

TUGAS APLIKASI KOMPUTER

LATEX

Dosen Pengampu :

Drs. Sahid M.Sc.

Thesa Adi Saputra Yusri M.Cs.



oleh

Amalia Rahmadhani

Matematika B

23030630084

**PROGRAM STUDI SARJANA MATEMATIKA
DEPARTEMEN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
YOGYAKARTA
2024**

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	i
BAB I Pendahuluan dan Pengenalan Cara Kerja EMT	1
1.1 Komentar (Teks Uraian)	1
1.2 Judul	2
1.3 Sub-Judul	2
1.4 Baris Perintah	2
1.5 Latihan untuk Anda	3
1.6 Latihan untuk Anda	4
1.7 Contoh Latihan	4
1.8 Satuan	5
1.9 Format Tampilan Nilai	6
1.10 Perintah Multibaris	7
1.11 Menampilkan Daftar Variabe	7
1.12 Menampilkan Panduan	8
1.13 Matriks dan Vektor	8
1.14 Bilangan Kompleks	9
1.15 Matematika Simbolik	10
1.16 Tampilan Matematika Simbolik dengan LaTeX	13
BAB II EMT untuk Perhitungan Aljabar	15
2.1 Contoh pertama	15
2.2 Basic Syntax	18
2.3 Latihan	19
2.4 Real Numbers	20
2.5 latihan	20
2.6 Strings	21
2.7 latihan	22
2.8 Boolean Values	23
2.9 latihan	24
2.10 Output Formats	24
2.11 latihan	26
2.12 Expressions	26
2.13 latihan	28
2.14 latihan	34
2.15 Default Parameters	35
2.16 latihan	38
2.17 Memecahkan Ekspresi	39
2.18 latihan	41
2.19 latihan	48
2.20 Fungsi Matriks Lainnya (Membangun Matriks)	48
2.21 latihan	51
2.22 Vektorisasi	52
2.23 latihan	56
2.24 Sub-Matriks dan Elemen Matriks	57
2.25 latihan	59
2.26 Sortir dan Acak	59
2.27 latihan	60
2.28 Aljabar Linier	61

2.29	Matriks Simbolik	61
2.30	Nilai Numerik dalam Ekspresi Simbolik	63
2.31	Demo - Suku Bunga	64
2.32	latihan	67
2.33	Menyelesaikan Persamaan	67
2.34	latihan	69
2.35	Solusi Simbolis untuk Masalah Suku Bunga	69
BAB III	Menggambar Grafik 2D dengan EMT	73
3.1	Plot Dasar	73
3.2	Aspek Plot	76
3.3	Plot 2D di Euler	76
3.4	Plot Ekspresi atau Variabel	76
3.5	Fungsi dalam satu Parameter	90
3.6	Menggambar Beberapa Kurva pada bidang koordinat yang sama	97
3.7	Label Teks	104
3.8	LaTeX	109
3.9	Interaksi Pengguna	112
3.10	Gaya Plot 2D	118
3.11	Merencanakan Data 2D	125
3.12	Menggambar Daerah Yang Dibatasi Kurva	127
3.13	Grafik Fungsi Parametrik	131
3.14	Menggambar Grafik Bilangan Kompleks	134
3.15	Plot Statistik	134
3.16	Fungsi Implisit	149
3.17	Plot Logaritmik	161
3.18	Rujukan Lengkap Fungsi plot2d()	162
3.19	Latihan	169
BAB IV	Menggambar Plot 3D dengan EMT	179
4.1	Fungsi Dua Variabel	179
4.2	Plot Kontur	186
4.3	Plot Implisit	196
4.4	Plotting 3D Data	196
4.5	Plot Statistik	205
4.6	Permukaan Benda Putar	207
4.7	Plot 3D Khusus	209
4.8	Animasi	211
4.9	Menggambar Povray	211
4.10	Membuat Plot dengan Koordinat	218
4.11	Objek Povray	221
4.12	Fungsi Implisit	227
4.13	Objek Mesh	227
4.14	Anaglif dalam Povray	231
4.15	Menentukan Objek Sendiri	232
4.16	Contoh Lainnya	234
4.17	Latihan	234
BAB V	Kalkulus dengan EMT	243
5.1	Mendefinisikan Fungsi	243
5.2	Latihan	246
5.3	Menghitung Limit	252
5.4	Latihan	258

5.5	Turunan Fungsi	262
5.6	Latihan	268
5.7	Integral	274
5.8	Koordinat Kartesius	284
5.9	Sikloid	288
5.10	Definisi Kurvatur dengan Fungsi Parametrik Panjang Kurva	290
5.11	Latihan	295
5.12	Barisan dan Deret	297
5.13	Iterasi dan Barisan	298
5.14	Spiral Theodorus	301
5.15	Kekonvergenan	304
5.16	Iterasi menggunakan Loop yang ditulis Langsung	306
5.17	Iterasi di dalam Fungsi	308
5.18	Iterasi Simbolik	310
5.19	Tabel Fungsi	312
BAB VI	Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT	315
6.1	Fungsi-fungsi Geometri	315
6.2	Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga	316
6.3	Latihan	319
6.4	322
6.5	Garis dan Lingkaran yang Berpotongan	323
6.6	Garis Sumbu	324
6.7	Contoh 3: Rumus Heron	326
6.8	Parabola	333
6.9	Contoh 5: Trigonometri Rasional	335
6.10	Contoh Lain	337
6.11	Aturan Triple Spread	340
6.12	Garis Bagi Sudut	341
6.13	Sudut Tali Busur	344
6.14	Catatan awal	344
6.15	Dua titik	345
6.16	Tiga poin	350
6.17	Empat titik	353
6.18	Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray	355
6.19	Plot dengan Povray	358
6.20	Contoh 8: Geometri Bumi	361
6.21	Latihan	366
6.22	Nomor 1	369
6.23	Nomor 2	373
6.24	Nomor 3	375
6.25	Nomor 4	378
6.26	Nomor 5	378
BAB VII	EMT4Statistika_Amalia Rahmadhani_23030630084	383
7.1	EMT untuk Statistika	383
7.2	Tabel	386
7.3	Distribusi	390
7.4	Distribusi Diskrit	395
7.5	Merencanakan Data/ Plot Data	398
7.6	Regresi dan Korelasi	406
7.7	Membuat Fungsi baru	411
7.8	Simulasi Monte Carlo	411

7.9	uji chi-kuadrat	418
7.10	uji F	420
7.11	Angka Acak	421
7.12	LATIHAN	424
7.13	Pengantar untuk Pengguna Proyek R	426
7.14	Sintaks Dasar	427
7.15	Pengindeksan	428
7.16	Tipe Data	429
7.17	Array	433
7.18	Daftar	435
7.19	File Input dan Output (Membaca dan Menulis Data)	437
7.20	File CSV	439
7.21	Menggunakan Tabel	442
7.22	Menganalisis Garis	442
7.23	Membaca dari Web	444
7.24	Input dan Output Variabel	444
7.25	LATIHAN	446

BAB I

PENDAHULUAN DAN PENGENALAN CARA KERJA EMT

Selamat datang! Ini adalah pengantar pertama ke Euler Math Toolbox (disingkat EMT atau Euler). EMT adalah sistem terintegrasi yang merupakan perpaduan kernel numerik Euler dan program komputer aljabar Maxima.

- Bagian numerik, GUI, dan komunikasi dengan Maxima telah dikembangkan oleh R. Grothmann, seorang profesor matematika di Universitas Eichstätt, Jerman. Banyak algoritma numerik dan pustaka software open source yang digunakan di dalamnya.
- Maxima adalah program open source yang matang dan sangat kaya untuk perhitungan simbolik dan aritmatika tak terbatas. Software ini dikelola oleh sekelompok pengembang di internet.
- Beberapa program lain (LaTeX, Povray, Tiny C Compiler, Python) dapat digunakan di Euler untuk memungkinkan perhitungan yang lebih cepat maupun tampilan atau grafik yang lebih baik.

Yang sedang Anda baca (jika dibaca di EMT) ini adalah berkas notebook di EMT. Notebook aslinya bawaan EMT (dalam bahasa Inggris) dapat dibuka melalui menu File, kemudian pilih “Open Tutorias and Example”, lalu pilih file “00 First Steps.en”. Perhatikan, file notebook EMT memiliki ekstensi “.en”. Melalui notebook ini Anda akan belajar menggunakan software Euler untuk menyelesaikan berbagai masalah matematika.

Panduan ini ditulis dengan Euler dalam bentuk notebook Euler, yang berisi teks (deskriptif), baris-baris perintah, tampilan hasil perintah (numerik, ekspresi matematika, atau gambar/plot), dan gambar yang disisipkan dari file gambar.

Untuk menambah jendela EMT, Anda dapat menekan [F11]. EMT akan menampilkan jendela grafik di layar desktop Anda. Tekan [F11] lagi untuk kembali ke tata letak favorit Anda. Tata letak disimpan untuk sesi berikutnya.

Anda juga dapat menggunakan [Ctrl]+[G] untuk menyembunyikan jendela grafik. Selanjutnya Anda dapat beralih antara grafik dan teks dengan tombol [TAB].

Seperti yang Anda baca, notebook ini berisi tulisan (teks) berwarna hijau, yang dapat Anda edit dengan mengklik kanan teks atau tekan menu Edit -> Edit Comment atau tekan [F5], dan juga baris perintah EMT yang ditandai dengan “>” dan berwarna merah. Anda dapat menyisipkan baris perintah baru dengan cara menekan tiga tombol bersamaan: [Shift]+[Ctrl]+[Enter].

1.1 Komentar (Teks Uraian)

Komentar atau teks penjelasan dapat berisi beberapa “markup” dengan sintaks sebagai berikut.

- – Judul
- ** Sub-Judul
- latex: $F(x) = \int \hat{ax} f(t), dt$ $\mathit{mathjax} : \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$
- maxima: 'integrate(x^3,x) = integrate(x^3,x) + C
- <http://www.euler-math-toolbox.de>

- See: <http://www.google.de> | Google

- image: hati.png
- --

Hasil sintaks-sintaks di atas (tanpa diawali tanda strip) adalah sebagai berikut.

1.2 Judul

1.3 Sub-Judul

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

$$\int x^3 dx = C + \frac{x^4}{4}$$

<http://www.euler-math-toolbox.de>

Google

image: hati.png

>/ baris perintah diawali dengan >, komentar (keterangan) diawali dengan //

1.4 Baris Perintah

Mari kita tunjukkan cara menggunakan EMT sebagai kalkulator yang sangat canggih.

EMT berorientasi pada baris perintah. Anda dapat menuliskan satu atau lebih perintah dalam satu baris perintah. Setiap perintah harus diakhiri dengan koma atau titik koma.

- Titik koma menyembunyikan output (hasil) dari perintah.
- Sebuah koma mencetak hasilnya.
- Setelah perintah terakhir, koma diasumsikan secara otomatis (boleh tidak ditulis).

Dalam contoh berikut, kita mendefinisikan variabel r yang diberi nilai 1,25. Output dari definisi ini adalah nilai variabel. Tetapi karena tanda titik koma, nilai ini tidak ditampilkan. Pada kedua perintah di belakangnya, hasil kedua perhitungan tersebut ditampilkan.

Gambar diambil dari folder images di tempat file notebook berada dan tidak dapat dibaca dari Web. Untuk “See:”, tautan (URL)web lokal dapat digunakan.

Paragraf terdiri atas satu baris panjang di editor. Pergantian baris akan memulai baris baru. Paragraf harus dipisahkan dengan baris kosong.

>r=1.25; pi*r^2, 2*pi*r

4 . 90873852123
7 . 85398163397

1.5 Latihan untuk Anda

- Sisipkan beberapa baris perintah baru
- Tulis perintah-perintah baru untuk melakukan suatu perhitungan yang Anda inginkan, boleh menggunakan variabel, boleh tanpa variabel.

• _____

- Contoh Latihan

> x=12, y=6, z=2

12
6
2

> x*y*z

144

>pi*x^2

452.389342117

>A=0.5; x*A^2, 5*y*z

12
60

>A* x / y

1

Beberapa catatan yang harus Anda perhatikan tentang penulisan sintaks perintah EMT.

- Pastikan untuk menggunakan titik desimal, bukan koma desimal untuk bilangan!
- Gunakan * untuk perkalian dan ^ untuk eksponen (pangkat).
- Seperti biasa, * dan / bersifat lebih kuat daripada + atau -.
- ^ mengikat lebih kuat dari , sehingga πr^2 merupakan rumus luas lingkaran.
- Jika perlu, Anda harus menambahkan tanda kurung, seperti pada $2^2(2^3)$.

Perintah $r = 1.25$ adalah menyimpan nilai ke variabel di EMT. Anda juga dapat menulis $r := 1.25$ jika mau. Anda dapat menggunakan spasi sesuka Anda.

Anda juga dapat mengakhiri baris perintah dengan komentar yang diawali dengan dua garis miring (//).

>r := 1.25 // Komentar: Menggunakan := sebagai ganti =

1.25

Argumen atau input untuk fungsi ditulis di dalam tanda kurung.
>sin(45°), cos(pi), log(sqrt(E))

0.707106781187
-1
0.5

Seperti yang Anda lihat, fungsi trigonometri bekerja dengan radian, dan derajat dapat diubah dengan °. Jika keyboard Anda tidak memiliki karakter derajat tekan [F7], atau gunakan fungsi deg() untuk mengonversi.

EMT menyediakan banyak sekali fungsi dan operator matematika. Hampir semua fungsi matematika sudah tersedia di EMT. Anda dapat melihat daftar lengkap fungsi-fungsi matematika di EMT pada berkas Referensi (klik menu Help -> Reference)

Untuk membuat rangkaian komputasi lebih mudah, Anda dapat merujuk ke hasil sebelumnya dengan "%". Cara ini sebaiknya hanya digunakan untuk merujuk hasil perhitungan dalam baris perintah yang sama.

>(sqrt(5)+1)/2, %^2-%+1 // Memeriksa solusi $x^2-x+1=0$

1.61803398875
2

1.6 Latihan untuk Anda

- Buka berkas Reference dan baca fungsi-fungsi matematika yang tersedia di EMT.
- Sisipkan beberapa baris perintah baru.
- Lakukan contoh-contoh perhitungan menggunakan fungsi-fungsi matematika di EMT.

• _____

1.7 Contoh Latihan

>pi^2

9.86960440109

>sqrt(9*16)

12

>B=[1,2;0,4]

1	2
0	4

>log10(100)

2

4

```
>sin(45*pi/180)
```

```
0.707106781187
```

```
>det(B)
```

4

1.8 Satuan

EMT dapat mengubah unit satuan menjadi sistem standar internasional (SI). Tambahkan satuan di belakang angka untuk konversi sederhana.

```
>1miles // 1 mil = 1609,344 m
```

```
1609.344
```

Beberapa satuan yang sudah dikenal di dalam EMT adalah sebagai berikut. Semua unit diakhiri dengan tanda dolar (\$), namun boleh tidak perlu ditulis dengan mengaktifkan easyunits.

```
kilometer$:=1000;  
km:= kilometer;  
cm$:=0.01;  
mm$:=0.001;  
minute$:=60;  
min:= minute;  
minutes:= minute;  
hour:= 60 * minute;  
h:= hour;  
hours:= hour;  
day:= 24 * hour;  
days:= day;  
d:= day;  
year:= 365.2425 * day;  
years:= year;  
y:= year;  
inch$:=0.0254;  
in:= inch;  
feet:= 12 * inch;  
foot:= feet;  
ft:= feet;  
yard:= 3 * feet;  
yards:= yard;  
yd:= yard;  
mile:= 1760 * yard;  
miles:= mile;  
kg$:=1;
```

```
sec$:=1;  
ha$:=10000;  
Ar$:=100;  
Tagwerk$:=3408;  
Acre$:=4046.8564224;  
pt$:=0.376mm;  
Untuk konversi ke dan antar unit, EMT menggunakan operator khusus, yakni ->.  
>4km -> miles, 4inch -> " mm"
```

2.48548476895

101.6 mm

1.9 Format Tampilan Nilai

Akurasi internal untuk nilai bilangan di EMT adalah standar IEEE, sekitar 16 digit desimal. Aslinya, EMT tidak mencetak semua digit suatu bilangan. Ini untuk menghemat tempat dan agar terlihat lebih baik. Untuk mengatramilan satu bilangan, operator berikut dapat digunakan.

>pi

3.14159265359

>longest pi

3.141592653589793

>long pi

3.14159265359

>short pi

3.1416

>shortest pi

3.1

>fraction pi

312689/99532

>short 1200*1.03^10, long E, longest pi

1612.7

2.71828182846

3.141592653589793

Format aslinya untuk menampilkan nilai menggunakan sekitar 10 digit. Format tampilan nilai dapat diatur secara global atau hanya untuk satu nilai.

Anda dapat mengganti format tampilan bilangan untuk semua perintah selanjutnya. Untuk mengembalikan ke format aslinya dapat digunakan perintah “deformat” atau “reset”.

>longestformat; pi, deformat; pi

```
3.141592653589793
```

```
3.14159265359
```

Kernel numerik EMT bekerja dengan bilangan titik mengambang (floating point) dalam presisi ganda IEEE (berbeda dengan bagian simbolik EMT). Hasil numerik dapat ditampilkan dalam bentuk pecahan.

```
>1/7+1/4, fraction %
```

```
0.392857142857
```

```
11/28
```

1.10 Perintah Multibaris

Perintah multi-baris membentang di beberapa baris yang terhubung dengan “...” di setiap akhir baris, kecuali baris terakhir. Untuk menghasilkan tanda pindah baris tersebut, gunakan tombol [Ctrl]+[Enter]. Ini akan menyambung perintah ke baris berikutnya dan menambahkan “...” di akhir baris sebelumnya. Untuk menggabungkan suatu baris ke baris sebelumnya, gunakan [Ctrl]+[Backspace].

Contoh perintah multi-baris berikut dapat dijalankan setiap kali kursor berada di salah satu barisnya. Ini juga menunjukkan bahwa ... harus berada di akhir suatu baris meskipun baris tersebut memuat komentar.

```
>a=4; b=15; c=2; // menyelesaikan a*x^2+b*x+c=0 secara manual ...
>D=sqrt(b^(a/2)^4)-c/a); ...
>-b/(2*a) + D, ...
>-b/(2*a) - D
```

```
-0.138444501319
```

```
-3.61155549868
```

1.11 Menampilkan Daftar Variabel

Untuk menampilkan semua variabel yang sudah pernah Anda definisikan sebelumnya (dan dapat dilihat kembali nilainya), gunakan perintah “listvar”.

```
>listvar
```

z	2
A	0.5
r	1.25
x	12
y	6
B	Type: Real Matrix (2x2)
a	4
b	15
c	2
D	1.73655549868123

Perintah listvar hanya menampilkan variabel buatan pengguna. Dimungkinkan untuk menampilkan variabel lain, dengan menambahkan string termuat di dalam nama variabel yang diinginkan.

Perlu Anda perhatikan, bahwa EMT membedakan huruf besar dan huruf kecil. Jadi variabel “d” berbeda dengan variabel “D”.

Contoh berikut ini menampilkan semua unit yang diakhiri dengan “m” dengan mencari semua variabel yang berisi “m\$”.

```
>listvar m$
```

km\$	1000
cm\$	0.01
mm\$	0.001
nm\$	1853.24496
gram\$	0.001
m\$	1
hqquantum\$	6.62606957e-34
atm\$	101325

Untuk menghapus variabel tanpa harus memulai ulang EMT gunakan perintah “remvalue”.

```
>remvalue a,b,c,D
```

```
>D
```

Variable D not found!

Error in:

D ...
^

1.12 Menampilkan Panduan

Untuk mendapatkan panduan tentang penggunaan perintah atau fungsi di EMT, buka jendela panduan dengan menekan [F1] dan cari fungsinya. Anda juga dapat mengklik dua kali pada fungsi yang tertulis di baris perintah atau di teks untuk membuka jendela panduan.

Coba klik dua kali pada perintah “intrandom” berikut ini!

```
>intrandom(10,6)
```

```
[4, 2, 6, 2, 4, 2, 3, 2, 2, 6]
```

Di jendela panduan, Anda dapat mengklik kata apa saja untuk menemukan referensi atau fungsi.

Misalnya, coba klik kata “random” di jendela panduan. Kata tersebut boleh ada dalam teks atau di bagian “See:” pada panduan. Anda akan menemukan penjelasan fungsi “random”, untuk menghasilkan bilangan acak berdistribusi uniform antara 0,0 dan 1,0. Dari panduan untuk “random” Anda dapat menampilkan panduan untuk fungsi “normal”, dll.

```
>random(10)
```

```
[0.270906, 0.704419, 0.217693, 0.445363, 0.308411, 0.914541,  
0.193585, 0.463387, 0.095153, 0.595017]
```

```
>normal(10)
```

```
[-0.495418, 1.6463, -0.390056, -1.98151, 3.44132, 0.308178,  
-0.733427, -0.526167, 1.10018, 0.108453]
```

1.13 Matriks dan Vektor

EMT merupakan suatu aplikasi matematika yang mengerti “bahasa matriks”. Artinya, EMT menggunakan vektor dan matriks untuk perhitungan-perhitungan tingkat lanjut. Suatu vektor atau

matriks dapat didefinisikan dengan tanda kurung siku. Elemen-elemennya dituliskan di dalam tanda kurung siku, antar elemen dalam satu baris dipisahkan oleh koma(,), antar baris dipisahkan oleh titik koma (;).

Vektor dan matriks dapat diberi nama seperti variabel biasa.

```
>v=[4,5,6,3,2,1]
```

```
[4, 5, 6, 3, 2, 1]
```

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Karena EMT mengerti bahasa matriks, EMT memiliki kemampuan yang sangat canggih untuk melakukan perhitungan matematis untuk masalah-masalah aljabar linier, statistika, dan optimisasi.

Vektor juga dapat didefinisikan dengan menggunakan rentang nilai dengan interval tertentu menggunakan tanda titik dua (:), seperti contoh berikut ini.

```
>c=1:5
```

```
[1, 2, 3, 4, 5]
```

```
>w=0:0.1:1
```

```
[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1]
```

```
>mean(w^2)
```

0.35

1.14 Bilangan Kompleks

EMT juga dapat menggunakan bilangan kompleks. Tersedia banyak fungsi untuk bilangan kompleks di EMT. Bilangan imaginer

$$i = \sqrt{-1}$$

dituliskan dengan huruf I (huruf besar I), namun akan ditampilkan dengan huruf i (i kecil).

re(x) : bagian riil pada bilangan kompleks x.

im(x) : bagian imaginer pada bilangan kompleks x.

complex(x) : mengubah bilangan riil x menjadi bilangan kompleks.

conj(x) : Konjugat untuk bilangan bilangan kompleks x.

arg(x) : argumen (sudut dalam radian) bilangan kompleks x.

real(x) : mengubah x menjadi bilangan riil.

Apabila bagian imaginer x terlalu besar, hasilnya akan menampilkan pesan kesalahan.

```
>sqrt(-1) // Error!
```

```
>sqrt(complex(-1))
```

```
>z=2+3*I, re(z), im(z), conj(z), arg(z), deg(arg(z)), deg(arctan(3/2))
```

```
2+3i  
2  
3  
2-3i  
0.982793723247  
56.309932474  
56.309932474
```

```
>deg(arg(I)) // 90°
```

```
90
```

```
>sqrt(-1)
```

```
Floating point error!  
Error in sqrt  
Error in:  
sqrt (-1) ...  
^
```

```
>sqrt(complex(-1))
```

```
0+1i
```

EMT selalu menganggap semua hasil perhitungan berupa bilangan riil dan tidak akan secara otomatis mengubah ke bilangan kompleks.

Jadi akar kuadrat -1 akan menghasilkan kesalahan, tetapi akar kuadrat kompleks didefinisikan untuk bidang koordinat dengan cara seperti biasa. Untuk mengubah bilangan riil menjadi kompleks, Anda dapat menambahkan 0i atau menggunakan fungsi “complex”.

```
>complex(-1), sqrt(%)
```

```
-1+0i  
0+1i
```

1.15 Matematika Simbolik

EMT dapat melakukan perhitungan matematika simbolis (eksak) dengan bantuan software Maxima. Software Maxima otomatis sudah terpasang di komputer Anda ketika Anda memasang EMT. Meskipun demikian, Anda dapat juga memasang software Maxima tersendiri (yang terpisah dengan instalasi Maxima di EMT).

Pengguna Maxima yang sudah mahir harus memperhatikan bahwa terdapat sedikit perbedaan dalam sintaks antara sintaks asli Maxima dan sintaks ekspresi simbolik di EMT.

Untuk melakukan perhitungan matematika simbolis di EMT, awali perintah Maxima dengan tanda “&”. Setiap ekspresi yang dimulai dengan “&” adalah ekspresi simbolis dan dikerjakan oleh Maxima.

```
>&(a+b)^2
```

$$(b + a)^2$$

```
>&expand((a+b)^2), &factor(x^2+5*x+6)
```

$$b^2 + 2ab + a^2$$

$$(x+2)(x+3)$$

>&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc

$$[x = \frac{-\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}, x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}]$$

>&(a^2-b^2)/(a+b), &ratsimp(%); // ratsimp menyederhanakan bentuk pecahan

$$\frac{a^2 - b^2}{b + a}$$

$$a - b$$

>10! // nilai faktorial (modus EMT)

3628800

>&10! //nilai faktorial (simbolik dengan Maxima)

3628800

Untuk menggunakan perintah Maxima secara langsung (seperti perintah pada layar Maxima) awali perintahnya dengan tanda “::” pada baris perintah EMT. Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT (disebut “modus kompatibilitas”).

>factor(1000) // mencari semua faktor 1000 (EMT)

[2, 2, 2, 5, 5, 5]

>:: factor(1000) // faktorisasi prima 1000 (dengan Maxima)

$$2^3 \cdot 5^3$$

>:: factor(20!)

$$2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

Jika Anda sudah mahir menggunakan Maxima, Anda dapat menggunakan sintaks asli perintah Maxima dengan menggunakan tanda “::” untuk mengawali setiap perintah Maxima di EMT. Perhatikan, harus ada spasi antara “::” dan perintahnya.

>::: binomial(5,2); // nilai C(5,2)

10

>::: binomial(m,4); // $C(m,4)=m!/(4!(m-4)!)$

$$\frac{(m - 3)(m - 2)(m - 1)m}{24}$$

>::: trigexpand(cos(x+y)); // rumus $\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$

$$\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

>::: trigexpand(sin(x+y));

$$\cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$$

>::: trigsimp(((1-sin(x)^2)*cos(x))/cos(x)^2+tan(x)*sec(x)^2) //menyederhanakan fungsi trigonometri

$$\frac{\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x)^3}$$

Untuk menyimpan ekspresi simbolik ke dalam suatu variabel digunakan tanda “&=”.

>p1 &= (x^3+1)/(x+1)

$$\frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

>&ratsimp(p1)

$$x^2 - x + 1$$

Untuk mensubstitusikan suatu nilai ke dalam variabel dapat digunakan perintah “with”.

>&p1 with x=3 // $(3^3+1)/(3+1)$

7

>&p1 with x=a+b, &ratsimp(%) //substitusi dengan variabel baru

$$\frac{(b + a)^3 + 1}{b + a + 1}$$

$$b^2 + (2ab - 1)b^2 + a^2 - a + 1$$

```
>&diff(p1,x) //turunan p1 terhadap x
```

$$\begin{array}{r} 2 \quad \quad \quad 3 \\ 3x^2 \quad \quad x^3 + 1 \\ \hline x^2 + 1 \quad \quad \quad 2 \\ (x+1)^2 \end{array}$$

```
>&integrate(p1,x) // integral p1 terhadap x
```

$$\begin{array}{r} 3 \quad \quad \quad 2 \\ 2x^3 - 3x^2 + 6x \\ \hline 6 \end{array}$$

1.16 Tampilan Matematika Simbolik dengan LaTeX

Anda dapat menampilkan hasil perhitungan simbolik secara lebih bagus menggunakan LaTeX. Untuk melakukan hal ini, tambahkan tanda dolar (\$) di depan tanda & pada setiap perintah Maxima.

Perhatikan, hal ini hanya dapat menghasilkan tampilan yang diinginkan apabila komputer Anda sudah terpasang software LaTeX.

```
>$&(a+b)^2
```

$$(b+a)^2$$

```
>$&expand((a+b)^2), $&factor(x^2+5*x+6)
```

$$\begin{array}{c} b^2 + 2ab + a^2 \\ (x+2)(x+3) \end{array}$$

```
>$&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc
```

$$\left[x = \frac{-\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}, x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a} \right]$$

```
>$&(a^2-b^2)/(a+b), $&ratsimp(%)
```

$$\begin{array}{c} a^2 - b^2 \\ \hline b + a \\ a - b \end{array}$$

Selamat Belajar dan Berlatih!

Baik, itulah sekilas pengantar penggunaan software EMT. Masih banyak kemampuan EMT yang akan Anda pelajari dan praktikkan.

Sebagai latihan untuk memperlancar penggunaan perintah-perintah EMT yang sudah dijelaskan di atas, silakan Anda lakukan hal-hal sebagai berikut.

- Carilah soal-soal matematika dari buku-buku Matematika.
- Tambahkan beberapa baris perintah EMT pada notebook ini.
- Selesaikan soal-soal matematika tersebut dengan menggunakan EMT. Pilih soal-soal yang sesuai dengan perintah-perintah yang sudah dijelaskan dan dicontohkan di atas.

-

- Contoh latihan

```
>::f:=x^3-4*x^2+6*x-2
```

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 2$$

```
>::diff(f,x)// fungsi turunan
```

$$3x^2 - 8x + 6$$

```
>::df(2);//sebagai contoh,jika x=2
```

```
>::x=2
```

$$x = 2$$

```
>::int(f,x)
```

$$\text{int}(x^3 - 4x^2 + 6x - 2, x)$$

```
>::solve(f,x)
```

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{x-1}{x-2} \right) \\ & [x = -\frac{\sqrt{11}}{9} \left(\frac{17}{3} \right)^{1/3} \\ & + \frac{\sqrt{11}}{3/2} \left(\frac{17}{27} \right)^{1/3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{x-1}{x-2} \right)^{1/4} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{-\sqrt{11}}{9} \left(\frac{17}{3} \right)^{1/3} - \frac{\sqrt{11}}{3/2} \left(\frac{17}{27} \right)^{1/3} \right)^{1/2} \right)^{2/3} \\ & x = \frac{\sqrt{11}}{3/2} \left(\frac{17}{27} \right)^{1/3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{x-1}{x-2} \right)^{1/4} - \frac{\sqrt{11}}{9} \left(\frac{17}{3} \right)^{1/3} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sqrt{11}}{3/2} \left(\frac{17}{27} \right)^{1/3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{-\sqrt{11}}{9} \left(\frac{17}{3} \right)^{1/3} - \frac{\sqrt{11}}{3/2} \left(\frac{17}{27} \right)^{1/3} \right)^{1/2} \right)^{3/2} \right)^{2/3} \\ & x = \left(\frac{\sqrt{11}}{3/2} \left(\frac{17}{27} \right)^{1/3} - \frac{\sqrt{11}}{9} \left(\frac{17}{3} \right)^{1/3} \right)^{2/3} \end{aligned}$$

BAB II

EMT UNTUK PERHITUNGAN ALJABAR

Pada notebook ini Anda belajar menggunakan EMT untuk melakukan berbagai perhitungan terkait dengan materi atau topik dalam Aljabar. Kegiatan yang harus Anda lakukan adalah sebagai berikut:

- Membaca secara cermat dan teliti notebook ini;
- Menerjemahkan teks bahasa Inggris ke bahasa Indonesia;
- Mencoba contoh-contoh perhitungan (perintah EMT) dengan cara meng-ENTER setiap perintah EMT yang ada (pindahkan kursor ke baris perintah)
- Jika perlu Anda dapat memodifikasi perintah yang ada dan memberikan keterangan/penjelasan tambahan terkait hasilnya.
- Menyisipkan baris-baris perintah baru untuk mengerjakan soal-soal Aljabar dari file PDF yang saya berikan;
- Memberi catatan hasilnya.
- Jika perlu tuliskan soalnya pada teks notebook (menggunakan format LaTeX).
- Gunakan tampilan hasil semua perhitungan yang eksak atau simbolik dengan format LaTeX. (Seperti contoh-contoh pada notebook ini.)

2.1 Contoh pertama

Menyederhanakan bentuk aljabar:

$$\begin{aligned} & 6x^{-3}y^5 \times -7x^2y^{-9} \\ & >\$&6*x^{(-3)*y5*-7*x^2*y(-9)} \\ & \quad -\frac{42}{x y^4} \end{aligned}$$

Menjabarkan:

$$\begin{aligned} & (6x^{-3} + y^5)(-7x^2 - y^{-9}) \\ & >\$&showev('expand((6*x^{(-3)+y5}*(-7*x^{2-y}(-9)))))) \\ & \quad expand \left(\left(-\frac{1}{y^9} - 7x^2 \right) \left(y^5 + \frac{6}{x^3} \right) \right) = -7x^2y^5 - \frac{1}{y^4} - \frac{6}{x^3y^9} - \frac{42}{x} \end{aligned}$$

Baris perintah

Baris perintah Euler terdiri dari satu atau beberapa perintah Euler yang diikuti oleh titik koma ";" atau koma

".". Titik koma mencegah pencetakan hasil. Koma setelah perintah terakhir dapat dihilangkan.

Baris perintah berikut hanya akan mencetak hasil ekspresi, bukan tugas atau perintah format.

```
>r:=2; h:=4; pi*r^2*h/3
```

Perintah harus dipisahkan dengan spasi. Baris perintah berikut mencetak dua hasilnya

```
>pi*2*r*h, %+2*pi*r*h // Ingat tanda % menyatakan hasil perhitungan terakhir sebelumnya
```

```
50.2654824574  
100.530964915
```

Baris perintah dieksekusi sesuai urutan pengguna menekan tombol enter. Jadi Anda akan mendapatkan nilai baru setiap kali Anda mengeksekusi

baris kedua

```
>x := 1;  
>x := cos(x) // nilai cosinus (x dalam radian)
```

```
0.540302305868
```

```
>x := cos(x)
```

```
0.857553215846
```

Jika dua baris dihubungkan dengan “...” kedua baris akan selalu dieksekusi secara bersamaan.

```
>x := 1.5; ...  
>x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2,
```

```
1.41666666667  
1.41421568627  
1.41421356237
```

Ini juga merupakan cara yang baik untuk membagi perintah yang panjang menjadi dua baris atau lebih. Anda dapat menekan Ctrl+Return untuk membagi baris menjadi dua pada posisi kursor saat ini, atau Ctrl+Back untuk menggabungkan baris-baris tersebut.

Untuk melipat semua garis yang ada tekan Ctrl+L. Maka garis-garis berikutnya hanya akan terlihat jika salah satu dari garis-garis tersebut menjadi fokus Untuk melipat satu baris ganda, mulailah baris pertama dengan "%+..

```
>%+ x=4+5; ...  
> // This line will not be visible once the cursor is off the line
```

Baris yang dimulai dengan %% tidak akan terlihat sama sekali.

81

Euler mendukung perulangan dalam baris perintah, asalkan dapat dimasukkan ke dalam satu baris atau beberapa baris. Dalam program,

pembatasan ini tentu saja tidak berlaku. Untuk informasi lebih lanjut, lihat pengantar berikut.

```
>x=1; for i=1 to 5; x := (x+2/x)/2, end; // menghitung akar 2
```

```
1.5  
1.41666666667  
1.41421568627  
1.41421356237  
1.41421356237
```

Tidak apa-apa menggunakan beberapa baris. Pastikan baris diakhiri dengan “...”.

>x := 1.5; // comments go here before the ...

>repeat xnew:=(x+2/x)/2; until xnew~ =x; ...

>

Loop structure not complete, must be within one line!

>x := xnew; ...

>

Loop structure not complete, must be within one line!

>end; ...

>

“end” only allowed in functions or loops!

Error in :

end; ...
^

>x,

1.41421356237

Struktur kondisional juga berfungsi

>if E^{pi} > pi E; then “Thought so!”, endif;

Thought so!

Saat Anda menjalankan perintah, kursor dapat berada di posisi mana pun di baris perintah. Anda dapat kembali ke perintah sebelumnya atau melompat ke perintah berikutnya dengan tombol panah. Atau Anda dapat mengeklik bagian komentar di atas perintah untuk membuka perintah tersebut.

Saat Anda menggerakkan kursor di sepanjang baris, pasangan tanda kurung buka dan tutup akan disorot. Perhatikan juga baris status. Setelah tanda kurung buka fungsi sqrt(), baris status akan menampilkan teks

bantuan untuk fungsi tersebut. Jalankan perintah dengan tombol return

>sqrt(sin(10°)/cos(20°))

0.429875017772

Untuk melihat bantuan untuk perintah terbaru, buka jendela bantuan dengan F1. Di sana, Anda dapat memasukkan teks yang ingin dicari. Pada baris kosong, bantuan untuk jendela bantuan akan ditampilkan. Anda dapat menekan escape untuk menghapus baris, atau untuk menutup jendela bantuan.

Anda dapat mengklik dua kali perintah apa pun untuk membuka bantuan untuk perintah ini. Coba klik dua kali perintah exp di

bawah ini pada baris perintah.

>exp(log(2.5))

2.5

Anda juga dapat menyalin dan menempel di Euler. Gunakan Ctrl-C dan Ctrl-V untuk ini. Untuk menandai teks, seret tetikus atau gunakan shift

bersamaan dengan tombol kursor apa pun. Selain itu, Anda dapat menyalin tanda kurung yang disorot.

2.2 Basic Syntax

Euler mengetahui fungsi matematika yang umum. Seperti yang telah Anda lihat di atas, fungsi trigonometri bekerja dalam radian atau derajat. Untuk mengonversi ke derajat, tambahkan simbol derajat (dengan tombol F7) ke nilai, atau gunakan fungsi rad(x). Fungsi akar kuadrat disebut sqrt dalam Euler. Tentu saja, $x^{(1/2)}$ juga memungkinkan.

Untuk mengatur variabel, gunakan “=” atau “:=”. Demi kejelasan, pengantar ini menggunakan bentuk yang terakhir. Spasi tidak menjadi

masalah. Namun, spasi di antara perintah diharapkan.

Beberapa perintah dalam satu baris dipisahkan dengan “;” atau “,”. Tanda titik koma menghilangkan keluaran perintah. Di akhir baris perintah, tanda “;” diasumsikan, jika “;” tidak ada.

```
>g:=9.81; t:=2.5; 1/2*g*t^2
```

30.65625

EMT menggunakan sintaks pemrograman untuk ekspresi. Untuk memasukkan

$$e^2 \cdot \left(\frac{1}{3 + 4 \log(0.6)} + \frac{1}{7} \right)$$

Anda harus menetapkan tanda kurung yang benar dan menggunakan / untuk pecahan. Perhatikan tanda kurung yang disorot untuk mendapatkan bantuan. Perhatikan bahwa konstanta Euler e diberi nama E dalam EMT.

```
>E^2*(1/(3+4*log(0.6))+1/7)
```

8.77908249441

Untuk menghitung ekspresi rumit seperti

$$\left(\frac{\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + 2}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} \right)^2 \pi$$

Anda perlu memasukkannya dalam formulir baris.

```
>((1/7 + 1/8 + 2) / (1/3 + 1/2))^2 * pi
```

23.2671801626

Letakkan tanda kurung dengan hati-hati di sekitar sub-ekspresi yang perlu dihitung terlebih dahulu. EMT membantu Anda dengan menyorot ekspresi yang mengakhiri tanda kurung tutup. Anda juga harus memasukkan nama “pi” untuk huruf Yunani pi.

Hasil perhitungan ini berupa bilangan floating point. Ini secara default dicetak dengan akurasi sekitar 12 digit. Di baris perintah berikut, kita juga mempelajari bagaimana kita bisa merujuk ke hasil sebelumnya dalam baris yang sama.

```
>1/3+1/7, fraction %
```

0.47619047619

10/21

Perintah Euler dapat berupa ekspresi atau perintah primitif. Ekspresi terbuat dari operator dan fungsi. Jika perlu, harus berisi tanda kurung untuk memaksakan urutan eksekusi yang benar. Jika ragu, memasang braket adalah ide yang bagus. Perhatikan bahwa EMT menampilkan tanda kurung buka dan tutup saat mengedit baris perintah.

```
>(cos(pi/4)+1)^3*(sin(pi/4)+1)2
```

14.4978445072

Operator numerik Euler meliputi

- unary atau operator plus
- unary atau operator minus
- *, /
- . the matrix product

a^b pangkat untuk a positif atau bilangan bulat b ($a^{**}b$ juga

berfungsi)

$N!$ operator faktorial

dan masih banyak lagi.

Berikut beberapa fungsi yang mungkin Anda perlukan. Masih banyak lagi.

sin,cos,tan,atan,asin,acos,rad,deg

log,exp,log10,sqrt,logbase

bin,logbin,logfac,mod,floor,ceil,round,abs,sign

conj,re,im,arg,conj,real,complex

beta,betai,gamma,complexgamma,ellrf,ellf,ellrd,elle

bitand,bitor,bitxor,bitnot

Beberapa perintah memiliki alias, mis. Untuk log.

>ln(E^2), arctan(tan(0.5))

2

0.5

>sin(30°)

0.5

Pastikan untuk menggunakan tanda kurung (tanda kurung bulat), setiap kali ada keraguan tentang urutan eksekusi! Berikut ini tidak sama dengan $(2^3)4$, yang merupakan default untuk 2^34 di EMT (beberapa sistem numerik melakukannya dengan cara lain).

> 2^34 , $(2^3)4$, $2^{(3)4}$

2.41785e+024

4096

2.41785e+024

2.3 Latihan

Untuk menghitung

$$\left(\frac{24a^{10}b^{-8}c^7}{12a^6b^{-3}c^5} \right)^{-5}$$

>a = 2;

>b = 4;

>c = 6;

>((24a^10 * b^8 * c^-7) / (12a^6 * b^-7 * c^5))-5

1.02053001374e-006

untuk menghitung:

$$\left(\frac{125p^{12}q^{-14}r^{22}}{25p^8q^6r^{-15}} \right)^{-4}$$

>p = 8;

>q = 2;

>r = 1;

$$>((125p^{12} * q^{-14} * r^{22}) / (25p^8 * q^6 * r^{-15})) - 4$$

6871947.6736

>(12^6-2 * 5^7-5)

2829729

$$>(3a^2)^*(-7a)$$

-168

2.4 Real Numbers

Tipe data utama dalam Euler adalah bilangan riil. Bilangan riil direpresentasikan dalam format IEEE dengan akurasi sekitar 16 digit desimal.

>longest 1/3

0.333333333333333

Representasi ganda internal membutuhkan 8 byte.

```
>printdual(1/3)
```

```
>printhex(1/3)
```

5.55555555555554*16^-1

2.5 latihan

Fungsi `abs(z)` digunakan untuk menghitung nilai absolut (atau modulus) dari bilangan kompleks

>z := 3 + 4i;

>abs(z)

5

untuk menghitung

$$\left(\frac{4(8 - 6)^2 - 4.3 + 2.8}{3^3 + 19^0} \right)$$

$>(4*(8-6)^2 - 4 * 3 + 2 * 8) / (3^3 + 19^0)$

```
0.714285714286
```

Untuk menghitung:

$$\left(\frac{[4(8 - 6)^2 + 4](3 - 2.8)}{2^2(2^3 + 5)} \right)$$

```
>[4*(8-6)^2 + 4]*(3 - 2 * 8) / (2^2*(2^3 + 5))
```

```
-5
```

2.6 Strings

Suatu string dalam Euler didefinisikan dengan “...”.

```
>“A string can contain anything.”
```

```
A string can contain anything.
```

String dapat dirangkai dengan | atau dengan +. Ini juga berlaku untuk angka, yang dalam kasus tersebut diubah menjadi string.

```
>“The area of the circle with radius” + 2 + ” cm is ” + pi*4 + ” cm^2.”
```

```
The area of the circle with radius 2 cm is 12.5663706144 cm^2.
```

Fungsi cetak juga mengonversi angka menjadi string. Fungsi ini dapat memuat sejumlah digit dan sejumlah tempat (0 untuk keluaran padat), dan optimalnya satu unit.

```
>“Golden Ratio :” + print((1+sqrt(5))/2,5,0)
```

```
Golden Ratio : 1.61803
```

Ada string khusus none, yang tidak dicetak. String ini dikembalikan oleh beberapa fungsi, ketika hasilnya tidak penting. (Dikembalikan secara

otomatis, jika fungsi tersebut tidak memiliki pernyataan return.)

```
>none
```

Untuk mengubah string menjadi angka, cukup evaluasi string tersebut. Ini juga berlaku untuk ekspresi (lihat di bawah).

```
>“1234.5”()
```

```
1234.5
```

Untuk mendefinisikan vektor string, gunakan notasi vektor [...]

```
>v:=[“affe”,“charlie”,“bravo”]
```

```
affe  
charlie  
bravo
```

Vektor string kosong dilambangkan dengan [tidak ada]. Vektor string dapat digabungkan.

```
>w:=[none]; w|v|v
```

```
affe  
charlie  
bravo  
affe  
charlie  
bravo
```

String dapat berisi karakter Unicode. Secara internal, string ini berisi kode UTF-8. Untuk menghasilkan string seperti itu, gunakan u”...” dan salah satu entitas HTML.

String Unicode dapat digabungkan seperti string lainnya.

```
>u” = ” + 45 + u”” // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara benar
```

```
= 45°
```

```
>...
```

```
>...
```

```
>...
```

```
>
```

```
I
```

Di komentar, entitas yang sama seperti , dll. dapat digunakan. Ini mungkin merupakan alternatif cepat untuk Lateks. (Detail lebih lanjut di komentar di bawah).

Ada beberapa fungsi untuk membuat atau menganalisis string unicode. Fungsi strtochar() akan mengenali string Unicode, dan menerjemahkannya dengan benar.

```
>v=strtochar(u”Ä is a German letter”)
```

```
[196, 32, 105, 115, 32, 97, 32, 71, 101, 114, 109, 97, 110,  
32, 108, 101, 116, 116, 101, 114]
```

Hasilnya adalah vektor angka Unicode. Fungsi kebalikannya adalah chartoutf().

```
>v[1]=strtochar(u”Ü“)[1]; chartoutf(v)
```

```
Ü is a German letter
```

Fungsi utf() dapat menerjemahkan string dengan entitas dalam variabel menjadi string Unicode.

```
>s=“We have =.”; utf(s) // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara benar
```

```
We have =.
```

Dimungkinkan juga untuk menggunakan entitas numerik.

```
>u”Ähnliches”
```

```
Ähnliches
```

2.7 latihan

Kita bisa menggabungkan strings dengan menggunakan tanda + untuk concatenation (penyambungan) dalam EMT:

```
>str1 := “Halo,”;
```

```
>str2 := “dunia!”;
```

```
>str := str1 + str2
```

Halo, dunia!

```
>name := "amalia";
>age := "20";
>str := name + age
```

amalia20

```
>message := "Hasil perhitungan adalah:";
>result := 44;
>str := message + result
```

Hasil perhitungan adalah: 44

2.8 Boolean Values

Nilai Boolean direpresentasikan dengan 1=benar atau 0=salah dalam Euler. String dapat dibandingkan, seperti halnya angka.

```
>2<1, "apel"<"banana"
```

0
1

"and" adalah operator "&&" dan "or" adalah operator "||", seperti dalam bahasa C. (Kata "and" dan "or" hanya dapat digunakan dalam kondisi "if".)

```
>2<E && E<3
```

1

Operator Boolean mematuhi aturan bahasa matriks

```
>(1:10)>5, nonzeros(%)
```

```
[0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1]
[6, 7, 8, 9, 10]
```

Anda dapat menggunakan fungsi nonzeros() untuk mengekstrak elemen tertentu dari sebuah vektor. Dalam contoh ini, kami menggunakan kondisional isprime(n).

omentar di bawah).

```
>N=2|3:2:99 // N berisi elemen 2 dan bilangan2 ganjil dari 3 s.d. 99
```

```
[2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29,
31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57,
59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85,
87, 89, 91, 93, 95, 97, 99]
```

```
>N[nonzeros(isprime(N))] //pilih anggota2 N yang prima
```

```
[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,
53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97]
```

2.9 latihan

>N=10:10:100 // N berisi bilangan dari 10 hingga 100 dengan interval 10 (10, 20, 30, ..., 100).

[10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100]

>a = true;

>b = false;

>c = a && b // Hasil AND dari a dan b (false)

0

>d := a || b // Hasil OR dari a dan b (true)

1

>e := !a // Hasil NOT dari a (false)

0

2.10 Output Formats

Format keluaran default EMT mencetak 12 digit. Untuk memastikan bahwa kita melihat default, kita mengatur ulang formatnya.

>defformat; pi

3.14159265359

Secara internal, EMT menggunakan standar IEEE untuk angka ganda dengan sekitar 16 digit desimal. Untuk melihat jumlah digit lengkap, gunakan perintah “longestformat”, atau kami menggunakan operator “longest” untuk menampilkan hasil dalam format terpanjang.

>longest pi

3.141592653589793

Berikut adalah representasi heksadesimal internal dari angka ganda.

>printhex(pi)

3.243F6A8885A30*16^0

Format keluaran dapat diubah secara permanen dengan perintah format.

>format(12,5); 1/3, pi, sin(1)

0.33333

3.14159

0.84147

Format defaultnya adalah(12).

>format(12); 1/3

0.333333333333

Fungsi seperti “shortestformat”, “shortformat”, “longformat” bekerja untuk vektor dengan cara berikut.

```
>shortestformat; random(3,8)
```

```
0.66    0.2    0.89    0.28    0.53    0.31    0.44    0.3  
0.28    0.88    0.27    0.7     0.22    0.45    0.31    0.91  
0.19    0.46    0.095   0.6     0.43    0.73    0.47    0.32
```

Format default untuk skalar adalah format(12). Namun, ini dapat diubah.

```
>setscalarformat(5); pi
```

3.1416

Fungsi “longestformat” juga mengatur format skalar.

```
>longestformat; pi
```

3.141592653589793

Sebagai referensi, berikut adalah daftar format keluaran terpenting.

format terpendek, format pendek, format panjang, format terpanjang format(panjang,digit) format bagus(panjang)frakformat(panjang)merusak format

Akurasi internal EMT adalah sekitar 16 tempat desimal, yang merupakan standar IEEE. Nomor disimpan dalam format internal ini.

