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;/\;\; v \geq 0,\; v - u \leq 0 \text{ et } u^2 + v^2 \leq 1\right\}.$

2) La représentation graphique de Δ. Au Tableau
3) Notons par φ la fonction définie par

$$(u, v) \overset{\varphi}{\mapsto} (x, y) \doteq (3u + 1, 2v + 1)$$

et posons

$$I = \iint_D (x - 1)(y - 1) dxdy.$$

On a

$$\det J(\varphi) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

En utilisant le théorème du changement de variables, il vient

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Delta (3u)\ (2v)\ \left|\det J(\varphi)\right|\ dudv \\ &= 36 \iint_\Delta u\ v\ dudv. \end{aligned}$$

Soit Δ' la transformée de Δ par le changement en coordonnées polaires, c'est à dire

$$\begin{cases} u = r\cos\theta, \\ v = r\sin\theta. \end{cases}$$

D'aprés le graphe

$$\Delta' = \left\{ (r, \theta) / \quad r \in [0, 1] \quad \text{et } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \right\}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} I &= 36 \iint_{\Delta'} (r \cos \theta)\ (r \sin \theta)\ r\ dr d\theta \\ &= 18 \iint_{\Delta'} r^3 (\sin 2\theta)\ \ dr d\theta. \end{aligned}$$

Comme Δ' est un rectangle et la fonction à intégrer est à variables séparées, il vient

$$I == 18 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2\theta)\ \ d\theta \right) \ \left(\int_0^1 r^3\ dr \right) = \frac{-5}{2}.$$

Subdivision dans $\mathbb{R}^3$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de trois variables et P un parallélépipède rectangle du plan $\mathbb{R}^3$ défini par

$$P = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$$

Soit les subdiviions régulières

- $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ (subdivision de l'intervalle $[a, b]$),
- $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$ (subdivision de l'intervalle $[c, d]$).
- $p = z_0 < z_1 < \cdots < z_l = q$ (subdivision de l'intervalle $[p, q]$).

Si on pose

$$P_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k],$$

la famille des parallélépipèdes élémentaires $\{P_{ijk}\}_{i,j,k}$ constitue un découpage du parallélépipède P. Déntons

$$\begin{cases} \Delta x = x_{i+1} - x_i, \\ \Delta y = y_{i+1} - y_i, \\ \Delta z = z_{i+1} - z_i \end{cases}$$

pour $i \in \{0, ..., n\}$, $j \in \{0, ..., m\}$ et $k \in \{0, ..., l\}$. Il est claire que : $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $\Delta y = \frac{d-c}{m}$ et $\Delta z = \frac{p-q}{l}$ et le volume de P_{ijk} est $\Delta x \Delta y \Delta z$

Intégrale triple sur un parallélépipède rectangle

Définition

Sous les notations précédentes, soit (x_i^*, y_j^*, z_k^*) un point quelconque de P_{ijk}. Alors, on définit l'intégrale triple de f sur le parallélépipède rectangle P par

$$\int\int\int_P f(x,y,z)dxdydz = \lim_{n,m,l\to\infty} \sum_{1\le i\le n} \sum_{1\le j\le m} \sum_{1\le k\le l} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*)\Delta x \Delta y \Delta z$$

si cette limite existe.

Exemple

En utilisant la défintion calculer $\int\int\int_P dxdydz$ avec $P = [a,b]\times[c,d]\times[p,q]$.

Intégrale triple sur un parallélépipède rectangle (suite)

Proposition

Soit un parallélipipède rectangle $P = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$. *Si* f *une fonction continue sur* P *alors l'intégrale triple de* f *sur* P *existe et*

$$\int\int\int_P f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_c^d f(x, y)dz \right) dy \right) dx.$$

Remarque

Dans le cas où le domaine d'intégration est un parallélépipède rectangle, on peut écrire les intégrales simples dans n'importe quel ordre. Mais le choix de l'ordre d'intégration est en général trés crutial.

Exemple

Calculer $\int\int\int_P x^2ye^{xyz}dxdydz$ avec $P = [0, 1] \times [0, 2] \times [-1, 1]$.

Exemple

Calculer $\int\int\int_P z^2ye^{xyz}dxdydz$ avec $P = [-1, 1] \times [0, 2] \times [0, 1]$.

Définition d'une intégrale triple sur un domaine borné quelconque de $\mathbb{R}^3$

Étant donné un domaine borné V de $\mathbb{R}^3$, notons par $V_{n,m,l}$ l'union de tout les parallélépipèdes rectangles élémentaires $\{P_{ijk}\}_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m\\1\leq k\leq l}}$ qui sont à l'intérieur de V.

On définit pour une fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la triple somme

$$I_{n,m,l} = \sum_{1\leq i\leq n}\sum_{1\leq j\leq m}\sum_{1\leq k\leq l} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*)\Delta x\Delta y\Delta z$$

avec (x_i^*, y_j^*, z_k^*) un point quelconque de P_{ijk}.

