WIKIPEDIA

Regole di derivazione

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Questa voce o sezione sull'argomento matematica non cita le fonti necessarie o quelle presenti sono insufficienti.

In matematica, le **regole di derivazione** e le **derivate fondamentali** sono regole studiate per evitare di dover calcolare ogni volta il limite del rapporto incrementale di funzioni, e utilizzate al fine di facilitare la derivazione di funzioni di maggiore complessità.

Indice

Regole di derivazione

Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni reali di variabile reale x derivabili, e sia D l'operazione di derivazione rispetto a x:

$$\mathrm{D}[f(x)] = f'(x) \qquad \mathrm{D}[g(x)] = g'(x)$$

- Regola della somma (linearità):

$$\mathrm{D}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- Regola del prodotto (o *di Leibniz*):

$$\mathrm{D}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- Regola del quoziente:

$$\mathrm{D}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

- Regola della funzione reciproca:

$$\mathrm{D}\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

- Regola della funzione inversa:

$$\mathrm{D}[f^{-1}(y)] = \frac{1}{f'(x)}$$

con:

$$y = f(x) \qquad x = f^{-1}(y)$$

- Regola della catena:

$$\mathrm{D}\left[f\left(g(x)\right)\right] = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$$

- Regola della potenza:

$$\mathrm{D}\left[f(x)^{g(x)}\right] = f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln(f(x)) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right]$$

Derivate fondamentali

Ognuna di queste funzioni, se non altrimenti specificato, è derivabile in tutto il suo campo di esistenza.

Funzioni polinomiali

- $\mathrm{D}(a) = 0$, a costante
- $\mathrm{D}(x) = 1$
- $\mathrm{D}(ax) = a$, a costante
- $\mathrm{D}(x^2) = 2x$
- $\mathrm{D}(x^3) = 3x^2$

Dimostrazione

- $\mathrm{D}(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a-a}{h} = 0$
- $\mathrm{D}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$
- $\mathrm{D}(x^2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$
- $\mathrm{D}(x^3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) = 3x^2$

Più in generale si ha:

- $\mathrm{D}(x^n) = nx^{n-1} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione

$$\mathrm{D}(x^n) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

Applicando il teorema binomiale:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

e le proprietà dei coefficienti binomiali si ottiene:

$$\mathrm{D}(x^n) = \lim_{h\to 0}\frac{x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}h^3 + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2h^{n-2} + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}h^3 + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2h^{n-2} + nxh^{n-1} + h^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \binom{n}{3}x^{n-3}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2h^{n-3} + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}$$

Da quest'ultima relazione segue che se $f(x)$ è un polinomio generico di grado n, allora $D\left(f(x)\right)$ è in generale un polinomio di grado $n-1$.

Dimostrazione

Se $f(x)$ è un polinomio generico di grado n, allora esso può essere espresso nella forma

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{con } a_k \in \mathbb{R}, \forall k.$

Allora:

$\mathrm{D}(f(x)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k (x+h)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \left[(x+h)^k - x^k\right]}{h}$

e applicando la linearità del limite si ottiene

$\mathrm{D}(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} \left(\lim_{h \to 0} a_k \frac{(x+h)^k - x^k}{h} \right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{D}(x^k) = \sum_{k=0}^{n} (a_k k) x^{k-1} = a_1 + a_2 x + \cdots + (a_n n) x^{n-1}$

Quest'ultima relazione, come si può osservare, coincide esattamente con l'espressione di un polinomio di grado $n-1$.

Potenze, radici e valore assoluto

- $\mathrm{D}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$
- $\mathrm{D}(\sqrt[2]{x}) = \frac{1}{2\sqrt[2]{x}}$
- $\mathrm{D}(\sqrt[n]{x^m}) = \frac{m}{n} \sqrt[n]{x^{m-n}} \quad \text{se } x > 0$
- $\mathrm{D}(|x|) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$

Dimostrazione

- Applicando le proprietà dei logaritmi:

  $\mathrm{D}(x^\alpha) = \mathrm{D}\left(\mathrm{e}^{\alpha \ln x}\right)$

  applicando la regola di derivazione di una funzione composta:

  $\mathrm{D}\left(\mathrm{e}^{\alpha \ln x}\right) = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$

- $\mathrm{D}(\sqrt[n]{x^m}) = \mathrm{D}\left(x^{\frac{m}{n}}\right)$

  Applicando la regola sopra dimostrata $\mathrm{D}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ si ottiene:

  $\mathrm{D}(\sqrt[n]{x^m}) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n} \sqrt[n]{x^{m-n}}$