Namun format keluaran EMT dapat diatur dengan cara yang fleksibel.

```
>longestformat; pi,
```

3.141592653589793

```
>format(10,5); pi
```

3.14159

Standarnya adalah deformat().

```
>deformat; // default
```

Ada operator pendek yang hanya mencetak satu nilai. Operator “terpanjang” akan mencetak semua digit nomor yang valid.

```
>longest pi^2/2
```

4.934802200544679

Ada juga operator singkat untuk mencetak hasil dalam format pecahan. Kami sudah menggunakan di atas.

```
>fraction 1+1/2+1/3+1/4
```

25/12

Karena format internal menggunakan cara biner untuk menyimpan angka, nilai 0,1 tidak akan direpresentasikan secara tepat. Kesalahannya bertambah sedikit, seperti yang Anda lihat pada perhitungan berikut.

```
>longest 0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

-1.110223024625157e-16

Tetapi dengan “format panjang” default Anda tidak akan menyadarinya. Untuk kenyamanan, keluaran angka yang sangat kecil adalah 0.

>0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1

0

2.11 latihan

```
>x = 7;  
>y = 4;  
>z = 2;  
>x^2 + 12x + 36
```

169

>y^2*z / x - z

2.57142857143

>25*y^z - (x^2*z + 1)

301

>7*(3x + 6) / 11 - (x + 6)

4.18181818182

>2*x^2 - 20

78

2.12 Expressions

String atau nama dapat digunakan untuk menyimpan ekspresi matematika, yang dapat dievaluasi oleh EMT. Untuk ini, gunakan tanda kurung

setelah ekspresi. Jika Anda ingin menggunakan string sebagai ekspresi, gunakan konvensi untuk menamainya “fx” atau “fxy”, dst. Ekspresi lebih diutamakan daripada fungsi.

Variabel global dapat digunakan dalam evaluasi.

>r:=2; fx:="pi*r^2"; longest fx()

12.56637061435917

Parameter ditetapkan ke x, y, dan z dalam urutan tersebut. Parameter tambahan dapat ditambahkan menggunakan parameter yang ditetapkan.

>fx:="a*sin(x)^2"; fx(5,a=-1)

-0.919535764538

Perhatikan bahwa ekspresi akan selalu menggunakan variabel global, meskipun ada variabel dalam fungsi dengan nama yang sama. (Jika tidak, evaluasi ekspresi dalam fungsi dapat memberikan hasil yang sangat membingungkan bagi pengguna yang memanggil fungsi tersebut.)

```
>at:=4; function f(expr,x,at) := expr(x); ...
>f("at*x^2",3,5) // computes 4*3^2 not 5*3^2
```

36

Jika Anda ingin menggunakan nilai lain untuk “at” selain nilai global, Anda perlu menambahkan “at=value”.

```
>at:=4; function f(expr,x,a) := expr(x,at=a); ...
>f("at*x^2",3,5)
```

45

Sebagai referensi, kami mencatat bahwa koleksi panggilan (dibahas di tempat lain) dapat berisi ekspresi. Jadi kita bisa membuat contoh di atas sebagai berikut.

```
>at:=4; function f(expr,x) := expr(x); ...
>f({{"at*x^2",at=5}},3)
```

45

Ekspresi dalam x sering digunakan seperti fungsi.

Perhatikan bahwa mendefinisikan fungsi dengan nama yang sama seperti ekspresi simbolik global akan menghapus variabel ini untuk menghindari kebingungan antara ekspresi simbolik dan fungsi.

```
>f &= 5*x;
>function f(x) := 6*x;
>f(2)
```

12

Berdasarkan konvensi, ekspresi simbolik atau numerik harus diberi nama fx, fxy, dll. Skema penamaan ini tidak boleh digunakan untuk fungsi.

```
>fx &= diff(x^x,x); $&fx
```

$$x^x (\log x + 1)$$

Bentuk ekspresi khusus memungkinkan variabel apa pun sebagai parameter yang tidak disebutkan namanya untuk mengevaluasi ekspresi, bukan hanya “x”, “y”, dll. Untuk ini, mulailah ekspresi dengan “@(variabel) …”.

```
>"@(a,b) a^{2+b}2", %(4,5)
```

@ (a, b) a ^ 2+b ^ 2

41

Hal ini memungkinkan untuk memanipulasi ekspresi dalam variabel lain untuk fungsi EMT yang memerlukan ekspresi dalam “x”.

Cara paling dasar untuk mendefinisikan suatu fungsi sederhana adalah dengan menyimpan rumusnya dalam ekspresi simbolik atau numerik. Jika variabel utamanya adalah x, ekspresi dapat dievaluasi seperti halnya fungsi.

Seperti yang Anda lihat pada contoh berikut, variabel global terlihat selama evaluasi.

```
>fx &= x^3-a*x; ...
>a=1.2; fx(0.5)
```

-0 . 475

Semua variabel lain dalam ekspresi dapat ditentukan dalam evaluasi menggunakan parameter yang ditetapkan.

>fx(0.5,a=1.1)

-0 . 425

Sebuah ekspresi tidak perlu bersifat simbolis. Hal ini diperlukan, jika ekspresi berisi fungsi, yang hanya diketahui di kernel numerik, bukan di Maxima.

2.13 latihan

Tentukan variabel a dengan nilai 3 dan variabel b dengan nilai 4. Buatlah ekspresi exp1 untuk menghitung hasil dari

$a^2 + b^2$.

>a = 3; b = 4 ; exp1 = "a^2 + b^2"; longest exp1()

25

Tentukan fungsi h sebagai ekspresi eksponensial $h(x) = 2^x$. Evaluasi fungsi ini untuk $x=4$.

>function h(x):= 2^x; h(4)

>h(4)

16

Tentukan dan diferensiasikan ekspresi logaritmik exp4 untuk $\log(x+1)$. Evaluasi hasil turunan tersebut.

>exp4 := "log(x^2 + 1)"; fx &= diff(exp4, x); \$&fx

0

>at:=2; function f(expr,x,a) := expr(x,at=a); ...

> f("at*x^2",3,5)

45

>fx &= x^2-a*x; ...

> a=1.4; fx(0.5)

-0 . 45

>fx(0.5,a=1.8)

-0 . 65

>fx &= diff(x^2,x); \$&fx

$2x$

Symbolic Mathematics

EMT melakukan matematika simbolis dengan bantuan Maxima. Untuk detailnya, mulailah dengan tutorial berikut, atau telusuri referensi untuk Maxima. Para ahli di Maxima harus memperhatikan bahwa ada perbedaan sintaksis antara sintaksis asli Maxima dan sintaksis default ekspresi simbolik di EMT.

Matematika simbolik diintegrasikan ke dalam Euler dengan &. Ekspresi apa pun yang dimulai dengan & adalah ekspresi simbolis. Itu dievaluasi dan dicetak oleh Maxima.

Pertama-tama, Maxima memiliki aritmatika “tak terbatas” yang dapat menangani bilangan yang sangat besar.

```
>$&44!
```

```
26582715747884487680436258110146158903196385280000000000
```

Dengan cara ini, Anda dapat menghitung hasil yang besar dengan tepat. Mari kita menghitung

$$C(44, 10) = \frac{44!}{34! \cdot 10!}$$

```
>$& 44!/(34!*10!) // nilai C(44,10)
```

```
2481256778
```

Tentu saja, Maxima memiliki fungsi yang lebih efisien untuk ini (seperti halnya bagian numerik EMT).

```
>$binomial(44,10) //menghitung C(44,10) menggunakan fungsi binomial()
```

```
2481256778
```

Untuk mempelajari lebih lanjut tentang fungsi tertentu, klik dua kali padanya. Misalnya, coba klik dua kali pada “&binomial” di baris perintah sebelumnya. Ini membuka dokumentasi Maxima yang disediakan oleh penulis program tersebut.

Anda akan mengetahui bahwa cara berikut juga bisa dilakukan.

$$C(x, 3) = \frac{x!}{(x - 3)!3!} = \frac{(x - 2)(x - 1)x}{6}$$

```
>$binomial(x,3) // C(x,3)
```

$$\frac{(x - 2) (x - 1) x}{6}$$

Jika Anda ingin mengganti x dengan nilai tertentu, gunakan “dengan”.

```
>$&binomial(x,3) with x=10 // substitusi x=10 ke C(x,3)
```

```
120
```

Dengan begitu Anda bisa menggunakan solusi suatu persamaan di persamaan lain.

Ekspresi simbolik dicetak oleh Maxima dalam bentuk 2D. Alasannya adalah adanya tanda simbolis khusus pada string tersebut.

Seperti yang telah Anda lihat pada contoh sebelumnya dan berikut, jika Anda telah menginstal LaTeX, Anda dapat mencetak ekspresi simbolik dengan Latex. Jika tidak, perintah berikut akan mengeluarkan pesan kesalahan.

Untuk mencetak ekspresi simbolik dengan LaTeX, gunakan \$ di depan & (atau Anda dapat menghilangkan &) sebelum perintah. Jangan jalankan perintah Maxima dengan \$, jika Anda belum menginstal LaTeX.

```
>$(3+x)/(x^2+1)
```

$$\frac{x+3}{x^2+1}$$

Ekspresi simbolik diurai oleh Euler. Jika Anda memerlukan sintaksis kompleks dalam satu ekspresi, Anda dapat mengapit ekspresi tersebut di “...”. Menggunakan lebih dari sekedar ekspresi sederhana mungkin saja dilakukan, namun sangat tidak disarankan.

```
>&“v := 5; v^2”
```

25

Untuk kelengkapannya, kami mencatat bahwa ekspresi simbolik dapat digunakan dalam program, namun perlu diapit dalam tanda kutip. Selain itu, akan jauh lebih efektif untuk memanggil Maxima pada waktu kompilasi jika memungkinkan.

```
>$&expand((1+x)^4), $&factor(diff(% ,x)) // diff: turunan, factor: faktor
```

$$\begin{aligned} &x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\ &4(x+1)^3 \end{aligned}$$

Sekali lagi, % mengacu pada hasil sebelumnya.

Untuk mempermudah kami menyimpan solusi ke variabel simbolik. Variabel simbolik didefinisikan dengan “&=”.

```
>fx &= (x+1)/(x^4+1); $&fx
```

$$\frac{x+1}{x^4+1}$$

Ekspresi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&factor(diff(fx,x))
```

$$\frac{-3x^4 - 4x^3 + 1}{(x^4 + 1)^2}$$

Input langsung dari perintah Maxima juga tersedia. Mulai baris perintah dengan “::”. Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT (disebut “mode kompatibilitas”).

```
>&factor(20!)
```

2432902008176640000

```
>::: factor(10!)
```

$$\begin{matrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \end{matrix}$$

```
>::: factor(20!)
```

$$\begin{matrix} 18 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & 17 & 19 \end{matrix}$$

Jika Anda ahli dalam Maxima, Anda mungkin ingin menggunakan sintaks asli Maxima. Anda dapat melakukan ini dengan “:::”.

```
>::: av:g$ av^2;
```

2
g

>fx &= x^3*exp(x), \$fx

3 x
x E

$$x^3 e^x$$

Variabel tersebut dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya. Perhatikan, bahwa dalam perintah berikut sisi kanan &= dievaluasi sebelum ditugaskan ke Fx.

>&(fx with x=5), \$%, &float(%)

5
125 E

$$125 e^5$$

18551.64488782208

>fx(5)

18551.6448878

Untuk mengevaluasi ekspresi dengan nilai variabel tertentu, Anda dapat menggunakan operator “dengan”.

Baris perintah berikut juga menunjukkan bahwa Maxima dapat mengevaluasi ekspresi secara numerik dengan float().

>&(fx with x=10)-(fx with x=5), &float(%)

10
1000 E - 125 E

$$2.20079141499189 \times 10^7$$

>\$factor(diff(fx,x,2))

$$x (x^2 + 6x + 6) e^x$$

Untuk mendapatkan kode Lateks untuk sebuah ekspresi, Anda dapat menggunakan perintah tex.

>tex(fx)

$x^3 \backslash, e^{\{x\}}$

Ekspresi simbolik dapat dievaluasi seperti halnya ekspresi numerik.

>fx(0.5)

0.206090158838

Dalam ekspresi simbolis, ini tidak berhasil, karena Maxima tidak mendukungnya. Sebagai gantinya, gunakan sintaks “dengan” (bentuk perintah at(...)) yang lebih bagus dari Maxima).

>\$&fx with x=1/2

$$\frac{\sqrt{e}}{8}$$

Penugasannya juga bisa bersifat simbolis.

>\$&fx with x=1+t

$$(t + 1)^3 e^{t+1}$$

Perintah solve menyelesaikan ekspresi simbolik untuk variabel di Maxima. Hasilnya adalah vektor solusi.

>\$&solve(x^2+x=4,x)

$$\left[x = \frac{-\sqrt{17} - 1}{2}, x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right]$$

Bandingkan dengan perintah numerik “solve” di Euler, yang memerlukan nilai awal, dan opsional nilai target.

>solve("x^2+x",1,y=4)

1.56155281281

Nilai numerik dari solusi simbolik dapat dihitung dengan evaluasi hasil simbolik. Euler akan membacakan tugas x= dst. Jika Anda tidak memerlukan hasil numerik untuk perhitungan lebih lanjut, Anda juga dapat membiarkan Maxima menemukan nilai numeriknya.

>sol &= solve(x^2+2*x=4,x); \$&sol, sol(), \$&float(sol)

$$\left[x = -\sqrt{5} - 1, x = \sqrt{5} - 1 \right]$$

[-3.23607, 1.23607]

$$[x = -3.23606797749979, x = 1.23606797749979]$$

Untuk mendapatkan solusi simbolik tertentu, seseorang dapat menggunakan “dengan” dan indeks.

>\$&solve(x^2+x=1,x), x2 &= x with %[2]; \$&x2

$$\left[x = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}, x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right]$$

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan, gunakan vektor persamaan. Hasilnya adalah vektor solusi.

>sol &= solve([x+y=3,x^2+y^2=5],[x,y]); \$&sol, \$&x*y with sol[1]

$$[[x = 2, y = 1], [x = 1, y = 2]]$$

2

Ekspresi simbolis dapat memiliki bendera, yang menunjukkan perlakuan khusus di Maxima. Beberapa flag dapat digunakan sebagai perintah juga, yang lainnya tidak. Bendera ditambahkan dengan “|” (bentuk yang lebih bagus dari “ev(...,flags)”).

```
>${& diff((x^3-1)/(x+1),x) //turunan bentuk pecahan
```

$$\frac{3x^2}{x+1} - \frac{x^3-1}{(x+1)^2}$$

```
>${& diff((x^3-1)/(x+1),x) | ratsimp //menyederhanakan pecahan
```

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{x^2 + 2x + 1}$$

```
>${& factor(%)
```

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{(x+1)^2}$$

latihan

untuk menghitung:

$$c(20, 10) = \frac{20!}{5! \cdot 10!}$$

```
>${& 20!/(5!*10!)
```

$$5587021440$$

untuk menghitung:

$$c(x, 25) = \frac{x}{(x-25)!25!} = \frac{(x-4)(x-2)x}{3}$$

```
>${& binomial(x,25)
```

$$\frac{(x-24)(x-23)(x-22)(x-21)(x-20)(x-19)(x-18)(x-17)(x-16)(x-15)(x-14)(x-13)(x-12)(x-11)(x-10)(x-9)(x-8)(x-7)(x-6)(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)}{1551121004333098598}$$

```
>${& binomial(x,5) with x=10
```

$$252$$

```
>fx &= (x+1)/(x^4+1); ${& fx
```

$$\frac{x+1}{x^4+1}$$

```
>${& factor(diff(fx,x)^2)
```

$$\frac{(3x^4 + 4x^3 - 1)^2}{(x^4 + 1)^4}$$

Functions

Dalam EMT, fungsi adalah program yang didefinisikan dengan perintah “fungsi”. Ini bisa berupa fungsi satu baris atau fungsi multibaris.

Fungsi satu baris dapat berupa numerik atau simbolik. Fungsi satu baris numerik didefinisikan oleh “:=”.

```
>function f(x) := x*sqrt(x^2+1)
```

Untuk gambaran umum, kami menampilkan semua kemungkinan definisi untuk fungsi satu baris. Suatu fungsi dapat dievaluasi sama seperti fungsi Euler bawaan lainnya.

```
>f(2)
```

4.472135955

Fungsi ini juga dapat digunakan untuk vektor, mengikuti bahasa matriks Euler, karena ekspresi yang digunakan dalam fungsi tersebut divektorkan.

>f(0:0.1:1)

```
[0, 0.100499, 0.203961, 0.313209, 0.430813, 0.559017, 0.699714,
0.854459, 1.0245, 1.21083, 1.41421]
```

Fungsi dapat diplot. Daripada ekspresi, kita hanya perlu memberikan nama fungsinya.

Berbeda dengan ekspresi simbolik atau numerik, nama fungsi harus diberikan dalam string.

>solve("f",1,y=1)

0.786151377757

Secara default, jika Anda perlu menimpa fungsi bawaan, Anda harus menambahkan kata kunci "timpa". Menimpa fungsi bawaan berbahaya dan dapat menyebabkan masalah pada fungsi lain yang bergantung pada fungsi tersebut.

Anda masih dapat memanggil fungsi bawaan sebagai "...", jika fungsi tersebut ada di inti Euler.

>function overwrite sin (x) := _sin(x°) // redine sine in degrees

>sin(45)

0.707106781187

Sebaiknya kita menghilangkan redefinisi sin ini.

>forget sin; sin(pi/4)

0.707106781187

2.14 latihan

>function f(x) := x*sqrt(x^3+8)

>f(4)

33.941125497

>f(0:7.1:10)

```
[0, 135.814]
```

>solve("f",2,y=4)

1.26375453514

>function overwrite sin(x) := _sin(x°)

>cos(45°)

0.707106781187

>tan(135°)

-1

2.15 Default Parameters

Fungsi numerik dapat memiliki parameter default.

```
>function f(x,a=1) := a*x^2
```

Fungsi numerik dapat memiliki parameter default.

```
>f(4)
```

16

Menyetelnya akan menimpa nilai default.

```
>f(4,5)
```

80

Parameter yang ditetapkan akan menimpanya juga. Ini digunakan oleh banyak fungsi Euler seperti plot2d, plot3d.

```
>f(4,a=1)
```

16

Jika suatu variabel bukan parameter, maka harus bersifat global. Fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

```
>function f(x) := a*x^2
```

```
>a=6; f(2)
```

24

Namun parameter yang ditetapkan mengesampingkan nilai global.

Jika argumen tidak ada dalam daftar parameter yang telah ditentukan sebelumnya, argumen tersebut harus dideklarasikan dengan “:=”!

```
>f(2,a:=5)
```

20

Fungsi simbolik didefinisikan dengan “&=”. Mereka didefinisikan di Euler dan Maxima, dan bekerja di kedua dunia. Ekspresi yang menentukan dijalankan melalui Maxima sebelum definisi.

```
>function g(x) &= x^3-x*exp(-x); $&g(x)
```

$$x^3 - x e^{-x}$$

Fungsi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik.

```
>$&diff(g(x),x), $&% with x=4/3
```

$$\begin{aligned} &x e^{-x} - e^{-x} + 3 x^2 \\ &\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{3} + \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Mereka juga dapat digunakan dalam ekspresi numerik. Tentu saja, ini hanya akan berfungsi jika EMT dapat menafsirkan semua yang ada di dalam fungsi tersebut.

```
>g(5+g(1))
```

178 . 635099908

Mereka dapat digunakan untuk mendefinisikan fungsi atau ekspresi simbolik lainnya.
>function G(x) &= factor(integrate(g(x),x)); \$&G(c) // integrate: mengintegralkan

$$\frac{e^{-c} \left(c^4 e^c + 4 c + 4\right)}{4}$$

>solve(&g(x),0.5)

0 . 703467422498

Berikut ini juga berfungsi, karena Euler menggunakan ekspresi simbolik dalam fungsi g, jika tidak menemukan variabel simbolik g, dan jika terdapat fungsi simbolik g.

>solve(&g,0.5)

0 . 703467422498

>function P(x,n) &= (2*x-1)^n; \$&P(x,n)

$$(2 x - 1)^n$$

>function Q(x,n) &= (x+2)^n; \$&Q(x,n)

$$(x + 2)^n$$

>\$&P(x,4), \$&expand(%)

$$(2 x - 1)^4$$

$$16 x^4 - 32 x^3 + 24 x^2 - 8 x + 1$$

>P(3,4)

625

>\$&P(x,4)+ Q(x,3), \$&expand(%)

$$(2 x - 1)^4 + (x + 2)^3$$

$$16 x^4 - 31 x^3 + 30 x^2 + 4 x + 9$$

>\$&P(x,4)-Q(x,3), \$&expand(%), \$&factor(%)

$$(2 x - 1)^4 - (x + 2)^3$$

$$16 x^4 - 33 x^3 + 18 x^2 - 20 x - 7$$

$$16 x^4 - 33 x^3 + 18 x^2 - 20 x - 7$$

>\$&P(x,4)*Q(x,3), \$&expand(%), \$&factor(%)

$$(x + 2)^3 (2 x - 1)^4$$

$$16 x^7 + 64 x^6 + 24 x^5 - 120 x^4 - 15 x^3 + 102 x^2 - 52 x + 8$$

$$(x + 2)^3 (2 x - 1)^4$$

```
>${P(x,4)}/{Q(x,1)}, ${expand(%)}, ${factor(%)}
```

$$\frac{(2x-1)^4}{x+2} \\ \frac{16x^4}{x+2} - \frac{32x^3}{x+2} + \frac{24x^2}{x+2} - \frac{8x}{x+2} + \frac{1}{x+2} \\ \frac{(2x-1)^4}{x+2}$$

```
>function f(x) &= x^3-x; ${f(x)}
```

$$x^3 - x$$

Dengan &= fungsinya bersifat simbolis, dan dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>${integrate(f(x),x)}
```

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

Dengan := fungsinya numerik. Contoh yang baik adalah integral tertentu

$$f(x) = \int_1^x t^t dt,$$

yang tidak dapat dievaluasi secara simbolis.

Jika kita mendefinisikan ulang fungsi tersebut dengan kata kunci “peta” maka dapat digunakan untuk vektor x. Secara internal, fungsi ini dipanggil untuk semua nilai x satu kali, dan hasilnya disimpan dalam vektor.

```
>function map f(x) := integrate("x^x",1,x)  
>f(0:0.5:2)
```

```
[-0.783431, -0.410816, 0, 0.676863, 2.05045]
```

Fungsi dapat memiliki nilai default untuk parameter.

```
>function mylog (x,base=10) := ln(x)/ln(base);
```

Sekarang fungsinya bisa dipanggil dengan atau tanpa parameter “base”.

```
>mylog(100), mylog(2^6.7,2)
```

2
6.7

Selain itu, dimungkinkan untuk menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>mylog(E^2,base=E)
```

2

Seringkali, kita ingin menggunakan fungsi untuk vektor di satu tempat, dan untuk elemen individual di tempat lain. Hal ini dimungkinkan dengan parameter vektor.

```
>function f([a,b]) &= a^2+b^2-a*b+b; ${f(a,b)}, ${f(x,y)}
```

$$b^2 - ab + b + a^2 \\ y^2 - xy + y + x^2$$

Fungsi simbolik seperti ini dapat digunakan untuk variabel simbolik.

Namun fungsinya juga dapat digunakan untuk vektor numerik.

>v=[3,4]; f(v)

17

Ada juga fungsi yang murni simbolik, yang tidak dapat digunakan secara numerik.

>function lapl(expr,x,y) &&= diff(expr,x,2)+diff(expr,y,2)//turunan parsial kedua

diff(expr, y, 2) + diff(expr, x, 2)

>\$&realpart((x+I*y)^4), \$&lapl(% ,x,y)

$$y^4 - 6x^2y^2 + x^4$$

0

Namun tentu saja, mereka dapat digunakan dalam ekspresi simbolik atau dalam definisi fungsi simbolik.

>function f(x,y) &= factor(lapl((x+y^2)^5,x,y)); \$&f(x,y)

$$10(y^2 + x)^3(9y^2 + x + 2)$$

Untuk meringkas

- &= mendefinisikan fungsi simbolik,
- := mendefinisikan fungsi numerik,
- &&= mendefinisikan fungsi simbolik murni.

2.16 latihan

>function f(x) := a*x^2

>a = 4; f(4)

64

>f(2,a:=8)

32

>\$&diff(g(x),x), \$&% with x=7/5

$$\begin{aligned} &x e^{-x} - e^{-x} + 3x^2 \\ &\frac{2e^{-\frac{7}{5}}}{5} + \frac{147}{25} \end{aligned}$$

>function G(x) &= factor(integrate(g(x),x)); \$&G(c)

$$\frac{e^{-c}(c^4 e^c + 4c + 4)}{4}$$

>function mylog (x,base=10) := ln(x)/ln(base);

>mylog(500), mylog(2^6.4,2)

38

```
2.69897000434
```

```
6.4
```

```
>function f([a,b]) &= a3+b-2-a*b+b; $&f(c,d), $&f(r,s)
```

$$\begin{aligned} -c d + d + \frac{1}{d^2} + c^3 \\ -r s + s + \frac{1}{s^2} + r^3 \end{aligned}$$

```
>v=[3,4]; f(v)
```

```
19.0625
```

2.17 Memecahkan Ekspresi

Ekspresi dapat diselesaikan secara numerik dan simbolis.

Untuk menyelesaikan ekspresi sederhana dari satu variabel, kita dapat menggunakan fungsi solve(). Dibutuhkan nilai awal untuk memulai pencarian. Secara internal, solve() menggunakan metode secant.

```
>solve("x^2-2",1)
```

```
1.41421356237
```

Ini juga berlaku untuk ekspresi simbolik. Ambil fungsi berikut.

```
>$&solve(x^2=2,x)
```

$$[x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}]$$

```
>$&solve(x^2-2,x)
```

$$[x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}]$$

```
>$&solve(a*x^2+b*x+c=0,x)
```

$$\left[x = \frac{-\sqrt{b^2 - 4 a c} - b}{2 a}, x = \frac{\sqrt{b^2 - 4 a c} - b}{2 a}\right]$$

```
>$&solve([a*x+b*y=c,d*x+e*y=f],[x,y])
```

$$\left[\left[x = -\frac{c e}{b (d - 5) - a e}, y = \frac{c (d - 5)}{b (d - 5) - a e}\right]\right]$$

```
>...
```

```
> ...
```

```
>
```

```
>px &= 4*x8+x7-x4-x; $&px
```

$$4 x^8 + x^7 - x^4 - x$$

Sekarang kita mencari titik yang polinomialnya adalah 2. Dalam solve(), nilai target default y=0 dapat diubah dengan variabel yang ditetapkan.

Kami menggunakan y=2 dan memeriksa dengan mengevaluasi polinomial pada hasil sebelumnya.

```
>solve(px,1,y=2), px(%)
```

```
0.966715594851  
2
```

Memecahkan ekspresi simbolik dalam bentuk simbolik mengembalikan daftar solusi. Kami menggunakan pemecah simbolis solve() yang disediakan oleh Maxima.

```
>sol &= solve(x^2-x-1,x); $&sol
```

$$\left[x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right]$$

Cara termudah untuk mendapatkan nilai numerik adalah dengan mengevaluasi solusi secara numerik seperti halnya ekspresi.

```
>longest sol()
```

```
-0.6180339887498949 1.618033988749895
```

Untuk menggunakan solusi secara simbolis dalam ekspresi lain, cara termudah adalah “dengan”.

```
>$&x^2 with sol[1], $&expand(x^2-x-1 with sol[2])
```

$$\frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{4}$$

```
0
```

Penyelesaian sistem persamaan secara simbolis dapat dilakukan dengan vektor persamaan dan solver simbolis solve(). Jawabannya adalah daftar daftar persamaan.

```
>$&solve([x+y=2,x^3+2*y+x=4],[x,y])
```

```
[[x = -1, y = 3], [x = 1, y = 1], [x = 0, y = 2]]
```

Fungsi f() dapat melihat variabel global. Namun seringkali kita ingin menggunakan parameter lokal.

$$a^x - x^a = 0, 1$$

dengan a=3.

```
>function f(x,a) := x^(a-a)x;
```

Salah satu cara untuk meneruskan parameter tambahan ke f() adalah dengan menggunakan daftar dengan nama fungsi dan parameternya (cara lainnya adalah parameter titik koma).

```
>solve({{"f",3}},2,y=0.1)
```

```
2.54116291558
```

Ini juga berfungsi dengan ekspresi. Namun kemudian, elemen daftar bernama harus digunakan. (Lebih lanjut tentang daftar di tutorial tentang sintaks EMT).

```
>solve({{"x^(a-a)x",a=3}},2,y=0.1)
```

```
2.54116291558
```

2.18 latihan

```
>solve("x^8-2x+4",1)
```

0.49999999999

```
>px &= 2*x^8+x^7-x^4-x; $&px
```

$$2x^8 + x^7 - x^4 - x$$

```
>solve(px,1,y=2), px(%)
```

1.04627560359

2

```
>longest sol()
```

-0.6180339887498949 1.618033988749895

```
>$&x^2 with sol[1], $&expand(x^8-x-2 with sol[2])
```

$$\frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{4}$$

$$25^{\frac{3}{2}} + 21$$

Menyelesaikan Pertidaksamaan

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan, EMT tidak akan dapat melakukannya, melainkan dengan bantuan Maxima, artinya secara eksak (simbolik). Perintah Maxima yang digunakan adalah fourier_elim(), yang harus dipanggil dengan perintah “load(fourier_elim)” terlebih dahulu.

```
>&load(fourier_elim)
```

```
C:/Program Files/Euler x64/maxima/share/maxima/5.35.1/share/f\
ourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
>$&fourier.elim([x^2 - 1 > 0],[x]) // x^2-1 > 0
```

$$[1 < x] \vee [x < -1]$$

```
>$&fourier.elim([x^2 - 1 < 0],[x]) // x^2-1 < 0
```

$$[-1 < x, x < 1]$$

```
>$&fourier.elim([x^2 - 1 # 0],[x]) // x^-1 <> 0
```

$$[-1 < x, x < 1] \vee [1 < x] \vee [x < -1]$$

```
>$&fourier.elim([x # 6],[x])
```

$$[x < 6] \vee [6 < x]$$

```
>$&fourier.elim([x < 1, x > 1],[x]) // tidak memiliki penyelesaian
```

emptyset

> \$&fourier.elim([minf < x, x < inf],[x]) // solusinya R

universalset

> \$&fourier.elim([x^3 - 1 > 0],[x])

$$[1 < x, x^2 + x + 1 > 0] \vee [x < 1, -x^2 - x - 1 > 0]$$

> \$&fourier.elim([cos(x) < 1/2],[x]) // ??? gagal

$$[1 - 2 \cos x > 0]$$

> \$&fourier.elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[x,y]) // sistem pertidaksamaan

$$[y - 5 < x, x < y + 7, 10 < y]$$

> \$&fourier.elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[y,x])

$$[\max(10, x - 7) < y, y < x + 5, 5 < x]$$

> \$&fourier.elim((x + y < 5) and (x - y > 8),[x,y])

$$\left[y + 8 < x, x < 5 - y, y < -\frac{3}{2} \right]$$

> \$&fourier.elim(((x + y < 5) and x < 1) or (x - y > 8),[x,y])

$$[y + 8 < x] \vee [x < \min(1, 5 - y)]$$

> &fourier.elim([max(x,y) > 6, x # 8, abs(y-1) > 12],[x,y])

[6 < x, x < 8, y < -11] or [8 < x, y < -11]
or [x < 8, 13 < y] or [x = y, 13 < y] or [8 < x, x < y, 13 < y]
or [y < x, 13 < y]

> \$&fourier.elim([(x+6)/(x-9) <= 6],[x])

$$[x = 12] \vee [12 < x] \vee [x < 9]$$

latihan

> \$&fourier.elim(((x + h > 10) and h < 5) or (x - h > 2),[x,h])

$$[h + 2 < x] \vee [10 - h < x, h < 5]$$

> \$&fourier.elim(((y + h > 12) and y > 1) and (y - h > 2),[y,h])

$$[\max(1, 12 - h, h + 2) < y]$$

> \$&fourier.elim(((c + d > 20) and d < 5) or (c - d > 2),[c,d])

$$[d + 2 < c] \vee [20 - d < c, d < 5]$$

> \$&fourier.elim(((x + h > 10) or (x - h > 2) and x < 9),[x,h])

$$[h + 2 < x, x < 9, h < 7] \vee [10 - h < x]$$

```
>${&fourier.elim}((x + h > 10) \text{ and } h < 5) \text{ or } (x - h > 2), [x, h])
```

$$[h + 2 < x] \vee [10 - h < x, h < 5]$$

The Matrix Language

Dokumentasi inti EMT berisi pembahasan rinci tentang bahasa matriks Euler.

Vektor dan matriks dimasukkan dengan tanda kurung siku, elemen dipisahkan dengan koma, baris dipisahkan dengan titik koma.

```
>A=[1,2;3,4]
```

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

Hasil kali matriks dilambangkan dengan titik.

```
>b=[3;4]
```

$$\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}$$

```
>b' // transpose b
```

$$[3, 4]$$

```
>inv(A) //inverse A
```

$$\begin{matrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{matrix}$$

```
>A.b //perkalian matriks
```

$$\begin{matrix} 11 \\ 25 \end{matrix}$$

```
>A.inv(A)
```

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

Poin utama dari bahasa matriks adalah semua fungsi dan operator bekerja elemen demi elemen.

```
>A.A
```

$$\begin{matrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{matrix}$$

```
>A^2 //perpangkatan elemen2 A
```

$$\begin{matrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{matrix}$$

```
>A.A.A
```

$$\begin{array}{r} 37 \\ 81 \end{array} \quad \begin{array}{r} 54 \\ 118 \end{array}$$

>power(A,3) //perpangkatan matriks

$$\begin{array}{r} 37 \\ 81 \end{array} \quad \begin{array}{r} 54 \\ 118 \end{array}$$

>A/A //pembagian elemen-elemen matriks yang seletak

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array}$$

>A/b //pembagian elemen2 A oleh elemen2 b kolom demi kolom (karena b vektor kolom)

$$\begin{array}{r} 0.333333 \\ 0.75 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0.666667 \\ 1 \end{array}$$

>A\b // hasil kali invers A dan b, A^{-1}b

$$\begin{array}{r} -2 \\ 2.5 \end{array}$$

>inv(A).b

$$\begin{array}{r} -2 \\ 2.5 \end{array}$$

>A\A //A^{-1}A

$$\begin{array}{r} 1 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ 1 \end{array}$$

>inv(A).A

$$\begin{array}{r} 1 \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ 1 \end{array}$$

>A*A //perkalian elemen-elemen matriks seletak

$$\begin{array}{r} 1 \\ 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 16 \end{array}$$

Ini bukan hasil kali matriks, melainkan perkalian elemen demi elemen. Hal yang sama juga berlaku untuk vektor.

>b^2 // perpangkatan elemen-elemen matriks/vektor

$$\begin{array}{r} 9 \\ 16 \end{array}$$

Jika salah satu operan adalah vektor atau skalar, maka operan tersebut diperluas secara alami.

>2*A

2	4
6	8

Misalnya, jika operan adalah vektor kolom, elemennya diterapkan ke semua baris A.

>[1,2]*A

1	4
3	8

Jika ini adalah vektor baris, maka diterapkan ke semua kolom A.

>A*[2,3]

2	6
6	12

Kita dapat membayangkan perkalian ini seolah-olah vektor baris v telah diduplikasi untuk membentuk matriks yang berukuran sama dengan A.

>dup([1,2],2) // dup: menduplikasi/menggandakan vektor [1,2] sebanyak 2 kali (baris)

1	2
1	2

>A*dup([1,2],2)

1	4
3	8

Hal ini juga berlaku untuk dua vektor dimana yang satu adalah vektor baris dan yang lainnya adalah vektor kolom. Kita menghitung $i \cdot j$ untuk i, j dari 1 sampai 5. Caranya adalah dengan mengalikan 1:5 dengan transposenya. Bahasa matriks Euler secara otomatis menghasilkan tabel nilai.

>(1:5)*(1:5)' // hasilkali elemen-elemen vektor baris dan vektor kolom

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

Sekali lagi, ingatlah bahwa ini bukan produk matriks!

>(1:5).(1:5)' // hasilkali vektor baris dan vektor kolom

55

>sum((1:5)*(1:5)) // sama hasilnya

55

Bahkan operator seperti < atau == bekerja dengan cara yang sama.

>(1:10)<6 // menguji elemen-elemen yang kurang dari 6

[1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0]

Misalnya, kita dapat menghitung jumlah elemen yang memenuhi kondisi tertentu dengan fungsi sum().

```
>sum((1:10)<6) // banyak elemen yang kurang dari 6
```

5

Euler memiliki operator perbandingan, seperti “==”, yang memeriksa kesetaraan.

Kita mendapatkan vektor 0 dan 1, dimana 1 berarti benar.

```
>t=(1:10)^2; t==25 //menguji elemen2 t yang sama dengan 25 (hanya ada 1)
```

```
[ 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0 ]
```

Dari vektor tersebut, “bukan nol” memilih elemen bukan nol.

Dalam hal ini, kita mendapatkan indeks semua elemen lebih besar dari 50.

```
>nonzeros(t>50) //indeks elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

```
[ 8, 9, 10 ]
```

Tentu saja, kita dapat menggunakan vektor indeks ini untuk mendapatkan nilai yang sesuai dalam t.

```
>t[nonzeros(t>50)] //elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

```
[ 64, 81, 100 ]
```

Sebagai contoh, mari kita cari semua kuadrat bilangan 1 sampai 1000, yaitu 5 modulo 11 dan 3 modulo 13.

```
>t=1:1000; nonzeros(mod(t^2,11)==5 && mod(t^2,13)==3)
```

```
[ 4, 48, 95, 139, 147, 191, 238, 282, 290, 334, 381, 425, 433, 477, 524, 568, 576, 620, 667, 711, 719, 763, 810, 854, 862, 906, 953, 997 ]
```

EMT tidak sepenuhnya efektif untuk perhitungan bilangan bulat. Ia menggunakan floating point presisi ganda secara internal. Namun, seringkali hal ini sangat berguna.

Kita dapat memeriksa primalitasnya. Mari kita cari tahu, berapa banyak persegi ditambah 1 yang merupakan bilangan prima.

```
>t=1:1000; length(nonzeros(isprime(t^2+1)))
```

112

Fungsi nonzeros() hanya berfungsi untuk vektor. Untuk matriks, ada mnonzeros().

```
>seed(2); A=random(3,4)
```

0.765761	0.401188	0.406347	0.267829
0.13673	0.390567	0.495975	0.952814
0.548138	0.006085	0.444255	0.539246

Ini mengembalikan indeks elemen, yang bukan nol.

```
>k=mnonzeros(A<0.4) //indeks elemen2 A yang kurang dari 0,4
```

1	4
2	1
2	2
3	2

Indeks ini dapat digunakan untuk mengatur elemen ke nilai tertentu.

>mset(A,k,0) //mengganti elemen2 suatu matriks pada indeks tertentu

0.765761	0.401188	0.406347	0
0	0	0.495975	0.952814
0.548138	0	0.444255	0.539246

Fungsi mset() juga dapat mengatur elemen pada indeks ke entri beberapa matriks lainnya.

>mset(A,k,-random(size(A)))

0.765761	0.401188	0.406347	-0.126917
-0.122404	-0.691673	0.495975	0.952814
0.548138	-0.483902	0.444255	0.539246

Dan dimungkinkan untuk mendapatkan elemen dalam vektor.

>mget(A,k)

[0.267829, 0.13673, 0.390567, 0.006085]

Fungsi lain yang berguna adalah ekstrem, yang mengembalikan nilai minimal dan maksimal di setiap baris matriks dan posisinya.

>ex=extrema(A)

0.267829	4	0.765761	1
0.13673	1	0.952814	4
0.006085	2	0.548138	1

Kita dapat menggunakan ini untuk mengekstrak nilai maksimal di setiap baris.

>ex[,3]'

[0.765761, 0.952814, 0.548138]

Ini tentu saja sama dengan fungsi max().

>max(A)'

[0.765761, 0.952814, 0.548138]

Namun dengan mget(), kita dapat mengekstrak indeks dan menggunakan informasi ini untuk mengekstrak elemen pada posisi yang sama dari matriks lain.

>j=(1:rows(A))'|ex[,4], mget(-A,j)

1	1
2	4
3	1
-0.765761	-0.952814
-0.548138	

2.19 latihan

```
>A=[3,2;9,4]
```

3	2
9	4

```
>inv(A)
```

-0.666667	0.333333
1.5	-0.5

2.20 Fungsi Matriks Lainnya (Membangun Matriks)

Untuk membangun sebuah matriks, kita dapat menumpuk satu matriks di atas matriks lainnya. Jika keduanya tidak memiliki jumlah kolom yang sama, matriks yang lebih pendek akan diisi dengan 0.

```
>v=1:3; v-v
```

1	2	3
1	2	3

Dengan cara yang sama, kita dapat menempelkan suatu matriks ke sisi lain yang berdampingan, jika keduanya memiliki jumlah baris yang sama.

```
>A=random(3,4); A|v'
```

0.032444	0.0534171	0.595713	0.564454	1
0.83916	0.175552	0.396988	0.83514	2
0.0257573	0.658585	0.629832	0.770895	3

Jika tidak memiliki jumlah baris yang sama, matriks yang lebih pendek diisi dengan 0.

Ada pengecualian untuk aturan ini. Bilangan riil yang dilampirkan ke matriks akan digunakan sebagai kolom yang diisi dengan bilangan riil tersebut.

```
>A|1
```

0.032444	0.0534171	0.595713	0.564454	1
0.83916	0.175552	0.396988	0.83514	1
0.0257573	0.658585	0.629832	0.770895	1

Dimungkinkan untuk membuat matriks dari vektor baris dan kolom.

```
>[v;v]
```

1	2	3
1	2	3

```
>[v',v']
```

1	1
2	2
3	3

Tujuan utama dari ini adalah untuk menafsirkan vektor ekspresi untuk vektor kolom.

```
>"[x,x^2]"(v')
```

1	1
2	4
3	9

Untuk mendapatkan ukuran A, kita dapat menggunakan fungsi berikut.

>C=zeros(2,4); rows(C), cols(C), size(C), length(C)

```
2
4
[ 2,    4 ]
4
```

Untuk vektor, ada length().

>length(2:10)

```
9
```

Ada banyak fungsi lain yang menghasilkan matriks.

>ones(2,2)

1	1
1	1

Ini juga dapat digunakan dengan satu parameter. Untuk mendapatkan vektor dengan angka selain 1, gunakan yang berikut ini.

>ones(5)*6

```
[ 6,    6,    6,    6,    6 ]
```

Matriks bilangan acak juga dapat dihasilkan dengan acak (distribusi seragam) atau normal (distribusi Gaus).

>random(2,2)

0.66566	0.831835
0.977	0.544258

Berikut adalah fungsi berguna lainnya, yang merestrukturisasi elemen-elemen suatu matriks menjadi matriks lain.

>redim(1:9,3,3) // menyusun elemen 1, 2, 3, ..., 9 ke bentuk matriks 3x3

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Dengan fungsi berikut, kita dapat menggunakan ini dan fungsi dup untuk menulis fungsi rep(), yang mengulang vektor n kali.

>function rep(v,n) := redim(dup(v,n),1,n*cols(v))

Mari kita mengujinya.

>rep(1:3,5)

```
[1,    2,    3,    1,    2,    3,    1,    2,    3,    1,    2,    3]
```

Fungsi multdup() menduplikasi elemen suatu vektor.

```
>multdup(1:3,5), multdup(1:3,[2,3,2])
```

```
[1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3]  
[1, 1, 2, 2, 2, 3, 3]
```

Fungsi flipx() dan flipy() membalikkan urutan baris atau kolom matriks. Yaitu, fungsi flipx() membalik secara horizontal.

```
>flipx(1:5) //membalik elemen2 vektor baris
```

```
[5, 4, 3, 2, 1]
```

Untuk rotasi, Euler memiliki rotleft() dan rotright().

```
>rotleft(1:5) // memutar elemen2 vektor baris
```

```
[2, 3, 4, 5, 1]
```

Fungsi khusus adalah drop(v,i), yang menghapus elemen dengan indeks di i dari vektor v.

```
>drop(10:20,3)
```

```
[10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]
```

Perhatikan bahwa vektor i dalam drop(v,i) merujuk pada indeks elemen dalam v, bukan nilai elemen. Jika Anda ingin menghapus elemen, Anda perlu menemukan elemen terlebih dahulu. Fungsi indexof(v,x) dapat digunakan untuk menemukan elemen x dalam vektor v yang diurutkan.

```
>v=primes(50), i=indexof(v,10:20), drop(v,i)
```

```
[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47]  
[0, 5, 0, 6, 0, 0, 0, 7, 0, 8, 0]  
[2, 3, 5, 7, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47]
```

Seperti yang Anda lihat, tidak ada salahnya menyertakan indeks di luar rentang (seperti 0), indeks ganda, atau indeks yang tidak diurutkan.

```
>drop(1:10,shuffle([0,0,5,5,7,12,12]))
```

```
[1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10]
```

Ada beberapa fungsi khusus untuk mengatur diagonal atau membuat matriks diagonal.

Kita mulai dengan matriks identitas.

```
>A=id(5) // matriks identitas 5x5
```

1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

Kemudian kita atur diagonal bawah (-1) menjadi 1:4.

```
>setdiag(A,-1,1:4) //mengganti diagonal di bawah diagonal utama
```

1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
0	2	1	0	0
0	0	3	1	0
0	0	0	4	1

Perhatikan bahwa kita tidak mengubah matriks A. Kita mendapatkan matriks baru sebagai hasil dari setdiag().

Berikut ini adalah fungsi yang mengembalikan matriks tri-diagonal.

```
>function tridiag (n,a,b,c) := setdiag(setdiag(b*id(n),1,c),-1,a); ...
> tridiag(5,1,2,3)
```

2	3	0	0	0
1	2	3	0	0
0	1	2	3	0
0	0	1	2	3
0	0	0	1	2

Diagonal matriks juga dapat diekstraksi dari matriks. Untuk menunjukkan hal ini, kami merestrukturisasi vektor 1:9 menjadi matriks 3x3.

```
>A=redim(1:9,3,3)
```

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Sekarang kita dapat mengekstrak diagonalnya.

```
>d=getdiag(A,0)
```

```
[1, 5, 9]
```

Misalnya, kita dapat membagi matriks berdasarkan diagonalnya. Bahasa matriks memastikan bahwa vektor kolom d diterapkan ke matriks baris demi baris.

```
>fraction A/d'
```

1	2	3
4/5	1	6/5
7/9	8/9	1

2.21 latihan

```
>v=2:6; v_v
```

2	3	4	5	6
2	3	4	5	6

```
>[v;v]
```

2	3	4	5	6
2	3	4	5	6

```
>length(5:10)
```

6

```
>random(1,2)
```

```
[0.208566, 0.220144]
```

2.22 Vektorisasi

Hampir semua fungsi di Euler juga berfungsi untuk masukan matriks dan vektor, jika ini masuk akal.

Misalnya, fungsi sqrt() menghitung akar kuadrat dari semua elemen vektor atau matriks.

```
>sqrt(1:3)
```

```
[1, 1.41421, 1.73205]
```

Jadi Anda dapat dengan mudah membuat tabel nilai. Ini adalah salah satu cara untuk memplot fungsi (alternatifnya menggunakan ekspresi).

```
>x=1:0.01:5; y=log(x)/x^2; // terlalu panjang untuk ditampilkan
```

Dengan ini dan operator titik dua a:delta:b, vektor nilai fungsi dapat dibuat dengan mudah.

Dalam contoh berikut, kita buat vektor nilai $t[i]$ dengan spasi 0,1 dari -1 hingga 1. Kemudian kita buat vektor nilai fungsi

$$s = t^3 - t$$

```
>t=-1:0.1:1; s=t^3-t
```

```
[0, 0.171, 0.288, 0.357, 0.384, 0.375, 0.336, 0.273, 0.192,
0.099, 0, -0.099, -0.192, -0.273, -0.336, -0.375, -0.384,
-0.357, -0.288, -0.171, 0]
```

EMT mengembangkan operator untuk skalar, vektor, dan matriks dengan cara yang jelas.

Misalnya, vektor kolom dikalikan vektor baris akan mengembang menjadi matriks, jika operator diterapkan. Berikut ini, v' adalah vektor yang ditransposisikan (vektor kolom).

```
>shortest (1:5)*(1:5)'
```

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

Perhatikan bahwa ini sangat berbeda dari perkalian matriks. Perkalian matriks dilambangkan dengan titik “.” dalam EMT.

```
>(1:5).(1:5)'
```

55

Secara default, vektor baris dicetak dalam format ringkas.

```
>[1,2,3,4]
```

52

```
[1, 2, 3, 4]
```

Untuk matriks, operator khusus . menunjukkan perkalian matriks, dan A' menunjukkan transpose. Matriks 1x1 dapat digunakan seperti bilangan riil.

```
>v:=[1,2]; v.v', %^2
```

```
5  
25
```

Untuk mentranspos suatu matriks, kita menggunakan tanda apostrof.

```
>v=1:4; v'
```

```
1  
2  
3  
4
```

Jadi kita dapat menghitung matriks A dikali vektor b.

```
>A=[1,2,3,4;5,6,7,8]; A.v'
```

```
30  
70
```

Perhatikan bahwa v masih merupakan vektor baris. Jadi v'.v berbeda dari v.v'.

```
>v'.v
```

```
1 2 3 4  
2 4 6 8  
3 6 9 12  
4 8 12 16
```

v.v' menghitung norma v kuadrat untuk vektor baris v. Hasilnya adalah vektor 1x1, yang bekerja seperti bilangan riil.

```
>v.v'
```

```
30
```

Ada juga norma fungsi (bersama dengan banyak fungsi Aljabar Linear lainnya).

```
>norm(v)^2
```

```
30
```

Operator dan fungsi mematuhi bahasa matriks Euler.

Berikut ini ringkasan aturannya.

- Fungsi yang diterapkan pada vektor atau matriks diterapkan pada setiap elemen.
- Operator yang beroperasi pada dua matriks dengan ukuran yang sama diterapkan secara berpasangan pada elemen-elemen matriks.
- Jika kedua matriks memiliki dimensi yang berbeda, keduanya diekspansi dengan cara yang masuk akal, sehingga memiliki ukuran yang sama.

Misalnya, nilai skalar dikalikan vektor mengalikan nilai dengan setiap elemen vektor. Atau matriks dikalikan vektor (dengan *, bukan .) mengekspansi vektor ke ukuran matriks dengan menduplikasinya.