Proposition

Quand $n, m, l \to \infty$, $V_{n,m,l}$ tend '(dans certan sens) vers V

Définition

Sous les notations précédentes, on définit l'intégrale triple de f sur domaine quelconque V par

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{n,m,l\to\infty} I_{n,m,l}$$

si cette limite existe.

Techniques de calcul des intégrales triples sur des domaines bornés quelconques

On aimerai bien ramener le calcul d'une intégrale triple au calcul de trois intégrale simples, par exemple

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\mu(x)}^{\upsilon(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx$$

ou dans un ordre différent. Pour réaliser une telle décomposition il y a plusieurs techniques

- Méthode des tranches (projection sur un axe)
- Méthode des bâtons (projection sur un plan)
- Méthodes de changement de variables

Méthodes des tranches

Si On écrit le domaine V sous la forme

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ t.q. } p \leq z \leq q \ \ et \ (x, y) \in D_z \right\}$$

où

• D_z est le domaine plan (tranche) résultante de l'intersection du volume V avec le plan parallèle à xOy qui a pour cote z, le domaine D_z varie avec z,

• p la valeur la plus petite de la composante z des points du domaine V,

• q la valeur la plus grande de la composante z des points du domaine V.

Dans ce cas,

$$\int\int\int_V f(x, y, z)dxdydz = \int_p^q \left(\int\int_{D_z} f(x, y, z)dxdy \right) dz.$$

Exemple

Appliquer de la méthode des tranches $\int\int\int_V f(x, y, z)dxdydz$ avec

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ t.q. } x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 1, \ z \leq 2 \right\}$$

Solution

Solution

• *Que représente V ? Le volume V est la demi boule de centre $(0,0,2)$, de rayon 1 située au dessous du plan d'équation $z=2$.*
• *Quel axe prendre ? on choisi l'axe Oz*
• *Quelles sont les valeurs de p et q ? Comme z varie entre 1 et 2, donc $p=1$ et $q=2$.*
• *Pour tout z entre 1 et 2, que représente le domaine plan (tranche) D_z ? D_z est l'intersection de V avec le plan d'équation $Z=z$, géométriquement c'est un disque dans dans le plan d'équation $Z=z$ centré en $(0,0,z)$ de rayon $\sqrt{1-(1-z)^2}$. On en déduit ainsi que*

$$\begin{aligned}\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz &= \int_1^2\left(\int\int_{D_z} f(x,y,z)dxdy\right)dz \\ &= \text{...on calcul l'intégrale double} \\ &= \text{ et puis l'intégrale simple.}\end{aligned}$$

Exemple

Calculer le volume de $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x^2+y^2+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\right\}$.

Méthodes des bâtons

Si On écrit le domaine V sous la forme

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ t.q. } (x, y) \in D, \text{ et } \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\right\}$$

où

• D le domaine plan obtenu comme la projection orthogonale de V sur le plan xOy.

• Pour tout point de coordonnées (x, y) dans D, la droite parallèle à Oz qui passe par ce point. traverse le domaine V et cette traversée forme un segment (bâton) d'extrémités $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$

Dans ce cas, on

$$\int\int\int_V f(x, y, z)dxdydz = \int\int_D \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)dz\right) dxdy.$$

Exemple

Appliquer la méthode des bâtons au calcul de $\int\int\int_V f(x, y, z)dxdydz$ avec

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ t.q. } x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 1, \ z \leq 2\right\}$$

Solution

Solution

• *Quel plan de projection prendre ? On fait une projection sur le plan xOy.*
• *Quelles sont les fonctions $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$? Comme la surface qui limite le volume en dessous est la demi sphere inférieure d'équation $z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, la surface d'équation $z = 2$ limite le volume V en dessus, il vient*

$$\begin{cases} \alpha(x, y) = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \\ \beta(x, y) = 1. \end{cases}$$

On en déduit ainsi que

$$\begin{aligned} \int\int\int_V f(x, y, z)dxdydz &= \int\int_D \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{2} f(x, y, z)dz \right) dxdy \\ &= \text{...on calcul l'intégrale simple, puis l'intégrale double.} \end{aligned}$$

Exemple

Calculer le volume de $V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ t.q. } x^2 + y^2 + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ à l'aide de la méthode des bâtons.