Funzioni logaritmiche ed esponenziali

- $\mathrm{D}(\log_b x) = \frac{\log_b \mathrm{e}}{x} = \frac{1}{x \ln b}$
- $\mathrm{D}(\ln x) = \frac{1}{x}$

Dimostrazione

- $\mathrm{D}(\log_b x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_b(x+h) - \log_b(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \log_b \frac{x+h}{x}$

  Applicando ancora le proprietà dei logaritmi si ottiene:

  $\mathrm{D}(\log_b x) = \lim_{h \to 0} \log_b \left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \to 0} \log_b \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$

  Applicando il limite notevole $\lim_{z \to 0} (1 + \theta z)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}^\theta$ dove $\theta = \frac{1}{x}$ si ottiene:

  $\mathrm{D}(\log_b x) = \log_b \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \frac{\log_b \mathrm{e}}{x} = \frac{1}{x \ln b}$

- Dalla regola $D(\log_b x) = \frac{\log_b \mathrm{e}}{x}$ scaturisce:

$$\mathrm{D}(\ln x) = \frac{\log_e e}{x} = \frac{1}{x}$$

- $\mathrm{D}(e^x) = \mathrm{e}^x$
- $\mathrm{D}(a^x) = a^x \ln a$
- $\mathrm{D}(x^x) = x^x(1 + \ln x)$

Dimostrazione

- $\mathrm{D}(\mathrm{e}^x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^h-\mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^h-1)}{h} = \mathrm{e}^x \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h-1}{h} = \mathrm{e}^x$

  dal limite notevole $\lim_{z\to 0} \frac{k^z-1}{z} = \ln k$

- $\mathrm{D}(a^x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = a^x \ln a$

  dal limite notevole $\lim_{z\to 0} \frac{k^z-1}{z} = \ln k$
  Un altro sistema è il seguente. Applicando le proprietà dei logaritmi:
  $\mathrm{D}(a^x) = \mathrm{D}\left(\mathrm{e}^{x\ln a}\right)$
  e applicando la regola di derivazione di una funzione composta:
  $\mathrm{D}\left(\mathrm{e}^{x\ln a}\right) = \mathrm{e}^{x\ln a}\cdot \ln a = a^x \ln a$

- $\mathrm{D}(\ln(f(x))) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f(x)\mathrm{D}(\ln(f(x))) = f'(x)$

  e quindi
  $\mathrm{D}(x^x) = x^x\mathrm{D}(\ln(x^x)) = x^x\left(\ln(x) + x\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x^x\,(1+\ln(x))$

Dimostrazione

- Data la funzione $y = a^x$ applicando la regola di derivazione della funzione inversa, in questo caso $x = \log_a y$, e si ha:

  $$\mathrm{D}(a^x) = \frac{1}{\mathrm{D}(\log_a y)} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a \mathrm{e}} = y\ln a = a^x \ln a$$

- Applicando la regola di derivazione $\mathrm{D}(a^x) = a^x \ln a$ scaturisce:

  $$\mathrm{D}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x \ln \mathrm{e} = \mathrm{e}^x$$

Funzioni goniometriche

- $\mathrm{D}(\sin x) = \cos x$

Dimostrazione

Per prima cosa si scrive il limite del rapporto incrementale, per l'incremento che tende a 0, della funzione:
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$
Usando le proprietà trigonometriche di addizione:
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(x)\cdot(1-\cos(h))+\cos(x)\sin(h)}{h}$$
A questo punto, ricordando i limiti notevoli
$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{h} = 0, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

applicando la linearità del limite otteniamo:
$$\lim_{h\to 0} -\sin(x)\frac{1-\cos(h)}{h} + \lim_{h\to 0}\cos(x)\frac{\sin(h)}{h} = -\sin(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot 1 = \cos(x)$$

- $\mathrm{D}(\cos x) = -\sin x$

Dimostrazione

Per prima cosa si scrive il limite del rapporto incrementale, per l'incremento che tende a 0, della funzione:
$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$$
Adesso sfruttiamo le proprietà trigonometriche di addizione:
$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\cos(x)\cdot(1-\cos(h))-\sin(x)\sin(h)}{h}$$
A questo punto, ricordando i limiti notevoli
$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(h)}{h} = 0, \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1$$
applicando la linearità del limite otteniamo:
$$\lim_{h\to 0} -\cos(x)\frac{1-\cos(h)}{h} + \lim_{h\to 0} -\sin(x)\frac{\sin(h)}{h} = -\cos(x)\cdot 0 - \sin(x)\cdot 1 = -\sin(x)$$

- $\mathrm{D}(\tan x) = 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Dimostrazione