Berikut ini adalah kasus sederhana dengan operator ^.

```
>[1,2,3]^2
```

```
[1, 4, 9]
```

Berikut ini adalah kasus yang lebih rumit. Vektor baris dikalikan vektor kolom, keduanya diekspansi dengan cara menduplikasi.

```
>v:=[1,2,3]; v*v'
```

1	2	3
2	4	6
3	6	9

Perhatikan bahwa produk skalar menggunakan produk matriks, bukan *!

```
>v.v'
```

```
1 4
```

Ada banyak fungsi untuk matriks. Kami memberikan daftar singkatnya. Anda harus merujuk ke dokumentasi untuk informasi lebih lanjut tentang perintah-perintah ini.

sum,prod menghitung jumlah dan hasil perkalian baris-baris
cumsum,cumprod melakukan hal yang sama secara kumulatif
menghitung nilai ekstrem dari setiap baris
extrema mengembalikan vektor dengan informasi ekstrem
diag(A,i) mengembalikan diagonal ke-i
setdiag(A,i,v) menetapkan diagonal ke-i
id(n) matriks identitas
det(A) determinan
charpoly(A) polinomial karakteristik
eigenvalues(A) nilai eigen

```
>v*v, sum(v*v), cumsum(v*v)
```

```
[1, 4, 9]
```

```
1 4
```

```
[1, 5, 14]
```

Operator : menghasilkan vektor baris dengan spasi yang sama, secara opsional dengan ukuran langkah.

```
>1:4, 1:2:10
```

```
[1, 2, 3, 4]  
[1, 3, 5, 7, 9]
```

Untuk menggabungkan matriks dan vektor ada operator “|” dan “_“.

```
>[1,2,3]|[4,5], [1,2,3]_-1
```

```
[1, 2, 3, 4, 5]  
1 2 3  
1 1 1
```

Elemen-elemen suatu matriks disebut dengan “A[i,j]”.

```
>A:=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; A[2,3]
```

6

Untuk vektor baris atau kolom, v[i] adalah elemen ke-i dari vektor. Untuk matriks, ini mengembalikan baris ke-i lengkap dari matriks.

```
>v:=[2,4,6,8]; v[3], A[3]
```

6

```
[7, 8, 9]
```

Indeks juga dapat berupa vektor baris indeks. : menunjukkan semua indeks.

```
>v[1:2], A[:,2]
```

```
[2, 4]
```

2

5

8

Bentuk singkat dari : adalah menghilangkan indeks sepenuhnya.

```
>A[,2:3]
```

2

3

5

6

8

9

Untuk tujuan vektorisasi, elemen-elemen matriks dapat diakses seolah-olah mereka adalah vektor.

```
>A{4}
```

4

Matriks juga dapat diratakan, menggunakan fungsi redim(). Hal ini diimplementasikan dalam fungsi flatten().

```
>redim(A,1,prod(size(A))), flatten(A)
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]  
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

Untuk menggunakan matriks pada tabel, mari kita atur ulang ke format default, dan hitung tabel nilai sinus dan kosinus. Perhatikan bahwa sudut dalam radian secara default.

```
>defformat; w=0°:45°:360°; w=w'; deg(w)
```

```
0  
45  
90  
135  
180  
225  
270  
315  
360
```

Sekarang kita tambahkan kolom ke matriks.

>M = deg(w)|w|cos(w)|sin(w)

0	0	1	0
45	0.785398	0.707107	0.0137074
90	1.5708	0	0.0274121
135	2.35619	-0.707107	0.0411118
180	3.14159	-1	0.0548037
225	3.92699	-0.707107	0.0684853
270	4.71239	0	0.082154
315	5.49779	0.707107	0.0958073
360	6.28319	1	0.109443

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat membuat beberapa tabel dari beberapa fungsi sekaligus.

Dalam contoh berikut, kita menghitung $t[j]^i$ untuk i dari 1 hingga n . Kita memperoleh matriks, yang setiap barisnya merupakan tabel t^i untuk satu i . Yaitu, matriks tersebut memiliki elemen

$$a_{i,j} = t_j^i, \quad 1 \leq j \leq 101, \quad 1 \leq i \leq n$$

Fungsi yang tidak berfungsi untuk input vektor harus “divektorkan”. Ini dapat dicapai dengan kata kunci “map” dalam definisi fungsi. Kemudian fungsi tersebut akan dievaluasi untuk setiap elemen parameter vektor.

Integrasi numerik integr() hanya berfungsi untuk batas interval skalar. Jadi, kita perlu memvektorkannya.

>function map f(x) := integrate("x^x",1,x)

Kata kunci “map” akan memvektorkan fungsi tersebut. Fungsi tersebut sekarang akan berfungsi untuk vektor angka.

>f([1:5])

[0, 2.05045, 13.7251, 113.336, 1241.03]

2.23 latihan

>sqrt(5:10)

[2.23607, 2.44949, 2.64575, 2.82843, 3, 3.16228]

>t=-1:0.1:2; s=t^3-t

[0, 0.171, 0.288, 0.357, 0.384, 0.375, 0.336, 0.273, 0.192, 0.099, 0, -0.099, -0.192, -0.273, -0.336, -0.375, -0.384, -0.357, -0.288, -0.171, 0, 0.231, 0.528, 0.897, 1.344, 1.875, 2.496, 3.213, 4.032, 4.959, 6]

>shortest (1:6)*(1:6)

[1, 4, 9, 16, 25, 36]

2.24 Sub-Matriks dan Elemen Matriks

Untuk mengakses elemen matriks, gunakan notasi tanda kurung.

>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9], A[2,2]

1	2	3
4	5	6
7	8	9

5

Kita dapat mengakses baris matriks yang lengkap.

>A[2]

[4, 5, 6]

Dalam kasus vektor baris atau kolom, ini mengembalikan elemen vektor.

>v=1:3; v[2]

2

Untuk memastikan, Anda mendapatkan baris pertama untuk matriks 1xn dan mxn, tentukan semua kolom menggunakan indeks kedua yang kosong.

>A[2,]

[4, 5, 6]

Jika indeks adalah vektor indeks, Euler akan mengembalikan baris matriks yang sesuai.

Di sini kita menginginkan baris pertama dan kedua dari A.

1	2	3
4	5	6

Kita bahkan dapat menyusun ulang A menggunakan vektor indeks. Untuk lebih tepatnya, kita tidak mengubah A di sini, tetapi menghitung versi A yang telah disusun ulang.

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Trik indeks juga berfungsi dengan kolom.

Contoh ini memilih semua baris A dan kolom kedua dan ketiga.

>A[1:3,2:3]

2	3
5	6
8	9

Untuk singkatan ":" menunjukkan semua indeks baris atau kolom.

>A[:,3]

3
6
9

Atau, biarkan indeks pertama kosong.

>A[2:3]

2 3
5 6
8 9

Kita juga bisa mendapatkan baris terakhir A.

>A[-1]

[7, 8, 9]

Sekarang mari kita ubah elemen A dengan menetapkan submatriks A ke suatu nilai. Hal ini pada kenyataannya mengubah matriks A yang tersimpan.

>A[1,1]=4

4 2 3
4 5 6
7 8 9

Kita juga dapat menetapkan nilai ke baris A.

>A[1]=[-1,-1,-1]

-1 -1 -1
4 5 6
7 8 9

Kita bahkan dapat menetapkannya ke submatriks jika ukurannya tepat.

>A[1:2,1:2]=[5,6;7,8]

5 6 6
7 8 9
10 11 12

Selain itu, beberapa jalan pintas diperbolehkan.

>A[1:2,1:2]=0

0 0 6
0 0 9
10 11 12

Peringatan: Indeks yang tidak sesuai batas akan mengembalikan matriks kosong, atau pesan kesalahan, tergantung pada pengaturan sistem. Pesan kesalahan adalah standar. Namun, perlu diingat bahwa indeks negatif dapat digunakan untuk mengakses elemen matriks yang dihitung dari akhir.

2.25 latihan

```
>A=[2,4,6;7,8,9;10,11,12], A[1,2]
```

```
2          4          6  
7          8          9  
10         11         12  
4
```

```
>A[:,3]
```

```
6  
9  
12
```

```
>A[1,1]=4
```

```
4          4          6  
7          8          9  
10         11         12
```

2.26 Sortir dan Acak

Fungsi sort() mengurutkan vektor baris.

```
>sort([5,6,4,8,1,9])
```

```
[1, 4, 5, 6, 8, 9]
```

Seringkali perlu untuk mengetahui indeks vektor yang diurutkan dalam vektor asli. Ini dapat digunakan untuk menyusun ulang vektor lain dengan cara yang sama.

Mari kita acak sebuah vektor.

```
>v=shuffle(1:10)
```

```
[6, 8, 5, 10, 4, 7, 2, 3, 1, 9]
```

Indeks berisi urutan v yang tepat.

```
>{vs,ind}=sort(v); v[ind]
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```

Ini juga berlaku untuk vektor string.

```
>s=["a","d","e","a","aa","e"]
```

```
a  
d  
e  
a  
aa  
e
```

```
>{ss,ind}=sort(s); ss
```

```
a  
a  
aa  
d  
e  
e
```

Seperti yang Anda lihat, posisi entri ganda agak acak.

```
>ind
```

```
[4, 1, 5, 2, 6, 3]
```

Fungsi unik mengembalikan daftar yang diurutkan dari elemen unik suatu vektor.

```
>intrandom(1,10,10), unique(%)
```

```
[9, 2, 6, 5, 10, 6, 5, 1, 4, 2]  
[1, 2, 4, 5, 6, 9, 10]
```

Ini juga berlaku untuk vektor string.

```
>unique(s)
```

```
a  
aa  
d  
e
```

2.27 latihan

```
>sort([6,3,7,5,2,8])
```

```
[2, 3, 5, 6, 7, 8]
```

```
>intrandom(2,4,8), unique(%))ind
```

```
3 6 5 1  
6 5 7 8
```

Need real row vector for unique

Try "trace errors" to inspect local variables after errors.

unique:

```
    return _unique(v);
```

Error in:

```
intrandom(2,4,8), unique(%))ind ...  
^
```

```
>unique(s)
```

```
a  
aa  
d  
e
```

2.28 Aljabar Linier

EMT memiliki banyak fungsi untuk memecahkan sistem linier, sistem renggang, atau masalah regresi.

Untuk sistem linier $Ax=b$, Anda dapat menggunakan algoritma Gauss, matriks invers, atau kecocokan linier. Operator \underline{A} menggunakan versi algoritma Gauss.

```
>A=[1,2;3,4]; b=[5;6]; A\b
```

$$\begin{array}{r} -4 \\ 4 . 5 \end{array}$$

Untuk contoh lain, kita buat matriks 200x200 dan jumlah barisnya. Kemudian kita selesaikan $Ax=b$ menggunakan matriks invers. Kita ukur kesalahan sebagai deviasi maksimal semua elemen dari 1, yang tentu saja merupakan solusi yang benar.

```
>A=normal(200,200); b=sum(A); longest totalmax(abs(inv(A).b-1))
```

```
1.358912982141192e-13
```

Jika sistem tidak mempunyai solusi, penyesuaian linier meminimalkan norma kesalahan $Ax-b$.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}$$

Determinan matriks ini adalah 0.

```
>det(A)
```

```
0
```

2.29 Matriks Simbolik

Maxima memiliki matriks simbolik. Tentu saja, Maxima dapat digunakan untuk masalah aljabar linear sederhana tersebut. Kita dapat mendefinisikan matriks untuk Euler dan Maxima dengan $\&:=$, lalu menggunakan dalam ekspresi simbolik. Bentuk [...] yang biasa digunakan untuk mendefinisikan matriks dapat digunakan dalam Euler untuk mendefinisikan matriks simbolik.

```
>A &= [a,1,1;1,a,1;1,1,a]; $A
```

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

```
>$&det(A), $&factor(%)
```

$$\begin{aligned} &a (a^2 - 1) - 2 a + 2 \\ &(a - 1)^2 (a + 2) \end{aligned}$$

```
>$&invert(A) with a=0
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

```
>A &= [1,a;b,2]; $A
```

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

Seperi semua variabel simbolik, matriks ini dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&det(A-x*ident(2)), $&solve(% ,x)
```

$$\begin{aligned} & (1 - x) (2 - x) - a b \\ & \left[x = \frac{3 - \sqrt{4 a b + 1}}{2}, x = \frac{\sqrt{4 a b + 1} + 3}{2} \right] \end{aligned}$$

Nilai eigen juga dapat dihitung secara otomatis. Hasilnya adalah vektor dengan dua vektor nilai eigen dan multiplisitas.

```
>$&eigenvalues([a,1;1,a])
```

$$[[a - 1, a + 1], [1, 1]]$$

Untuk mengekstrak vektor eigen tertentu dibutuhkan pengindeksan yang cermat.

```
>$&eigenvectors([a,1;1,a]), &%[2][1][1]
```

$$[[[a - 1, a + 1], [1, 1]], [[[1, -1]], [[1, 1]]]]$$

[1, - 1]

Matriks simbolik dapat dievaluasi dalam Euler secara numerik seperti ekspresi simbolik lainnya.

```
>A(a=4,b=5)
```

$$\begin{matrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{matrix}$$

Dalam ekspresi simbolik, gunakan dengan.

```
>$&A with [a=4,b=5]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Akses terhadap baris matriks simbolik bekerja seperti halnya matriks numerik.

```
>$&A[1]
```

$$[1, a]$$

Ekspresi simbolik dapat berisi sebuah penugasan. Dan itu mengubah matriks A.

```
>&A[1,1]:=t+1; $&A
```

$$\begin{pmatrix} t + 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

Terdapat fungsi simbolik di Maxima untuk membuat vektor dan matriks. Untuk ini, rujuk dokumentasi Maxima atau tutorial tentang Maxima di EMT.

```
>v &= makelist(1/(i+j),i,1,3); $v
```

$$\left[\frac{1}{j + 1}, \frac{1}{j + 2}, \frac{1}{j + 3} \right]$$

```
>B &:= [1,2;3,4]; $B, $&invert(B)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Hasilnya dapat dievaluasi secara numerik di Euler. Untuk informasi lebih lanjut tentang Maxima, lihat pengantar Maxima.

```
>$&invert(B)()
```

$$\begin{matrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{matrix}$$

Euler juga memiliki fungsi xinv() yang hebat, yang melakukan upaya lebih besar dan mendapatkan hasil yang lebih tepat.

Perlu dicatat, bahwa dengan &:= matriks B telah didefinisikan sebagai simbolik dalam ekspresi simbolik dan sebagai numerik dalam ekspresi numerik. Jadi kita dapat menggunakannya di sini.

```
>longest B.xinv(B)
```

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

Misalnya nilai eigen A dapat dihitung secara numerik.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; real(eigenvalues(A))
```

```
[16.1168, -1.11684, 0]
```

Atau secara simbolis. Lihat tutorial tentang Maxima untuk detailnya.

```
>$&eigenvalues((A?))
```

$$\left[\left[\frac{15 - 3\sqrt{33}}{2}, \frac{3\sqrt{33} + 15}{2}, 0 \right], [1, 1, 1] \right]$$

latihan

```
>$&det(A-x*ident(4)), $&solve(% ,x)
```

2.30 Nilai Numerik dalam Ekspresi Simbolik

Ekspresi simbolik hanyalah string yang berisi ekspresi. Jika kita ingin menentukan nilai untuk ekspresi simbolik dan ekspresi numerik, kita harus menggunakan “&:=”.

```
>A &:= [1,pi;4,5]
```

$$\begin{matrix} 1 & 3.14159 \\ 4 & 5 \end{matrix}$$

Masih terdapat perbedaan antara bentuk numerik dan bentuk simbolik. Saat mengubah matriks ke bentuk simbolik, pendekatan pecahan untuk bilangan riil akan digunakan.

```
>$&A
```

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1146408}{364913} \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Untuk menghindari hal ini, ada fungsi “mxmset(variabel)”.

```
>mxmset(A); $&A
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3.141592653589793 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Maxima juga dapat melakukan komputasi dengan angka floating point, dan bahkan dengan angka floating point besar dengan 32 digit. Namun, evaluasinya jauh lebih lambat.

```
>$&bfloat(sqrt(2)), $&float(sqrt(2))
```

$$1.4142135623730950488016887242097_B \times 10^0$$

$$1.414213562373095$$

Ketepatan angka floating point besar dapat diubah.

```
>&fpprec:=100; &bfloat(pi)
```

```
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494\  
4592307816406286208998628034825342117068b0
```

Variabel numerik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik apa pun menggunakan “(**var?**)”.

Perlu dicatat bahwa ini hanya diperlukan jika variabel telah didefinisikan dengan “:=” atau “=” sebagai variabel numerik.

```
>B:=[1,pi;3,4]; $&det((B?))
```

$$-5.424777960769379$$

latihan

```
>A &:= [1,pi;4,5]
```

$$\begin{matrix} 1 & 3.14159 \\ 4 & 5 \end{matrix}$$

```
>$&bfloat(sqrt(4)), $&float(sqrt(4))
```

$$2.0_B \times 10^0$$

$$2.0$$

```
>&fpprec:=100; &bfloat(pi)
```

```
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494\  
4592307816406286208998628034825342117068b0
```

2.31 Demo - Suku Bunga

Di bawah ini, kami menggunakan Euler Math Toolbox (EMT) untuk menghitung suku bunga. Kami melakukannya secara numerik dan simbolis untuk menunjukkan kepada Anda bagaimana Euler dapat digunakan untuk memecahkan masalah kehidupan nyata.

Asumsikan Anda memiliki modal awal sebesar 5000 (misalnya dalam dolar).

```
>K=5000
```

5000

Sekarang kita asumsikan suku bunga 3% per tahun. Mari kita tambahkan satu suku bunga sederhana dan hitung hasilnya.

>K*1.03

5150

Euler juga akan memahami sintaksis berikut.

>K+K*3%

5150

Namun lebih mudah menggunakan faktor

>q=1+3%, K*q

1.03

5150

Selama 10 tahun, kita cukup mengalikan faktor-faktornya dan mendapatkan nilai akhir dengan suku bunga majemuk.

>K*q^10

6719.58189672

Untuk keperluan kita, kita dapat mengatur format menjadi 2 digit setelah titik desimal.

>format(12,2); K*q^10

6719.58

Mari kita cetak angka tersebut dibulatkan menjadi 2 digit dalam kalimat lengkap.

>“Starting from” + K + “\$ you get” + round(K*q^10,2) + “.”

Starting from 5000\$ you get 6719.58\$.

Bagaimana jika kita ingin mengetahui hasil antara dari tahun 1 hingga tahun 9? Untuk ini, bahasa matriks Euler sangat membantu. Anda tidak perlu menulis loop, tetapi cukup masukkan

>K*q^(0:10)

Real 1 x 11 matrix

5000.00 5150.00 5304.50 5463.64 ...

Bagaimana keajaiban ini bekerja? Pertama, ekspresi 0:10 menghasilkan vektor bilangan bulat.

>short 0:10

[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

Maka semua operator dan fungsi di Euler dapat diaplikasikan ke vektor elemen demi elemen. Jadi

>short q^(0:10)

[1, 1.03, 1.0609, 1.0927, 1.1255, 1.1593, 1.1941, 1.2299,
1.2668, 1.3048, 1.3439]

adalah vektor faktor q^0 hingga q^{10} . Ini dikalikan dengan K, dan kita memperoleh vektor nilai.

```
>VK=K*q^(0:10);
```

Tentu saja, cara realistik untuk menghitung suku bunga ini adalah dengan membulatkannya ke sen terdekat setelah setiap tahun. Mari kita tambahkan fungsi untuk ini.

```
>function oneyear (K) := round(K*q,2)
```

Mari kita bandingkan kedua hasil, dengan dan tanpa pembulatan.

```
>longest oneyear(1234.57), longest 1234.57*q
```

```
1271.61  
1271.6071
```

Sekarang tidak ada rumus sederhana untuk tahun ke-n, dan kita harus mengulangnya selama bertahun-tahun. Euler menyediakan banyak solusi untuk ini.

Cara termudah adalah fungsi iterate, yang mengulang fungsi yang diberikan beberapa kali.

```
>VKr=iterate("oneyear",5000,10)
```

Real 1 x 11 matrix

```
5000.00      5150.00      5304.50      5463.64      ...
```

Kita dapat mencetaknya dengan cara yang ramah, menggunakan format kami dengan tempat desimal tetap.

```
>VKr'
```

```
5000.00  
5150.00  
5304.50  
5463.64  
5627.55  
5796.38  
5970.27  
6149.38  
6333.86  
6523.88  
6719.60
```

Untuk mendapatkan elemen vektor tertentu, kita menggunakan indeks dalam tanda kurung siku.

```
>VKr[2], VKr[1:3]
```

```
5150.00  
5000.00      5150.00      5304.50
```

Anehnya, kita juga dapat menggunakan vektor indeks. Ingat bahwa 1:3 menghasilkan vektor [1,2,3].

Mari kita bandingkan elemen terakhir dari nilai yang dibulatkan dengan nilai penuh.

```
>VKr[-1], VK[-1]
```

```
6719.60  
6719.58
```

Perbedaannya sangat kecil.

2.32 latian

>K=100000

100000.00

>K+K*3%

103000.00

>r=1+3%, K*r

1.03
103000.00

2.33 Menyelesaikan Persamaan

Sekarang kita ambil fungsi yang lebih maju, yang menambahkan nilai uang tertentu setiap tahun.

>function onepay (K) := K*q+R

Kita tidak perlu menentukan q atau R untuk definisi fungsi. Hanya jika kita menjalankan perintah, kita harus menentukan nilai-nilai ini. Kita pilih R=200.

>R=200; iterate("onepay",5000,10)

Real 1 x 11 matrix

5000.00 5350.00 5710.50 6081.82 ...

Bagaimana jika kita menghilangkan jumlah yang sama setiap tahun?

>R=-200; iterate("onepay",5000,10)

Real 1 x 11 matrix

5000.00 4950.00 4898.50 4845.45 ...

Kita melihat bahwa uang berkurang. Jelas, jika kita hanya memperoleh bunga sebesar 150 pada tahun pertama, tetapi mengurangi 200, kita akan kehilangan uang setiap tahun.

Bagaimana kita dapat menentukan berapa tahun uang tersebut akan bertahan? Kita harus menulis sebuah loop untuk ini. Cara termudah adalah dengan melakukan iterasi yang cukup lama.

>VKR=iterate("onepay",5000,50)

Real 1 x 51 matrix

5000.00 4950.00 4898.50 4845.45 ...

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat menentukan nilai negatif pertama dengan cara berikut.

>min(nonzeros(VKR<0))

48.00

Alasannya adalah nonzeros(VKR<0) mengembalikan vektor indeks i, di mana VKR[i]<0, dan min menghitung indeks minimal.

Karena vektor selalu dimulai dengan indeks 1, jawabannya adalah 47 tahun.

Fungsi iterate() memiliki satu trik lagi.

Fungsi ini dapat mengambil kondisi akhir sebagai argumen. Kemudian, fungsi ini akan mengembalikan nilai dan jumlah iterasi.

```
>{x,n}:=iterate("onepay",5000,till="x<0"); x, n,
```

```
-19.83  
47.00
```

Mari kita coba menjawab pertanyaan yang lebih ambigu. Asumsikan kita tahu bahwa nilainya adalah 0 setelah 50 tahun. Berapa tingkat bunganya?

Ini adalah pertanyaan yang hanya dapat dijawab secara numerik. Di bawah ini, kita akan memperoleh rumus yang diperlukan. Kemudian Anda akan melihat bahwa tidak ada rumus yang mudah untuk tingkat bunga. Namun untuk saat ini, kita bertujuan untuk mencari solusi numerik.

Langkah pertama adalah mendefinisikan fungsi yang melakukan iterasi sebanyak n kali. Kita menambahkan semua parameter ke fungsi ini.

```
>function f(K,R,P,n):= iterate("x*(1+P/100)+R",K,n;P,R)[-1]
```

Iterasinya sama seperti di atas

$$x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right) + R$$

Namun, kita tidak lagi menggunakan nilai global R dalam ekspresi kita. Fungsi seperti iterate() memiliki trik khusus di Euler. Anda dapat meneruskan nilai variabel dalam ekspresi sebagai parameter titik koma. Dalam kasus ini P dan R.

Selain itu, kita hanya tertarik pada nilai terakhir. Jadi, kita ambil indeks [-1].

Mari kita coba uji coba.

```
>f(5000,-200,3,47)
```

```
-19.83
```

Sekarang kita bisa memecahkan masalah kita.

```
>solve("f(5000,-200,x,50)",3)
```

```
3.15
```

Rutin solve menyelesaikan ekspresi=0 untuk variabel x. Jawabannya adalah 3,15% per tahun. Kita ambil nilai awal 3% untuk algoritma tersebut. Fungsi solve() selalu membutuhkan nilai awal.

Kita dapat menggunakan fungsi yang sama untuk menyelesaikan pertanyaan berikut: Berapa banyak yang dapat kita hapus per tahun sehingga modal awal habis setelah 20 tahun dengan asumsi suku bunga 3% per tahun.

```
>solve("f(5000,x,3,20)",-200)
```

```
-336.08
```

Perhatikan bahwa Anda tidak dapat memecahkan masalah jumlah tahun,karena fungsi kita mengasumsikan n sebagai nilai integer.

2.34 latihan

```
>function onepay (K) := K*q+R
>R=1000; iterate("onepay",5000,10)
```

Real 1 x 11 matrix

5000.00	6150.00	7334.50	8554.53	...
---------	---------	---------	---------	-----

```
>R=-500; iterate("onepay",5000,10)
```

Real 1 x 11 matrix

5000.00	4650.00	4289.50	3918.19	...
---------	---------	---------	---------	-----

2.35 Solusi Simbolis untuk Masalah Suku Bunga

Kita dapat menggunakan bagian simbolis Euler untuk mempelajari masalah tersebut. Pertama, kita mendefinisikan fungsi onepay() secara simbolis.

```
>function op(K) &= K*q+R; \$&op(K)
```

$$R + q K$$

Sekarang kita dapat mengulanginya.

```
>\$&op(op(op(op(K)))) , \$&expand(%)
```

$$\begin{aligned} q (q (q (R + q K) + R) + R) \\ q^3 R + q^2 R + q R + R + q^4 K \end{aligned}$$

Kita melihat suatu pola. Setelah n periode kita memiliki

$$K_n = q^n K + R(1 + q + \dots + q^{n-1}) = q^n K + \frac{q^n - 1}{q - 1} R$$

Rumus tersebut adalah rumus untuk jumlah geometrik, yang diketahui oleh Maxima.

```
>\sum(q^k,k,0,n-1); \$& % = ev(% , simpsum)
```

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ini agak rumit. Jumlahnya dievaluasi dengan tanda “simpsum” untuk mereduksinya menjadi hasil bagi.

Mari kita buat fungsi untuk ini.

```
>function fs(K,R,P,n) &= (1+P/100)^n*K + ((1+P/100)^n-1)/(P/100)*R; \$&fs(K,R,P,n)
```

$$\frac{100 \left(\left(\frac{P}{100} + 1 \right)^n - 1 \right) R}{P} + K \left(\frac{P}{100} + 1 \right)^n$$

Fungsi ini melakukan hal yang sama seperti fungsi f sebelumnya. Namun, fungsinya lebih efektif.

```
>longest f(5000,-200,3,47), longest fs(5000,-200,3,47)
```

```
-19.82504734650985
-19.82504734652684
```

Kita sekarang dapat menggunakannya untuk menanyakan waktu n. Kapan modal kita habis? Perkiraan awal kita adalah 30 tahun.

```
>solve("fs(5000,-330,3,x)",30)
```

20.51

Jawaban ini menyatakan bahwa akan negatif setelah 21 tahun.

Kita juga dapat menggunakan sisi simbolik Euler untuk menghitung rumus pembayaran.

Asumsikan kita mendapatkan pinjaman sebesar K, dan membayar n kali cicilan sebesar R (dimulai setelah tahun pertama) sehingga menyisakan utang residual sebesar Kn (pada saat pembayaran terakhir). Rumus untuk ini jelas

```
>equ &= fs(K,R,P,n)=Kn; $&equ
```

$$\frac{100 \left(\left(\frac{P}{100} + 1 \right)^n - 1 \right) R}{P} + K \left(\frac{P}{100} + 1 \right)^n = Kn$$

Biasanya rumus ini diberikan dalam bentuk

$$i = \frac{P}{100}$$

```
>equ &= (equ with P=100*i); $&equ
```

$$\frac{\left((i+1)^n - 1 \right) R}{i} + (i+1)^n K = Kn$$

Kita dapat mencari laju R secara simbolis.

```
>$&solve(equ,R)
```

$$\left[R = \frac{i Kn - i (i+1)^n K}{(i+1)^n - 1} \right]$$

Seperti yang dapat Anda lihat dari rumus, fungsi ini mengembalikan kesalahan floating point untuk i=0. Namun, Euler memplotnya.

Tentu saja, kita memiliki limit berikut.

```
>$&limit(R(5000,0,x,10),x,0)
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} R(5000, 0, x, 10)$$

Jelas, tanpa bunga, kita harus membayar kembali 10 suku bunga sebesar 500.

Persamaan ini juga dapat diselesaikan untuk n. Akan terlihat lebih bagus jika kita menerapkan beberapa penyederhanaan.

```
>fn &= solve(equ,n) | ratsimp; $&fn
```

$$\left[n = \frac{\log \left(\frac{R+i Kn}{R+i K} \right)}{\log(i+1)} \right]$$

latihan

```
>function fs(K,R,P,n) &= (1+P/700)^n*K + ((1+P/700)^n-1)/(P)*R; $&fs(K,R,P,n)
```

$$\frac{\left(\left(\frac{P}{700} + 1 \right)^n - 1 \right) R}{P} + K \left(\frac{P}{700} + 1 \right)^n$$

>equ &= fs(K,R,P,n)=Kn; \$&equ

$$\frac{\left(\left(\frac{P}{700} + 1\right)^n - 1\right) R}{P} + K \left(\frac{P}{700} + 1\right)^n = Kn$$

>\$&solve(equ,R)

$$R = \left[\frac{\left(Kn - K \left(\frac{P}{700} + 1\right)^n\right) P}{\left(\frac{P}{700} + 1\right)^n - 1} \right]$$

>\$&limit(R(500,0,x,100),x,0)

$$\lim_{x \rightarrow 0} R(500, 0, x, 100)$$

>fn &= solve(equ,n) | ratsimp; \$&fn

$$\left[\frac{(P + 700)^n}{700^n} = \frac{R + Kn P}{R + K P} \right]$$

BAB III

MENGGAMBAR GRAFIK 2D DENGAN EMT

Notebook ini menjelaskan tentang cara menggambar berbagai kurva dan grafik 2D dengan software EMT. EMT menyediakan fungsi plot2d() untuk menggambar berbagai kurva dan grafik dua dimensi (2D).

3.1 Plot Dasar

Ada fungsi plot yang sangat mendasar. Terdapat koordinat layar yang selalu berkisar antara 0 hingga 1024 di setiap sumbu, tidak peduli apakah layarnya berbentuk persegi atau tidak. Semut terdapat koordinat plot, yang dapat diatur dengan setplot(). Pemetaan antar koordinat bergantung pada jendela plot saat ini. Misalnya, shrinkwindow() default menyisakan ruang untuk label sumbu dan judul plot.

Dalam contoh ini, kita hanya menggambar beberapa garis acak dengan berbagai warna. Untuk rincian tentang fungsi-fungsi ini, pelajari fungsi inti EMT.

```
>clg; // clear screen  
>window(0,0,1024,1024); // use all of the window  
>setplot(0,1,0,1); // set plot coordinates  
>hold on; // start overwrite mode  
>n=100; X=random(n,2); Y=random(n,2); // get random points  
>colors=rgb(random(n),random(n),random(n)); // get random colors  
>loop 1 to n; color(colors[#]); plot(X[#],Y[#]); end; // plot  
>hold off; // end overwrite mode  
>insimg; // insert to notebook  
>reset;
```

Grafik perlu ditahan, karena perintah plot() akan menghapus jendela plot.

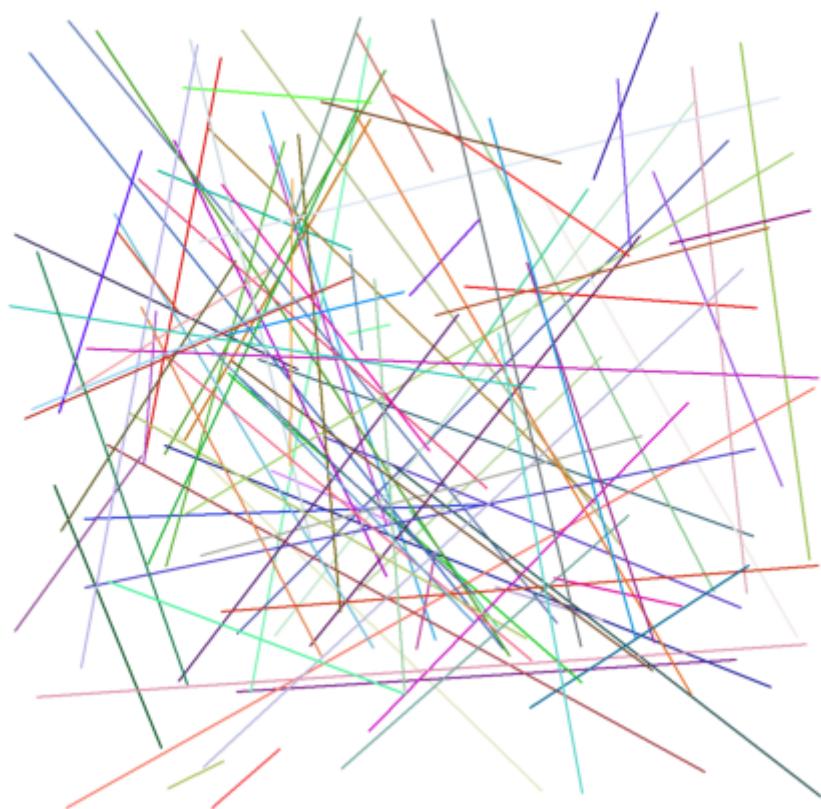
Untuk menghapus semua yang kami lakukan, kami menggunakan reset().

Untuk menampilkan gambar hasil plot di layar notebook, perintah plot2d() dapat diakhiri dengan titik dua (:). Cara lainnya adalah perintah plot2d() diakhiri dengan titik koma (;), kemudian menggunakan perintah insimg() untuk menampilkan gambar hasil plot.

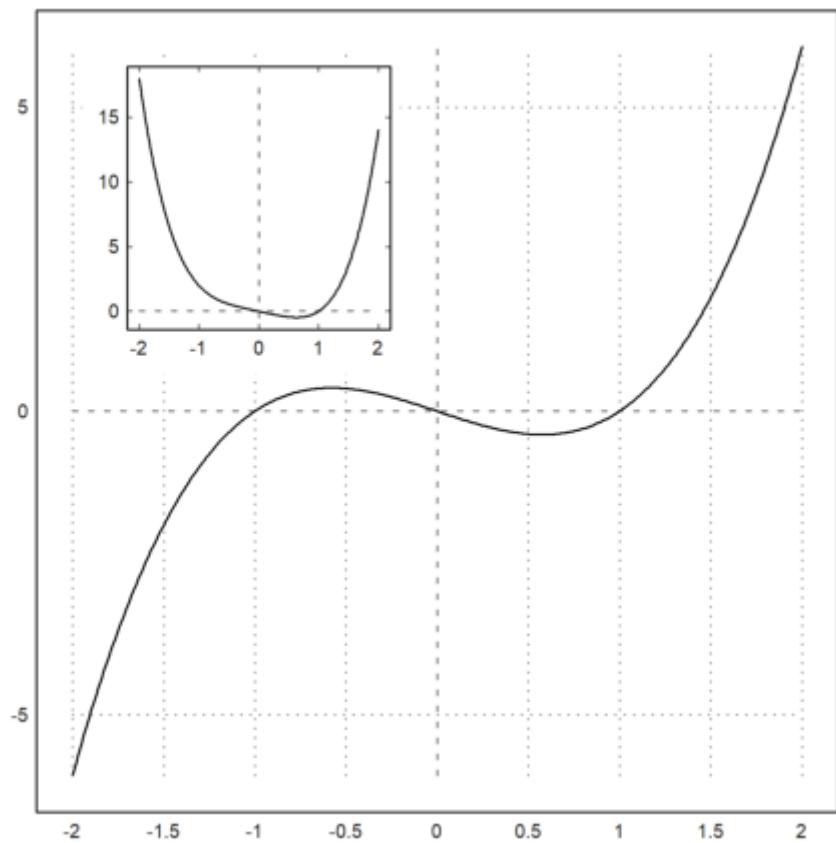
Contoh lain, kita menggambar plot sebagai sisipan di plot lain. Hal ini dilakukan dengan mendefinisikan jendela plot yang lebih kecil. Perhatikan bahwa jendela ini tidak memberikan ruang untuk label sumbu di luar jendela plot. Kita harus menambahkan beberapa margin untuk ini sesuai kebutuhan. Perhatikan bahwa kita menyimpan dan memulihkan jendela penuh, dan menahan plot saat ini sementara kita memplot inset.

```
>plot2d("x^3-x");  
>xw=200; yw=100; ww=300; hw=300;  
>ow>window();  
>>window(xw,yw,xw+ww,yw+hw);  
>hold on;  
>barclear(xw-50,yw-10,ww+60,ww+60);  
>plot2d("x^4-x",grid=6);  
>hold off;  
>>window(ow);
```

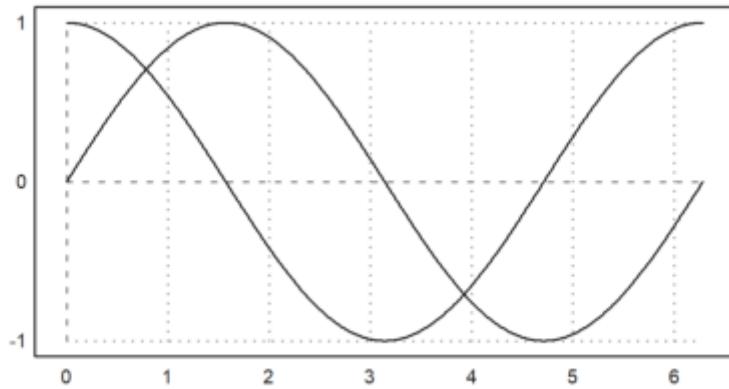
Plot dengan banyak gambar dicapai dengan cara yang sama. Ada fungsi utilitas figure() untuk ini.



Gambar 3.1 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-001.png



Gambar 3.2 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-002.png



Gambar 3.3 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-003.png

3.2 Aspek Plot

Plot default menggunakan jendela plot persegi. Anda dapat mengubahnya dengan fungsi aspek(). Jangan lupa untuk mengatur ulang aspeknya nanti. Anda juga dapat mengubah default ini di menu dengan “Set Aspect” ke rasio aspek tertentu atau ke ukuran jendela grafik saat ini.

Tapi Anda juga bisa mengubahnya untuk satu plot. Untuk ini, ukuran area plot saat ini diubah, dan jendela diatur sehingga label memiliki cukup ruang.

```
>aspect(2); // rasio panjang dan lebar 2:1
>plot2d(["sin(x)","cos(x")],0,2pi);
>aspect();
>reset;
```

Fungsi reset() mengembalikan default plot termasuk rasio aspek.

3.3 Plot 2D di Euler

EMT Math Toolbox memiliki plot dalam 2D, baik untuk data maupun fungsi. EMT menggunakan fungsi plot2d. Fungsi ini dapat memplot fungsi dan data.

Dimungkinkan untuk membuat plot di Maxima menggunakan Gnuplot atau dengan Python menggunakan Math Plot Lib.

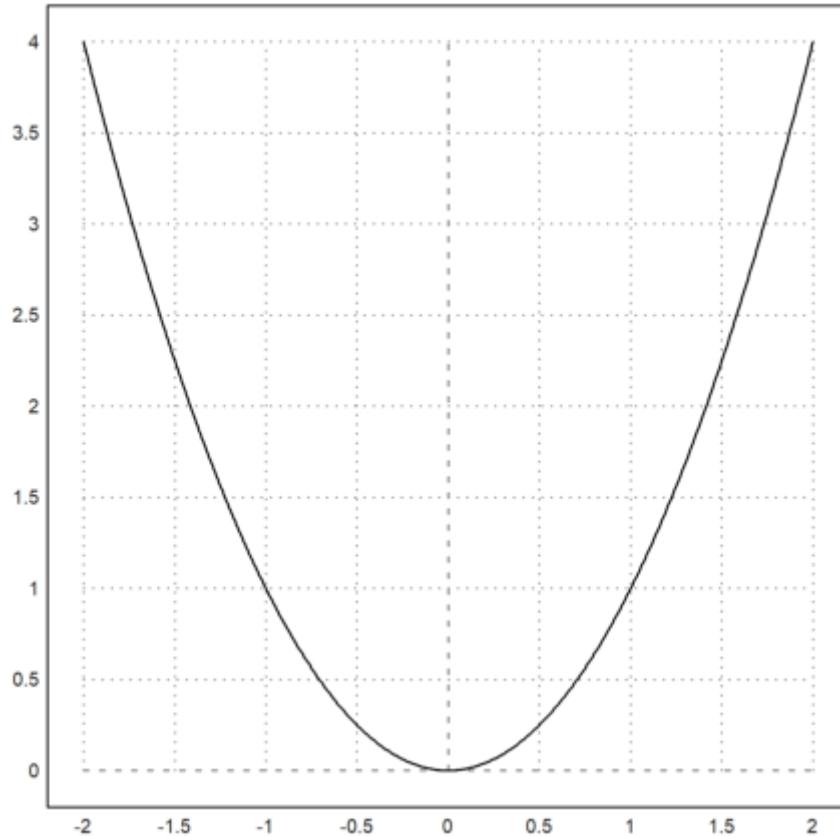
Euler dapat membuat plot 2D

- ekspresi
- fungsi, variabel, atau kurva berparameter,
- vektor nilai x-y,
- awan titik di pesawat,
- kurva implisit dengan level atau wilayah level.
- Fungsi kompleks

Gaya plot mencakup berbagai gaya untuk garis dan titik, plot batang, dan plot berbayang.

3.4 Plot Ekspresi atau Variabel

Ekspresi tunggal dalam “x” (misalnya “4*x^2”) atau nama suatu fungsi (misalnya “f”) menghasilkan grafik fungsi tersebut.



Gambar 3.4 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-004.png

Berikut adalah contoh paling dasar, yang menggunakan rentang default dan menetapkan rentang y yang tepat agar sesuai dengan plot fungsinya.

Catatan: Jika Anda mengakhiri baris perintah dengan titik dua “:”, plot akan dimasukkan ke dalam jendela teks. Jika tidak, tekan TAB untuk melihat plot jika jendela plot tertutup.

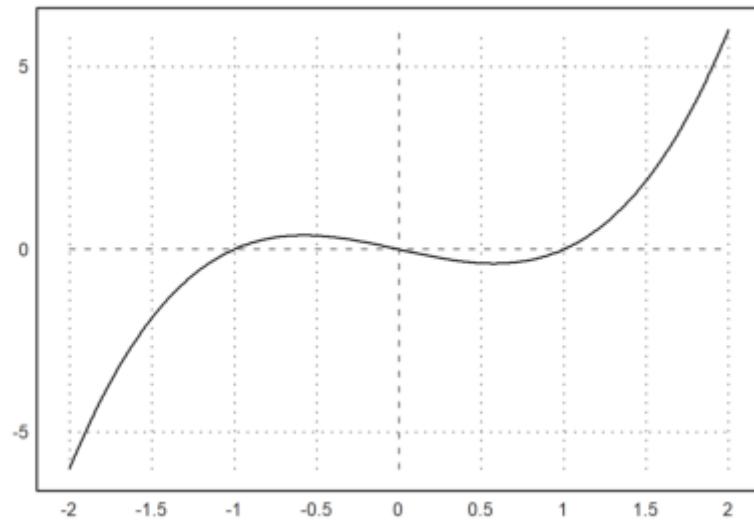
```
>plot2d("x^2");
>aspect(1.5); plot2d("x^3-x");
>a:=5.6; plot2d("exp(-a*x^2)/a"); insimg(30); // menampilkan gambar hasil plot setinggi 25 baris
```

Dari beberapa contoh sebelumnya Anda dapat melihat bahwa aslinya gambar plot menggunakan sumbu X dengan rentang nilai dari -2 sampai dengan 2. Untuk mengubah rentang nilai X dan Y, Anda dapat menambahkan nilai-nilai batas X (dan Y) di belakang ekspresi yang digambar.

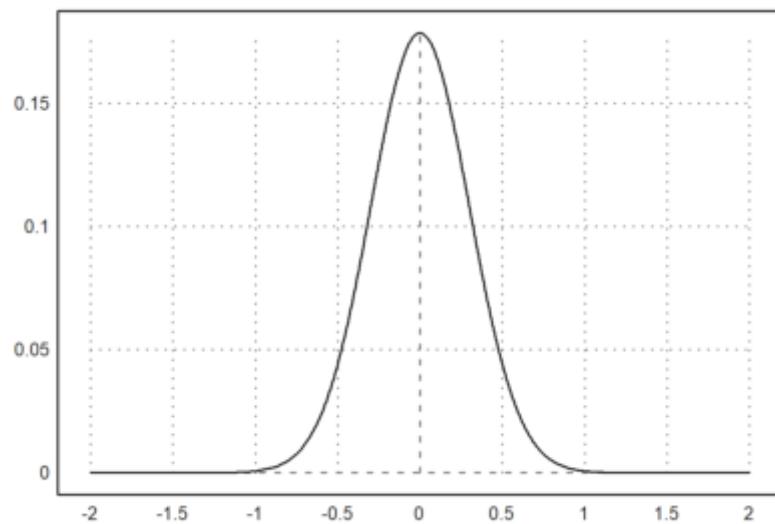
Rentang plot diatur dengan parameter yang ditetapkan sebagai berikut

- a,b: rentang x (default -2,2)
- c,d: rentang y (default: skala dengan nilai)
- r: alternatifnya radius di sekitar pusat plot
- cx,cy: koordinat pusat plot (default 0,0)

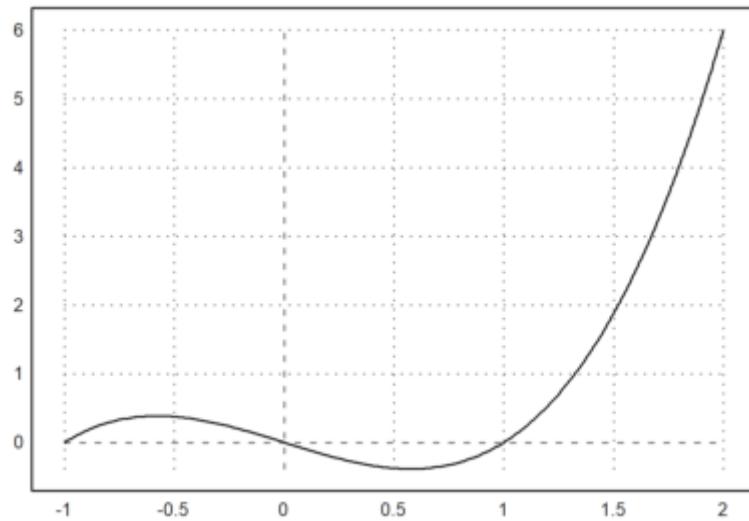
```
>plot2d("x^3-x",-1,2);
>plot2d("sin(x)",-2*pi,2*pi); // plot sin(x) pada interval [-2pi, 2pi]
>plot2d("cos(x)","sin(3*x)",xmin=0,xmax=2pi);
```



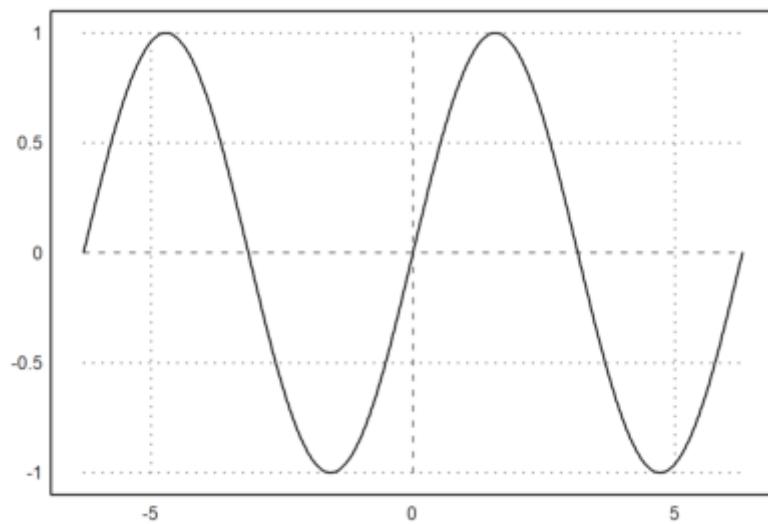
Gambar 3.5 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-005.png



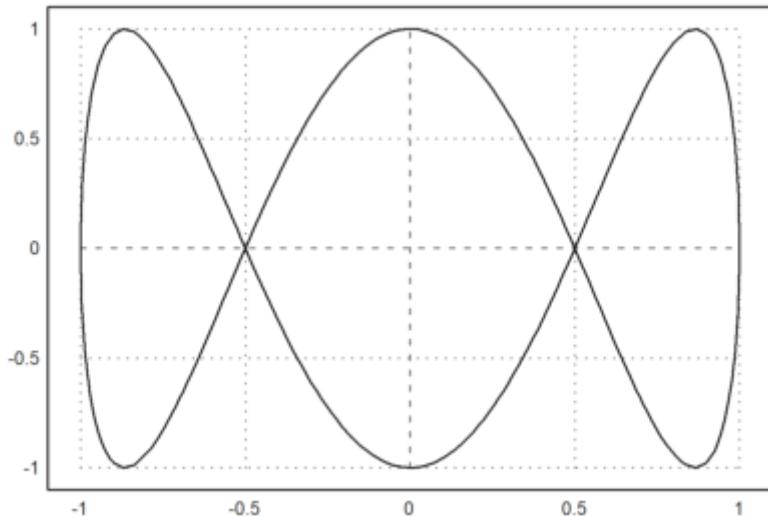
Gambar 3.6 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-006.png



Gambar 3.7 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-007.png



Gambar 3.8 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-008.png



Gambar 3.9 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-009.png

Alternatif untuk titik dua adalah perintah insimg(baris), yang menyisipkan plot yang menempati sejumlah baris teks tertentu.

Dalam opsi, plot dapat diatur agar muncul

- di jendela terpisah yang dapat diubah ukurannya,
- di jendela buku catatan.

Lebih banyak gaya dapat dicapai dengan perintah plot tertentu.

Bagaimanapun, tekan tombol tabulator untuk melihat plotnya, jika tersembunyi.

Untuk membagi jendela menjadi beberapa plot, gunakan perintah figure(). Dalam contoh, kita memplot x^1 hingga x^4 menjadi 4 bagian jendela. gambar(0) mengatur ulang jendela default.

```
>reset;
>figure(2,2); ...
>for n=1 to 4; figure(n); plot2d("x^"+n); end; ...
>figure(0):
```

Di plot2d(), ada gaya alternatif yang tersedia dengan grid=x. Untuk gambaran umum, kami menampilkan berbagai gaya kisi dalam satu gambar (lihat di bawah untuk perintah figure()). Gaya grid=0 tidak disertakan. Ini tidak menunjukkan kisi dan bingkai.