Méthode de changement de variables

Soit l'intégrale triple

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz$$

Supposons qu'il y a une bijection Φ entre un autre volume A et V d éfinie par (changement de variables)

$$\begin{cases} x = a(u,v,w), \\ y = b(u,v,w). \\ z = c(u,v,w) \end{cases}$$

tel que $V = \Phi(A)$, c'est à dire $(u,v,w) \in A \Leftrightarrow (x,y,z) \doteq \Phi(u,v,w) \in V$. On suppose que Φ est un C^1-difféomorphisme et on considère $J(u,v,w)$ la matrice jacobienne associée, c'est à dire

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial a}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial a}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial b}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial a}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial b}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial c}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial c}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial c}{\partial w}(u,v,w) \end{pmatrix},$$

On a le résultat de changement de variables suivant :

Theorem

Si f est intégrable sur $V = \Phi(A)$ alors $f \circ \Phi$ est intégrable sur W et l'intégrale triple $\int\int\int_V f(x,y,z)dxdydz$ est égale à

$$\int\int\int_A f(a(u,v,w), b(u,v,w), c(u,v,w)) \left|\det(J(u,v,w))\right| dudvdw$$

Changement de variable en coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques sont définies par l'application

$$\begin{array}{rcl}\Phi & : & \mathbb{R}_+ \times [\alpha, \alpha + 2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & (r, \theta, z) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z)\ ,\end{array}$$

c'est à die

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

Proposition

Soient α un réel et A une partie bornée de $\mathbb{R}_+ \times [\alpha, \alpha + 2\pi] \times \mathbb{R}$. Si f est une fonction intégrable sur $V = \Phi(A)$ alors la fonction $(r, \theta, z) \longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ est intégrable sur A et l'on a

$$\int\int\int_V f(x, y, z)dxdydz = \int\int\int_A f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\ drd\theta dz.$$

Démonstration.

La preuve est donnée en cours au tableau. $\square$

Changement de variable en coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont définies par l'application

$$\begin{aligned} \Phi \quad : \quad & \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (r, \theta, \varphi) \longmapsto (r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\varphi) \ . \end{aligned}$$

c'est à dire le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x = r \sin\varphi \cos\theta, \\ y = r \sin\varphi \sin\theta, \\ z = r \cos\varphi. \end{cases}$$

Proposition

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Si f est une fonction intégrable sur $V = \Phi(A)$ alors la fonction $(r, \theta, \varphi) \longmapsto f(r \cos\theta \sin\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\varphi)$ est intégrable sur A et l'on a

$$\int\int\int_V f(x, y, z) dxdydz = \int\int\int_A f(r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\varphi) r^2 \sin\varphi \ drd\theta d\varphi.$$

Démonstration.

La preuve est donnée en cours au tableau. □

Exemple

Exemple

Calculer le volume d'une boule $\mathcal{B}$ de rayon R. En utilisant le système de coordonnées sphérique, c'est à dire l'application

$$\begin{aligned} \Phi \quad : \quad & A = \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (r, \theta, \varphi) \longmapsto (r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\varphi) \;. \end{aligned}$$

le voume d'un boule de rayon R est

$$\begin{aligned} vol(\mathcal{B}) &= \int\int\int_{\mathcal{B}} dxdydz \\ &= \int\int\int_{\Phi(A)} dxdydz \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\varphi \; drd\theta d\varphi \\ &= \int_0^R r^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin\varphi \; d\varphi \right) d\theta \right) dr \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

Exemple

Exemple

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ Calculer le volume de l'' ellipsoïde $\mathcal{E}$ d'équation :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\delta^2} = 1$$

Calculer le volume de cette ellipsoïde. On remarque que l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ est l'image de la boule $\mathcal{B}$ de centre O et de rayon 1 par l'application $\Phi : (u, v, w) \longmapsto (\alpha u, \beta v, \delta w)$. Le jacobien de cette application bijective est$J$

$$(u, v) = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{vmatrix} = \alpha\beta\delta,$$

donc le volume de $\mathcal{E}$ est

$$\begin{aligned} vol(\mathcal{E}) &= \int\int\int_{\mathcal{E}} dxdydz = \int\int\int_{\Phi(\mathcal{B})} dxdydz \\ &= \int\int\int_{\mathcal{B}} \alpha\beta\delta \; dudvdw \\ &= \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\delta. \end{aligned}$$

Exemple

Exemple

Soit $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ t.q. } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq z \leq 1\right\}$, calculer l'intégrale triple suivante

$$I \doteq \int\int\int_V z\exp(x^2 + y^2)dxdydz$$

Le domaine V est le volume compris entre le cylindre dont l'axe est l'axe des z et de rayon 2, et le cylindre dont l'axe est aussi l'axe des z et de rayon 1 qui est au-dessus du plan d'équation $z = 0$ et en-dessous du plan d'´equation $z = 1$.
Le domaine V est l'image de

$$A = \{(r,\theta,z) \text{ t.q. } \ 1 \leq r \leq 2, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ 0 \leq z \leq 1\}$$

par l'application Φqui représente les coordonnées cylindriques$(r,\theta,z) \longmapsto (x,y,z)$ définie par

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

Suite de l'exemple

Exemple

Donc,

$$\begin{aligned}
I &= \int\int\int_V z\exp(x^2+y^2)dxdydz \\
&= \int\int\int_{\Phi(A)} z\exp(x^2+y^2)dxdydz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 zr\exp(r^2)dr\right) d\theta\right) dz \\
&= \frac{\left(e^4-e\right)\pi}{2}.
\end{aligned}$$