Per prima cosa si scrive la funzione tangente come rapporto tra il seno ed il coseno:
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
Ora è possibile utilizzare la derivata del rapporto di due funzioni:
$$\mathrm{D}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{\cos(x)\cos(x)+\sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$
A questo punto si può sviluppare il rapporto in due modi:
$$\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
$$\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$$

- $\mathrm{D}(\cot x) = -(1+\cot^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $\mathrm{D}(\sec x) = \tan x \sec x$
- $\mathrm{D}(\csc x) = -\cot x \csc x$
- $\mathrm{D}(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Dimostrazione

Le notazioni $\arcsin$ e $\sin^{-1}$ indicano la stessa funzione. Scrivendo la funzione $y = \sin^{-1}(x)$ e moltiplichiamo da ambo le parti $\cdot\sin$ in modo da ottenere $\sin(y) = x$. Differenziando l'espressione trovata si ottiene:
$$\cos(y)\cdot y' = 1$$
di conseguenza si ha che:
$$y' = \frac{1}{\cos(y)}.$$
Ricordando che:
$$\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)} \qquad \sqrt{1-sin^2(y)} = \sqrt{1-x^2}$$
sostituendo nella derivata e si ottiene la formula che si stava cercando:

$$y' = \frac{1}{cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- $\mathrm{D}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Dimostrazione

Le notazioni $\arccos$ e $\cos^{-1}$ indicano la stessa funzione. Scrivendo la funzione $y = \cos^{-1}(x)$ e moltiplichiamo da ambo le parti $\cdot \cos$ in modo da ottenere $\cos(y) = x$. Differenziando l'espressione trovata si ottiene:
$-sin(y) \cdot y' = 1$
di conseguenza si ha che:
$$y' = -\frac{1}{sin(y)}.$$
Ricordando che:
$\sin(y) = \sqrt{1-cos^2(y)} \qquad \sqrt{1-cos^2(y)} = \sqrt{1-x^2}$
sostituendo nella derivata e si ottiene la formula che si stava cercando:
$$y' = -\frac{1}{sin(y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- $\mathrm{D}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $\mathrm{D}(\operatorname{arccot} x) = \frac{-1}{1+x^2}$
- $\mathrm{D}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
- $\mathrm{D}(\operatorname{arccsc} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Funzioni iperboliche

- $\mathrm{D}(\sinh x) = \cosh x$
- $\mathrm{D}(\cosh x) = \sinh x$
- $\mathrm{D}(\tanh x) = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- $\mathrm{D}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$
- $\mathrm{D}(\operatorname{sech} x) = -\tanh x \operatorname{sech} x$
- $\mathrm{D}(\operatorname{csch} x) = -\coth x \operatorname{csch} x$
- $\mathrm{D}(\operatorname{settsinh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $\mathrm{D}(\operatorname{settanh} x) = \frac{1}{1-x^2}$
- $\mathrm{D}(\operatorname{settcoth} x) = \frac{1}{1-x^2}$
- $\mathrm{D}(\operatorname{settsech} x) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$
- $\mathrm{D}(\operatorname{settcsch} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$

Derivate di funzioni composte

- $\mathrm{D}(|f(x)|)=f'(x)\dfrac{f(x)}{|f(x)|}=f'(x)\dfrac{|f(x)|}{f(x)}$
- $\mathrm{D}([f(x)]^n)=n\cdot f(x)^{n-1}\cdot f'(x)$
- $\mathrm{D}(\ln f(x))=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
- $\mathrm{D}(\ln|f(x)|)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
- $\mathrm{D}(\mathrm{e}^{f(x)})=\mathrm{e}^{f(x)}\cdot f'(x)$
- $\mathrm{D}(a^{f(x)})=a^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot\ln a$
- $\mathrm{D}(\sin f(x))=\cos f(x)\cdot f'(x)$
- $\mathrm{D}(\cos f(x))=-\sin f(x)\cdot f'(x)$
- $\mathrm{D}(\tan f(x))=\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
- $D(\arcsin f(x))=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
- $D(\arccos f(x))=\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
- $D(\arctan f(x))=\dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$
- $D(f(x)^{g(x)})=f(x)^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\cdot\ln f(x)+g(x)\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]$

Dimostrazione

$f(x)^{g(x)}=e^{\ln f(x)^{g(x)}}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$ e dunque si deriva seguendo la regola di $D(e^{f(x)})$ e del prodotto

- $D(x^{f(x)})=x^{f(x)}\cdot\left[f'(x)\cdot\ln x+\dfrac{f(x)}{x}\right]$

Voci correlate

- Metodi di integrazione