```
>figure(3,3); ...
>for k=1:9; figure(k); plot2d("x^3-x",-2,1,grid=k); end; ...
>figure(0):
```

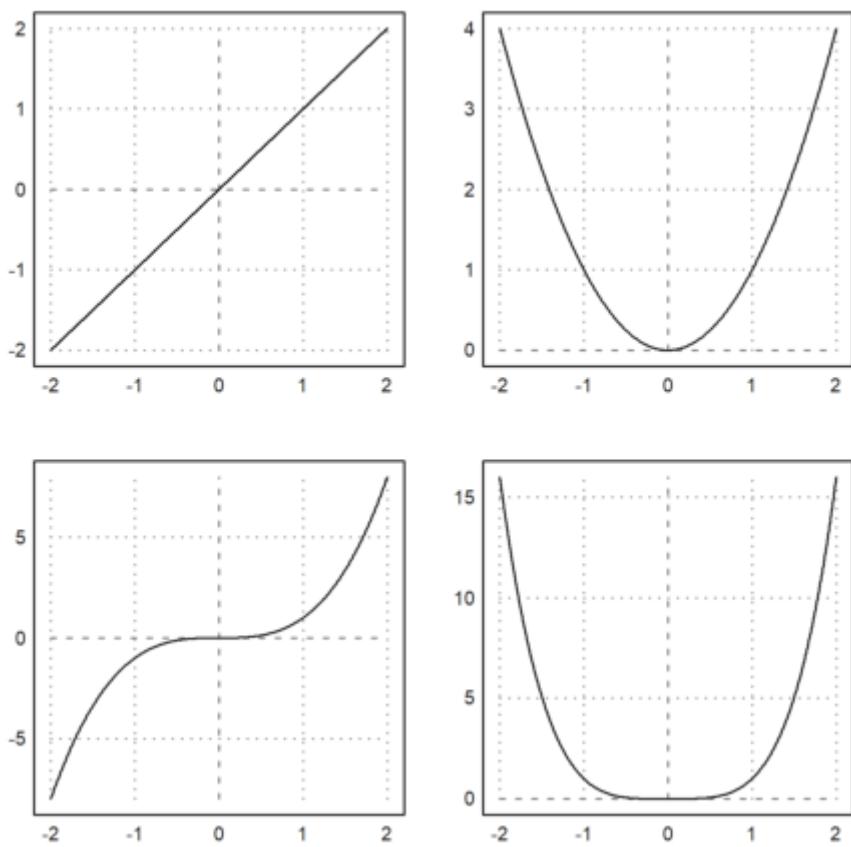
Jika argumen pada plot2d() adalah ekspresi yang diikuti oleh empat angka, angka-angka tersebut adalah rentang x dan y untuk plot tersebut.

Alternatifnya, a, b, c, d dapat ditentukan sebagai parameter yang ditetapkan sebagai a=... dll.

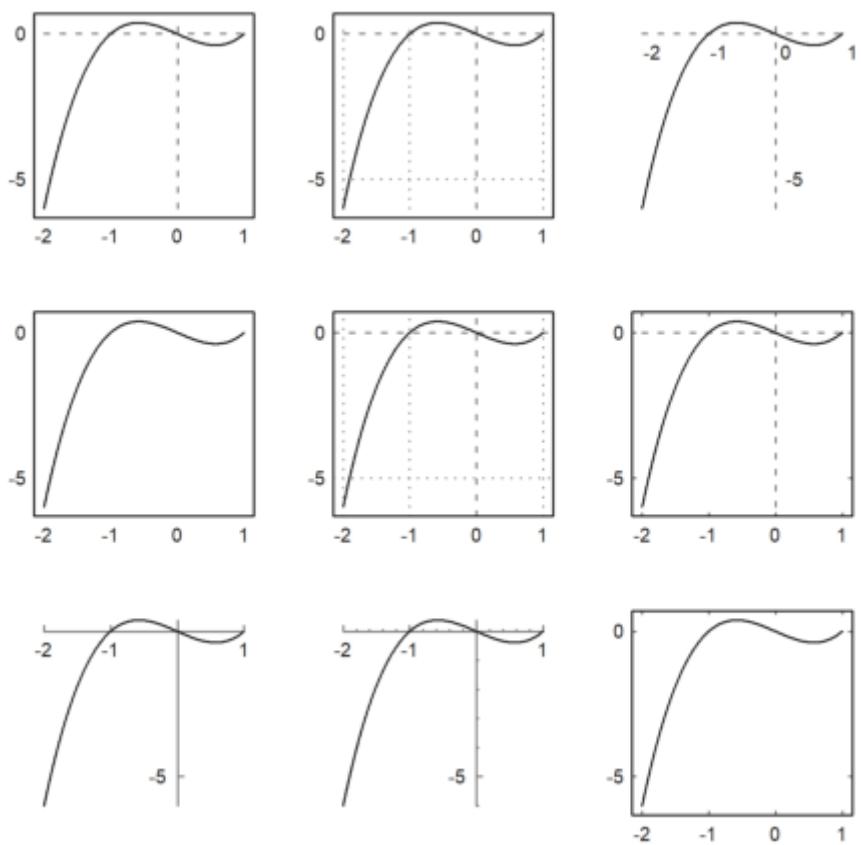
Pada contoh berikut, kita mengubah gaya kisi, menambahkan label, dan menggunakan label vertikal untuk sumbu y.

```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi,-1.2,1.2,grid=3,xl="x",yl="sin(x)");
>plot2d("sin(x)+cos(2*x)",0,4pi);
```

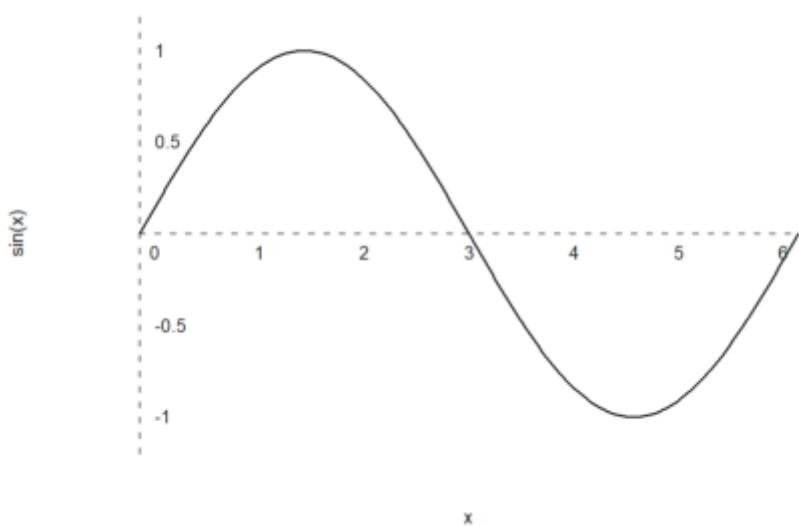
Gambar yang dihasilkan dengan memasukkan plot ke dalam jendela teks disimpan di direktori yang sama dengan buku catatan, secara default di subdirektori bernama "gambar". Mereka juga



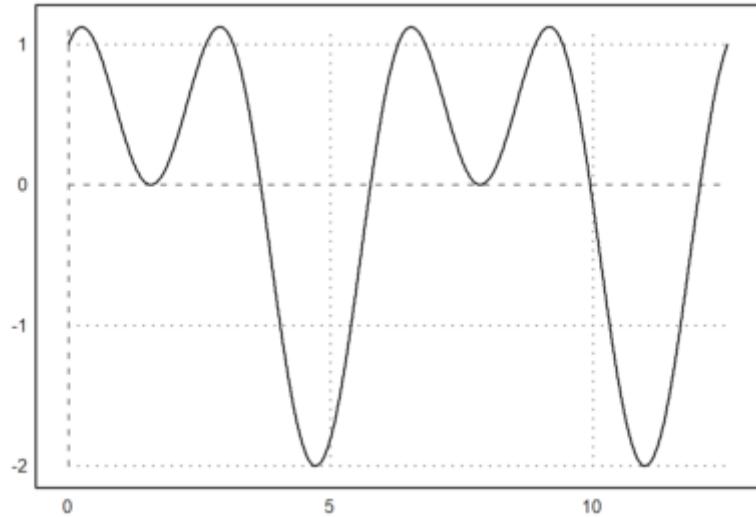
Gambar 3.10 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-010.png



Gambar 3.11 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-011.png



Gambar 3.12 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-012.png



Gambar 3.13 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-013.png

digunakan oleh ekspor HTML.

Anda cukup menandai gambar apa saja dan menyalinnya ke clipboard dengan Ctrl-C. Tentu saja, Anda juga dapat mengekspor grafik saat ini dengan fungsi di menu File.

Fungsi atau ekspresi di plot2d dievaluasi secara adaptif. Agar lebih cepat, nonaktifkan plot adaptif dengan <adaptive dan tentukan jumlah subinterval dengan n=... Hal ini hanya diperlukan pada kasus yang jarang terjadi.

```
>plot2d("sign(x)*exp(-x^2)",-1,1,<adaptive,n=10000):
```

```
>plot2d("x^x",r=1.2,cx=1,cy=1):
```

Perhatikan bahwa x^x tidak ditentukan untuk $x \leq 0$. Fungsi plot2d menangkap kesalahan ini, dan mulai membuat plot segera setelah fungsinya ditentukan. Ini berfungsi untuk semua fungsi yang mengembalikan NAN di luar jangkauan definisinya.

```
>plot2d("log(x)",-0.1,2):
```

Parameter square=true (atau >square) memilih rentang y secara otomatis sehingga hasilnya adalah jendela plot persegi. Perhatikan bahwa secara default, Euler menggunakan spasi persegi di dalam jendela plot.

```
>plot2d("x^3-x",>square):
```

```
>plot2d("integrate("sin(x)*exp(-x^2)",0,x)',0,2): // plot integral
```

Jika Anda memerlukan lebih banyak ruang untuk label y, panggil shrinkwindow() dengan parameter lebih kecil, atau tetapkan nilai positif untuk "lebih kecil" di plot2d().

```
>plot2d("gamma(x)",1,10,yl="y-values",smaller=6,<vertical):
```

Ekspresi simbolik juga dapat digunakan karena disimpan sebagai ekspresi string sederhana.

```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(5x),cos(7x)):
```

```
>a:=5.6; expr &= exp(-a*x^2)/a; // define expression
```

```
>plot2d(expr,-2,2); // plot from -2 to 2
```

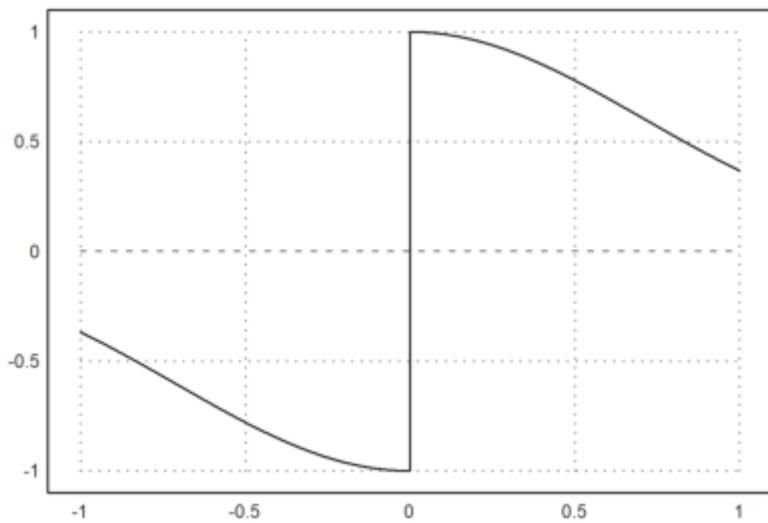
```
>plot2d(expr,r=1,thickness=2); // plot in a square around (0,0)
```

```
>plot2d(&diff(expr,x),>add,style="-",color=red); // add another plot
```

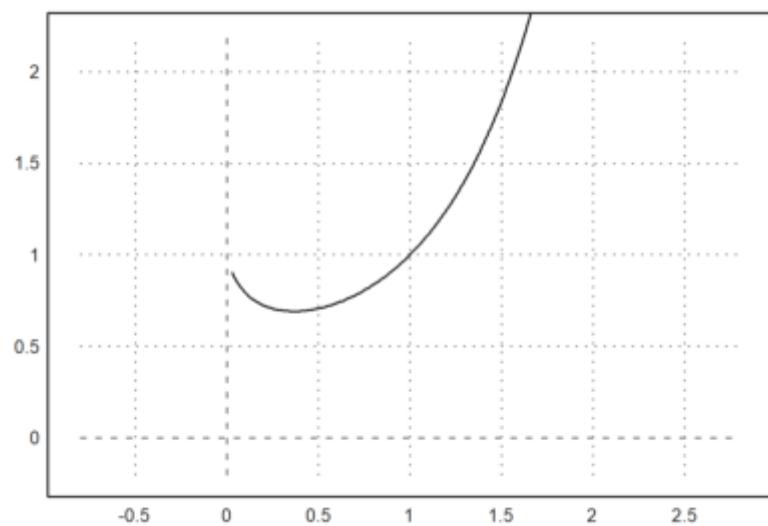
```
>plot2d(&diff(expr,x,2),a=-2,b=2,c=-2,d=1); // plot in rectangle
```

```
>plot2d(&diff(expr,x),a=-2,b=2,>square); // keep plot square
```

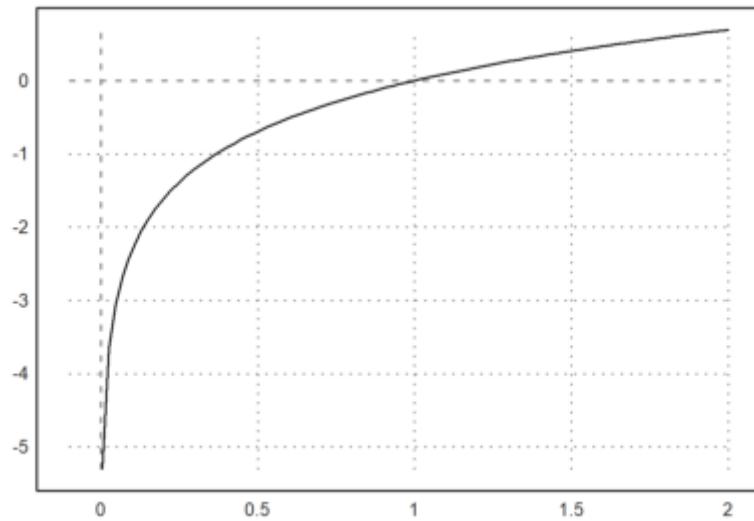
```
>plot2d("x^2",0,1,steps=1,color=red,n=10):
```



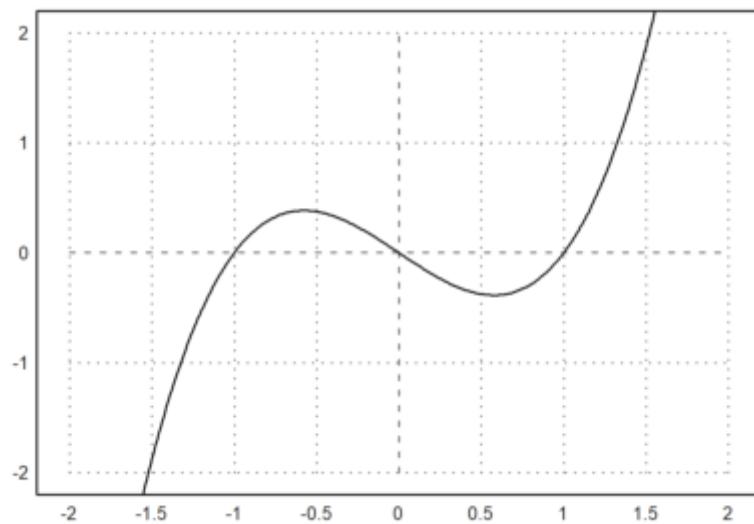
Gambar 3.14 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-014.png



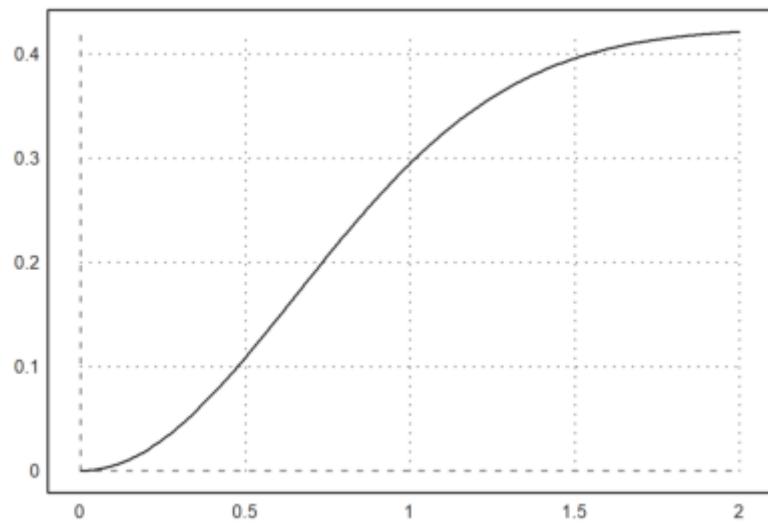
Gambar 3.15 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-015.png



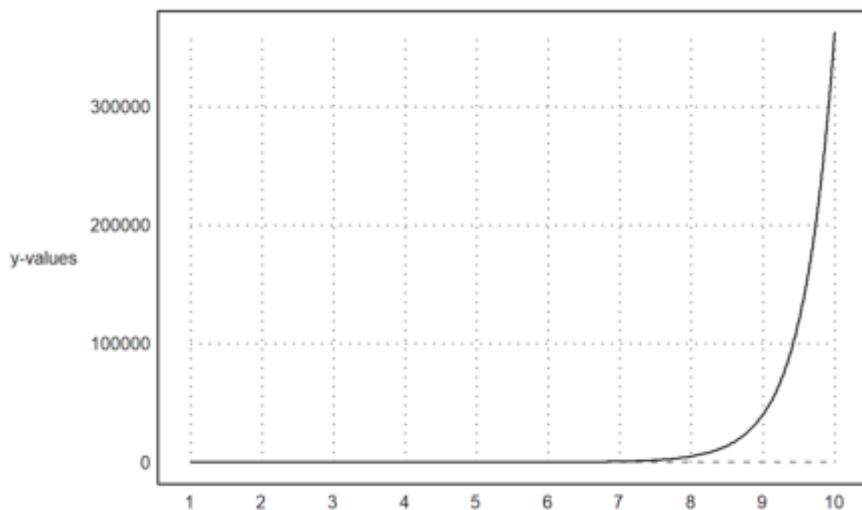
Gambar 3.16 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-016.png



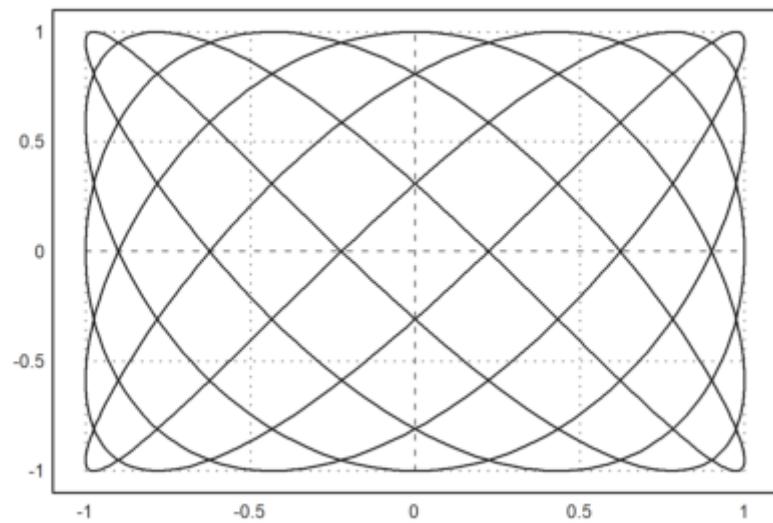
Gambar 3.17 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-017.png



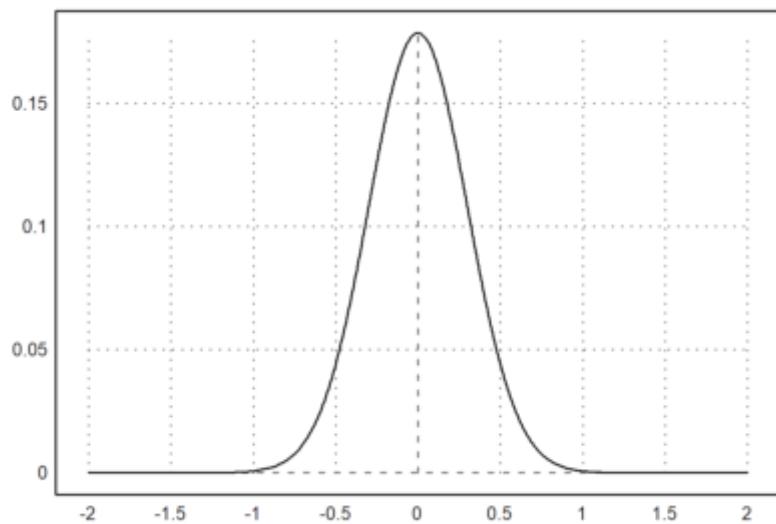
Gambar 3.18 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-018.png



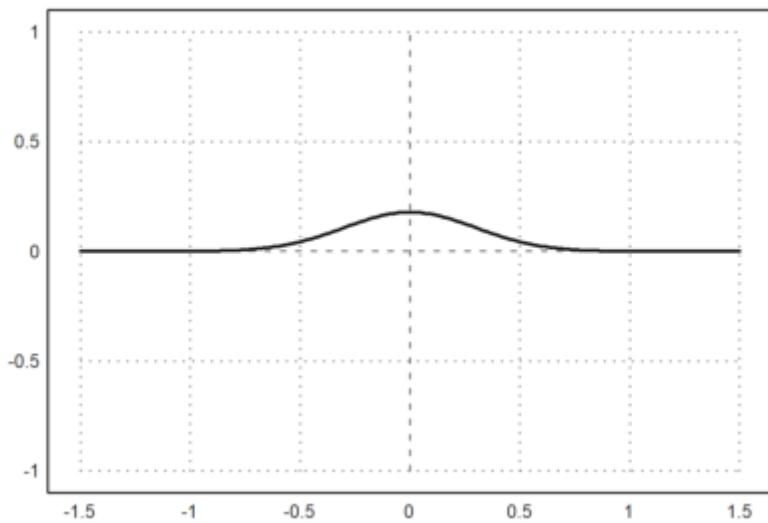
Gambar 3.19 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-019.png



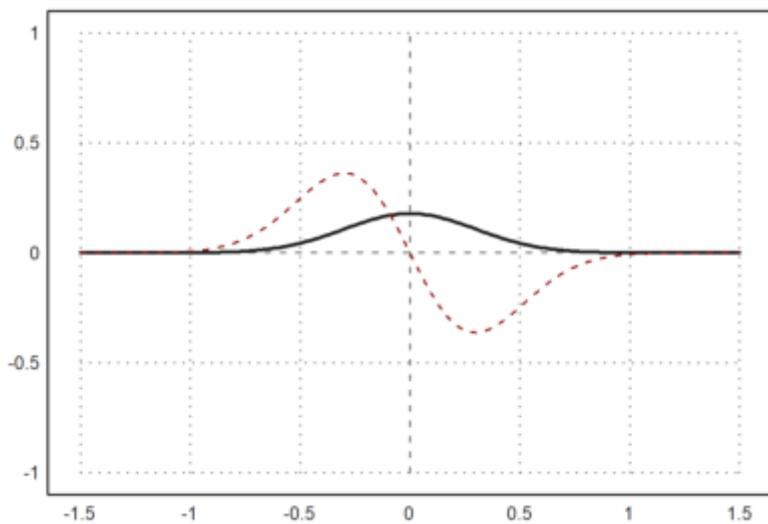
Gambar 3.20 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-020.png



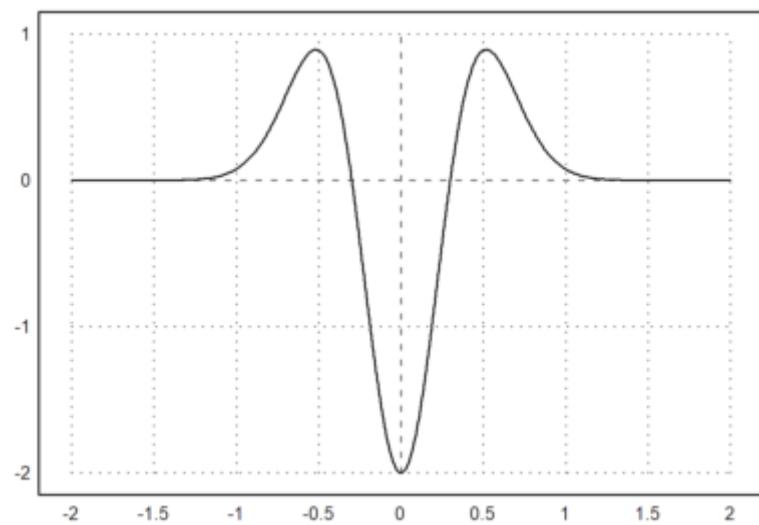
Gambar 3.21 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-021.png



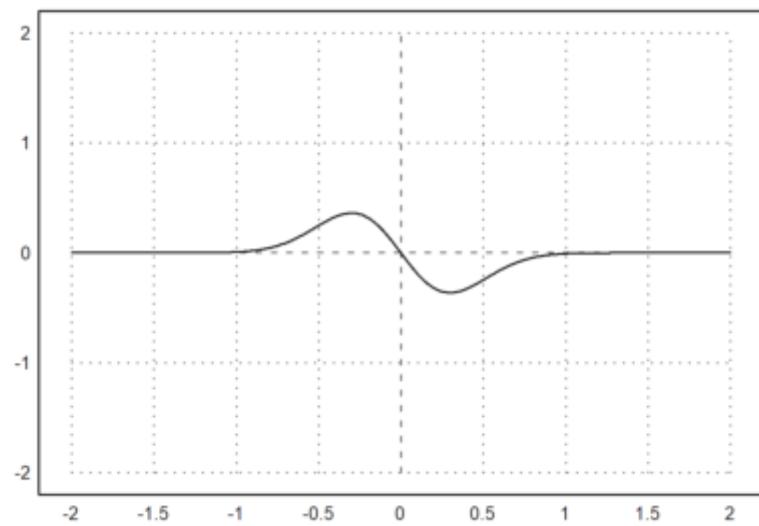
Gambar 3.22 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-022.png



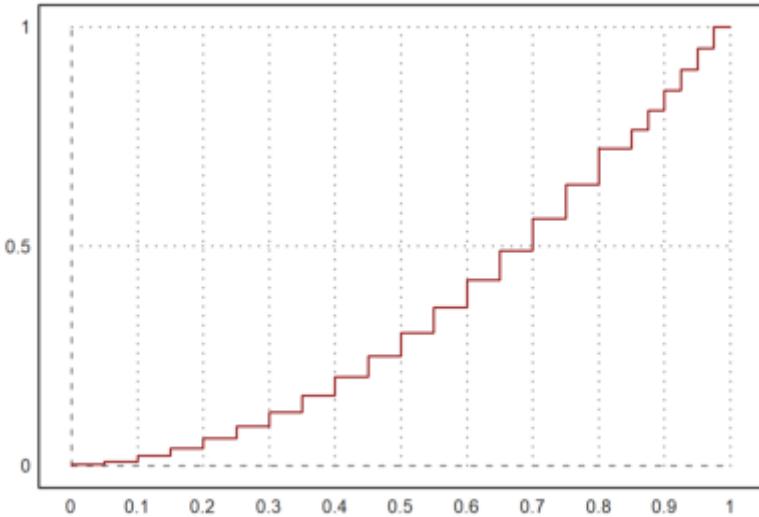
Gambar 3.23 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-023.png



Gambar 3.24 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-024.png



Gambar 3.25 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-025.png



Gambar 3.26 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-026.png

```
>plot2d("x^2",>add,steps=2,color=blue,n=10);
```

3.5 Fungsi dalam satu Parameter

Fungsi plot yang paling penting untuk plot planar adalah plot2d(). Fungsi ini diimplementasikan dalam bahasa Euler di file “plot.e”, yang dimuat di awal program.

Berikut beberapa contoh penggunaan suatu fungsi. Seperti biasa di EMT, fungsi yang berfungsi untuk fungsi atau ekspresi lain, Anda bisa meneruskan parameter tambahan (selain x) yang bukan variabel global ke fungsi dengan parameter titik koma atau dengan kumpulan panggilan.

```
>function f(x,a) := x2/a+a*x-x; // define a function
>a=0.3; plot2d("f",0,1;a); // plot with a=0.3
>plot2d("f",0,1;0.4); // plot with a=0.4
>plot2d({{"f",0.2}},0,1); // plot with a=0.2
>plot2d({{"f(x,b)"},b=0.1}},0,1); // plot with 0.1
>function f(x) := x3-x; ...
>plot2d("f",r=1);
```

Berikut ini ringkasan fungsi yang diterima

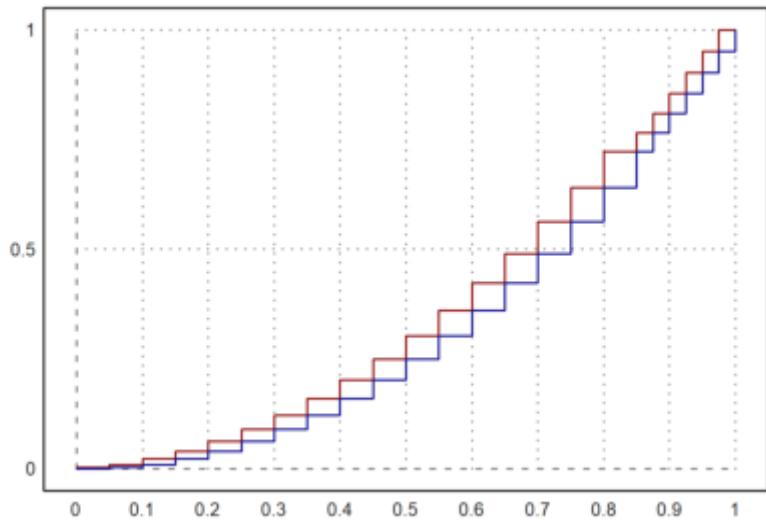
- ekspresi atau ekspresi simbolik di x
- fungsi atau fungsi simbolik dengan nama “f”
- fungsi simbolik hanya dengan nama f

Fungsi plot2d() juga menerima fungsi simbolik. Untuk fungsi simbolik, namanya saja yang berfungsi.

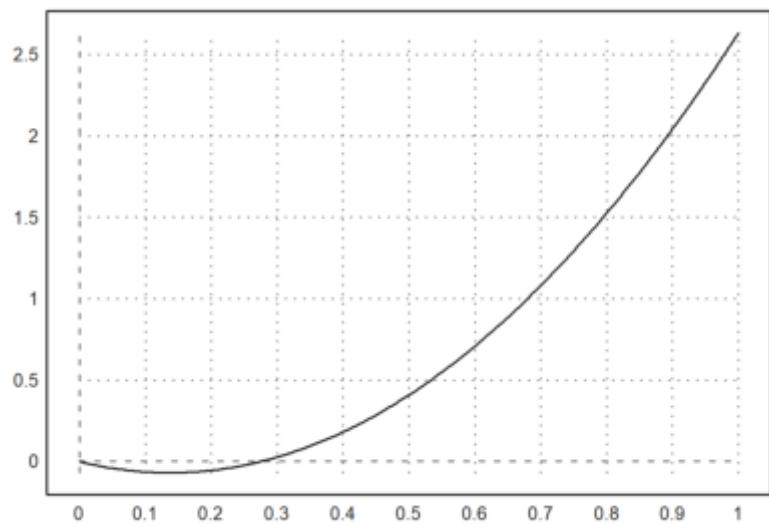
```
>function f(x) &= diff(xx,x)
```

$$x \quad x^{(\log(x) + 1)}$$

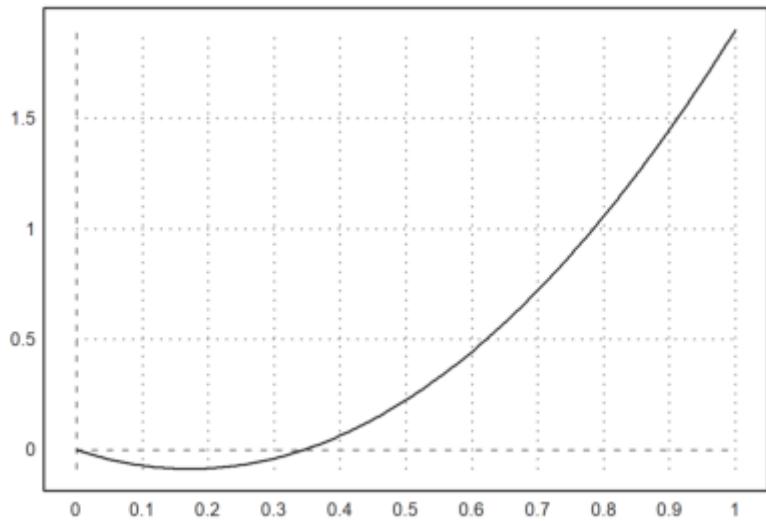
```
>plot2d(f,0,2);
```



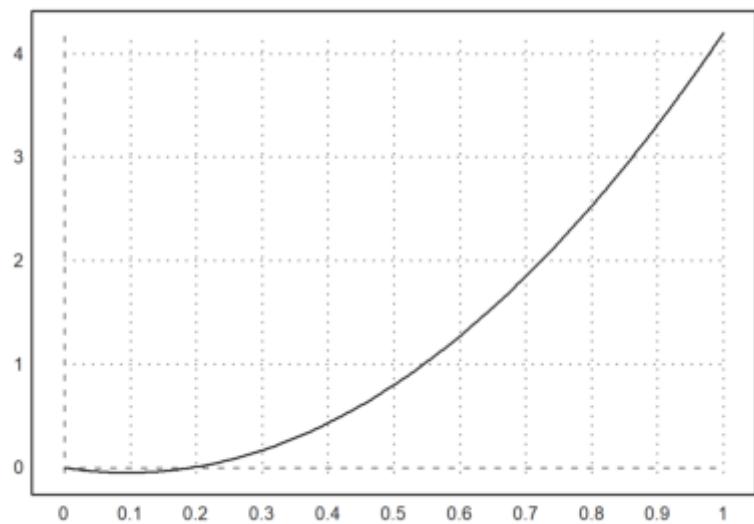
Gambar 3.27 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-027.png



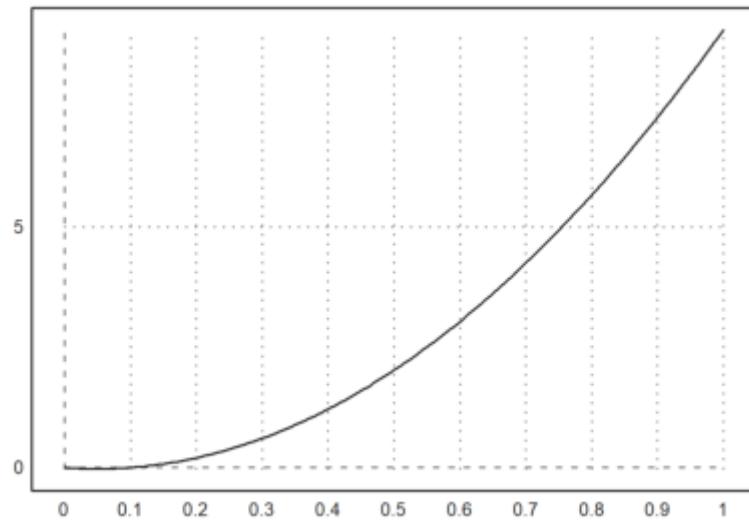
Gambar 3.28 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-028.png



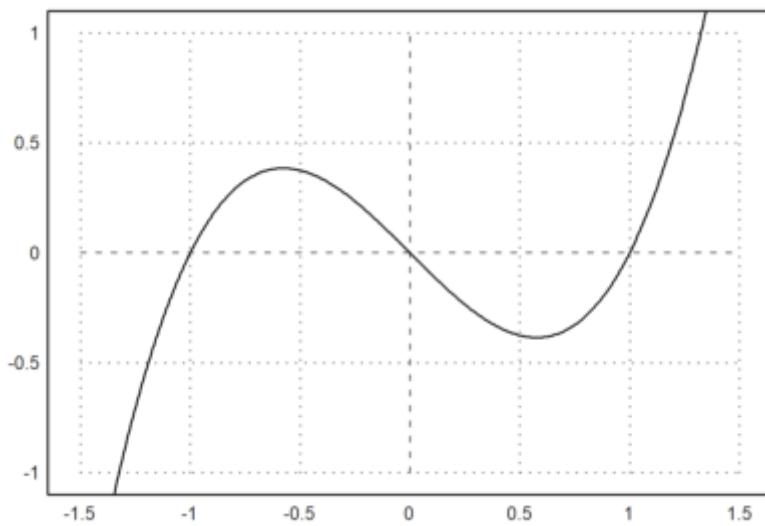
Gambar 3.29 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-029.png



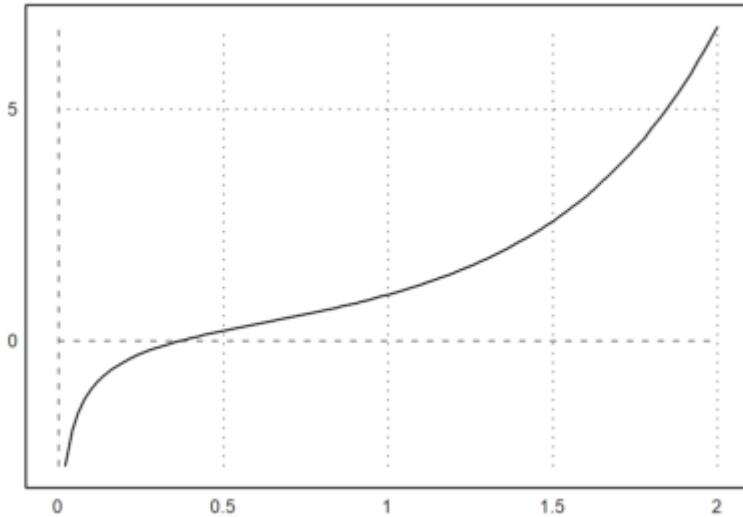
Gambar 3.30 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-030.png



Gambar 3.31 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-031.png



Gambar 3.32 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-032.png



Gambar 3.33 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-033.png

Tentu saja, untuk ekspresi atau ekspresi simbolik, nama variabel sudah cukup untuk memplotnya.

>expr &= sin(x)*exp(-x)

$$\begin{array}{c} - \quad x \\ E \quad \sin(x) \end{array}$$

```
>plot2d(expr,0,3pi);
>function f(x) &= x^x;
>plot2d(f,r=1,cx=1,cy=1,color=blue,thickness=2);
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=red,style="--");
Untuk gaya garis ada berbagai pilihan.
```

- gaya="...". Pilih dari “-”, “-”, “-.”, “:”, “.-”, “-.”.
- Warna: Lihat di bawah untuk warna.
- ketebalan: Defaultnya adalah 1.

Warna dapat dipilih sebagai salah satu warna default, atau sebagai warna RGB.

- 0..15: indeks warna default.
- konstanta warna: putih, hitam, merah, hijau, biru, cyan, zaitun, abu-abu muda, abu-abu, abu-abu tua, oranye, hijau muda, pirus, biru muda, oranye muda, kuning
- rgb(merah,hijau,biru): parameternya real di [0,1].

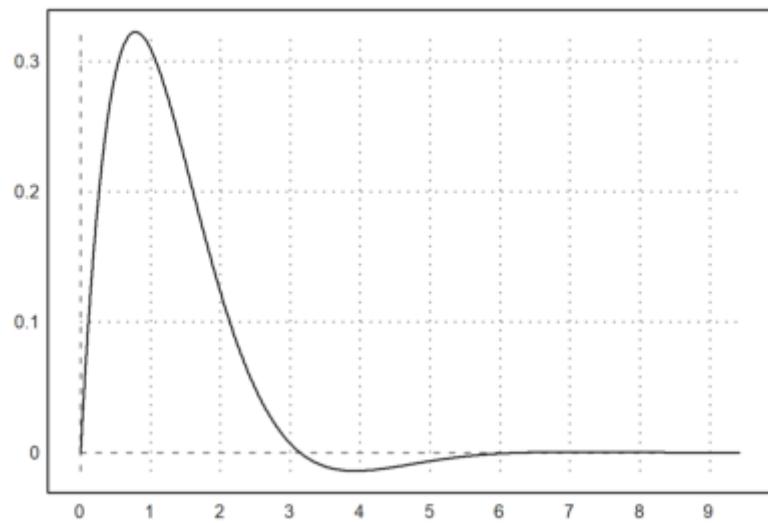
>plot2d("exp(-x^2)",r=2,color=red,thickness=3,style="-");

Here is a view of the predefined colors of EMT.

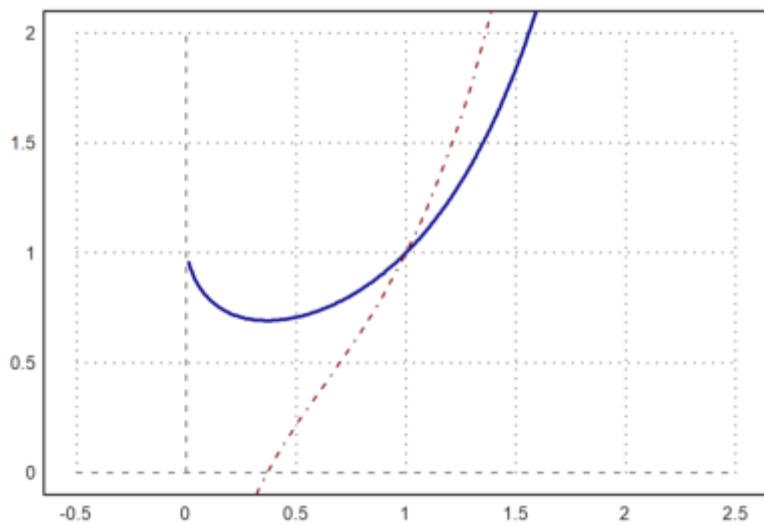
>aspect(2); columnsplot(ones(1,16),lab=0:15,grid=0,color=0:15);

tapi kamu bisa mengganti dengan warna lain.

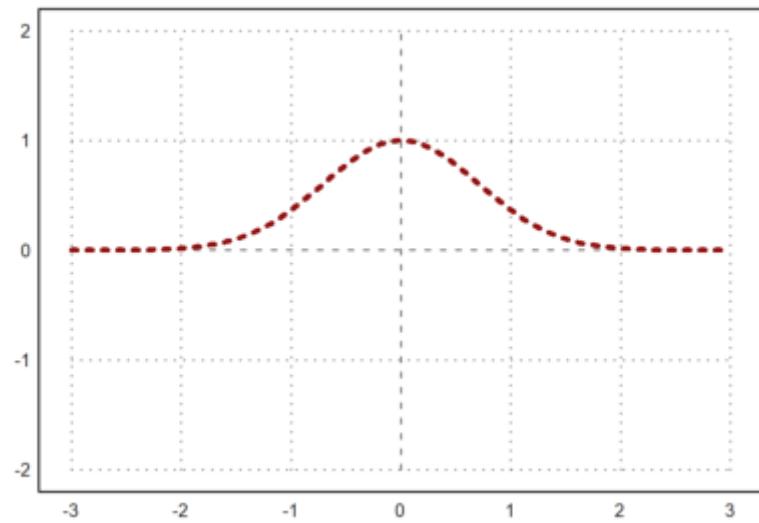
>columnsplot(ones(1,16),grid=0,color=rgb(0,0,linspace(0,1,15))):



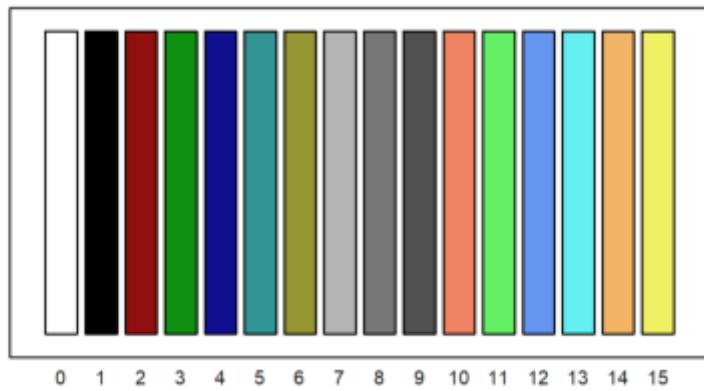
Gambar 3.34 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-034.png



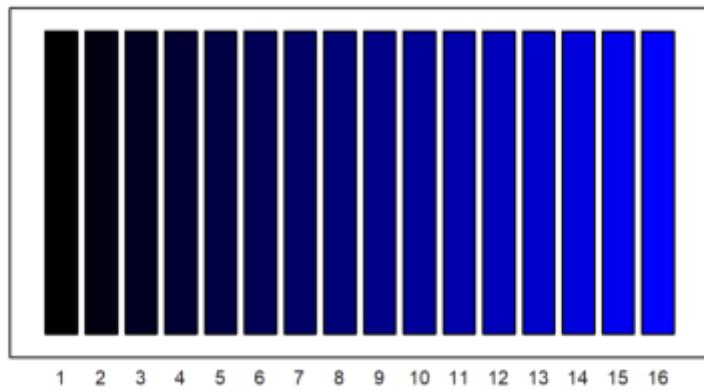
Gambar 3.35 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-035.png



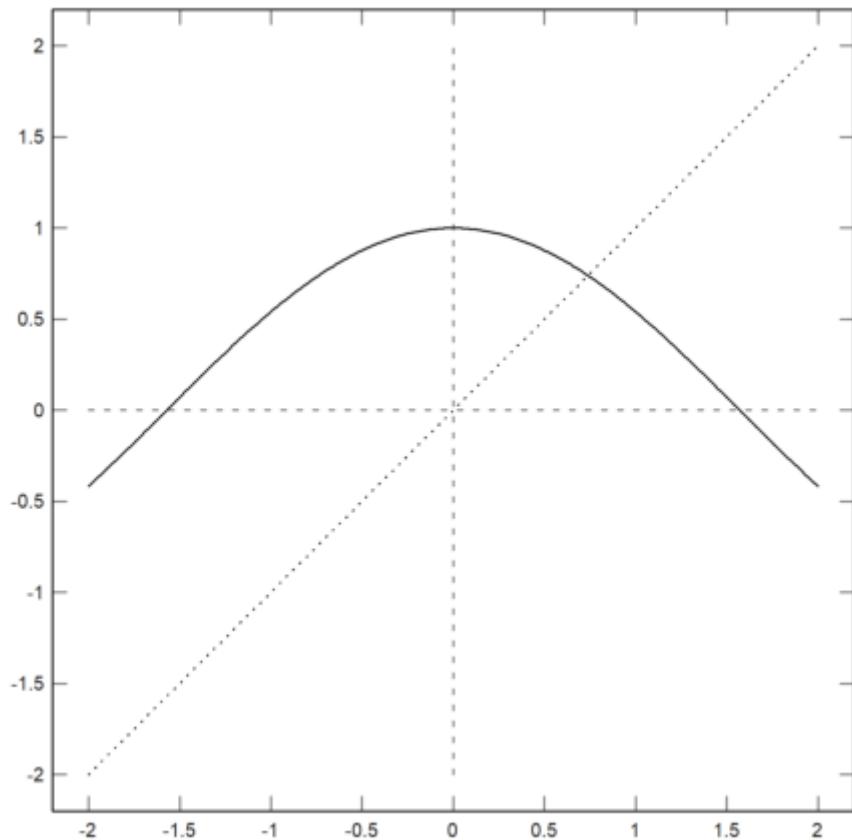
Gambar 3.36 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-036.png



Gambar 3.37 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-037.png



Gambar 3.38 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-038.png



Gambar 3.39 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-039.png

3.6 Menggambar Beberapa Kurva pada bidang koordinat yang sama

Plot lebih dari satu fungsi (multiple function) ke dalam satu jendela dapat dilakukan dengan berbagai cara. Salah satu metodenya adalah menggunakan `>add` untuk beberapa panggilan ke `plot2d` secara keseluruhan, kecuali panggilan pertama. Kami telah menggunakan fitur ini pada contoh di atas.

```
>aspect(); plot2d("cos(x)",r=2,grid=6); plot2d("x",style=".",>add):
```

```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi); plot2d("cos(x)",color=blue,style="-",>add):
```

Salah satu kegunaan `>add` adalah untuk menambahkan titik pada kurva.

```
>plot2d("sin(x)",0,pi); plot2d(2,sin(2),>points,>add):
```

Kita tambahkan titik perpotongan dengan label (pada posisi "cl" untuk kiri tengah), dan masukkan hasilnya ke dalam buku catatan. Kami juga menambahkan judul pada plot.

```
>plot2d(["cos(x)","x"],r=1.1,cx=0.5,cy=0.5, ...
```

```
> color=[black,blue],style=["-","."], ...
```

```
> grid=1);
```

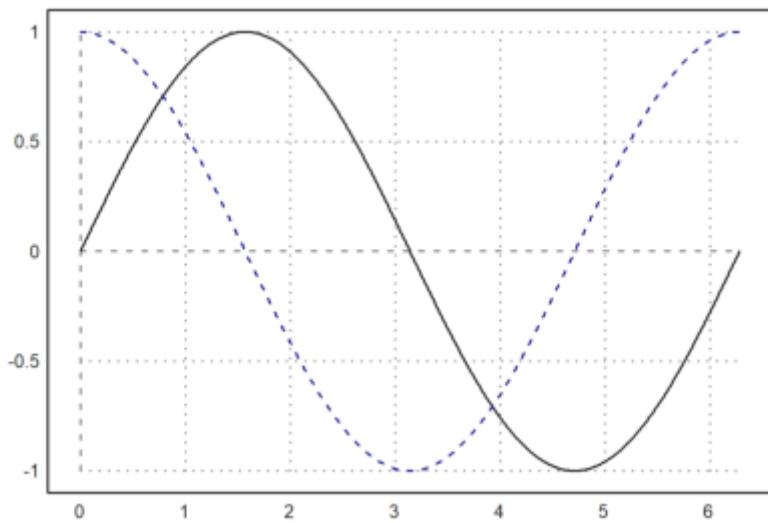
```
>x0=solve("cos(x)-x",1); ...
```

```
> plot2d(x0,x0,>points,>add,title="Intersection Demo"); ...
```

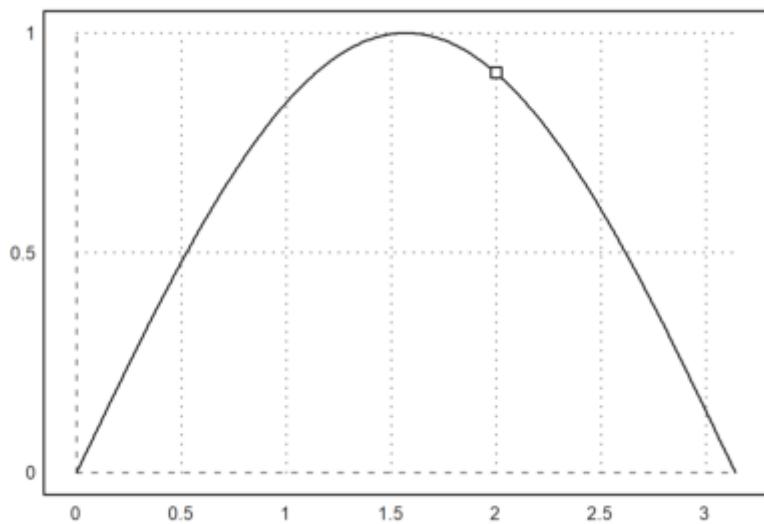
```
> label("cos(x) = x",x0,x0, pos="cl", offset=20):
```

Dalam demo berikut, kita memplot fungsi $\sin(x)=\sin(x)/x$ dan ekspansi Taylor ke-8 dan ke-16. Kami menghitung perluasan ini menggunakan Maxima melalui ekspresi simbolik.

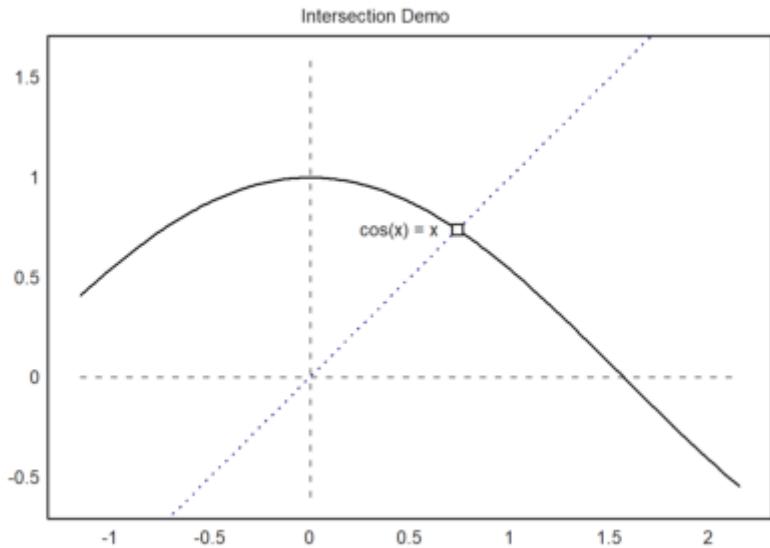
Plot ini dilakukan dalam perintah multi-baris berikut dengan tiga panggilan ke `plot2d()`. Yang kedua dan ketiga memiliki kumpulan tanda `>add`, yang membuat plot menggunakan rentang sebelumnya.



Gambar 3.40 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-040.png



Gambar 3.41 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-041.png



Gambar 3.42 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-042.png

Kami menambahkan kotak label yang menjelaskan fungsinya.

>\$taylor(sin(x)/x,x,0,4)

$$\frac{x^4}{120} - \frac{x^2}{6} + 1$$

```
>plot2d("sinc(x)",0,4pi,color=green,thickness=2); ...
>plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,8),>add,color=blue,style="--"); ...
>plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,16),>add,color=red,style="-."); ...
>labelbox(["sinc","T8","T16"],styles=[{"-","-","-"}],...
>colors=[black,blue,red]):
```

Dalam contoh berikut, kami menghasilkan Polinomial Bernstein.

$$B_i(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

```
>plot2d("(1-x)^10",0,1); // plot first function
>for i=1 to 10; plot2d("bin(10,i)*x^(i*(1-x))(10-i)",>add); end;
>insimg;
```

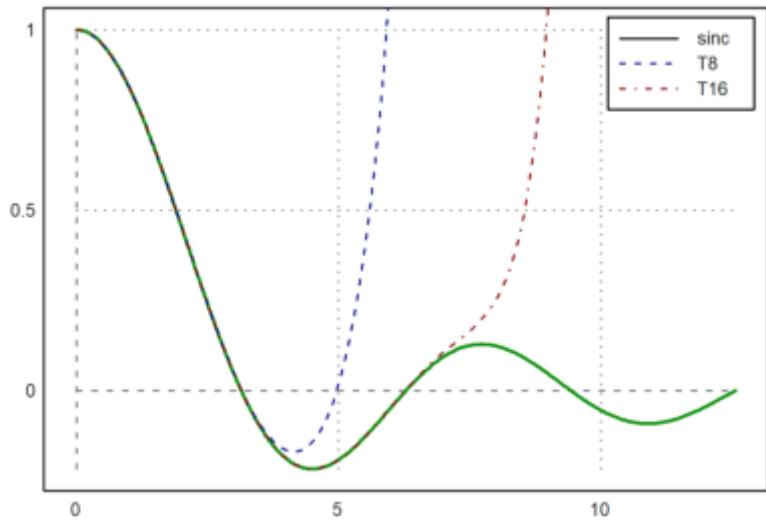
Cara kedua adalah dengan menggunakan pasangan matriks bernilai x dan matriks bernilai y yang berukuran sama.

Kami menghasilkan matriks nilai dengan satu Polinomial Bernstein di setiap baris. Untuk ini, kita cukup menggunakan vektor kolom i. Lihat pendahuluan tentang bahasa matriks untuk mempelajari lebih detail.

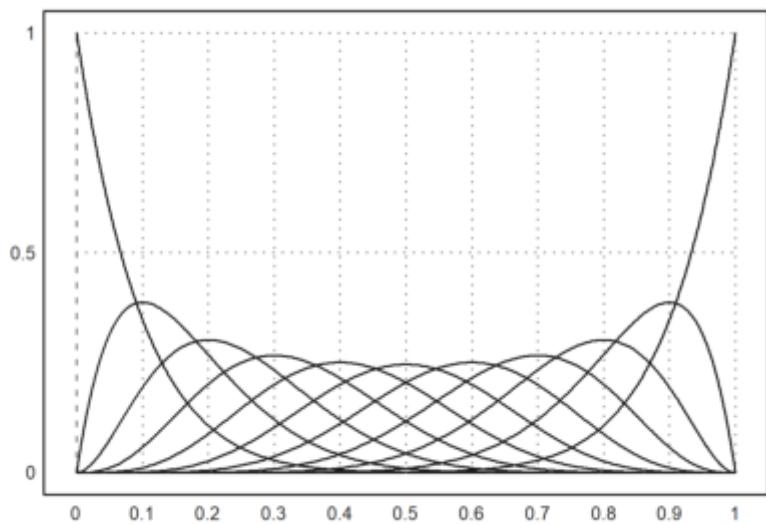
```
>x=linspace(0,1,500);
>n=10; k=(0:n)'; // n is row vector, k is column vector
>y=bin(n,k)*x^(k*(1-x))(n-k); // y is a matrix then
>plot2d(x,y);
```

Perhatikan bahwa parameter warna dapat berupa vektor. Kemudian setiap warna digunakan untuk setiap baris matriks.

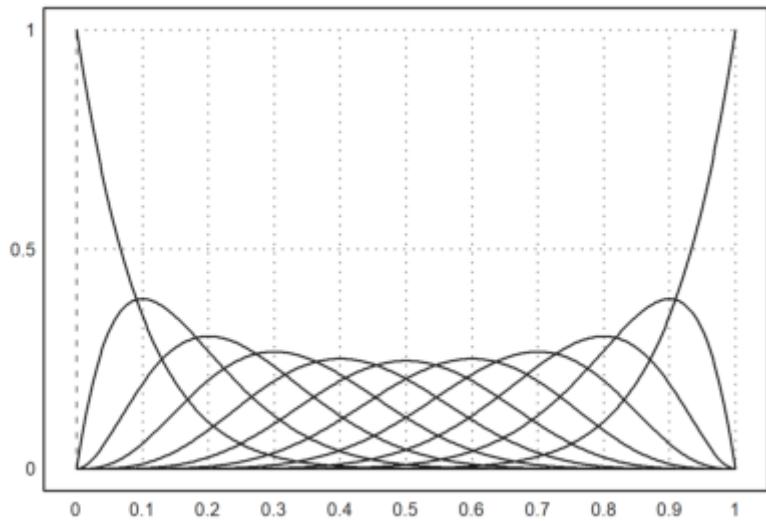
>x=linspace(0,1,200); y=x^(1:10)'; plot2d(x,y,color=1:10):



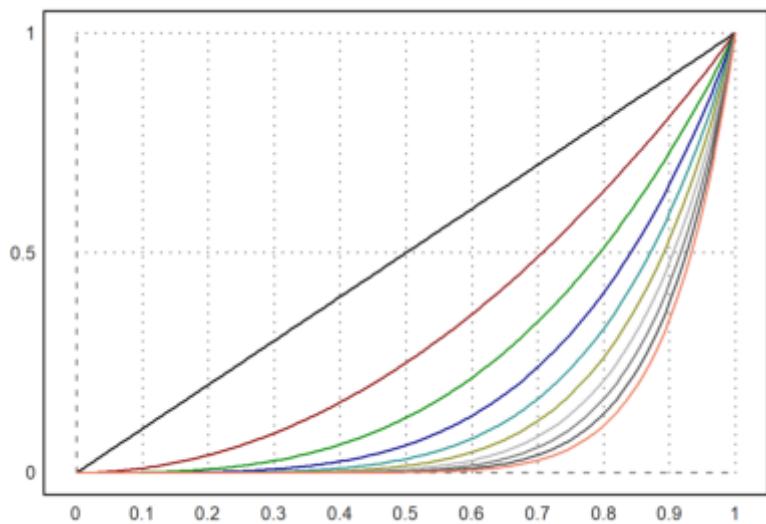
Gambar 3.43 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-044.png



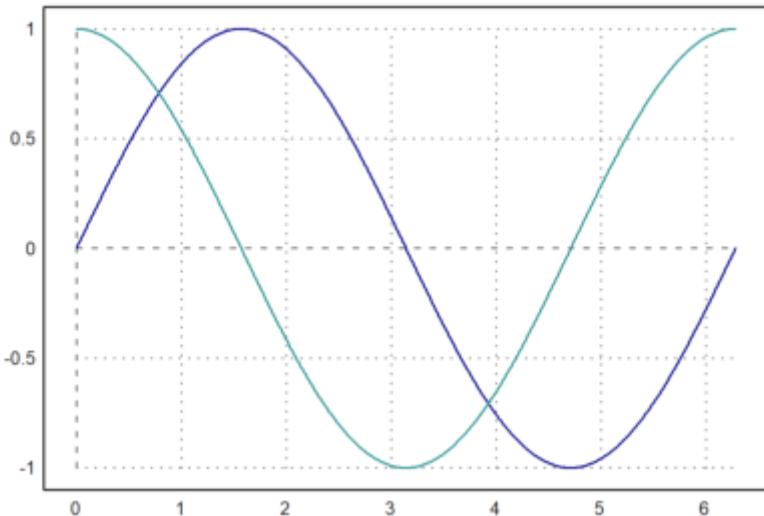
Gambar 3.44 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-045.png



Gambar 3.45 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-046.png



Gambar 3.46 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-047.png



Gambar 3.47 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-048.png

Metode lain adalah menggunakan vektor ekspresi (string). Anda kemudian dapat menggunakan susunan warna, susunan gaya, dan susunan ketebalan dengan panjang yang sama.

```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=4:5);
```

```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi); // plot vector of expressions
```

Kita bisa mendapatkan vektor seperti itu dari Maxima menggunakan makelist() dan mxm2str().

```
>v &= makelist(binomial(10,i)*x^(1-x)(10-i),i,0,10) // make list
```

```

          10           9           8   2           7   3
[ (1 - x) , 10 (1 - x) x, 45 (1 - x) x , 120 (1 - x) x ,
  6   4           5   5           4   6           3   7
210 (1 - x) x , 252 (1 - x) x , 210 (1 - x) x , 120 (1 - x) x ,
  2   8           9   10
45 (1 - x) x , 10 (1 - x) x , x ]

```

```
>mxm2str(v) // get a vector of strings from the symbolic vector
```

```

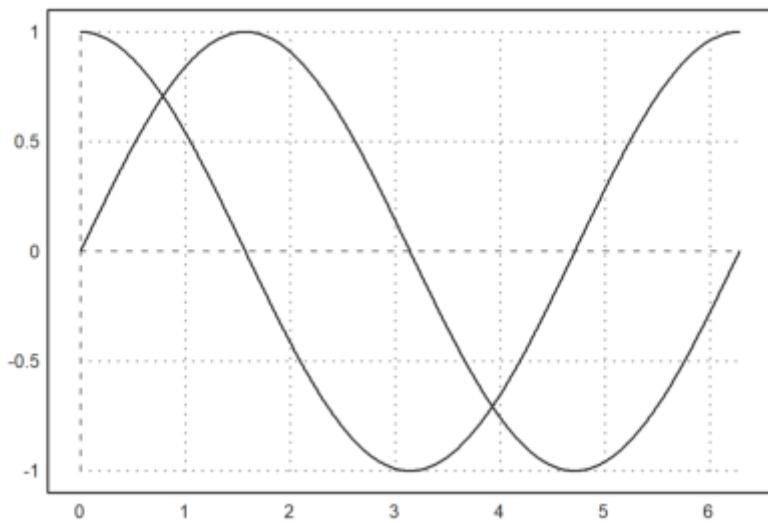
(1-x)^10
10*(1-x)^9*x
45*(1-x)^8*x^2
120*(1-x)^7*x^3
210*(1-x)^6*x^4
252*(1-x)^5*x^5
210*(1-x)^4*x^6
120*(1-x)^3*x^7
45*(1-x)^2*x^8
10*(1-x)*x^9
x^10

```

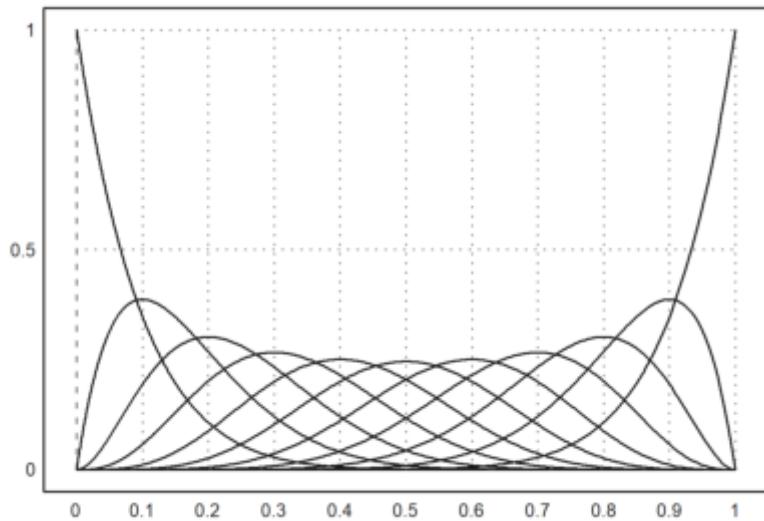
```
>plot2d(mxm2str(v),0,1); // plot functions
```

Alternatif lain adalah dengan menggunakan bahasa matriks Euler.

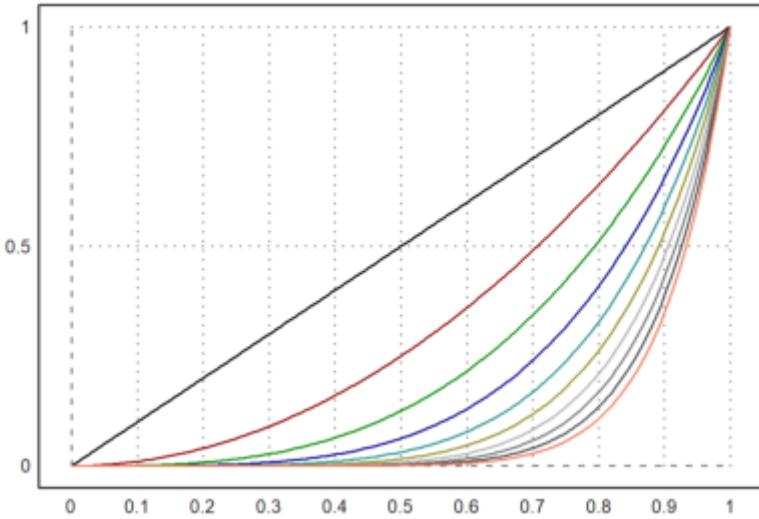
Jika suatu ekspresi menghasilkan matriks fungsi, dengan satu fungsi di setiap baris, semua fungsi tersebut akan diplot ke dalam satu plot.



Gambar 3.48 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-049.png



Gambar 3.49 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-050.png



Gambar 3.50 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-051.png

Untuk ini, gunakan vektor parameter dalam bentuk vektor kolom. Jika array warna ditambahkan maka akan digunakan untuk setiap baris plot.

> $n=(1:10)'$; plot2d("x^n",0,1,color=1:10);

Ekspresi dan fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

Jika Anda tidak dapat menggunakan variabel global, Anda perlu menggunakan fungsi dengan parameter tambahan, dan meneruskan parameter ini sebagai parameter titik koma.

Berhati-hatilah, untuk meletakkan semua parameter yang ditetapkan di akhir perintah plot2d. Dalam contoh ini kita meneruskan $a=5$ ke fungsi f, yang kita plot dari -10 hingga 10.

>function f(x,a) := 1/a*exp(-x^2/a); ...

> plot2d("f",-10,10;5,thickness=2,title="a=5");

Alternatifnya, gunakan koleksi dengan nama fungsi dan semua parameter tambahan. Daftar khusus ini disebut kumpulan panggilan, dan ini adalah cara yang lebih disukai untuk meneruskan argumen ke suatu fungsi yang kemudian diteruskan sebagai argumen ke fungsi lain.

Pada contoh berikut, kita menggunakan loop untuk memplot beberapa fungsi (lihat tutorial tentang pemrograman loop).

>plot2d({{"f",1}},-10,10); ...

> for a=2:10; plot2d({{"f",a}},>add); end;

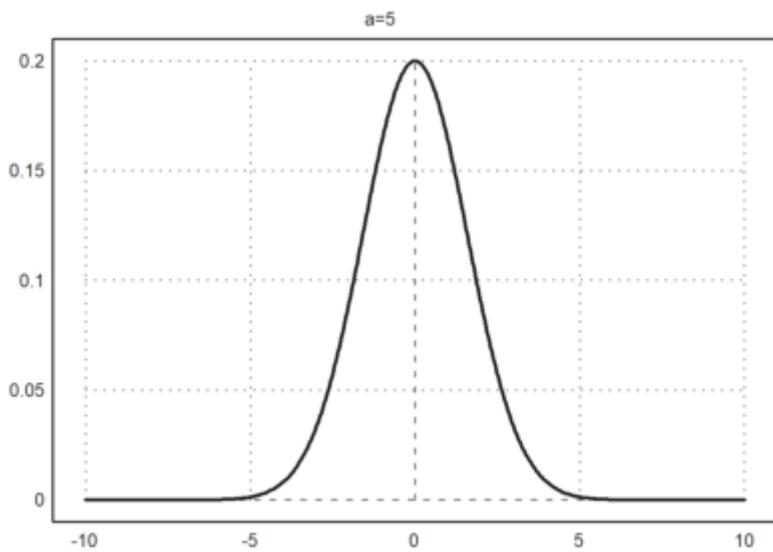
Kita dapat mencapai hasil yang sama dengan cara berikut menggunakan bahasa matriks EMT. Setiap baris matriks $f(x,a)$ merupakan satu fungsi. Selain itu, kita dapat mengatur warna untuk setiap baris matriks. Klik dua kali pada fungsi getspectral() untuk penjelasannya.

> $x=-10:0.01:10$; $a=(1:10)'$; plot2d(x,f(x,a),color=getspectral(a/10));

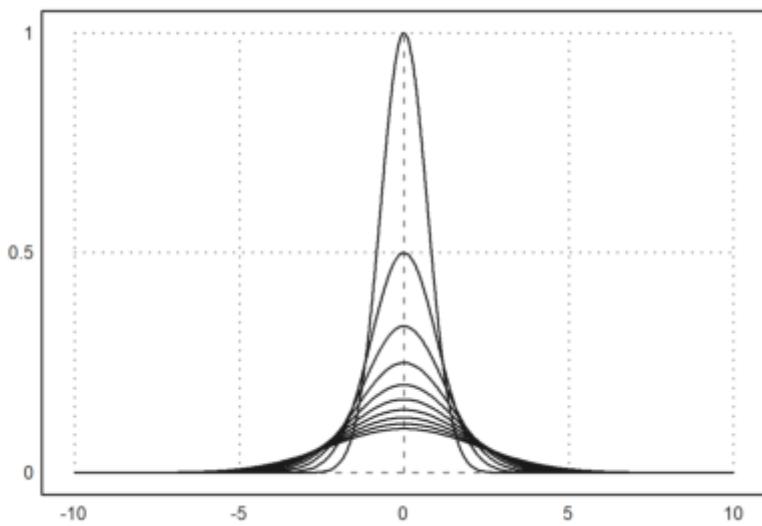
3.7 Label Teks

Dekorasi sederhana pun bisa

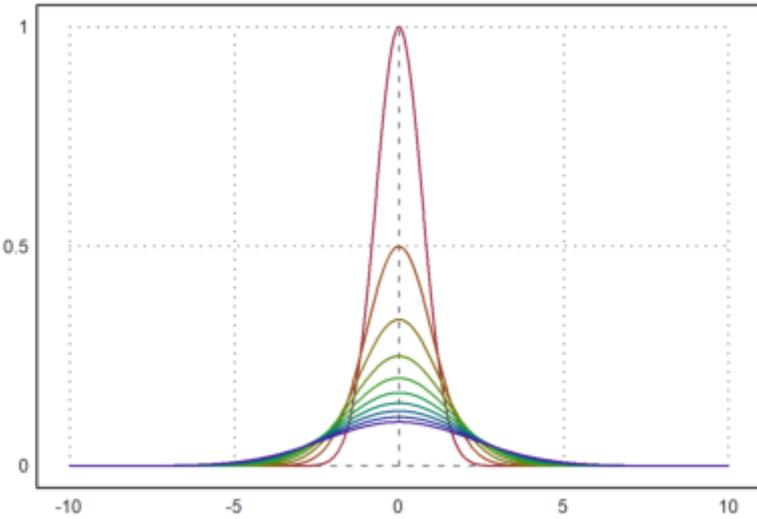
- judul dengan judul = “...”
- label x dan y dengan xl=“...”, yl=“...”
- label teks lain dengan label(“...”,x,y)



Gambar 3.51 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-052.png



Gambar 3.52 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-053.png



Gambar 3.53 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-054.png

Perintah label akan memplot ke plot saat ini pada koordinat plot (x,y). Hal ini memerlukan argumen posisional.

```
>plot2d("x^3-x",-1,2,title="y=x^3-x",yl="y",xl="x");
>expr := "log(x)/x"; ...
> plot2d(expr,0.5,5,title="y=" +expr, xl="x", yl="y"); ...
> label("(1,0)",1,0); label("Max",E,expr(E),pos="lc");
```

Ada juga fungsi labelbox(), yang dapat menampilkan fungsi dan teks. Dibutuhkan vektor string dan warna, satu item untuk setiap fungsi.

```
>function f(x) &= x^2*exp(-x^2); ...
> plot2d(&f(x),a=-3,b=3,c=-1,d=1); ...
> plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=blue,style="-"); ...
> labelbox(["function","derivative"],styles=[ "-", "-"], ...
> colors=[black,blue],w=0.4);
```

Kotak ini berlabuh di kanan atas secara default, tetapi >kiri berlabuh di kiri atas. Anda dapat memindahkannya ke tempat mana pun yang Anda suka. Posisi jangkar berada di pojok kanan atas kotak, dan angkanya merupakan pecahan dari ukuran jendela grafis. Lebarnya otomatis.

Untuk plot titik, kotak label juga berfungsi. Tambahkan parameter >points, atau vektor bendera, satu untuk setiap label.

Pada contoh berikut, hanya ada satu fungsi. Jadi kita bisa menggunakan string sebagai pengganti vektor string. Kami mengatur warna teks menjadi hitam untuk contoh ini.

```
>n=10; plot2d(0:n,bin(n,0:n),>addpoints); ...
> labelbox("Binomials",styles="[]",>points,x=0.1,y=0.1, ...
> tcolor=black,>left);
```

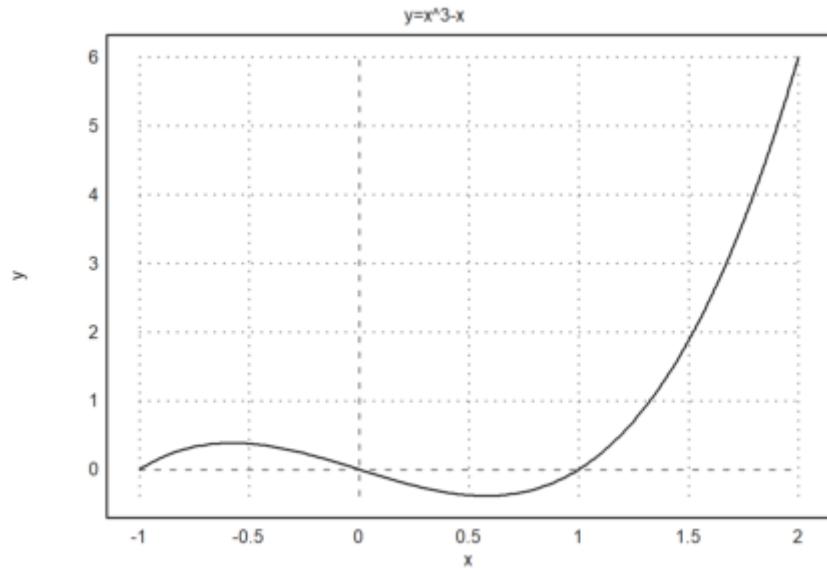
Gaya plot ini juga tersedia di statplot(). Seperti di plot2d() warna dapat diatur untuk setiap baris plot. Masih banyak lagi plot khusus untuk keperluan statistik (lihat tutorial tentang statistik).

```
>statplot(1:10,random(2,10),color=[red,blue]);
```

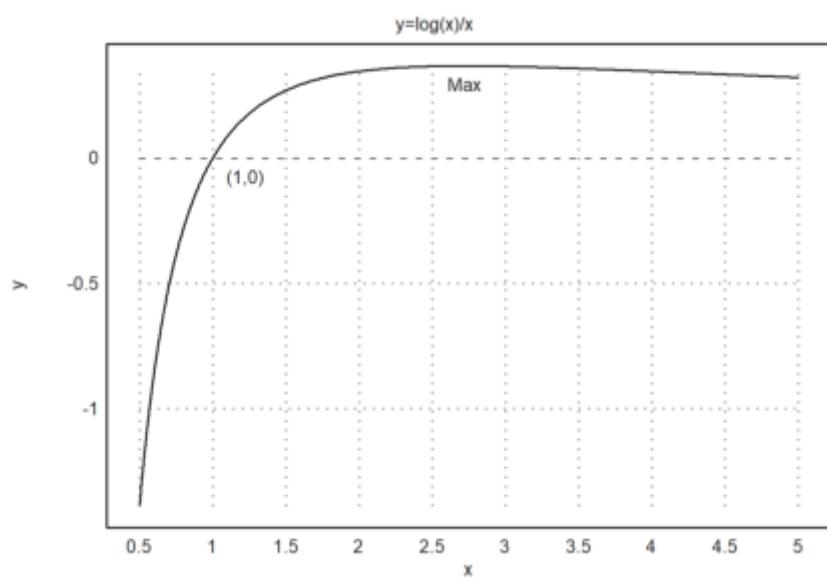
Fitur serupa adalah fungsi textbox().

Lebarnya secara default adalah lebar maksimal baris teks. Tapi itu bisa diatur oleh pengguna juga.

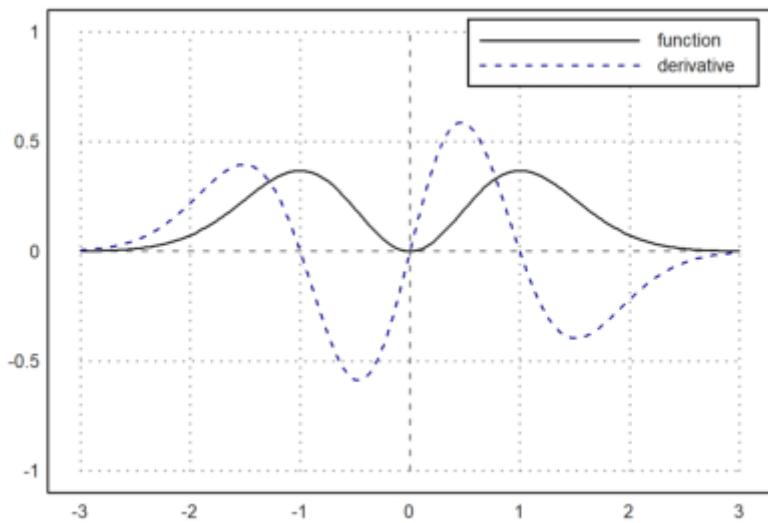
```
>function f(x) &= exp(-x)*sin(2*pi*x); ...
> plot2d("f(x)",0,2pi); ...
```



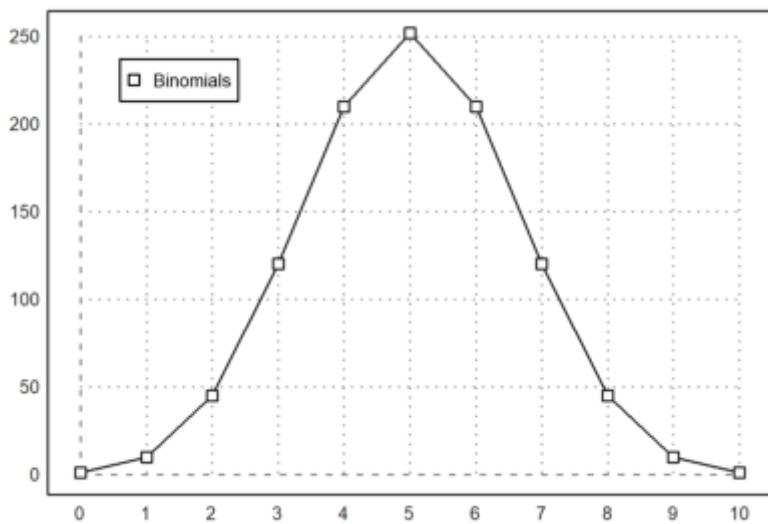
Gambar 3.54 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-055.png



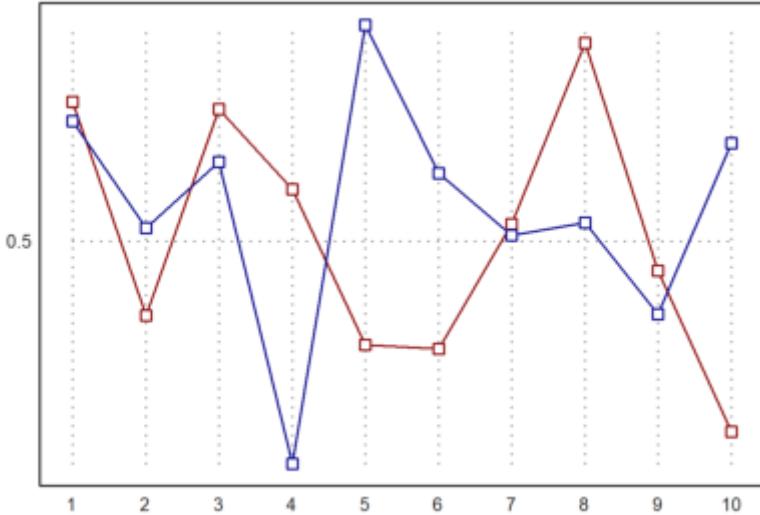
Gambar 3.55 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-056.png



Gambar 3.56 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-057.png



Gambar 3.57 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-058.png



Gambar 3.58 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-059.png

```
> textbox(latex("\text{Example of a damped oscillation}\backslash f(x)=e^{-x}\sin(2\pi x)"),w=0.85);
```

Text labels, titles, label boxes and other text can contain Unicode strings (see the syntax of EMT for more about Unicode strings).

```
>plot2d("x^3-x",title=u"x → x³ - x"):
```

The labels on the x- and y-axis can be vertical, as well as the axis.

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,xl="x",yl=u"x → sinc(x)",>vertical):
```

3.8 LaTeX

Anda juga dapat memplot rumus LaTeX jika Anda telah menginstal sistem LaTeX. Saya merekomendasikan MiKTeX. Jalur ke biner “lateks” dan “dvipng” harus berada di jalur sistem, atau Anda harus mengatur LaTeX di menu opsi.

Perhatikan, penguraian LaTeX lambat. Jika Anda ingin menggunakan LaTeX dalam plot animasi, Anda harus memanggil `latex()` sebelum loop satu kali dan menggunakan hasilnya (gambar dalam matriks RGB).

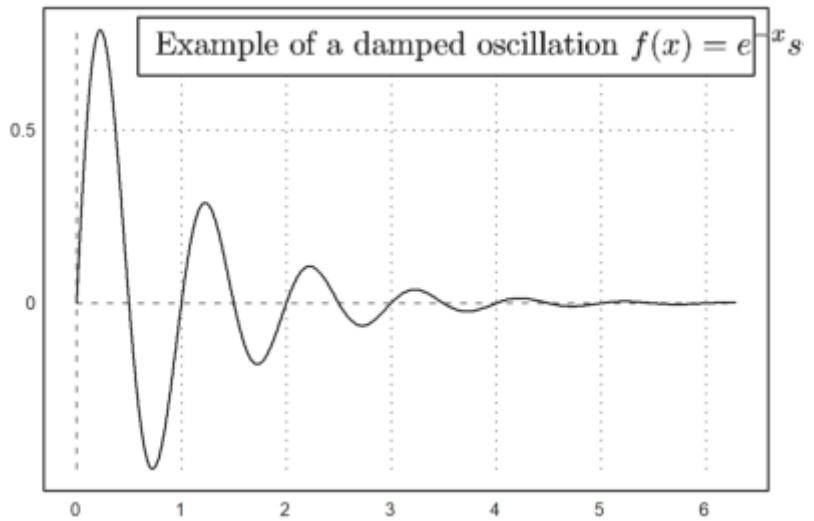
Pada plot berikut, kami menggunakan LaTeX untuk label x dan y, label, kotak label, dan judul plot.

```
>plot2d("exp(-x)*sin(x)/x",a=0,b=2pi,c=0,d=1,grid=6,color=blue, ...
> title=latex("\text{Function
Phi}"), ...
> xl=latex("\phi"),yl=latex("\Phi(\phi)"); ...
> textbox( ...
> latex("\Phi(\phi) = e^{-\phi} \frac{\sin(\phi)}{\phi}"),x=0.8,y=0.5); ...
> label(latex("\Phi"),color=blue),1,0.4):
```

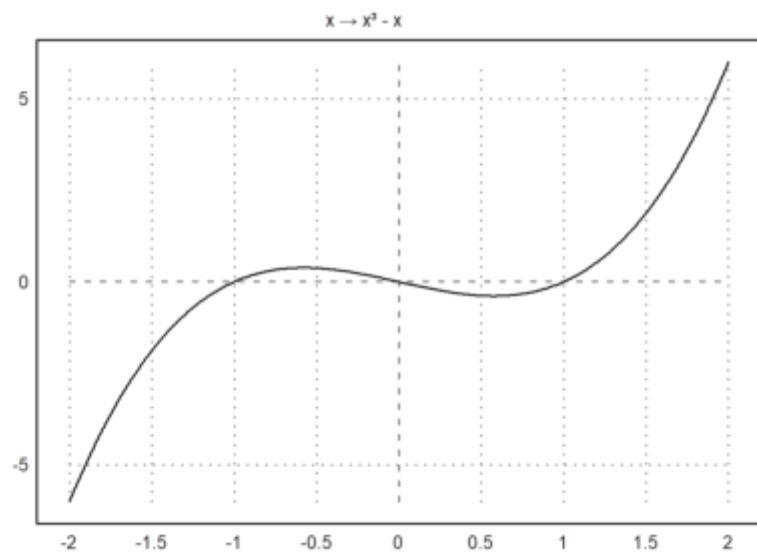
Seringkali, kita menginginkan spasi dan label teks yang tidak konformal pada sumbu x. Kita bisa menggunakan `xaxis()` dan `yaxis()` seperti yang akan kita tunjukkan nanti.

Cara termudah adalah membuat plot kosong dengan bingkai menggunakan `grid=4`, lalu menambahkan grid dengan `ygrid()` dan `xgrid()`. Pada contoh berikut, kami menggunakan tiga string LaTeX untuk label pada sumbu x dengan `xtick()`.

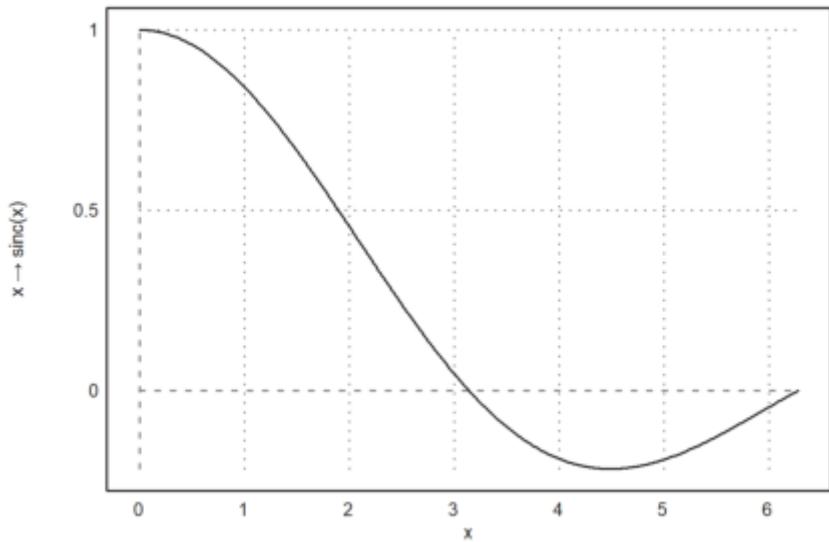
```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,grid=4,<ticks); ...
> ygrid(-2:0.5:2,grid=6); ...
```



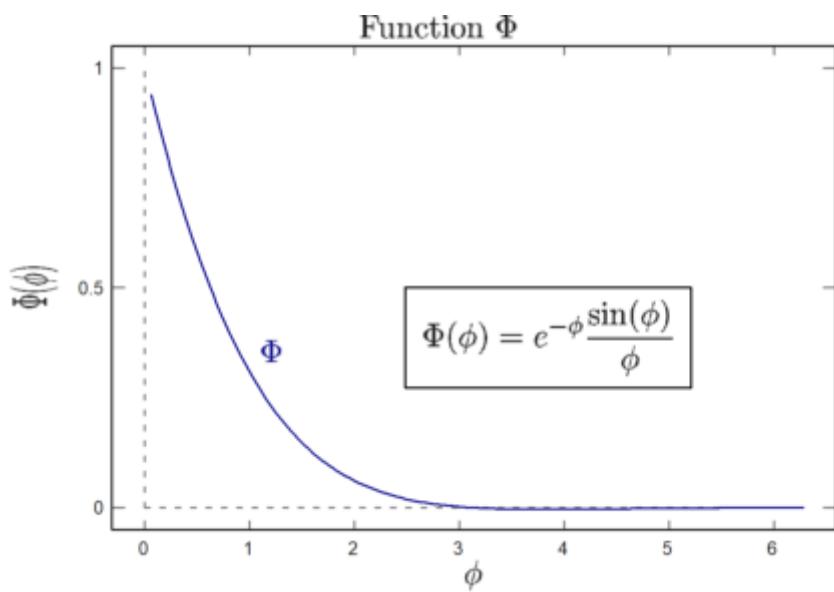
Gambar 3.59 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-060.png



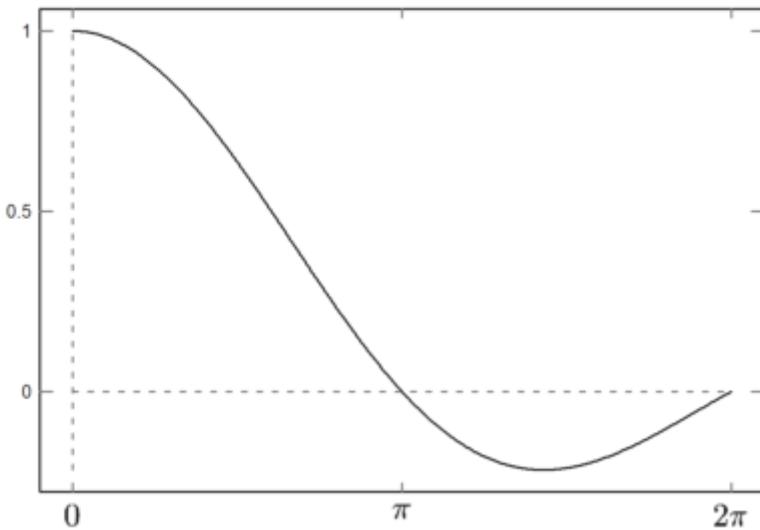
Gambar 3.60 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-061.png



Gambar 3.61 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-062.png



Gambar 3.62 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-063.png



Gambar 3.63 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-064.png

```
> xgrid([0:2]*pi,<ticks,grid=6); ...
> xtick([0,pi,2pi],["0"," $\pi$ "," $2\pi$ "],>latex):
    Tentu saja fungsinya juga bisa digunakan.
    >function map f(x) ...

if x>0 then return x^4
else return x^2
endif
endfunction
```

Parameter “peta” membantu menggunakan fungsi untuk vektor. Untuk plot, itu tidak diperlukan. Namun untuk menunjukkan bahwa vektorisasi berguna, kami menambahkan beberapa poin penting ke plot pada $x=-1$, $x=0$, dan $x=1$.

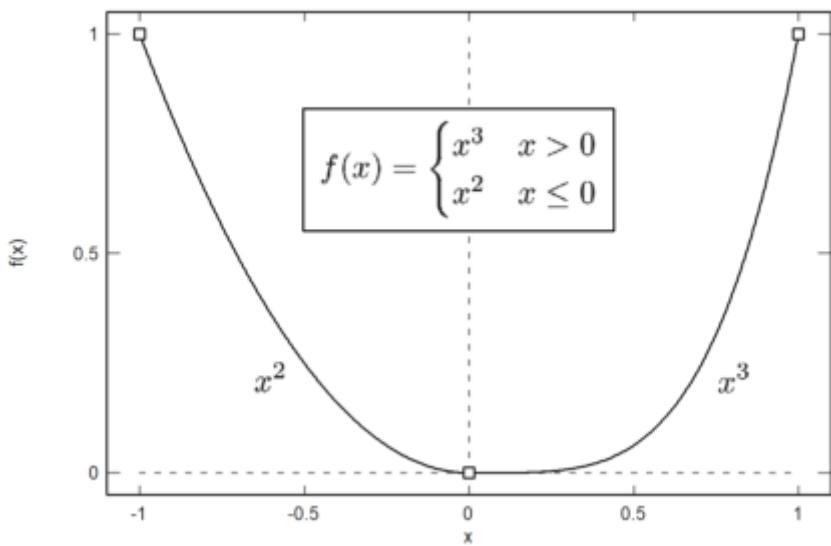
Pada plot berikut, kami juga memasukkan beberapa kode LaTeX. Kami menggunakannya untuk dua label dan kotak teks. Tentu saja, Anda hanya dapat menggunakan LaTeX jika Anda telah menginstal LaTeX dengan benar.

```
>plot2d("f",-1,1,xl="x",yl="f(x)",grid=6); ...
>plot2d([-1,0,1],f([-1,0,1]),>points,>add); ...
>label(latex("x^3"),0.72,f(0.72)); ...
>label(latex("x^2"),-0.52,f(-0.52),pos="ll"); ...
>textbox( ...
> latex("f(x)=\begin{cases} x^3 & x>0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}"), ...
>x=0.7,y=0.2):
```

3.9 Interaksi Pengguna

Saat memplot suatu fungsi atau ekspresi, parameter `>pengguna` memungkinkan pengguna untuk memperbesar dan menggeser plot dengan tombol kursor atau mouse. Pengguna bisa

- perbesar dengan + atau -
- pindahkan plot dengan tombol kursor
- pilih jendela plot dengan mouse



Gambar 3.64 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-065.png

- atur ulang tampilan dengan spasi
- keluar dengan kembali

Tombol spasi akan mengatur ulang plot ke jendela plot aslinya.

Saat memplot data, flag `>user` hanya akan menunggu penekanan tombol.

```
>plot2d({{"x^3-a*x"},a=1},>user,title="Press any key!"):
```

```
>plot2d("exp(x)*sin(x)",user=true,...
```

```
> title="+/- or cursor keys (return to exit)":
```

Berikut ini menunjukkan cara interaksi pengguna tingkat lanjut (lihat tutorial tentang pemrograman untuk detailnya).

Fungsi bawaan `mousedrag()` menunggu aktivitas mouse atau keyboard. Ini melaporkan mouse ke bawah, gerakan mouse atau mouse ke atas, dan penekanan tombol. Fungsi `dragpoints()` memanfaatkan ini, dan memungkinkan pengguna menyeret titik mana pun dalam plot.

Kita membutuhkan fungsi plot terlebih dahulu. Misalnya, kita melakukan interpolasi pada 5 titik dengan polinomial. Fungsi tersebut harus diplot ke dalam area plot yang tetap.

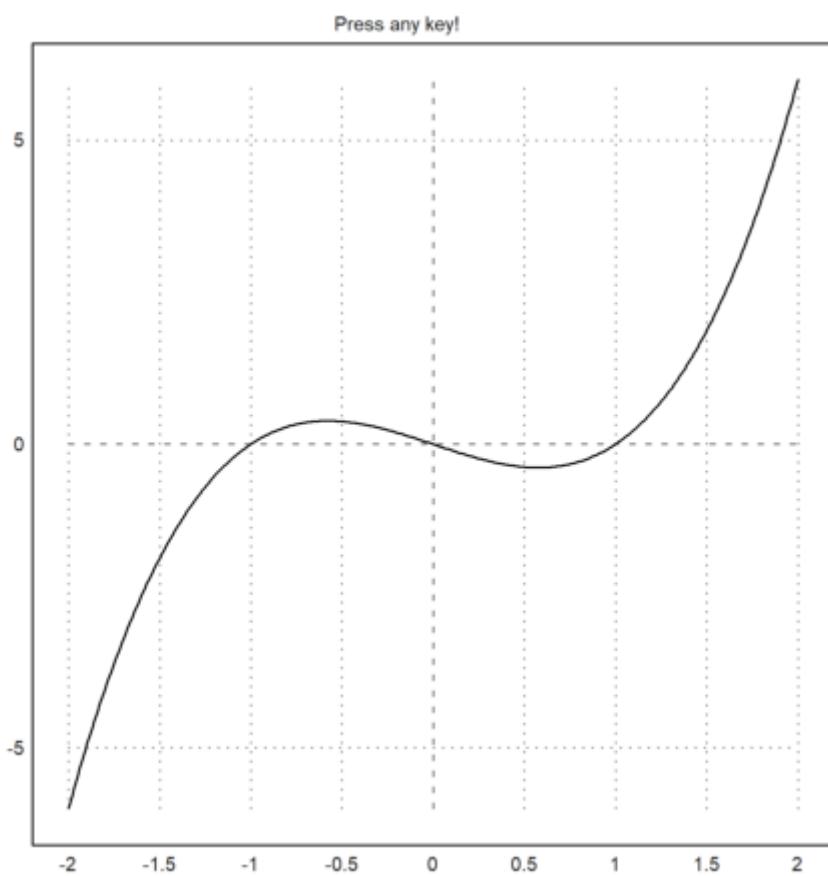
```
>function plotf(xp,yp,select) ...

d=interp(xp,yp);
plot2d("interval(xp,d,x)";d,xp,r=2);
plot2d(xp,yp,>points,>add);
if select>0 then
  plot2d(xp[select],yp[select],color=red,>points,>add);
endif;
title("Drag one point, or press space or return!");
endfunction
```

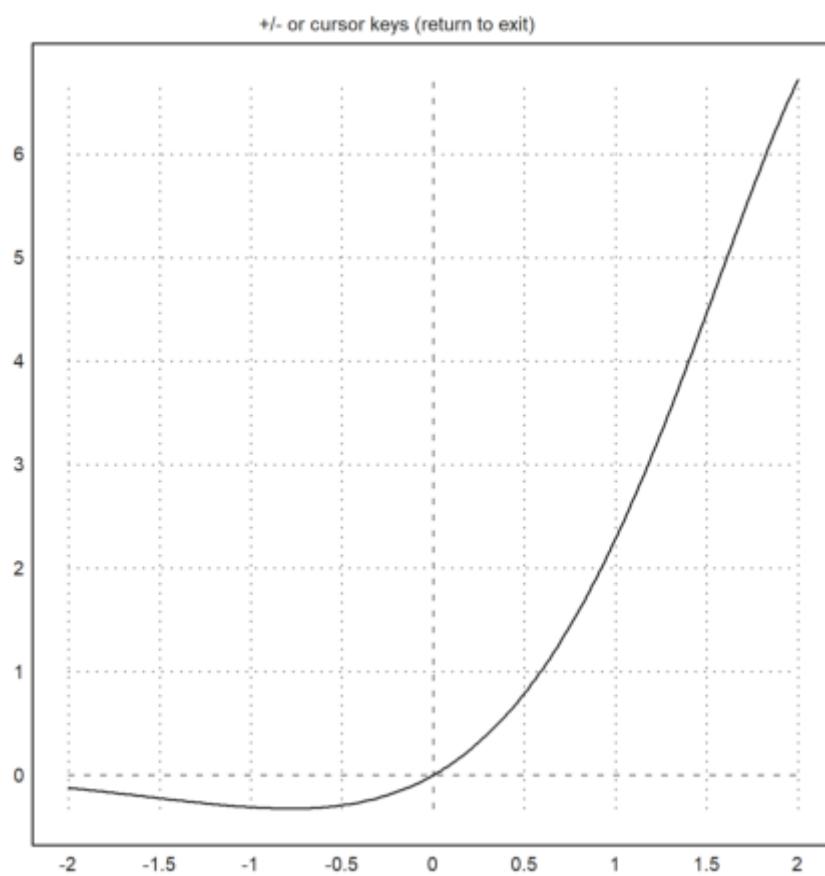
Perhatikan parameter titik koma di `plot2d` (`d` dan `xp`), yang diteruskan ke evaluasi fungsi `interp()`. Tanpa ini, kita harus menulis fungsi `plotinterp()` terlebih dahulu, mengakses nilainya secara global.

Sekarang kita menghasilkan beberapa nilai acak, dan membiarkan pengguna menyeret titiknya.

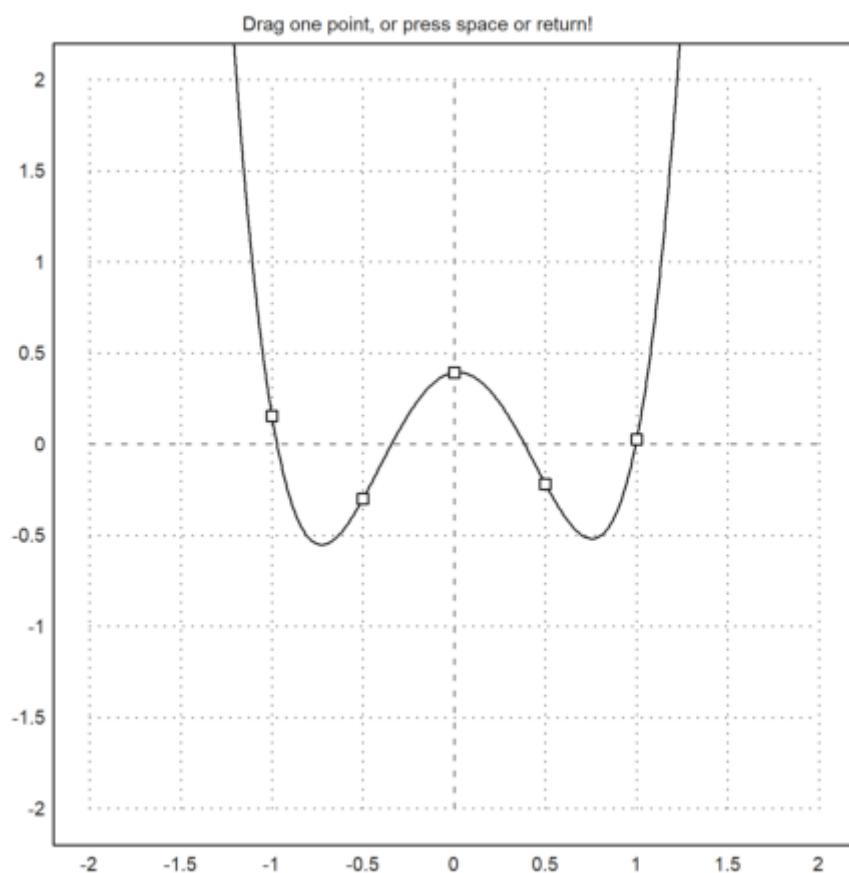
```
>t=-1:0.5:1; dragpoints("plotf",t,random(size(t))-0.5);
```



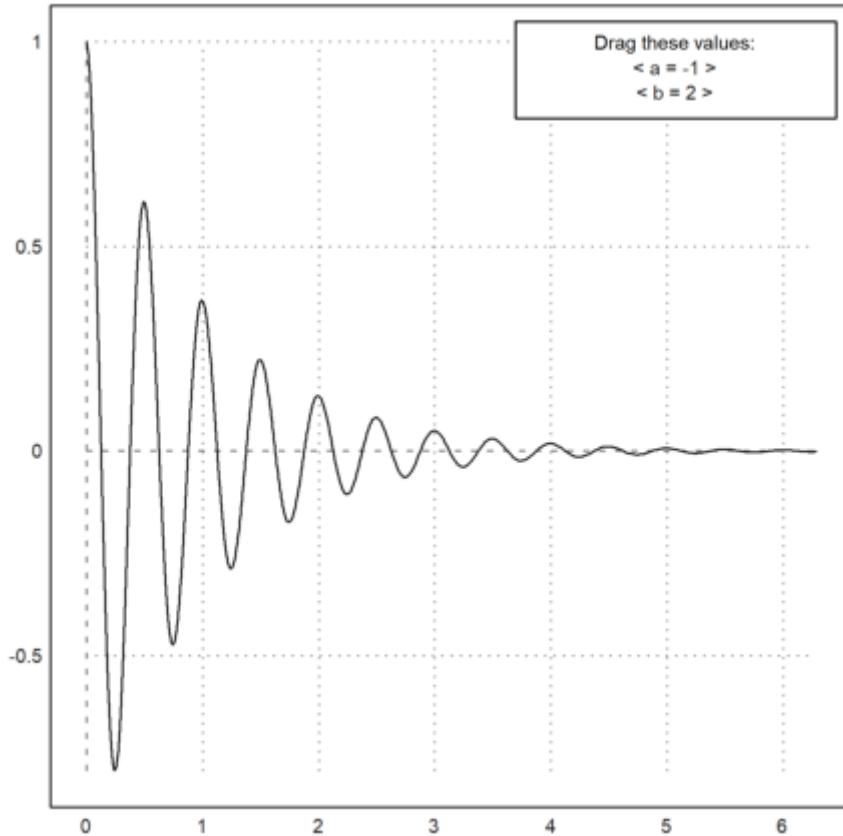
Gambar 3.65 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-066.png



Gambar 3.66 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-067.png



Gambar 3.67 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-068.png



Gambar 3.68 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-069.png

Ada juga fungsi yang memplot fungsi lain bergantung pada vektor parameter, dan memungkinkan pengguna menyesuaikan parameter ini.

Pertama kita membutuhkan fungsi plot.

```
>function plotf([a,b]) := plot2d("exp(a*x)*cos(2pi*b*x)",0,2pi;a,b);
```

Kemudian kita memerlukan nama untuk parameter, nilai awal dan matriks rentang nx2, opsional garis judul.

Ada penggeser interaktif, yang dapat menetapkan nilai oleh pengguna. Fungsi dragvalues() menyediakan ini.

```
>dragvalues("plotf",["a","b"],[-1,2],[-2,2];[1,10]),...
```

```
>heading="Drag these values:",hcolor=black):
```

Dimungkinkan untuk membatasi nilai yang diseret menjadi bilangan bulat. Sebagai contoh, kita menulis fungsi plot, yang memplot polinomial Taylor berderajat n ke fungsi kosinus.

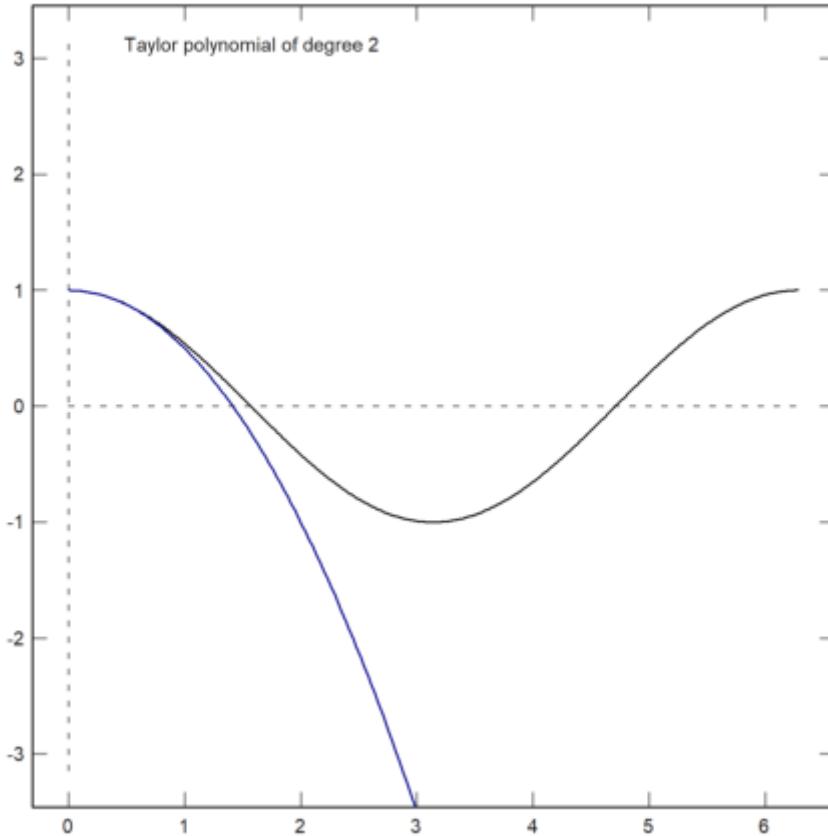
```
>function plotf(n) ...
```

```
plot2d("cos(x)",0,2pi,>square,grid=6);
plot2d(&"taylor(cos(x),x,0,@n)",color=blue,>add);
textbox("Taylor polynomial of degree "+n,0.1,0.02,style="t",>left);
endfunction
```

Sekarang kita izinkan derajat n bervariasi dari 0 hingga 20 dalam 20 perhentian. Hasil dragvalues() digunakan untuk memplot sketsa dengan n ini, dan untuk memasukkan plot ke dalam buku catatan.

```
>nd=dragvalues("plotf","degree",2,[0,20],20,y=0.8,...
```

```
>heading="Drag the value:");...
```



Gambar 3.69 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-070.png

> plotf(nd):

Berikut ini adalah demonstrasi sederhana dari fungsinya. Pengguna dapat menggambar jendela plot, meninggalkan jejak titik.

>function dragtest ...

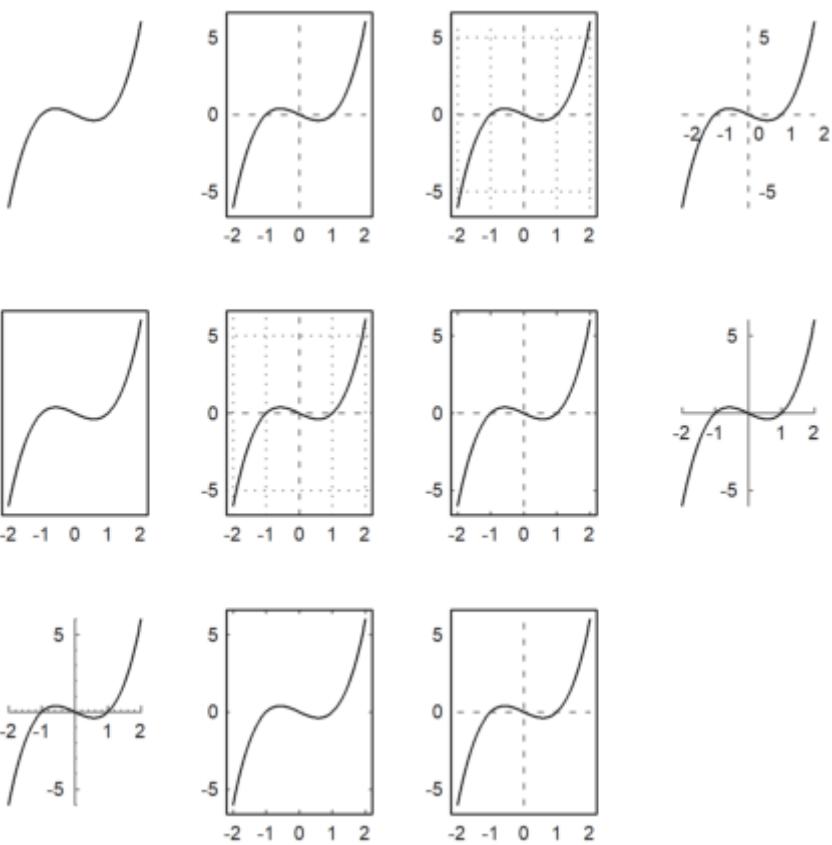
```
plot2d(none,r=1,title="Drag with the mouse, or press any key!");
start=0;
repeat
{flag,m,time}=mousedrag();
if flag==0 then return; endif;
if flag==2 then
    hold on; mark(m[1],m[2]); hold off;
endif;
end
endfunction
```

>dragtest // lihat hasilnya dan cobalah lakukan!

3.10 Gaya Plot 2D

Secara default, EMT menghitung tick sumbu otomatis dan menambahkan label ke setiap tick. Ini dapat diubah dengan parameter grid. Gaya default sumbu dan label dapat diubah. Selain itu, label dan judul dapat ditambahkan secara manual. Untuk menyetel ulang ke gaya default, gunakan reset().

>aspect();



Gambar 3.70 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-071.png

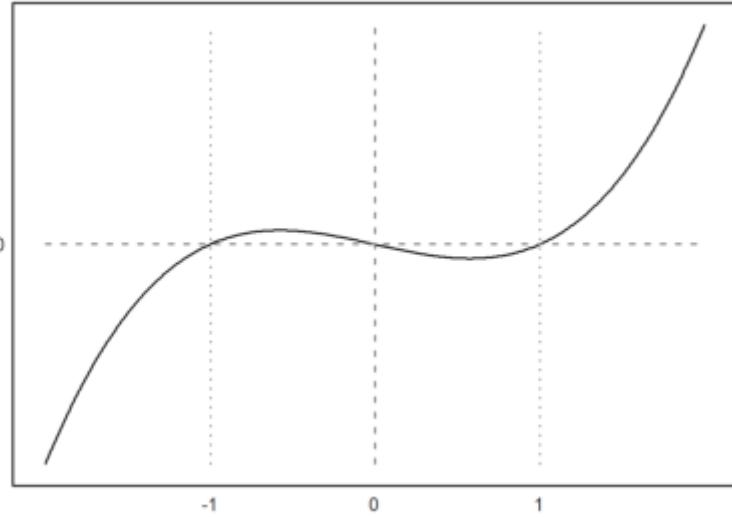
```
>figure(3,4); ...
>figure(1); plot2d("x^3-x",grid=0); ... // no grid, frame or axis
> figure(2); plot2d("x^3-x",grid=1); ... // x-y-axis
> figure(3); plot2d("x^3-x",grid=2); ... // default ticks
> figure(4); plot2d("x^3-x",grid=3); ... // x-y- axis with labels inside
> figure(5); plot2d("x^3-x",grid=4); ... // no ticks, only labels
> figure(6); plot2d("x^3-x",grid=5); ... // default, but no margin
> figure(7); plot2d("x^3-x",grid=6); ... // axes only
> figure(8); plot2d("x^3-x",grid=7); ... // axes only, ticks at axis
> figure(9); plot2d("x^3-x",grid=8); ... // axes only, finer ticks at axis
> figure(10); plot2d("x^3-x",grid=9); ... // default, small ticks inside
> figure(11); plot2d("x^3-x",grid=10); ...// no ticks, axes only
> figure(0):
```

Parameter `<frame>` mematikan frame, dan `framecolor=blue` mengatur frame menjadi warna biru.

Jika Anda menginginkan tanda centang Anda sendiri, Anda dapat menggunakan `style=0`, dan menambahkan semuanya nanti.

```
>aspect(1.5);
>plot2d("x^3-x",grid=0); // plot
>frame; xgrid([-1,0,1]); ygrid(0); // add frame and grid
```

Untuk judul plot dan label sumbu, lihat contoh berikut.



Gambar 3.71 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-072.png

```
>plot2d("exp(x)",-1,1);
>textcolor(black); // set the text color to black
>title(latex("y=e^x")); // title above the plot
>xlabel(latex("x")); // "x" for x-axis
>ylabel(latex("y"),>vertical); // vertical "y" for y-axis
>label(latex("(0,1)'),0,1,color=blue); // label a point
```

Sumbu dapat digambar secara terpisah dengan xaxis() dan yaxis().

```
>plot2d("x^3-x",<grid,<frame);
>xaxis(0,xx=-2:1,style="->"); yaxis(0,yy=-5:5,style="->");
```

Teks pada plot dapat diatur dengan label(). Dalam contoh berikut, "lc" berarti bagian tengah bawah. Ini menetapkan posisi label relatif terhadap koordinat plot.

```
>function f(x) &= x^3-x
```

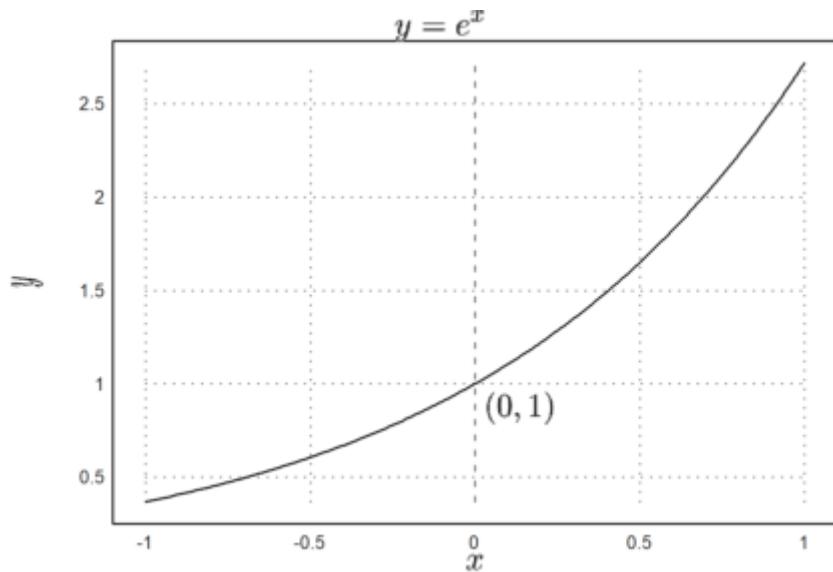
$$x^3 - x$$

```
>plot2d(f,-1,1,>square);
>x0=fmin(f,0,1); // compute point of minimum
>label("Rel. Min.",x0,f(x0),pos="lc"); // add a label there
```

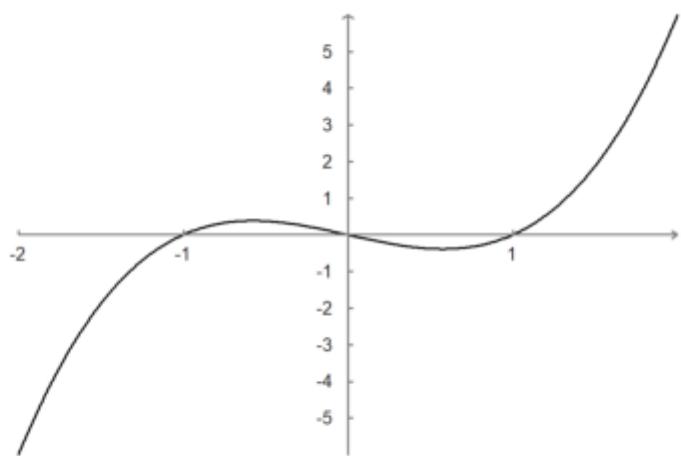
Ada juga kotak teks.

```
>plot2d(&f(x),-1,1,-2,2); // function
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,style="--",color=red); // derivative
>labelbox(["f","f"],["-","-"],[black,red]); // label box
>plot2d(["exp(x)","1+x"],color=[black,blue],style=["-","-."]):
>gridstyle("->",color=gray,textcolor=gray,framecolor=gray); ...
```

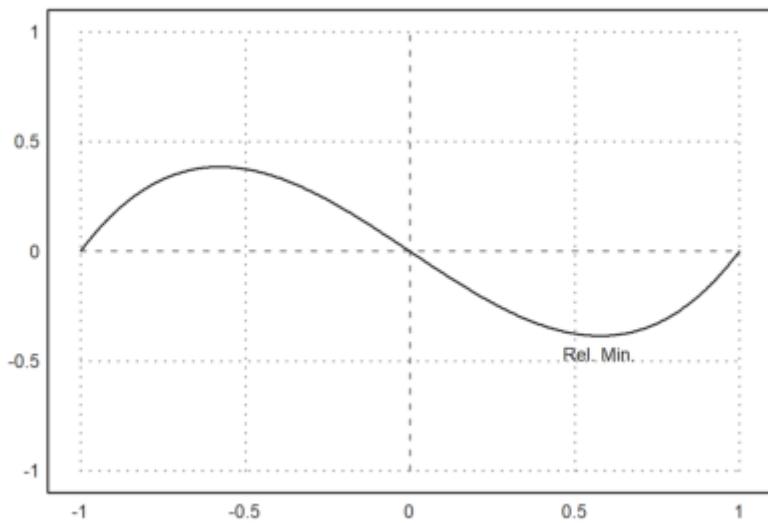
```
>plot2d("x^3-x",grid=1); ...
>settitle("y=x^3-x",color=black); ...
>label("x",2,0,pos="bc",color=gray); ...
>label("y",0,6,pos="cl",color=gray); ...
>reset():
```



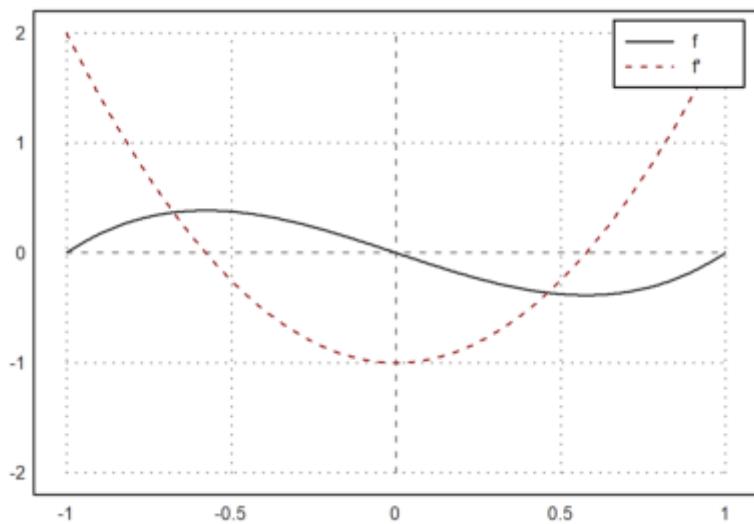
Gambar 3.72 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-073.png



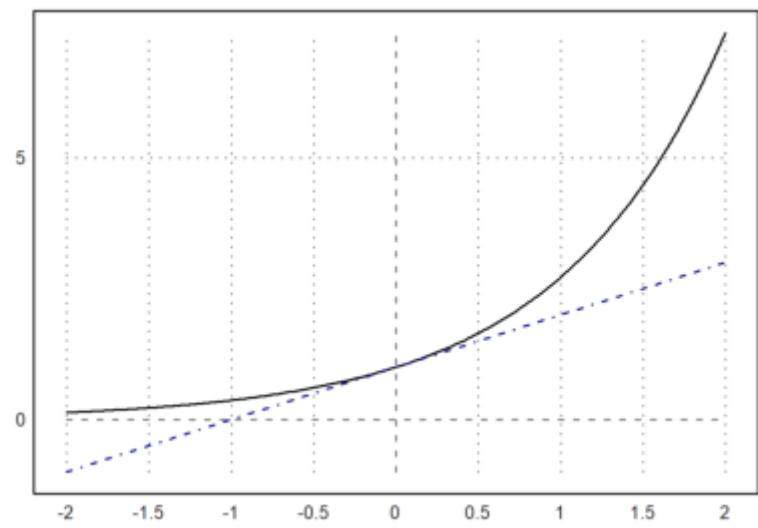
Gambar 3.73 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-074.png



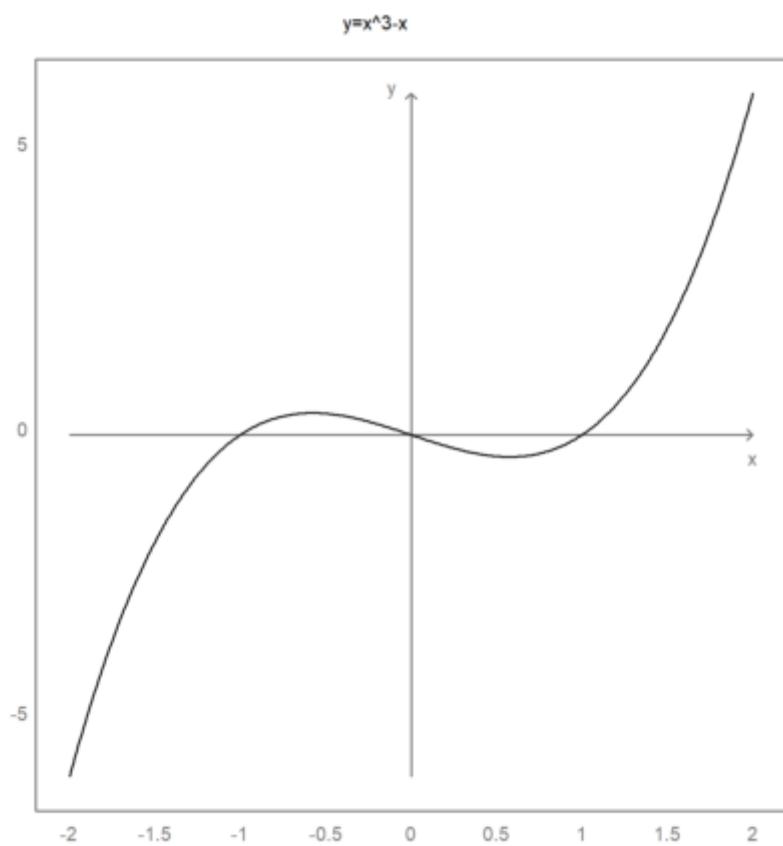
Gambar 3.74 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-075.png



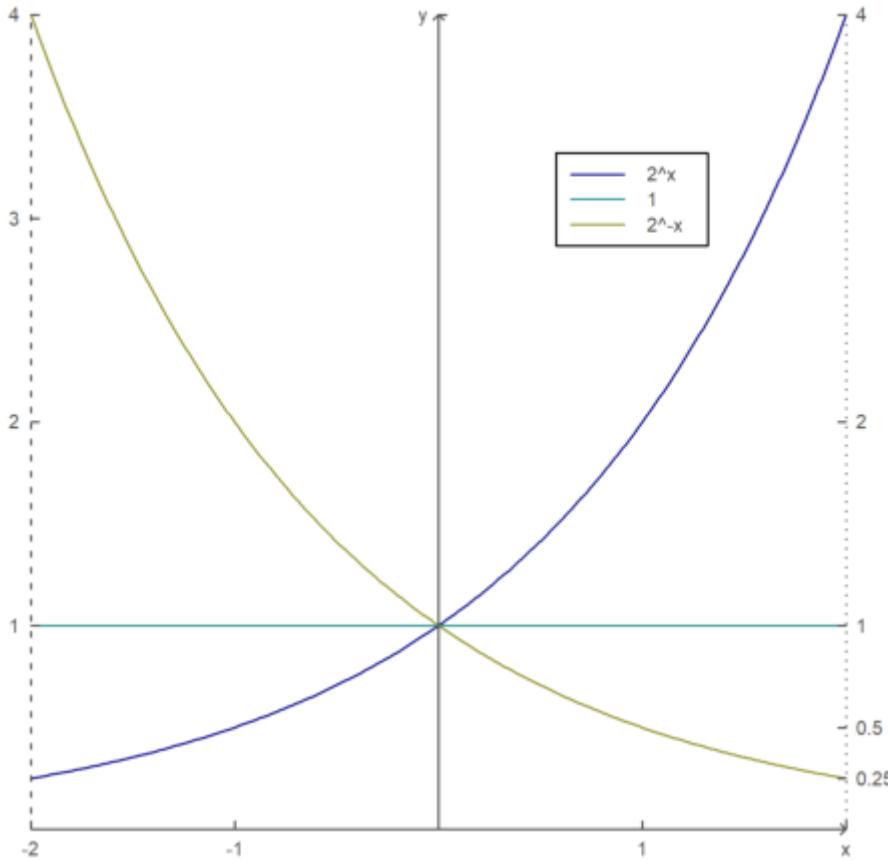
Gambar 3.75 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-076.png



Gambar 3.76 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-077.png



Gambar 3.77 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-078.png



Gambar 3.78 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-079.png

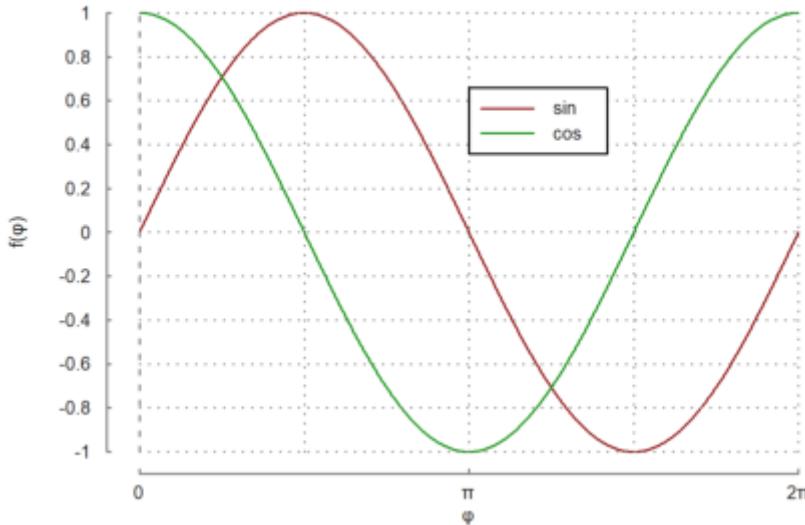
Untuk kontrol lebih lanjut, sumbu x dan sumbu y dapat dilakukan secara manual.

Perintah fullwindow() memperluas jendela plot karena kita tidak lagi memerlukan tempat untuk label di luar jendela plot. Gunakan shrinkwindow() atau reset() untuk menyetel ulang ke default.

```
>fullwindow; ...
>gridstyle(color=darkgray,textcolor=darkgray); ...
>plot2d(["2^x","1","2^(-x)"],a=-2,b=2,c=0,d=4,<grid,color=4:6,<frame); ...
>xaxis(0,-2:1,style="->"); xaxis(0,2,"x",<axis); ...
>yaxis(0,4,"y",style="->"); ...
>yaxis(-2,1:4,>left); ...
>yaxis(2,2^(-2:2),style=".",<left); ...
>labelbox(["2^x","1","2^-x"],colors=4:6,x=0.8,y=0.2); ...
>reset:
```

Berikut adalah contoh lain, di mana string Unicode digunakan dan sumbunya berada di luar area plot.

```
>aspect(1.5);
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=[red,green],<grid,<frame); ...
>xaxis(-1.1,(0:2)*pi,xt=[“0”,u”“,u”2”],style="-",>ticks,>zero); ...
>xgrid((0:0.5:2)*pi,<ticks); ...
>yaxis(-0.1*pi,-1:0.2:1,style="-",>zero,>grid); ...
>labelbox(["sin","cos"],colors=[red,green],x=0.5,y=0.2,>left); ...
>xlabel(u”“); ylabel(u”f()“):
```



Gambar 3.79 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-080.png

3.11 Merencanakan Data 2D

Jika x dan y adalah vektor data, maka data tersebut akan digunakan sebagai koordinat x dan y pada suatu kurva. Dalam hal ini, a , b , c , dan d , atau radius r dapat ditentukan, atau jendela plot akan menyesuaikan secara otomatis dengan data. Alternatifnya, >persegi dapat diatur untuk mempertahankan rasio aspek persegi.

Merencanakan ekspresi hanyalah singkatan dari plot data. Untuk plot data, Anda memerlukan satu atau beberapa baris nilai x , dan satu atau beberapa baris nilai y . Dari rentang dan nilai x , fungsi plot2d akan menghitung data yang akan diplot, secara default dengan evaluasi fungsi yang adaptif. Untuk plot titik gunakan ">titik", untuk garis dan titik campuran gunakan ">addpoints".

Tapi Anda bisa memasukkan data secara langsung.

- Gunakan vektor baris untuk x dan y untuk satu fungsi.
- Matriks untuk x dan y diplot baris demi baris.

Berikut adalah contoh dengan satu baris untuk x dan y .

```
>x=-10:0.1:10; y=exp(-x^2)*x; plot2d(x,y);
```

Data juga dapat diplot sebagai poin. Gunakan points=true untuk ini. Plotnya berfungsi seperti poligon, tetapi hanya menggambar sudutnya saja.

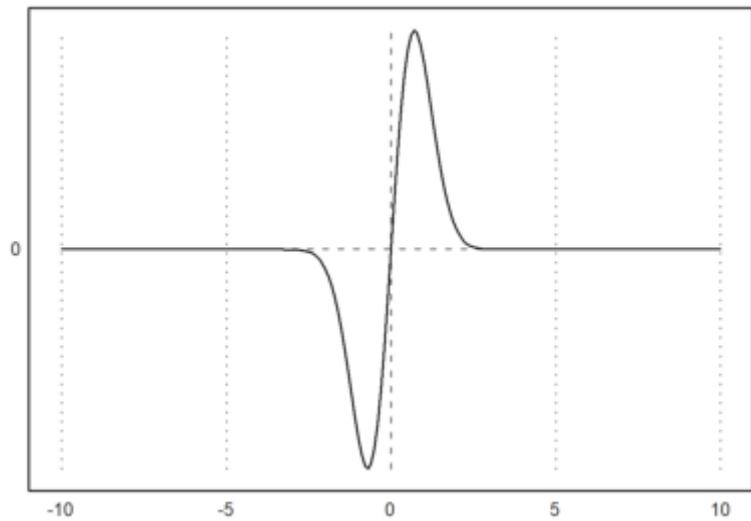
- style="...": Pilih dari "[", "<>", "o", ".", "..", "+", "*","[]#","< >#", "o#","..#","#,"|".

Untuk memplot kumpulan titik, gunakan >titik. Jika warna merupakan vektor warna, masing-masing titik

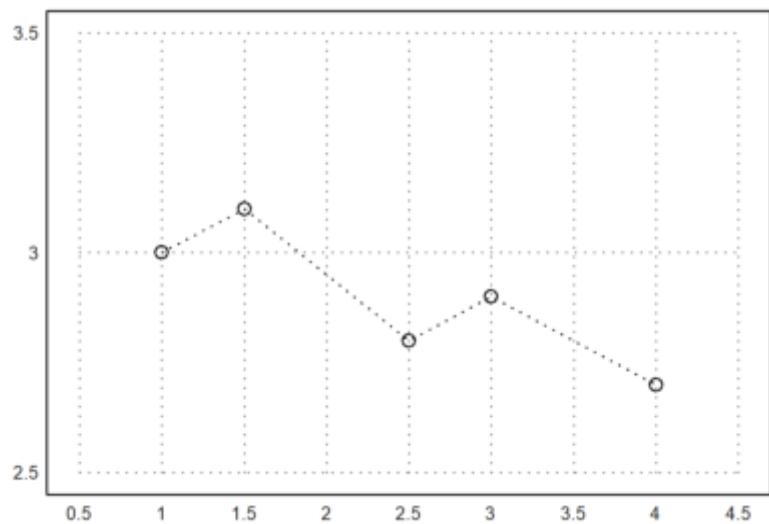
mendapat warna berbeda. Untuk matriks koordinat dan vektor kolom, warna diterapkan pada baris matriks.

Parameter >addpoints menambahkan titik ke segmen garis untuk plot data.

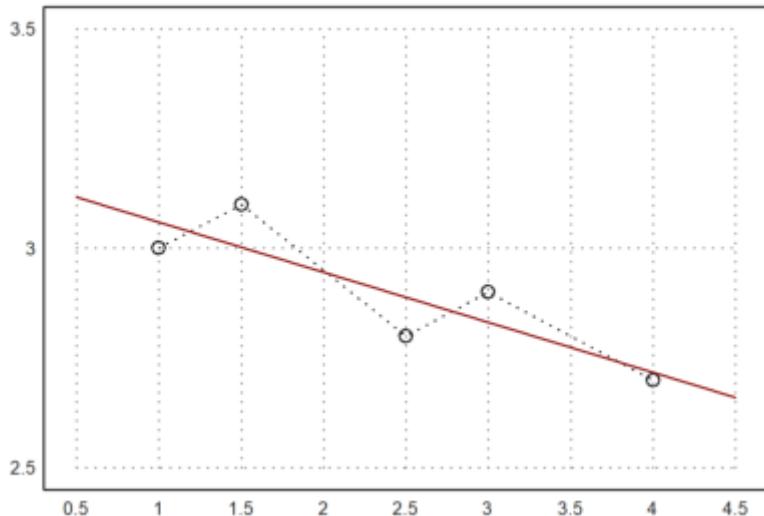
```
>xdata=[1,1.5,2.5,3,4]; ydata=[3,3.1,2.8,2.9,2.7]; // data
>plot2d(xdata,ydata,a=0.5,b=4.5,c=2.5,d=3.5,style="."); // lines
>plot2d(xdata,ydata,>points,>add,style="o"); // add points
>p=polyfit(xdata,ydata,1); // get regression line
>plot2d("polyval(p,x)",>add,color=red); // add plot of line
```



Gambar 3.80 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-081.png



Gambar 3.81 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-082.png



Gambar 3.82 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-083.png

3.12 Menggambar Daerah Yang Dibatasi Kurva

Plot data sebenarnya berbentuk poligon. Kita juga dapat memplot kurva atau kurva terisi.

- terisi=benar mengisi plot.
- style="...": Pilih dari "#", "/", "", "/".
- Fillcolor : Lihat di atas untuk mengetahui warna yang tersedia.

Warna isian ditentukan oleh argumen "fillcolor", dan pada <outline opsional, mencegah menggambar batas untuk semua gaya kecuali gaya default.

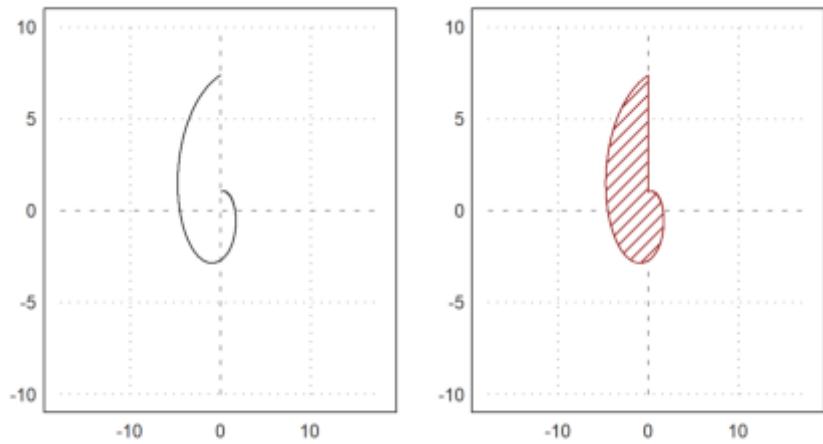
```
>t=linspace(0,2pi,1000); // parameter for curve
>x=sin(t)*exp(t/pi); y=cos(t)*exp(t/pi); // x(t) and y(t)
>figure(1,2); aspect(16/9)
>figure(1); plot2d(x,y,r=10); // plot curve
>figure(2); plot2d(x,y,r=10,>filled,style="/",fillcolor=red); // fill curve
>figure(0):
```

Dalam contoh berikut kita memplot elips terisi dan dua segi enam terisi menggunakan kurva tertutup dengan 6 titik dengan gaya isian berbeda.

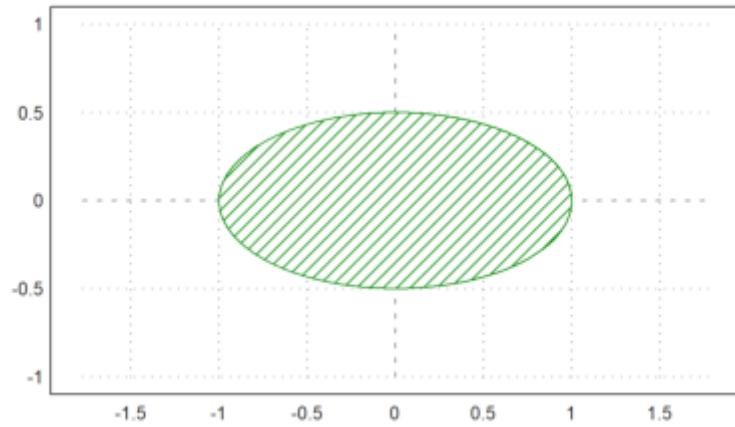
```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(x),cos(x)*0.5,r=1,>filled,style="/");
>t=linspace(0,2pi,6); ...
> plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="/",fillcolor=red,r=1.2);
>t=linspace(0,2pi,6); plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="#");
Contoh lainnya adalah septagon yang kita buat dengan 7 titik pada lingkaran satuan.
>t=linspace(0,2pi,7); ...
> plot2d(cos(t),sin(t),r=1,>filled,style="/",fillcolor=red);
```

Berikut adalah himpunan nilai maksimal dari empat kondisi linier yang kurang dari atau sama dengan 3. Ini adalah $A[k].v \leq 3$ untuk semua baris A. Untuk mendapatkan sudut yang bagus, kita menggunakan n yang relatif besar.

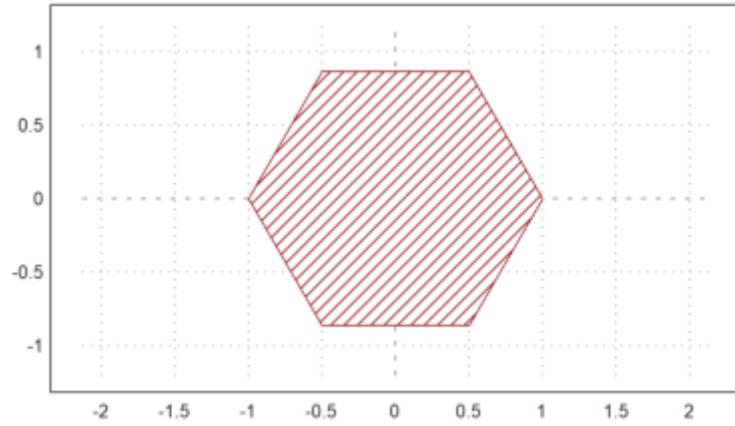
```
>A=[2,1;1,2;-1,0;0,-1];
```



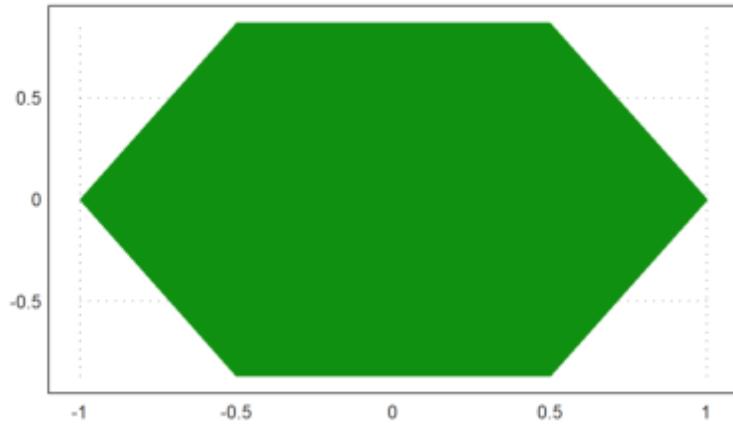
Gambar 3.83 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-084.png



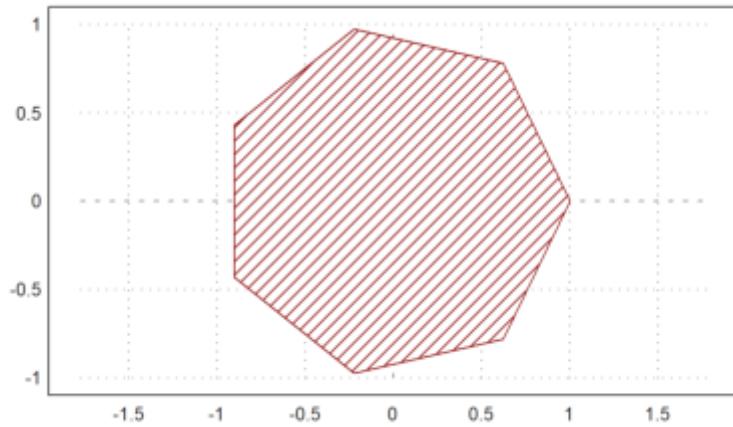
Gambar 3.84 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-085.png



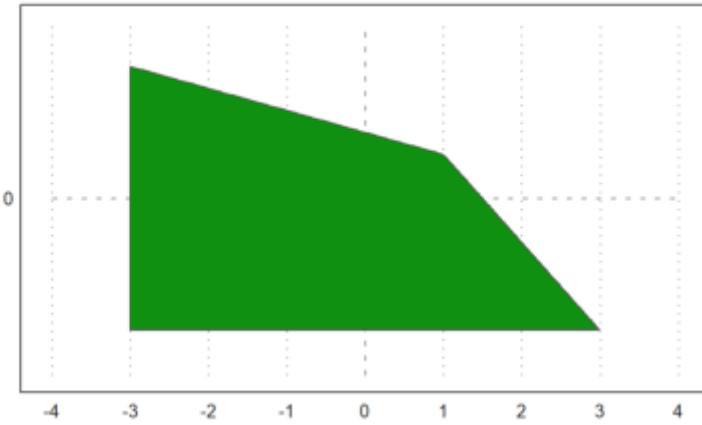
Gambar 3.85 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-086.png



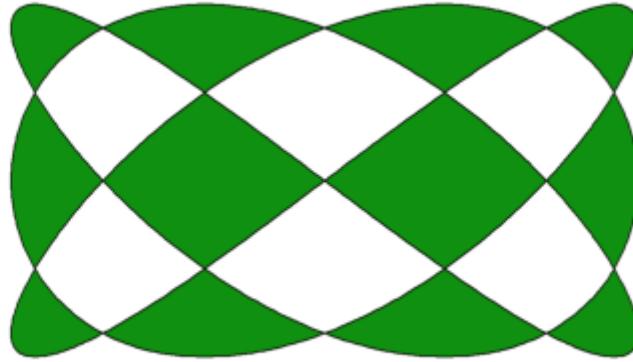
Gambar 3.86 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-087.png



Gambar 3.87 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-088.png



Gambar 3.88 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-089.png



Gambar 3.89 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-090.png

```
>function f(x,y) := max([x,y].A');
>plot2d("f",r=4,level=[0;3],color=green,n=111);
```

Poin utama dari bahasa matriks adalah memungkinkan pembuatan tabel fungsi dengan mudah.

```
>t=linspace(0,2pi,1000); x=cos(3*t); y=sin(4*t);
```

Kami sekarang memiliki nilai vektor x dan y. plot2d() dapat memplot nilai-nilai ini sebagai kurva yang menghubungkan titik-titik tersebut. Plotnya bisa diisi. Dalam hal ini menghasilkan hasil yang bagus karena aturan belitan, yang digunakan untuk isi.

```
>plot2d(x,y,<grid,<frame,>filled);
```

Vektor interval diplot terhadap nilai x sebagai wilayah terisi antara nilai interval yang lebih rendah dan lebih tinggi. Hal ini dapat berguna untuk memplot kesalahan perhitungan. Tapi itu bisa juga dapat digunakan untuk memplot kesalahan statistik.

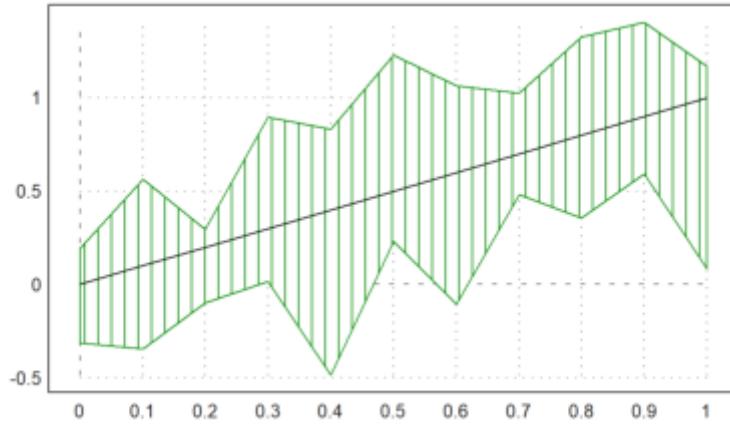
```
>t=0:0.1:1; ...
```

```
> plot2d(t,interval(t-random(size(t)),t+random(size(t))),style="|"); ...
```

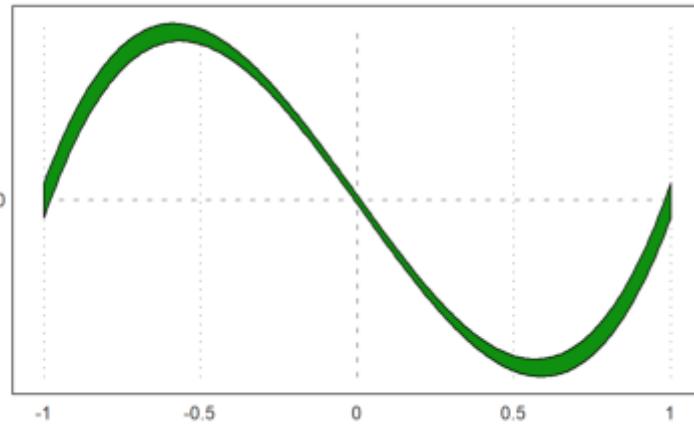
```
> plot2d(t,t,add=true);
```

Jika x adalah vektor yang diurutkan, dan y adalah vektor interval, maka plot2d akan memplot rentang interval yang terisi pada bidang. Gaya isianya sama dengan gaya poligon.

```
>t=-1:0.01:1; x=t-0.01,t+0.01; y=x^3-x;
```



Gambar 3.90 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-091.png



Gambar 3.91 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-092.png

>plot2d(t,y):

Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // define an expression f(x,y)

>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue); // $0 \leq f(x,y) \leq 1$

Kita juga dapat mengisi rentang nilai seperti

$$-1 \leq (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 \leq 0.$$

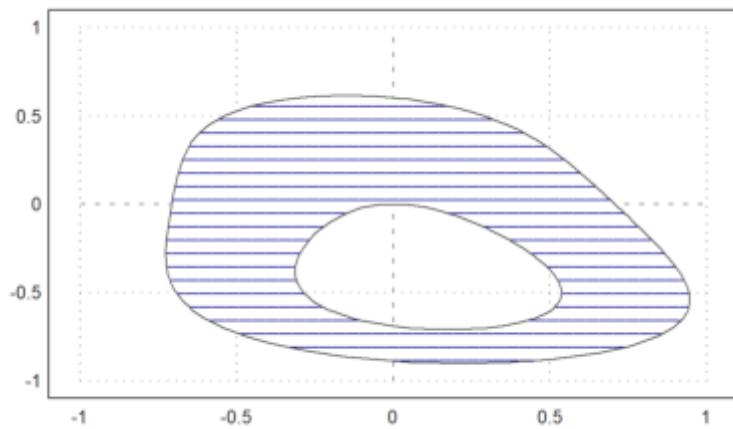
>plot2d("(x^2+y^2)^2-x^2+y^2",r=1.2,level=[-1;0],style="/");

>plot2d("cos(x)","sin(x)^3",xmin=0,xmax=2pi,>filled,style="/");

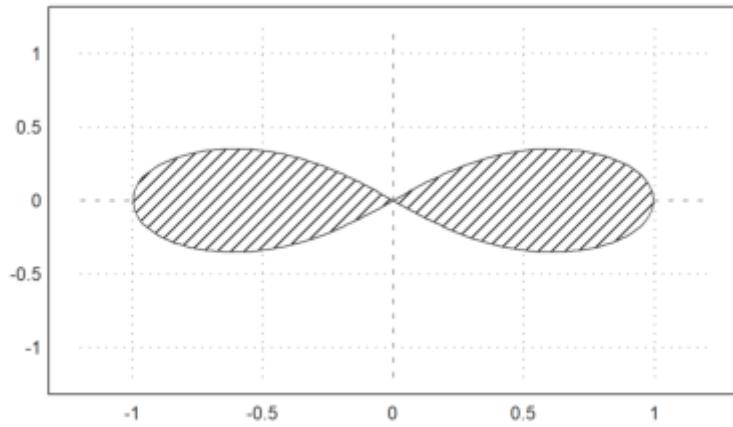
3.13 Grafik Fungsi Parametrik

Nilai x tidak perlu diurutkan. (x,y) hanya menggambarkan sebuah kurva. Jika x diurutkan, kurva tersebut merupakan grafik suatu fungsi.

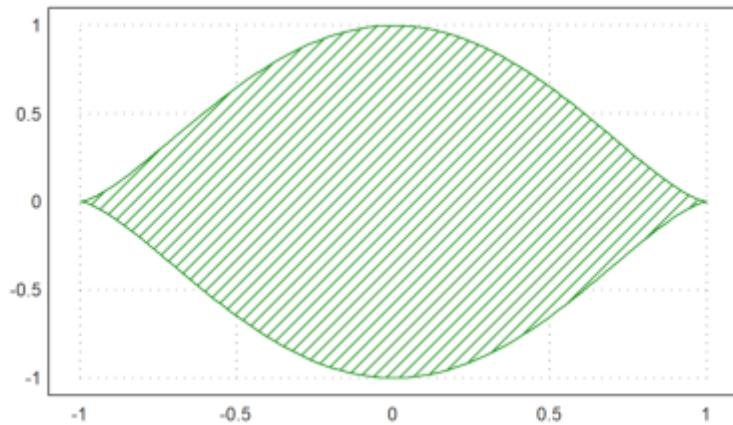
Dalam contoh berikut, kita memplot spiral



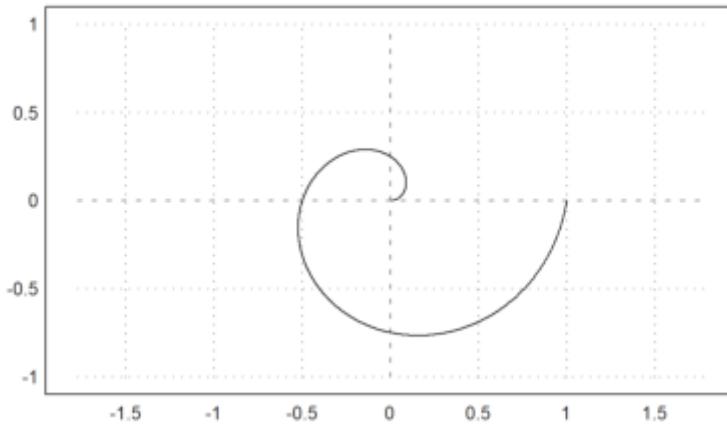
Gambar 3.92 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-093.png



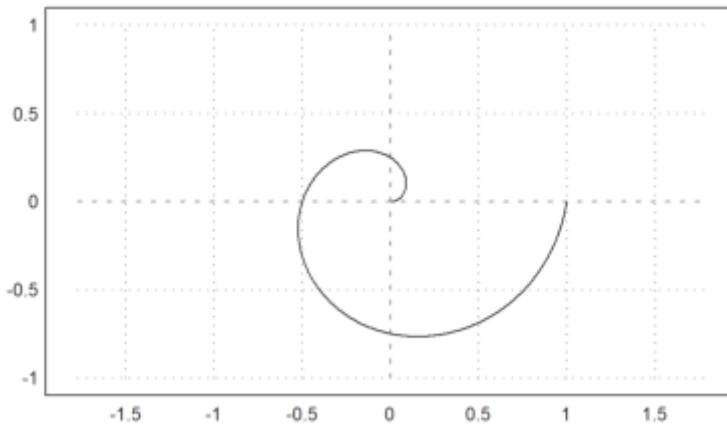
Gambar 3.93 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-095.png



Gambar 3.94 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-096.png



Gambar 3.95 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-098.png



Gambar 3.96 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-099.png

$$\gamma(t) = t \cdot (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

Kita perlu menggunakan banyak titik untuk tampilan yang halus atau fungsi adaptif() untuk mengevaluasi ekspresi (lihat fungsi adaptif() untuk lebih jelasnya).

```
>t=linspace(0,1,1000); ...
>plot2d(t*cos(2*pi*t),t*sin(2*pi*t),r=1);
```

Sebagai alternatif, dimungkinkan untuk menggunakan dua ekspresi untuk kurva. Berikut ini plot kurva yang sama seperti di atas.

```
>plot2d("x*cos(2*pi*x)","x*sin(2*pi*x)",xmin=0,xmax=1,r=1);
```

```
>t=linspace(0,1,1000); r=exp(-t); x=r*cos(2pi*t); y=r*sin(2pi*t);
```

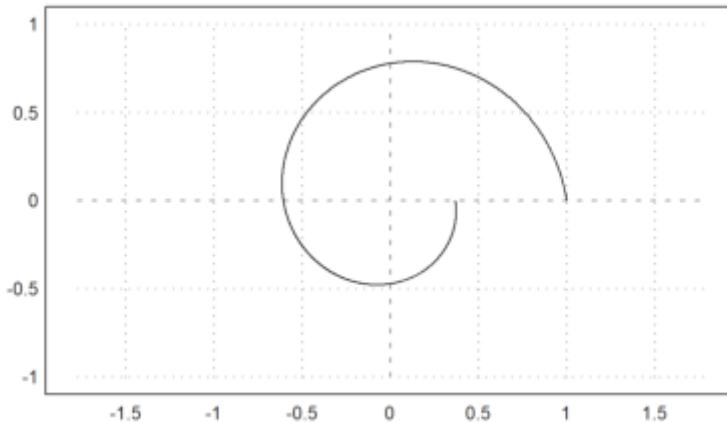
```
>plot2d(x,y,r=1);
```

Pada contoh berikutnya, kita memplot kurvanya

$$\gamma(t) = (r(t) \cos(t), r(t) \sin(t))$$

with

$$r(t) = 1 + \frac{\sin(3t)}{2}.$$



Gambar 3.97 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-100.png

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5);
```

3.14 Menggambar Grafik Bilangan Kompleks

Serangkaian bilangan kompleks juga dapat diplot. Kemudian titik-titik grid akan dihubungkan. Jika sejumlah garis kisi ditentukan (atau vektor garis kisi 1x2) dalam argumen cgrid, hanya garis kisi tersebut yang terlihat.

Matriks bilangan kompleks secara otomatis akan diplot sebagai kisi-kisi pada bidang kompleks.

Pada contoh berikut, kita memplot gambar lingkaran satuan di bawah fungsi eksponensial. Parameter cgrid menyembunyikan beberapa kurva grid.

```
>aspect(); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,80)'; z=r*exp(I*a);...
>plot2d(z,a=-1.25,b=1.25,c=-1.25,d=1.25,cgrid=10);
>aspect(1.25); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,200)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),cgrid=[40,10]);
>r=linspace(0,1,10); a=linspace(0,2pi,40)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),>points,>add);
```

Vektor bilangan kompleks secara otomatis diplot sebagai kurva pada bidang kompleks dengan bagian nyata dan bagian imajiner.

Dalam contoh, kita memplot lingkaran satuan dengan

$$\gamma(t) = e^{it}$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); ...
>plot2d(exp(I*t)+exp(4*I*t),r=2);
```

3.15 Plot Statistik

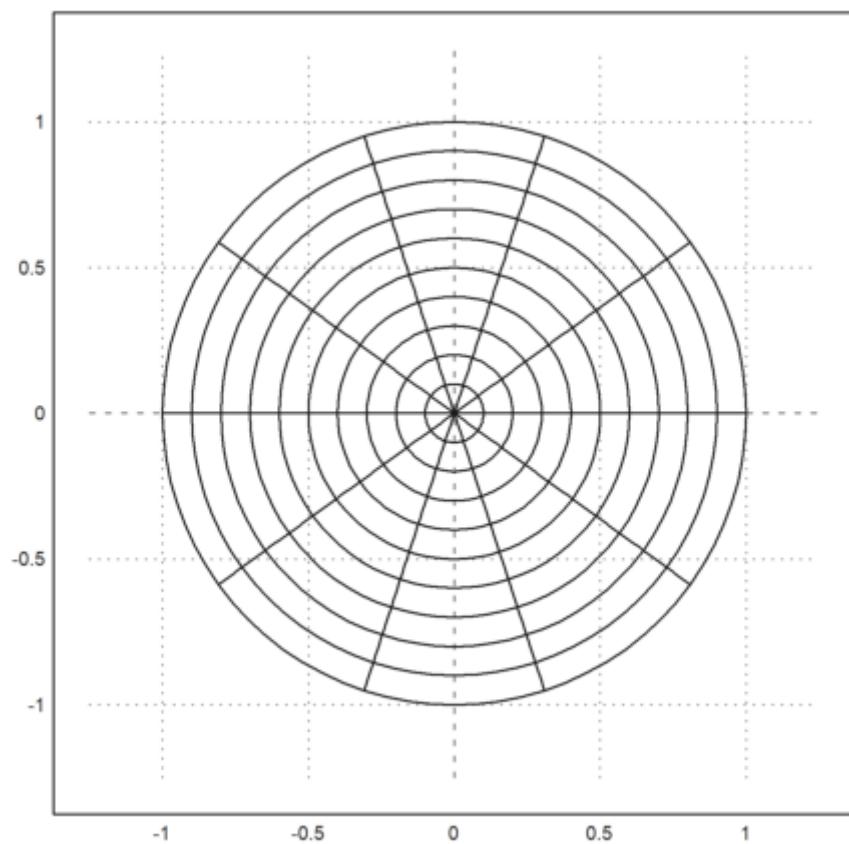
Ada banyak fungsi yang dikhkususkan pada plot statistik. Salah satu plot yang sering digunakan adalah plot kolom.

Jumlah kumulatif dari nilai terdistribusi normal 0-1 menghasilkan jalan acak.

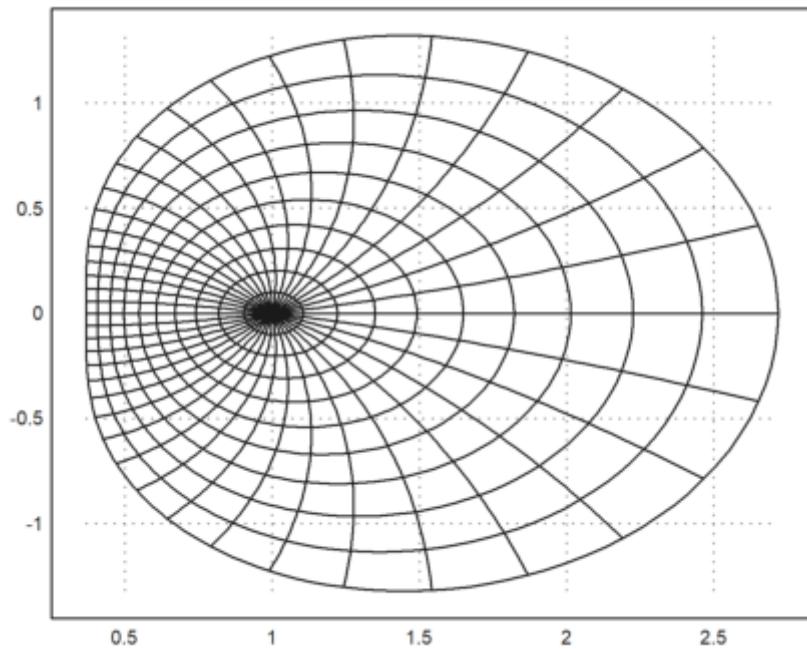
```
>plot2d(cumsum(randnormal(1,1000)));
```

Penggunaan dua baris menunjukkan jalan dalam dua dimensi.

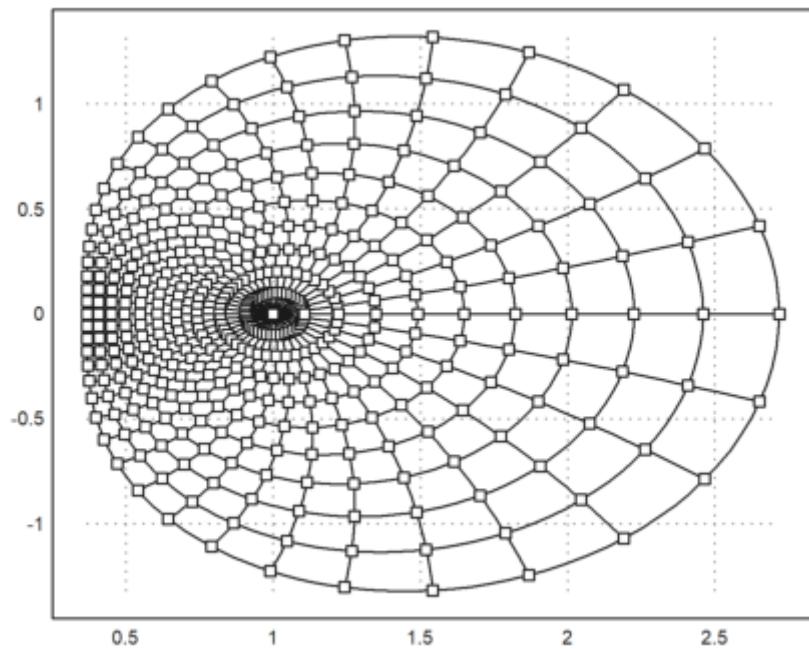
```
>X=cumsum(randnormal(2,1000)); plot2d(X[1],X[2]);
```



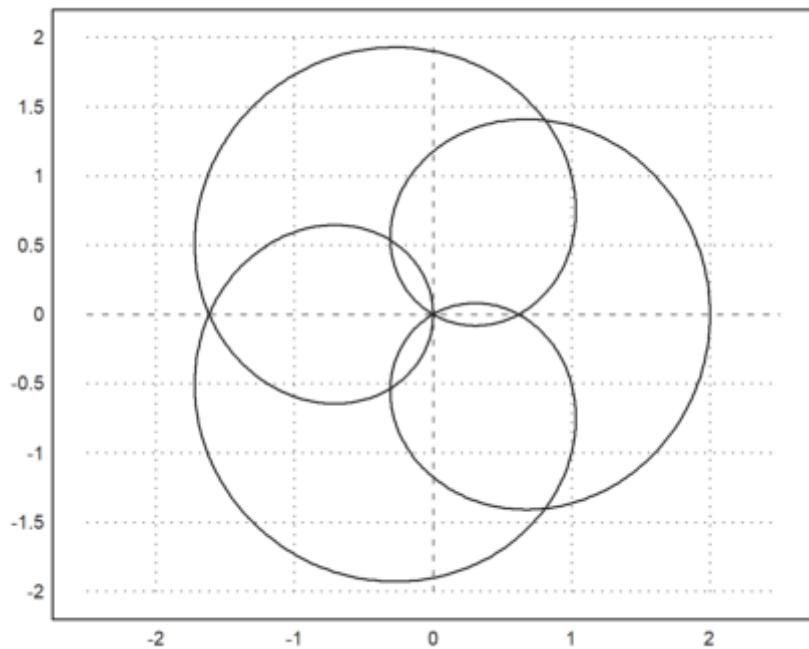
Gambar 3.98 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-103.png



Gambar 3.99 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-104.png



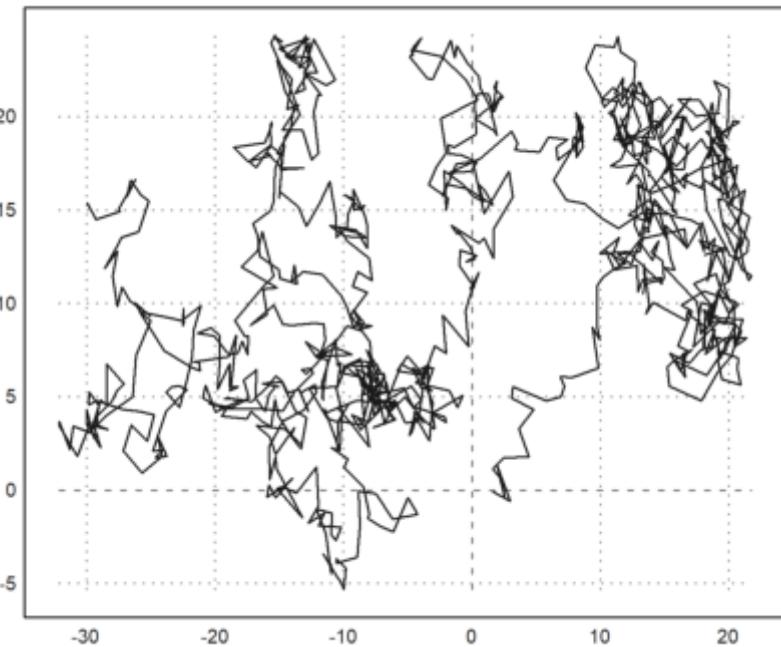
Gambar 3.100 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-105.png



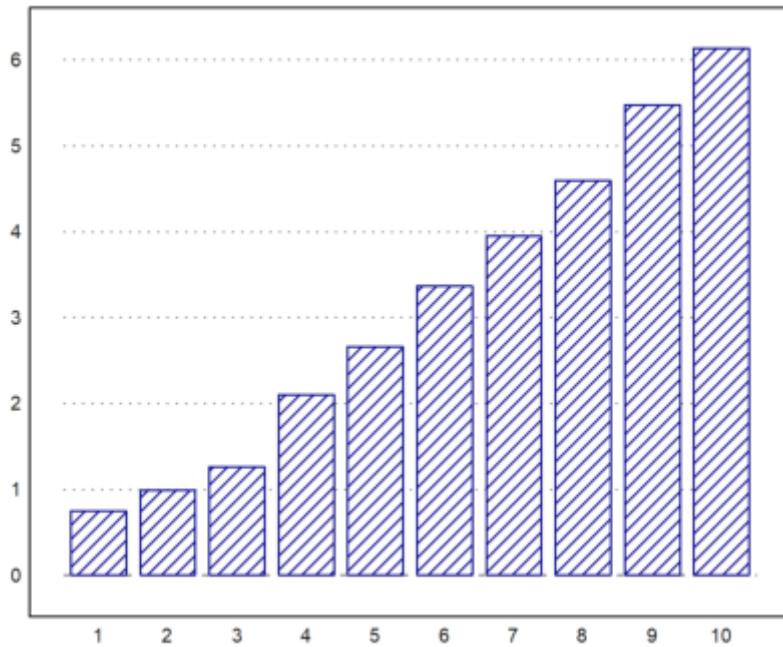
Gambar 3.101 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-107.png



Gambar 3.102 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-108.png



Gambar 3.103 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-109.png



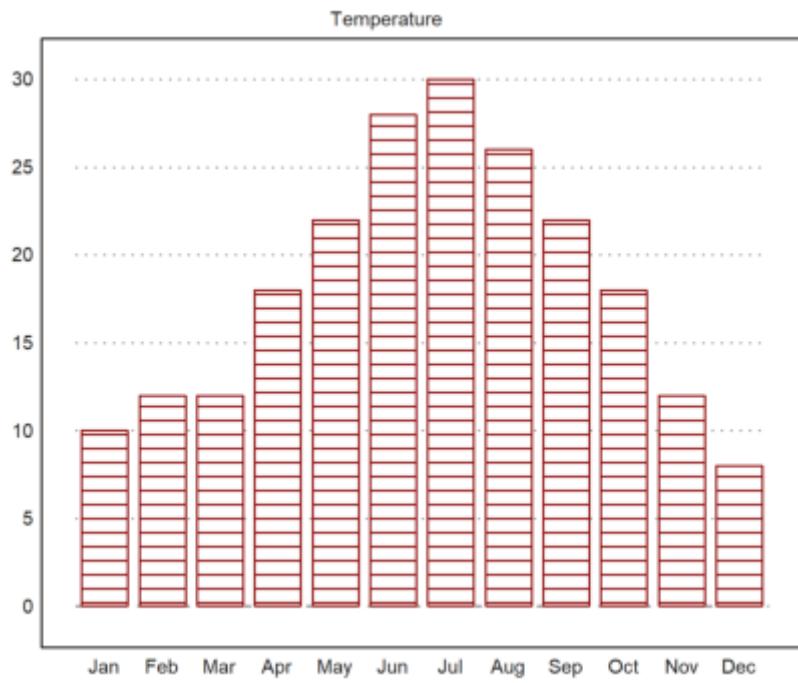
Gambar 3.104 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-110.png

```
>columnsplot(cumsum(random(10)),style="/",color=blue);
Itu juga dapat menampilkan string sebagai label.
>months=[“Jan”,“Feb”,“Mar”,“Apr”,“May”,“Jun”, ...
>“Jul”,“Aug”,“Sep”,“Oct”,“Nov”,“Dec”];
>values=[10,12,12,18,22,28,30,26,22,18,12,8];
>columnsplot(values,lab=months,color=red,style="-");
>title(“Temperature”);
>k=0:10;
>plot2d(k,bin(10,k),>bar);
>plot2d(k,bin(10,k)); plot2d(k,bin(10,k),>points,>add);
>plot2d(normal(1000),normal(1000),>points,grid=6,style="..");
>plot2d(normal(1,1000),>distribution,style="O");
>plot2d(“qnormal”,0,5;2.5,0.5,>filled);

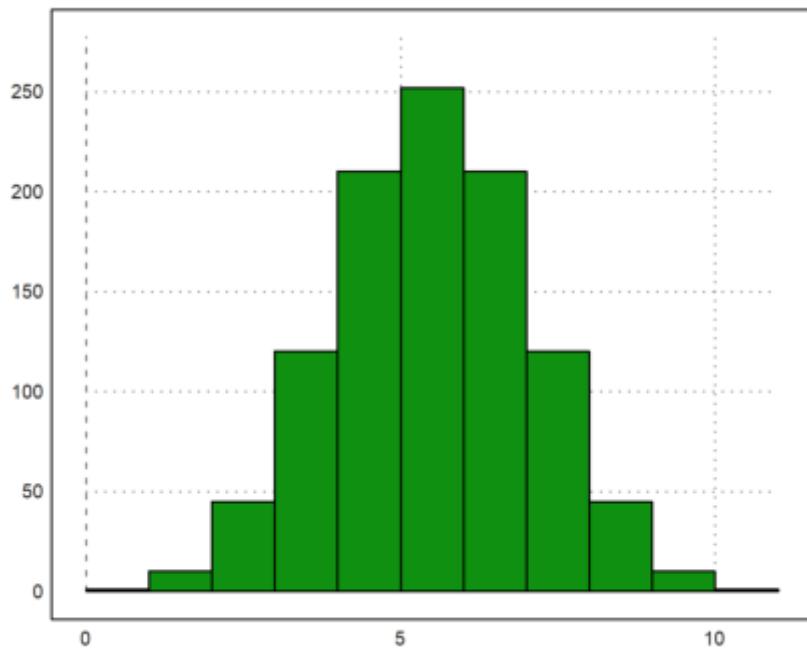
Untuk memplot distribusi statistik eksperimental, Anda dapat menggunakan distribution=n dengan
plot2d.
>w=randexponential(1,1000); // exponential distribution
>plot2d(w,>distribution); // or distribution=n with n intervals

Atau Anda dapat menghitung distribusi dari data dan memplot hasilnya dengan >bar di plot3d,
atau dengan plot kolom.
>w=normal(1000); // 0-1-normal distribution
>{x,y}=histo(w,10,v=[-6,-4,-2,-1,0,1,2,4,6]); // interval bounds v
>plot2d(x,y,>bar);

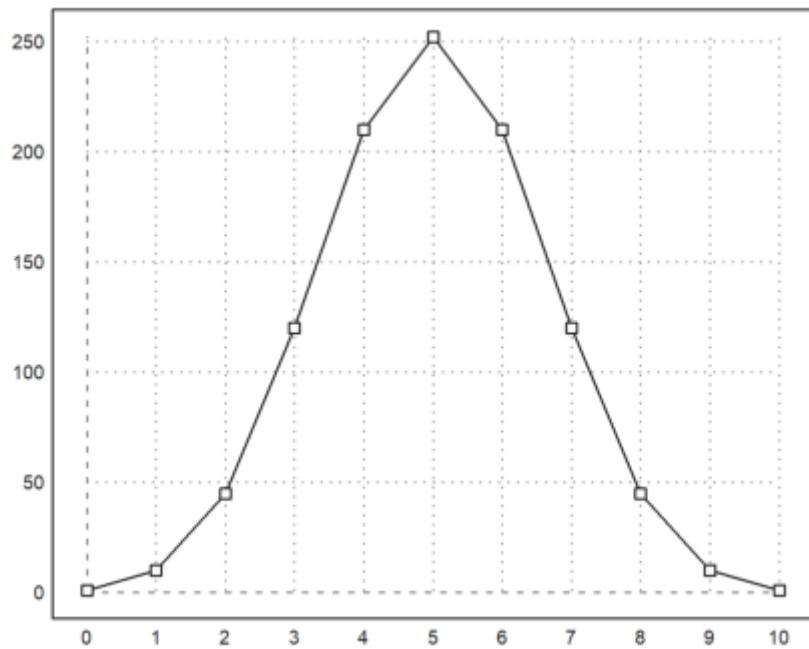
Fungsi statplot() mengatur gaya dengan string sederhana.
>statplot(1:10,cumsum(random(10)),”b”);
>n=10; i=0:n; ...
```



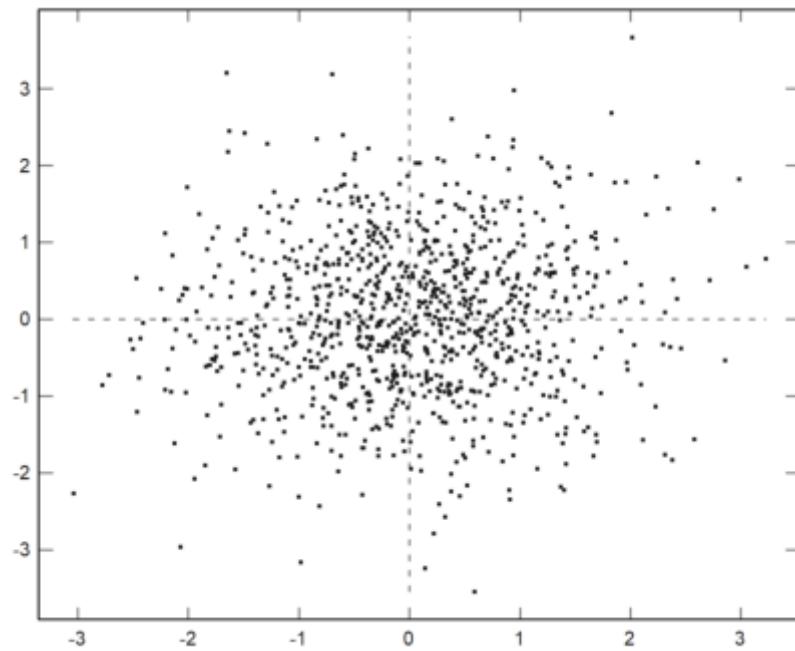
Gambar 3.105 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-111.png



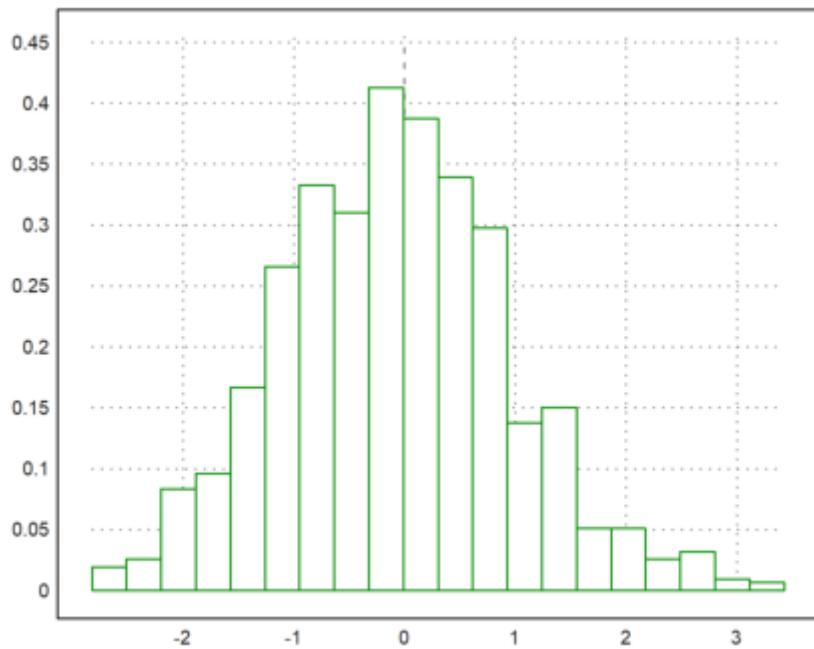
Gambar 3.106 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-112.png



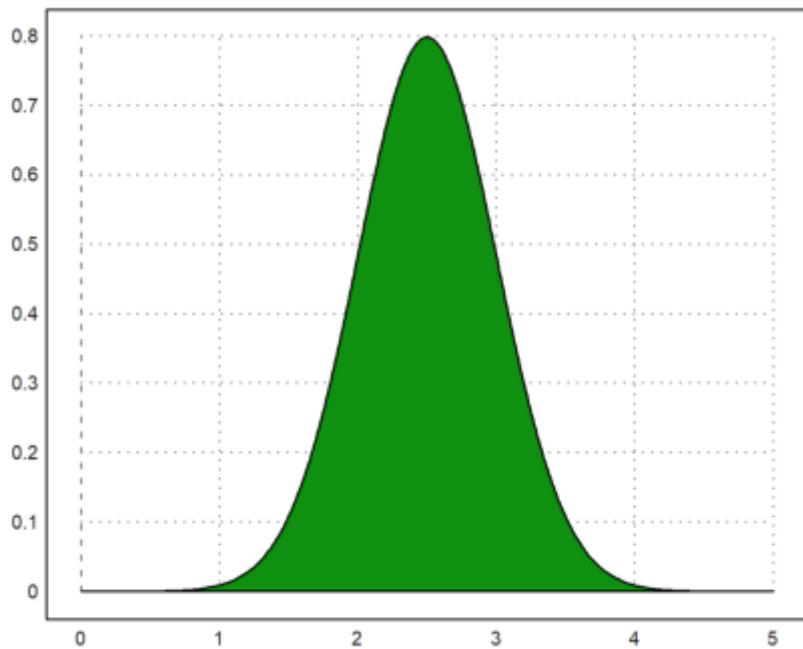
Gambar 3.107 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-113.png



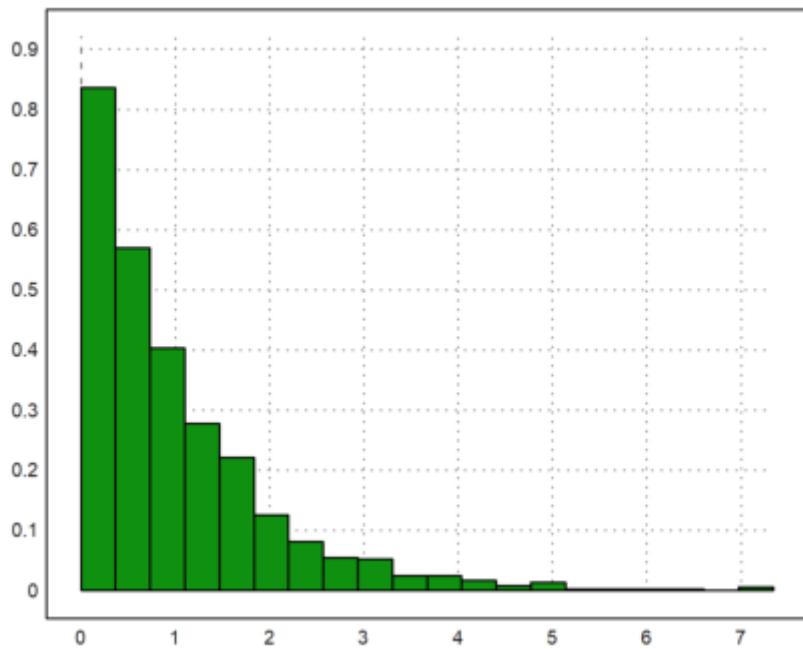
Gambar 3.108 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-114.png



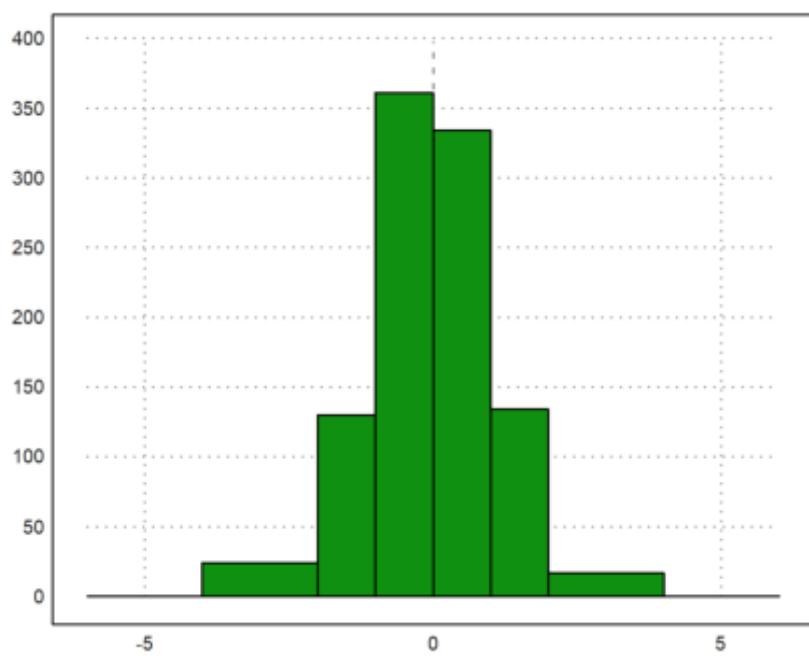
Gambar 3.109 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-115.png



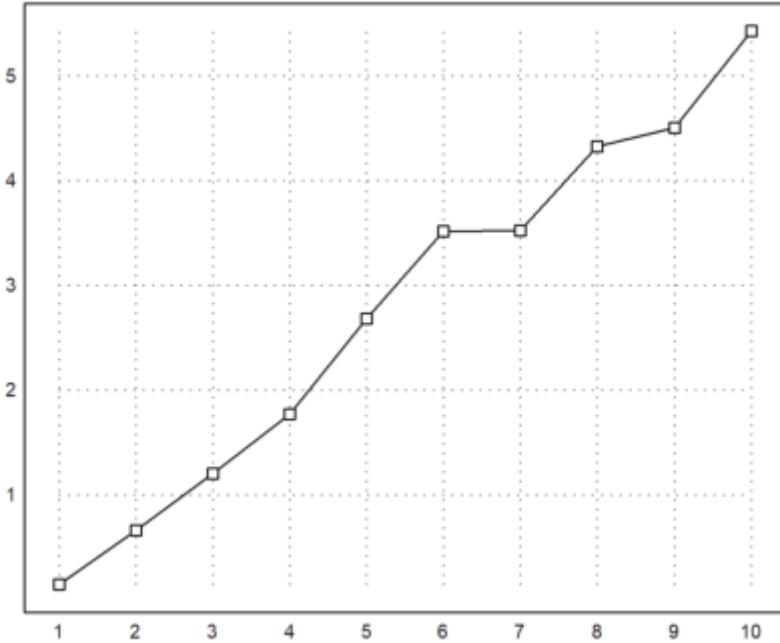
Gambar 3.110 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-116.png



Gambar 3.111 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-117.png



Gambar 3.112 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-118.png



Gambar 3.113 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-119.png

```
> plot2d(i,bin(n,i)/2^n,a=0,b=10,c=0,d=0.3); ...
> plot2d(i,bin(n,i)/2^n,points=true,style="ow",add=true,color=blue);
```

Selain itu, data dapat diplot sebagai batang. Dalam hal ini, x harus diurutkan dan satu elemen lebih panjang dari y. Batangnya akan memanjang dari $x[i]$ hingga $x[i+1]$ dengan nilai $y[i]$. Jika x berukuran sama dengan y, maka x akan diperpanjang satu elemen dengan spasi terakhir.

Gaya isian dapat digunakan seperti di atas.

```
>n=10; k=bin(n,0:n); ...
> plot2d(-0.5:n+0.5,k,bar=true,fillcolor=lightgray);
```

Data untuk plot batang (batang=1) dan histogram (histogram=1) dapat diberikan secara eksplisit dalam xv dan yv, atau dapat dihitung dari distribusi empiris dalam xv dengan >distribusi (atau distribusi=n). Histogram nilai xv akan dihitung secara otomatis dengan >histogram. Jika >even ditentukan, nilai xv akan dihitung dalam interval bilangan bulat.

```
>plot2d(normal(10000),distribution=50);
>k=0:10; m=bin(10,k); x=(0:11)-0.5; plot2d(x,m,>bar);
>columnsplot(m,k);
>plot2d(random(600)*6,histogram=6);
```

Untuk distribusi, terdapat parameter distribution=n, yang menghitung nilai secara otomatis dan mencetak distribusi relatif dengan n sub-interval.

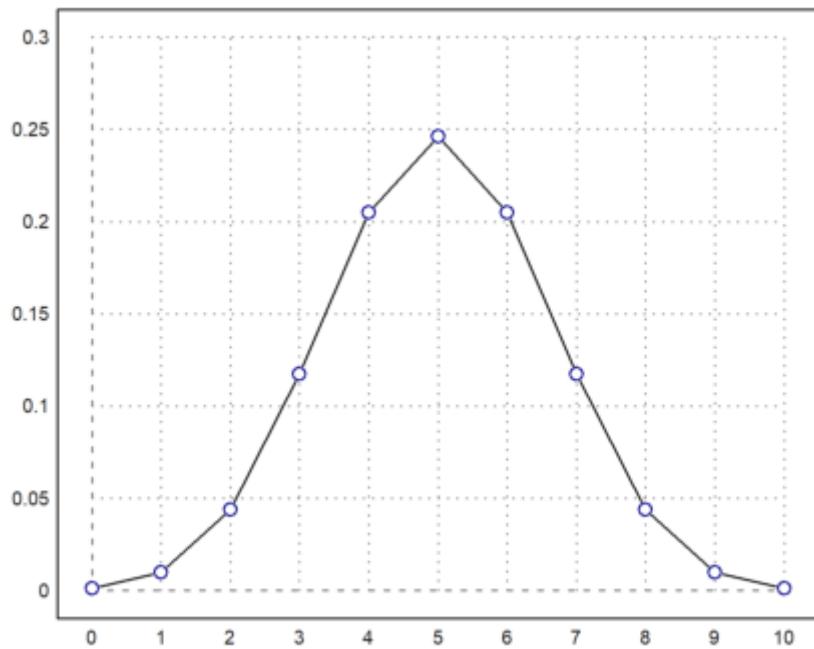
```
>plot2d(normal(1,1000),distribution=10,style="\\\"/>
```

Dengan parameter even=true, ini akan menggunakan interval bilangan bulat.

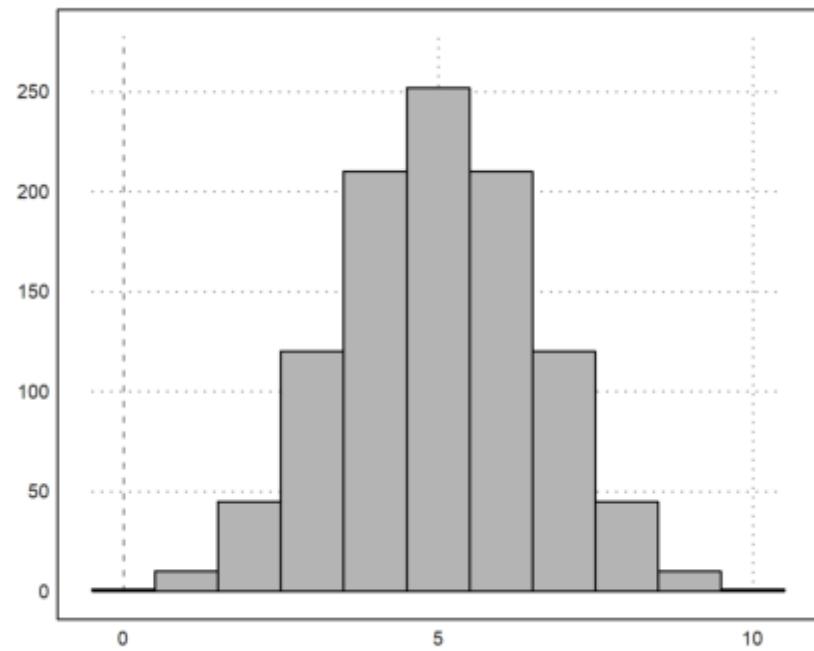
```
>plot2d(intrandom(1,1000,10),distribution=10,even=true);
```

Perhatikan bahwa ada banyak plot statistik yang mungkin berguna. Silahkan lihat tutorial tentang statistik.

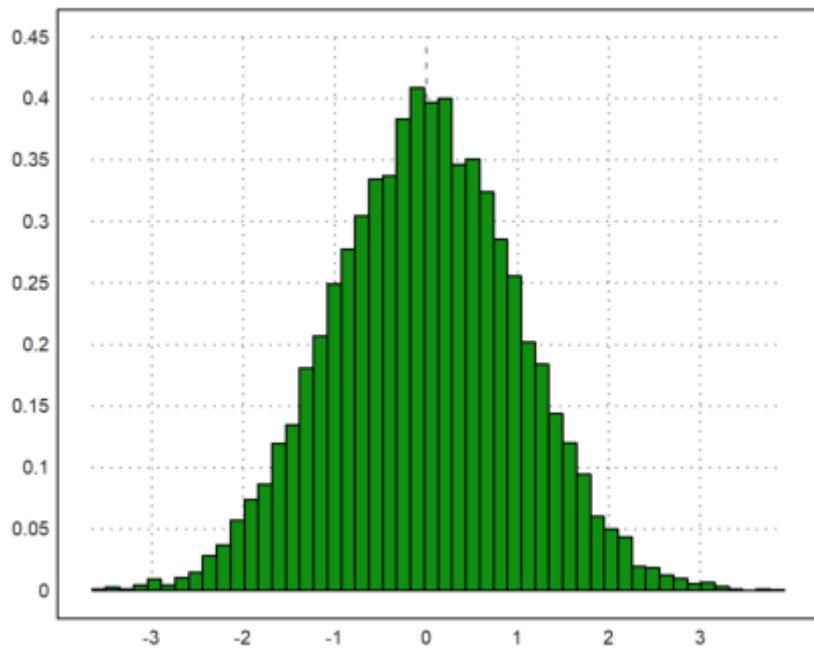
```
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,intrandom(1,6000,6)));
>plot2d(normal(1,1000),>distribution); ...
> plot2d("qnormal(x)",color=red,thickness=2,>add);
```



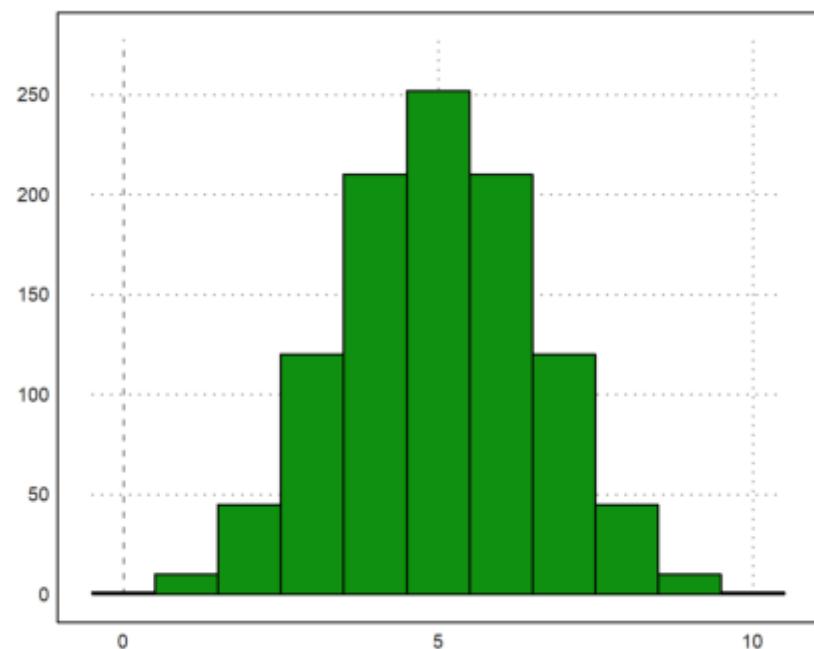
Gambar 3.114 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-120.png



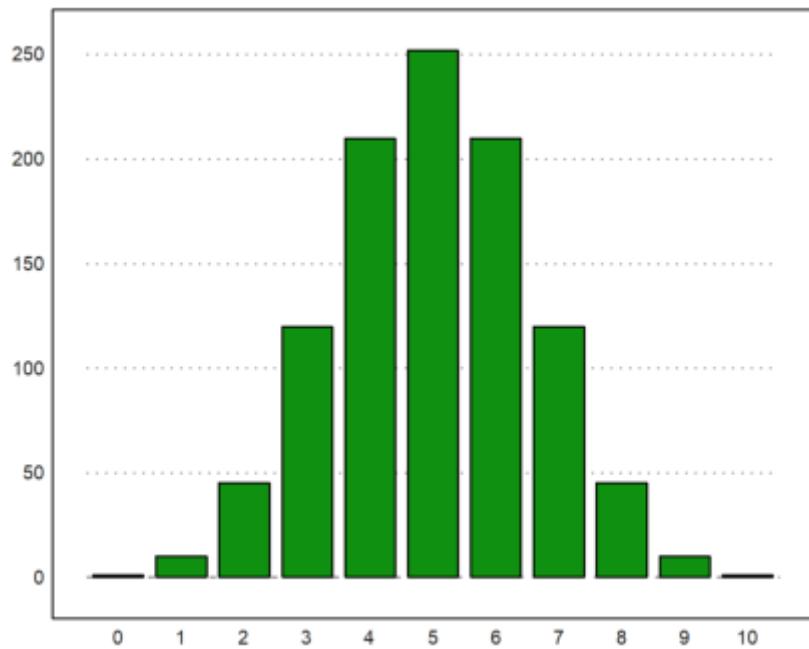
Gambar 3.115 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-121.png



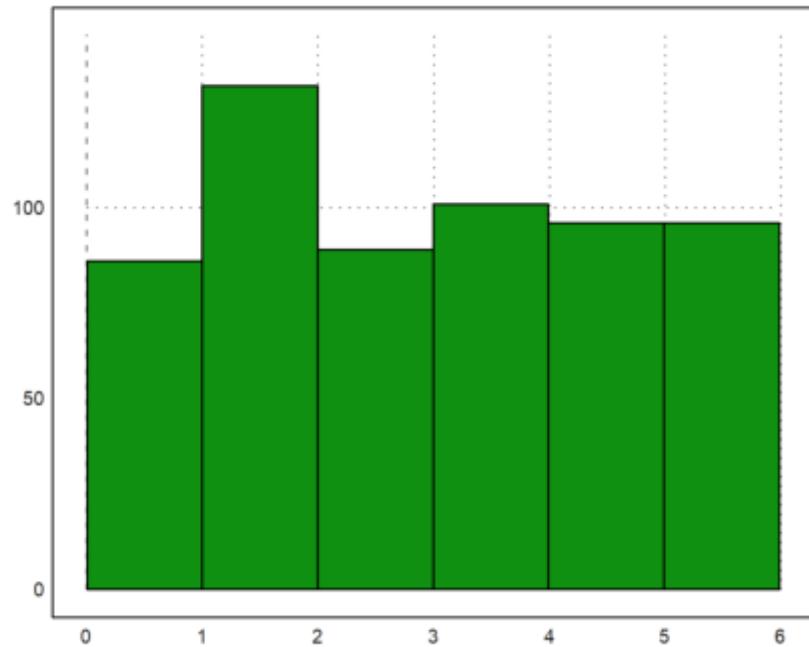
Gambar 3.116 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-122.png



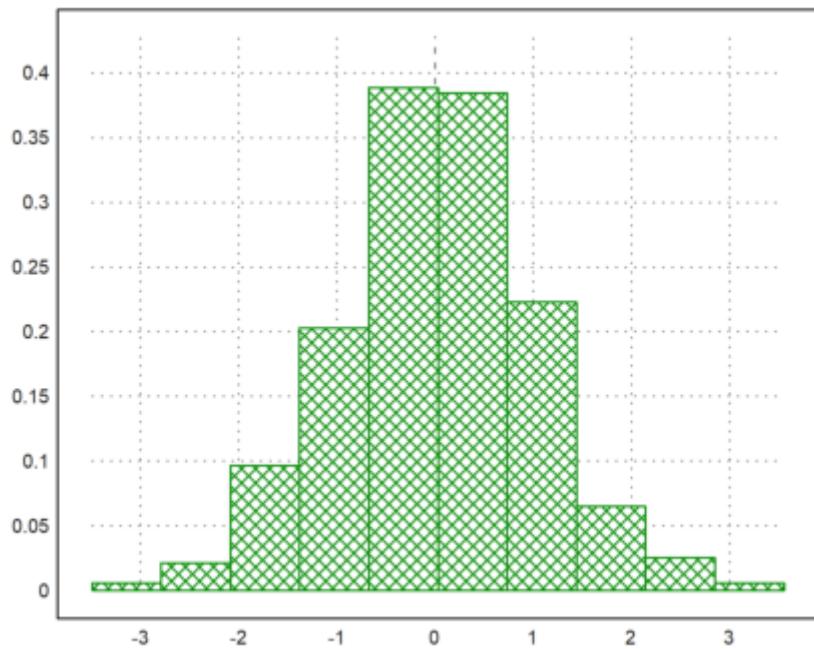
Gambar 3.117 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-123.png



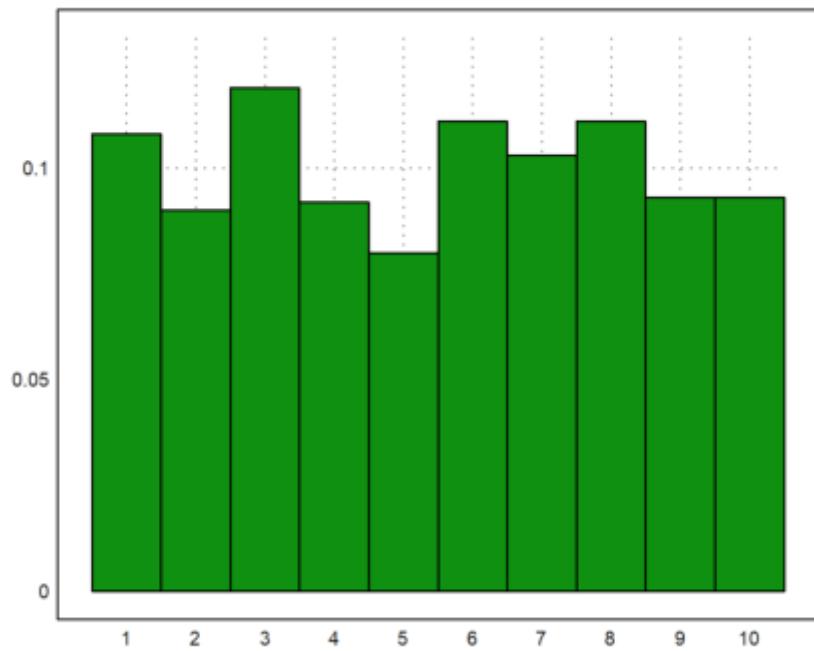
Gambar 3.118 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-124.png



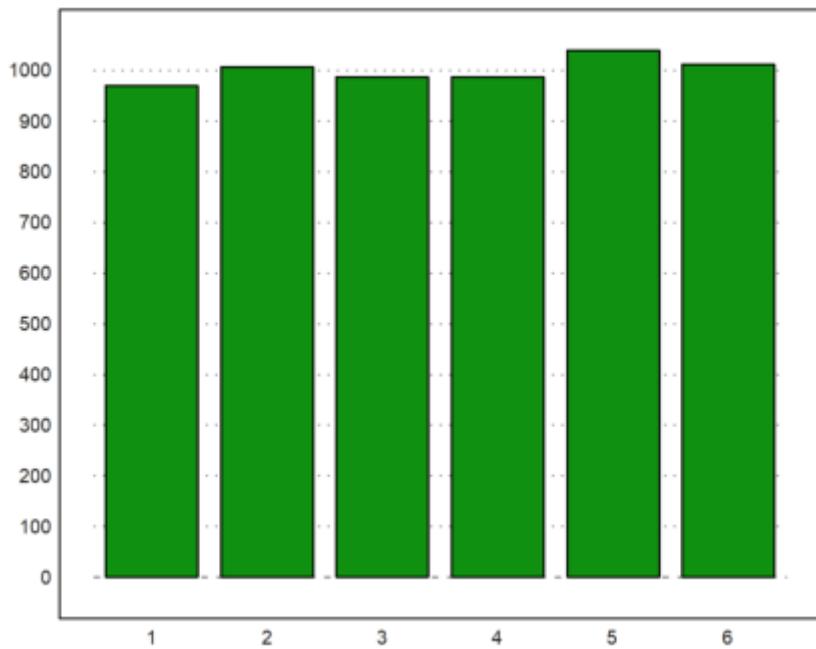
Gambar 3.119 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-125.png



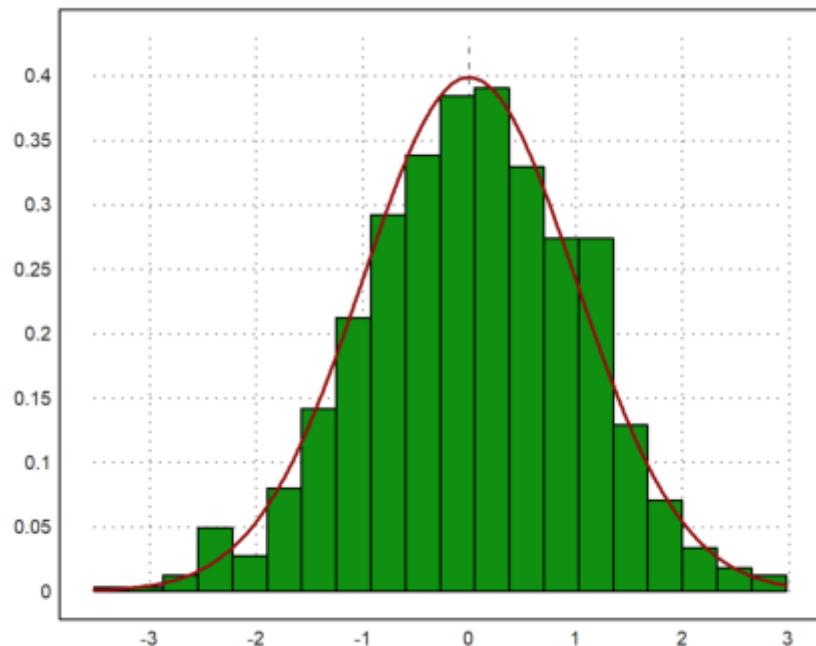
Gambar 3.120 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-126.png



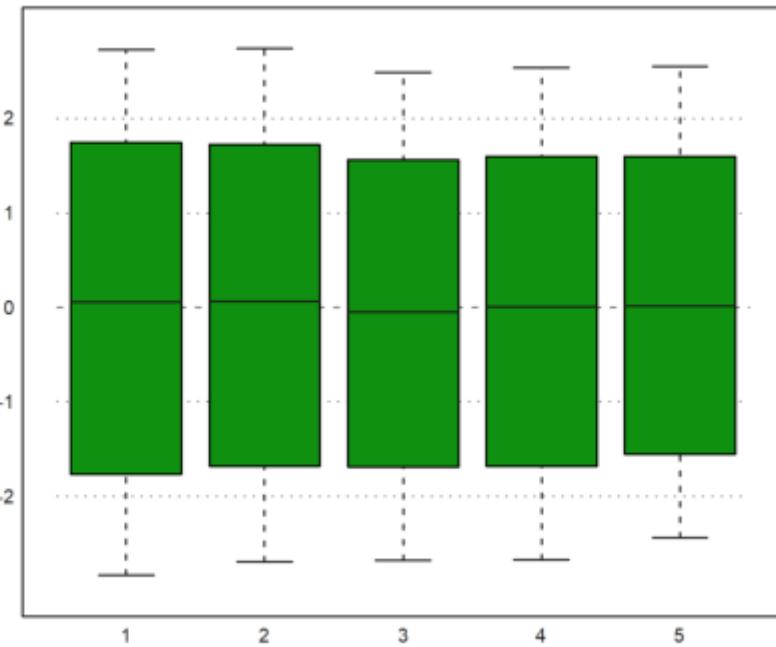
Gambar 3.121 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-127.png



Gambar 3.122 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-128.png



Gambar 3.123 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-129.png



Gambar 3.124 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-130.png

Ada juga banyak plot khusus untuk statistik. Plot kotak menunjukkan kuartil distribusi ini dan banyak outlier. Menurut definisinya, outlier dalam plot kotak adalah data yang melebihi 1,5 kali rentang 50% tengah plot.

>M=normal(5,1000); boxplot(quartiles(M));

3.16 Fungsi Implisit

Plot implisit menunjukkan penyelesaian garis level $f(x,y)=\text{level}$, dengan “level” dapat berupa nilai tunggal atau vektor nilai. Jika level = “auto”, akan ada garis level nc, yang akan tersebar antara fungsi minimum dan maksimum secara merata. Warna yang lebih gelap atau lebih terang dapat ditambahkan dengan >hue untuk menunjukkan nilai fungsi. Untuk fungsi implisit, xv harus berupa fungsi atau ekspresi parameter x dan y, atau alternatifnya, xv dapat berupa matriks nilai.

Euler dapat menandai garis level

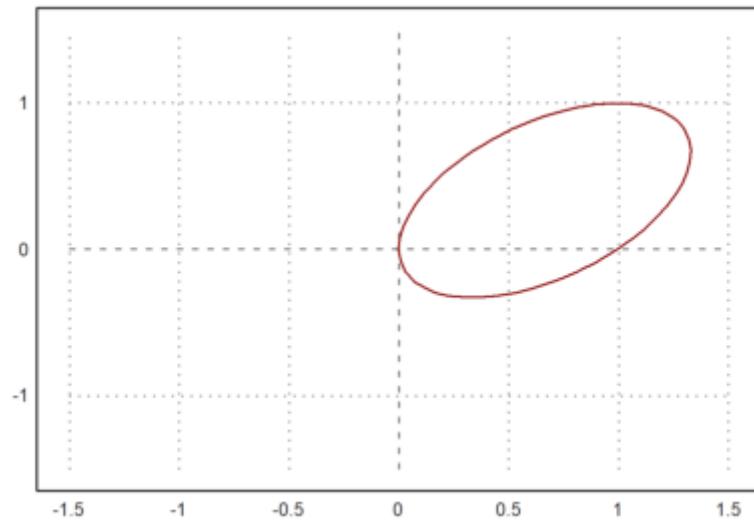
dari fungsi apa pun.

Untuk menggambar himpunan $f(x,y)=c$ untuk satu atau lebih konstanta c, Anda dapat menggunakan plot2d() dengan plot implisitnya pada bidang. Parameter c adalah level=c, dimana c dapat berupa vektor garis level. Selain itu, skema warna dapat digambar di latar belakang untuk menunjukkan nilai fungsi setiap titik dalam plot. Parameter “n” menentukan kehalusan plot.

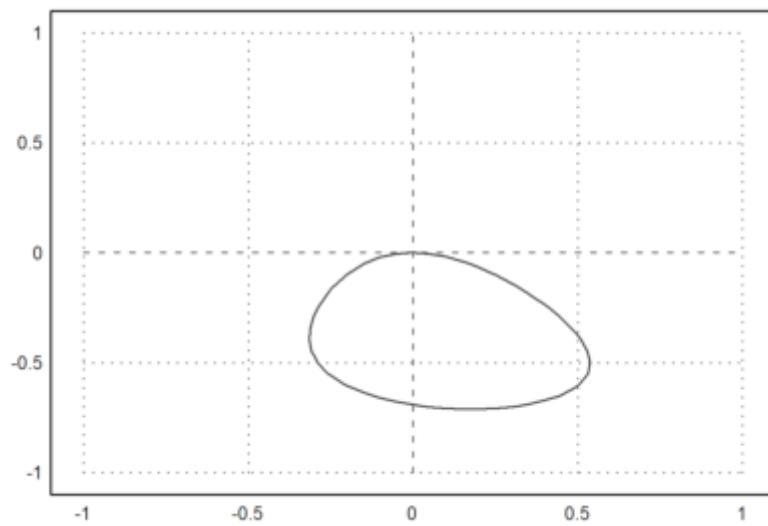
```

>aspect(1.5);
>plot2d("x^2+y^2-x-y",r=1.5,level=0,contourcolor=red);
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^2+4*y"; // define an expression f(x,y)
>plot2d(expr,level=0); // Solutions of f(x,y)=0
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,contourcolor=white,n=200); // nice
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,>spectral,n=200,grid=4); // nicer
Ini juga berfungsi untuk plot data. Namun Anda harus menentukan rentangnya untuk label sumbu.
>x=-2:0.05:1; y=x'; z=expr(x,y);
>plot2d(z,level=0,a=-1,b=2,c=-2,d=1,>hue);

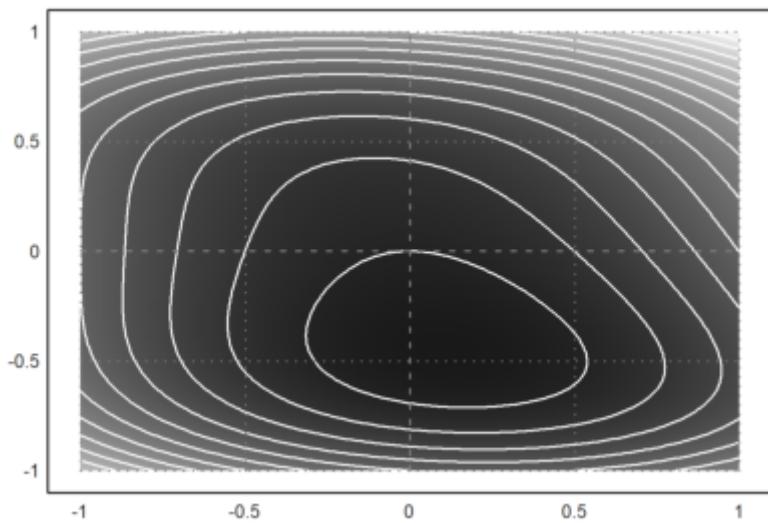
```



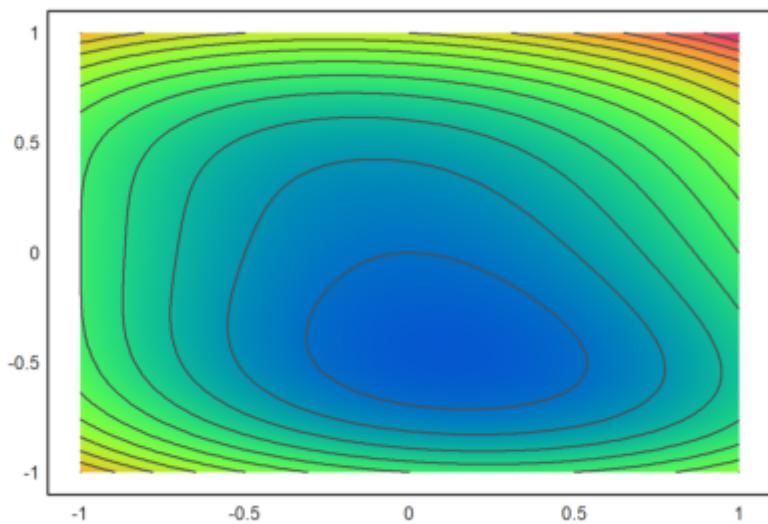
Gambar 3.125 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-131.png



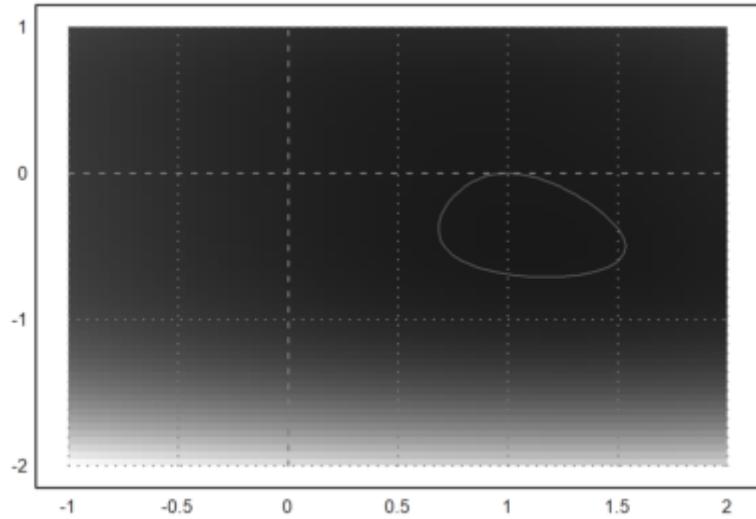
Gambar 3.126 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-132.png



Gambar 3.127 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-133.png



Gambar 3.128 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-134.png



Gambar 3.129 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-135.png

```
>plot2d("x^3-y^2",>contour,>hue,>spectral);
>plot2d("x^3-y^2",level=0,contourwidth=3,>add,contourcolor=red);
>z=z+normal(size(z))*0.2;
>plot2d(z,level=0.5,a=-1,b=2,c=-2,d=1);
>plot2d(expr,level=[0:0.2:5;0.05:0.2:5.05],color=lightgray);
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=1,r=4,n=100);
>plot2d("x^2+2*y^2-x*y",level=0:0.1:10,n=100,contourcolor=white,>hue);
Dimungkinkan juga untuk mengisi set
```

$$a \leq f(x, y) \leq b$$

dengan rentang level.

Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks $2 \times n$. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

```
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue); //  $0 \leq f(x, y) \leq 1$ 
```

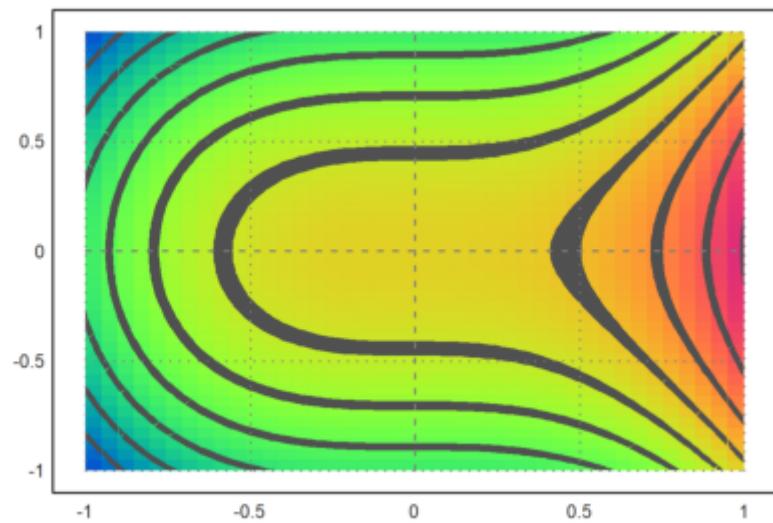
Plot implisit juga dapat menunjukkan rentang level. Maka level harus berupa matriks interval level $2 \times n$, di mana baris pertama berisi awal dan baris kedua berisi akhir setiap interval. Alternatifnya, vektor baris sederhana dapat digunakan untuk level, dan parameter dl memperluas nilai level ke interval.

```
>plot2d("x^4+y^4",r=1.5,level=[0;1],color=blue,style="/");
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=[0,2,4;1,3,5],style="/",r=2,n=100);
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=-10:20,r=2,style="-",dl=0.1,n=100);
>plot2d("sin(x)*cos(y)",r=pi,>hue,>levels,n=100);
Dimungkinkan juga untuk menandai suatu wilayah
```

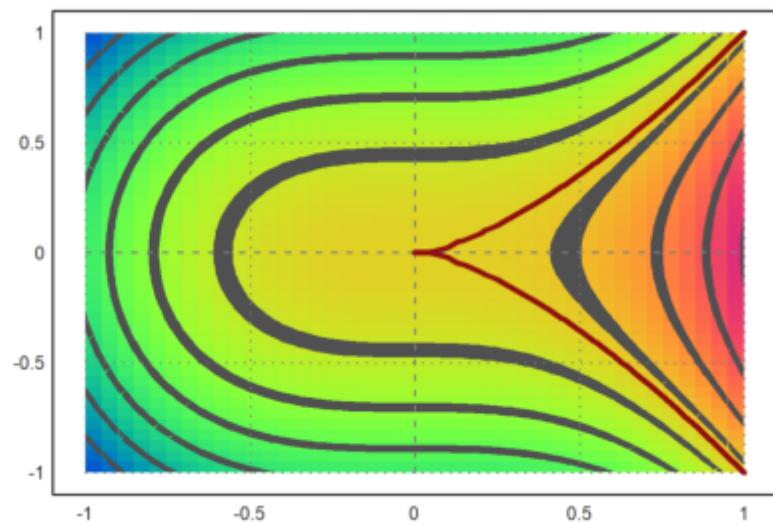
$$a \leq f(x, y) \leq b.$$

Hal ini dilakukan dengan menambahkan level dengan dua baris.

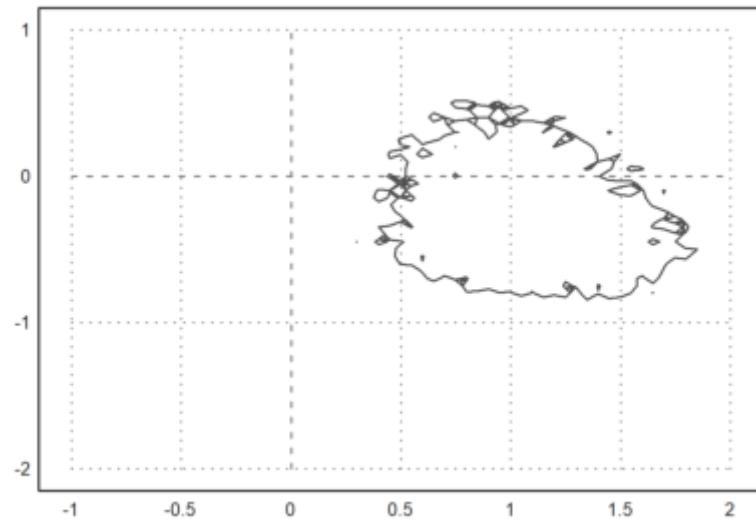
```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
> style="#",color=red,<outline, ...
> level=[-2;0],n=100);
```



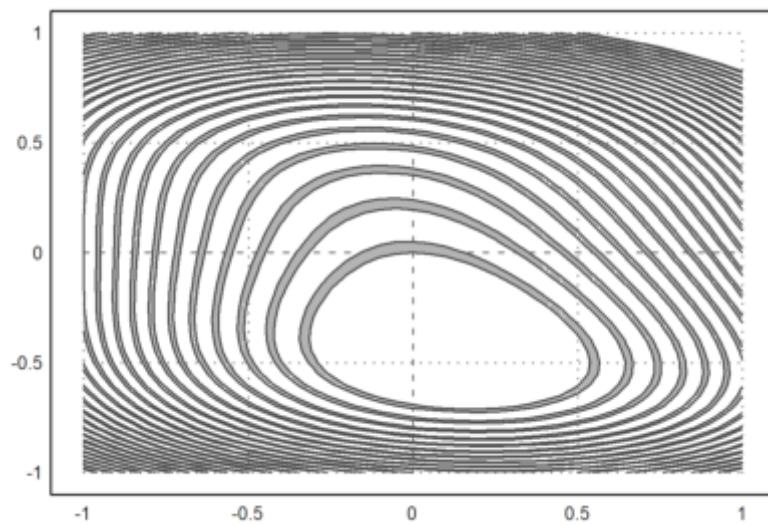
Gambar 3.130 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-136.png



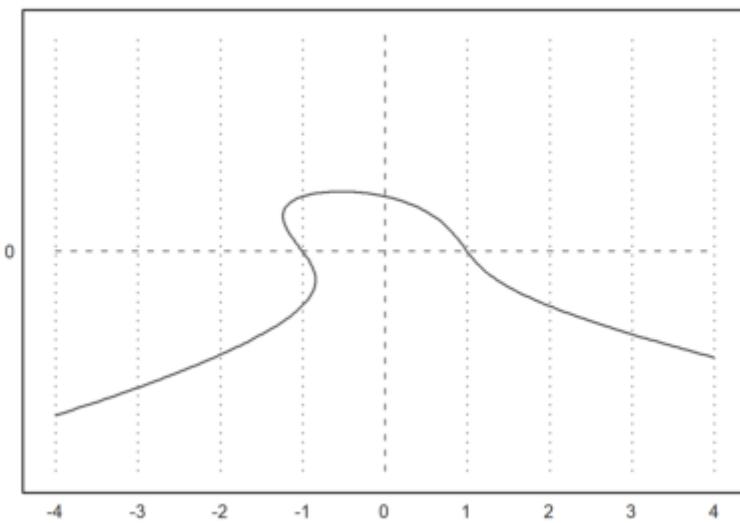
Gambar 3.131 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-137.png



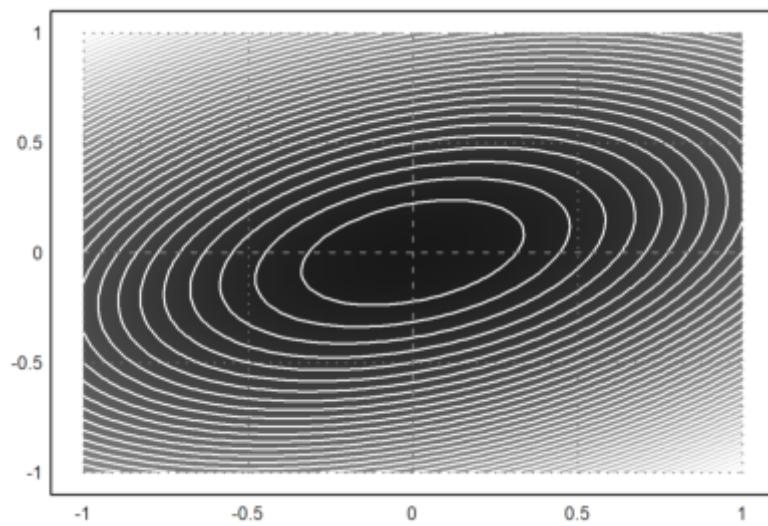
Gambar 3.132 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-138.png



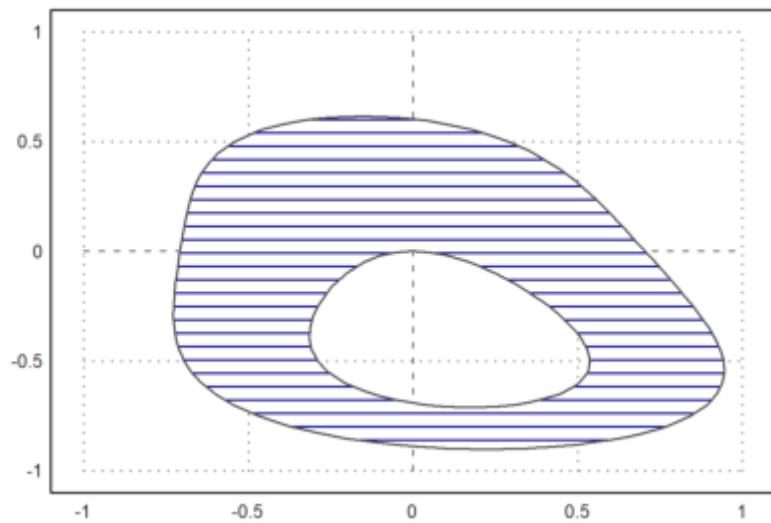
Gambar 3.133 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-139.png



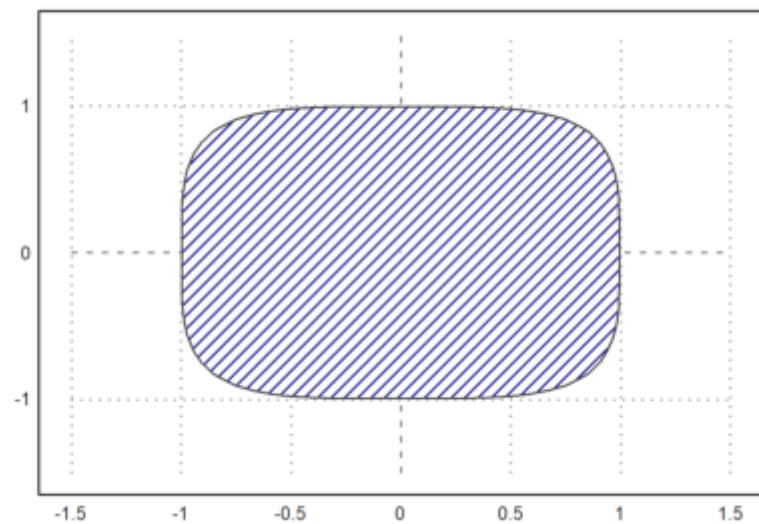
Gambar 3.134 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-140.png



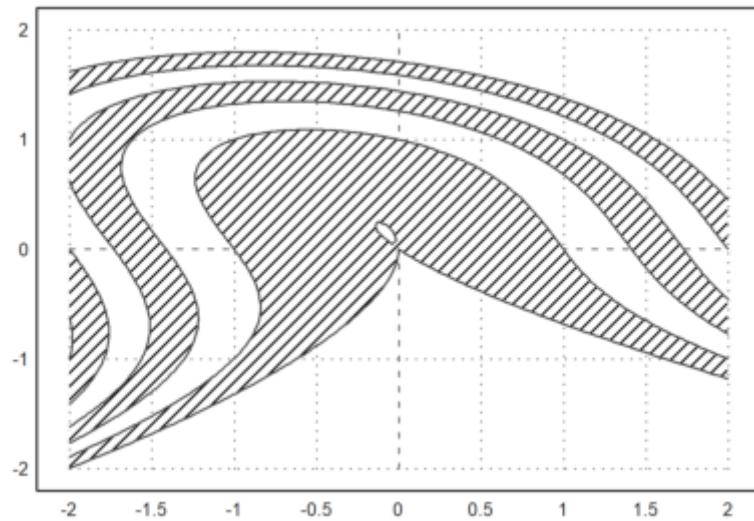
Gambar 3.135 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-141.png



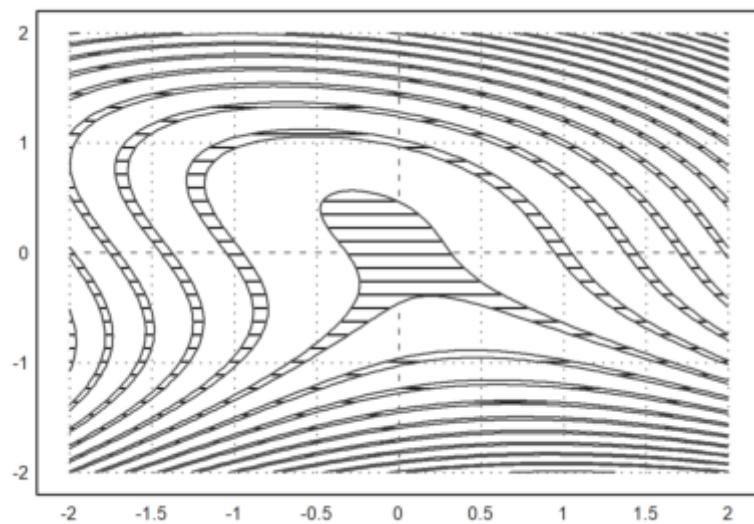
Gambar 3.136 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-143.png



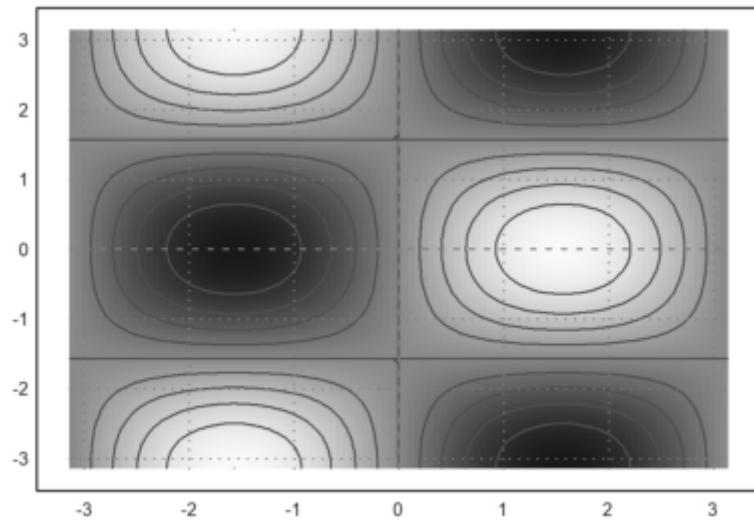
Gambar 3.137 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-144.png



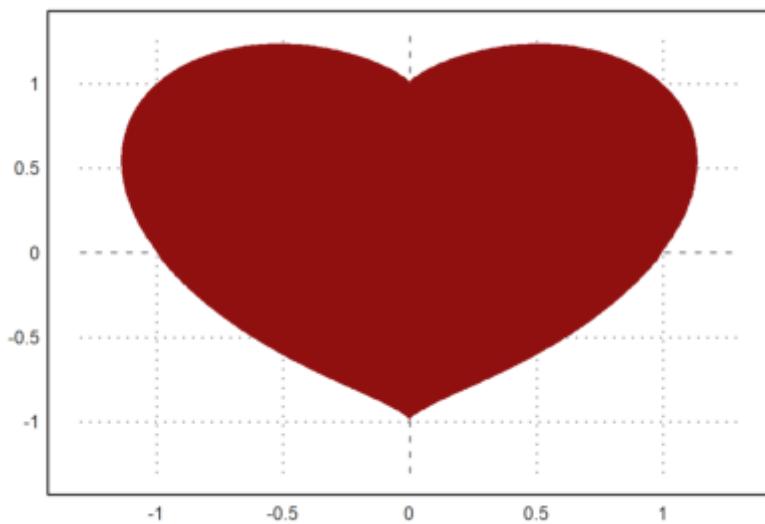
Gambar 3.138 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-145.png



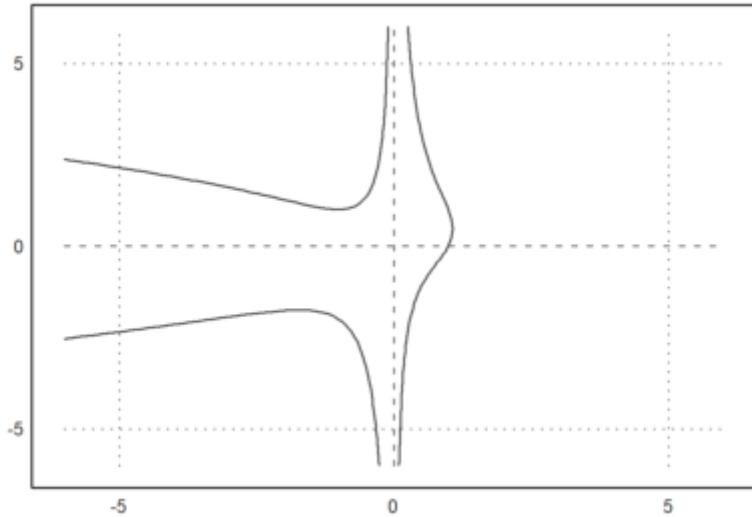
Gambar 3.139 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-146.png



Gambar 3.140 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-147.png



Gambar 3.141 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-149.png



Gambar 3.142 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-151.png

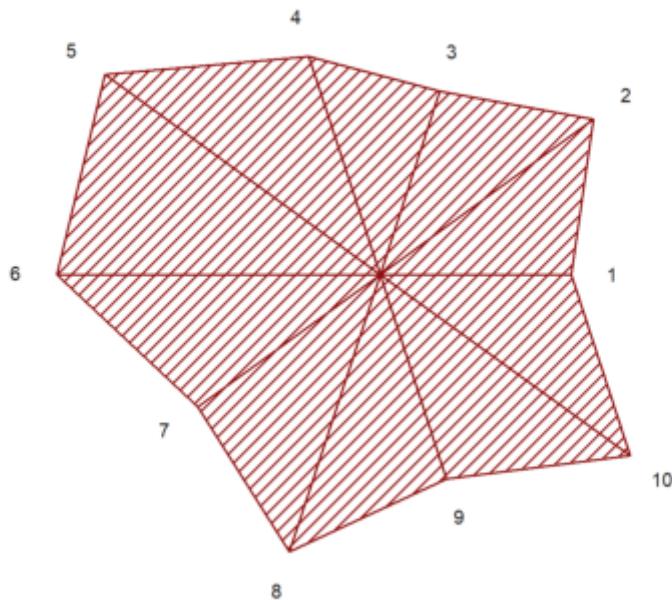
Dimungkinkan untuk menentukan level tertentu. Misalnya, kita dapat memplot solusi persamaan seperti

$$x^3 - xy + x^2y^2 = 6$$

```
>plot2d("x^3-x*y+x^2*y^2",r=6,level=1,n=100);
  >function starplot1 (v, style="/", color=green, lab=none) ...
    if !holding() then clg; endif;
    w=window(); window(0,0,1024,1024);
    h=holding(1);
    r=max(abs(v))*1.2;
    setplot(-r,r,-r,r);
    n=cols(v); t=linspace(0,2pi,n);
    v=v|v[1]; c=v*cos(t); s=v*sin(t);
    cl=barcolor(color); st=barstyle(style);
    loop 1 to n
      polygon([0,c[#,c[#+1]], [0,s[#,s[#+1]],1];
      if lab!=none then
        rlab=v[#]+r*0.1;
        {col,row}=toscreen(cos(t[#])*rlab,sin(t[#])*rlab);
        ctext(""+lab#[],col,row-textheight()/2);
      endif;
    end;
    barcolor(cl); barstyle(st);
    holding(h);
    window(w);
endfunction
```

Dimungkinkan untuk menentukan level tertentu. Misalnya, kita dapat memplot solusi persamaan seperti

$$x^3 - xy + x^2y^2 = 6$$



Gambar 3.143 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-153.png

```
>reset; starplot1(normal(1,10)+5,color=red,lab=1:10);
```

Terkadang, Anda mungkin ingin merencanakan sesuatu yang plot2d tidak bisa lakukan, tapi hampir.

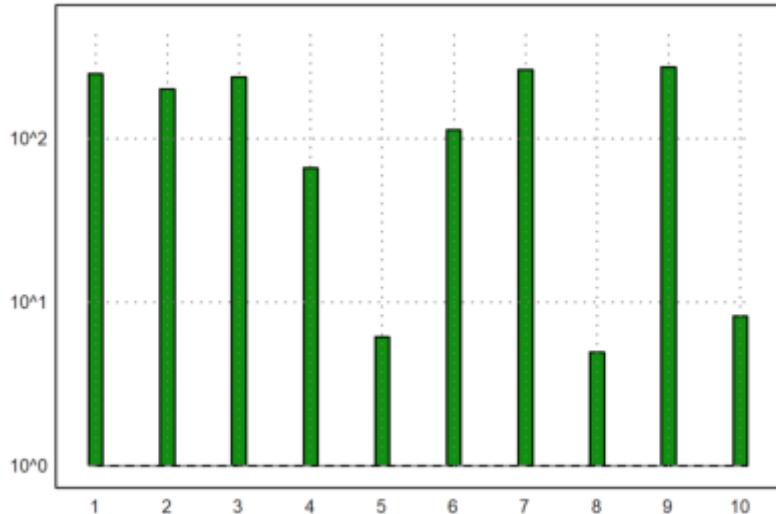
Dalam fungsi berikut, kita membuat plot impuls logaritmik. plot2d dapat melakukan plot logaritmik, tetapi tidak untuk batang impuls.

```
>function logimpulseplot1 (x,y) ...
```

```
{x0,y0}=makeimpulse(x,log(y)/log(10));
plot2d(x0,y0,>bar,grid=0);
h=holding(1);
frame();
xgrid(ticks(x));
p=plot();
for i=-10 to 10;
  if i<=p[4] and i>=p[3] then
    ygrid(i,yt="10^"+i);
  endif;
end;
holding(h);
endfunction
```

Let us test it with exponentially distributed values.

```
>aspect(1.5); x=1:10; y=-log(random(size(x)))*200; ...
>logimpulseplot1(x,y);
```



Gambar 3.144 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-154.png

Mari kita menganimasikan kurva 2D menggunakan plot langsung. Perintah plot(x,y) hanya memplot kurva ke dalam jendela plot. setplot(a,b,c,d) menyetel jendela ini.

Fungsi wait(0) memaksa plot muncul di jendela grafis. Jika tidak, pengundian ulang akan dilakukan dalam interval waktu yang jarang.

```
>function animliss (n,m) ...
```

```
t=linspace(0,2pi,500);
f=0;
c=framecolor(0);
l=linewidth(2);
setplot(-1,1,-1,1);
repeat
  clg;
  plot(sin(n*t),cos(m*t+f));
  wait(0);
  if testkey() then break; endif;
  f=f+0.02;
end;
framecolor(c);
linewidth(l);
endfunction
```

Press any key to stop this animation.

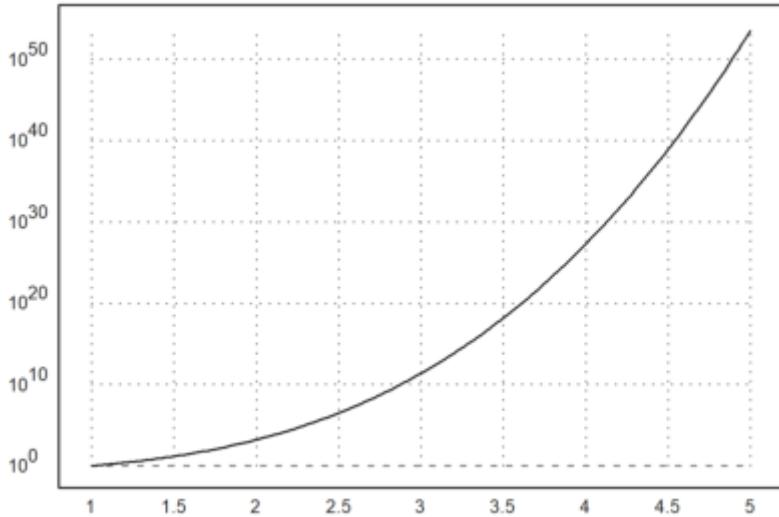
```
>animliss(2,3); // lihat hasilnya, jika sudah puas, tekan ENTER
```

3.17 Plot Logaritmik

EMT menggunakan parameter “logplot” untuk skala logaritmik.

Plot logaritma dapat diplot menggunakan skala logaritma di y dengan logplot=1, atau menggunakan skala logaritma di x dan y dengan logplot=2, atau di x dengan logplot=3.

- logplot=1: y-logaritma



Gambar 3.145 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-155.png

- logplot=2: x-y-logaritma
- logplot=3: x-logaritma

```
>plot2d("exp(x^3-x)*x^2",1,5,logplot=1);
>plot2d("exp(x+sin(x))",0,100,logplot=1);
>plot2d("exp(x+sin(x))",10,100,logplot=2);
>plot2d("gamma(x)",1,10,logplot=1);
>plot2d("log(x*(2+sin(x/100)))",10,1000,logplot=3);
```

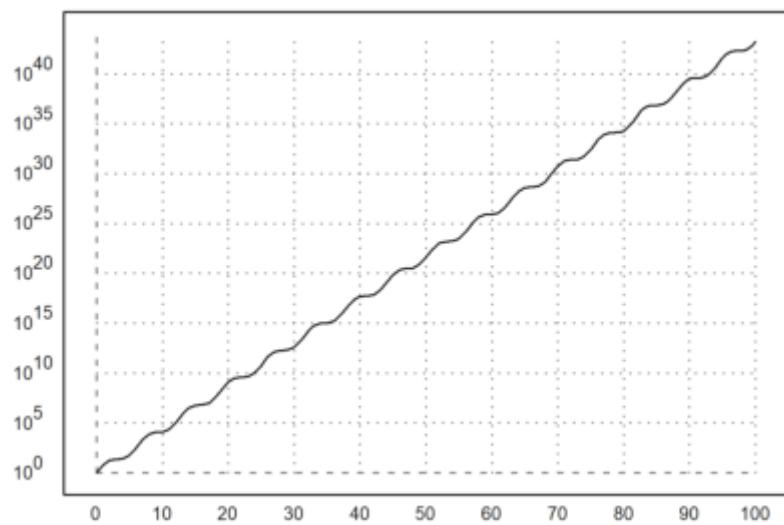
Ini juga berfungsi dengan plot data.

```
>x=10^(1:20); y=x^2-x;
>plot2d(x,y,logplot=2);
```

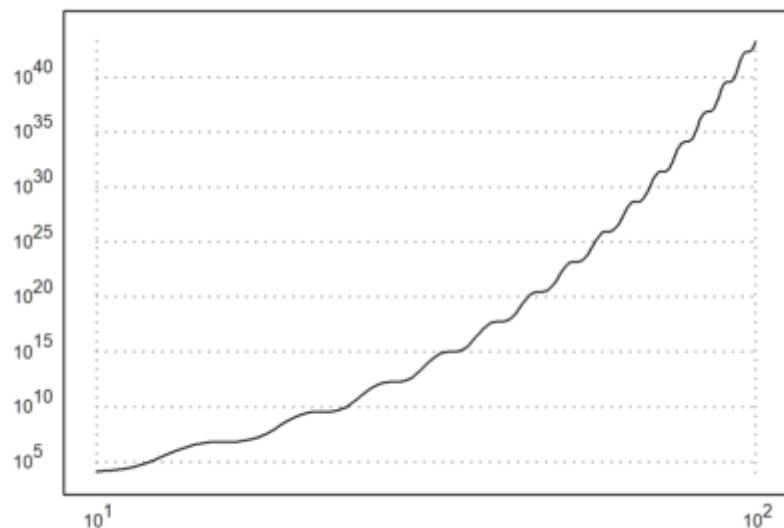
3.18 Rujukan Lengkap Fungsi plot2d()

fungsi plot2d (xv, yv, btest, a, b, c, d, xmin, xmax, r, n, ..
 logplot, grid, bingkai, framecolor, kotak, warna, ketebalan,
 gaya,..
 tomatis, tambah, pengguna, delta, titik, addpoints, pointstyle,
 batang,
 histogram, ..
 distribusi, merata, langkah, sendiri, adaptif, rona, level,
 kontur,..
 nc, terisi, fillcolor, garis besar, judul, xl,yl,peta,
 contourcolor,..
 lebar kontur, tanda centang, margin, kliping, cx, cy, insimg,
 spektral,..
 grid, vertikal, lebih kecil, dl, niveau, level)

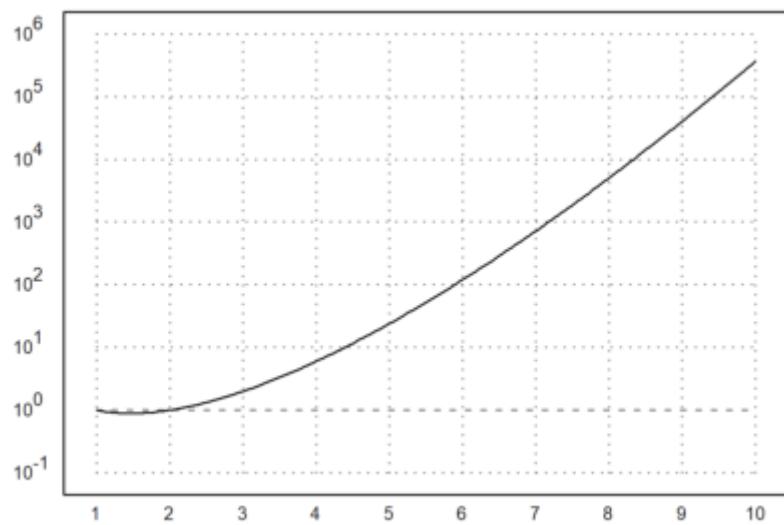
Fungsi plot multiguna untuk plot pada bidang (plot 2D). Fungsi ini dapat melakukan plot fungsi satu variabel, plot data, kurva pada bidang, plot batang, kisi bilangan kompleks, dan plot implisit fungsi dua variabel.



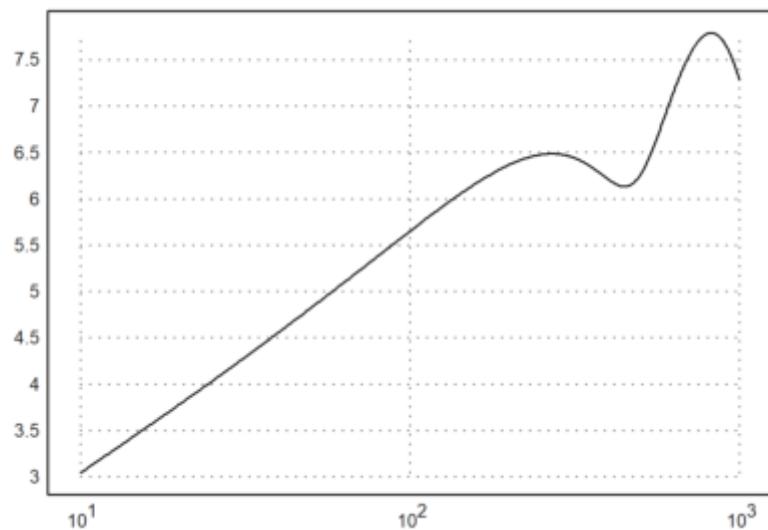
Gambar 3.146 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-156.png



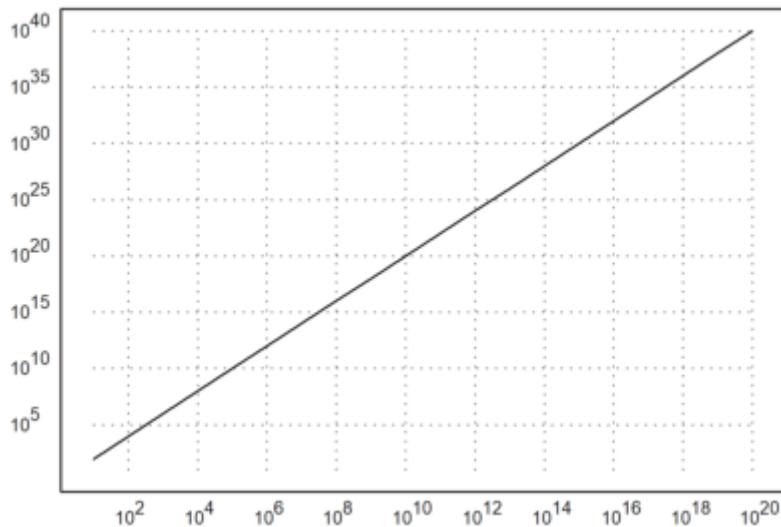
Gambar 3.147 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-157.png



Gambar 3.148 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-158.png



Gambar 3.149 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-159.png



Gambar 3.150 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-160.png

parameter

x,y : persamaan, fungsi atau vektor data

a,b,c,d : Luas plot (default a=-2,b=2)

r : jika r ditetapkan, maka a=cx-r, b=cx+r, c=cy-r, d=cy+r

r dapat berupa vektor [rx, ry] atau vektor

[rx1,rx2,ry1,ry2].

xmin,xmax : rentang parameter untuk kurva

auto : Tentukan rentang y secara otomatis (default)

square : jika benar, cobalah untuk mempertahankan rentang x-y yang kuadrat

n : jumlah interval (default bersifat adaptif)

grid : 0 = tanpa kisi dan label,

1 = hanya sumbu,

2 = kisi normal (lihat di bawah untuk jumlah garis kisi)

3 = di dalam sumbu

4 = tanpa kisi

5 = kisi penuh termasuk margin

6 = tanda centang pada bingkai

7 = hanya sumbu

8 = hanya sumbu, tanda centang sub

frame : 0 = tanpa bingkai

framecolor: warna bingkai dan kisi

margin : angka antara 0 dan 0,4 untuk margin di sekitar plot

color : Warna kurva. Jika ini adalah vektor warna,

akan digunakan untuk setiap baris matriks plot. Dalam kasus

plot titik vektor kolom harus digunakan. Jika vektor baris

atau matriks warna penuh digunakan untuk plot titik, vektor

tersebut akan digunakan untuk setiap titik data.

thickness : ketebalan garis untuk kurva

Nilai ini dapat lebih kecil dari 1 untuk garis yang sangat tipis.

style : Gaya plot untuk garis, penanda, dan isian.

Untuk titik gunakan

"[]", "<gt;", ".", "...", "....",

"*", "+", "|", "-", "o"

"[#]", "<gt;#", "o#" (bentuk terisi)"[w]", "<gt;w", "ow" (non-transparan)

Untuk garis gunakan

"-", "--", "-.", ".-", ".-", "-.-", "->"

Untuk poligon terisi atau plot batang gunakan

"#", "#O", "O", "/", "\", "\/",

"+", "|", "-", "t"

points : plot titik tunggal, bukan segmen garis

addpoints : jika benar, plot segmen garis dan titik

add : tambahkan plot ke plot yang sudah ada

user : aktifkan interaksi pengguna untuk fungsi

delta : ukuran langkah untuk interaksi pengguna

bar : diagram batang (x adalah batas interval, y adalah nilai

interval)

histogram : memplot frekuensi x dalam n subinterval

distribution=n : memplot distribusi x dengan n subinterval

ven : menggunakan nilai inter untuk histogram otomatis.

steps : memplot fungsi sebagai fungsi langkah (langkah=1,2)

adaptive : menggunakan diagram adaptif (n adalah jumlah langkah

minimal)

level : memplot garis level dari fungsi implisit dua variabel

outline : menggambar batas rentang level.

Jika nilai level adalah matriks 2xn, rentang level akan digambar

dalam warna menggunakan gaya isian yang diberikan. Jika outline benar, ia akan digambar dalam warna kontur. Dengan menggunakan fitur ini, wilayah f(x,y) di antara batas dapat ditandai.

hue : tambahkan warna rona ke plot level untuk menunjukkan fungsi

value

contour : Gunakan plot level dengan level otomatis

nc : jumlah garis level otomatis

title : judul plot (default "")

xl, yl : label untuk sumbu x dan y

smaller : jika >0, akan ada lebih banyak ruang di sebelah kiri untuk

label.

vertical : Mengaktifkan atau menonaktifkan label vertikal. Ini mengubah

variabel global

verticallabels secara lokal untuk satu plot. Nilai 1 hanya menetapkan teks vertikal, nilai 2 menggunakan label numerik vertikal pada sumbu y.

filled : mengisi plot kurva

fillcolor : mengisi warna untuk kurva batang dan terisi

outline : batas untuk poligon terisi

logplot : mengatur plot logaritmik

1 = logplot dalam y,

2 = logplot dalam xy,

3 = logplot dalam x

own : String, yang menunjuk ke rutinitas plot sendiri. Dengan

>user, Anda mendapatkan interaksi pengguna yang sama

seperti

di plot2d. Rentang akan diatur sebelum setiap panggilan ke

fungsi Anda.

maps : ekspresi peta (0 lebih cepat), fungsi selalu dipetakan.

contourcolor : warna garis kontur

contourwidth : lebar garis kontur

clipping : mengubah kliping (default adalah true)

title : Ini dapat digunakan untuk mendeskripsikan plot. Judul akan

muncul di atasplot. Selain itu, label untuk sumbu x dan y

dapat ditambahkan dengan xl="string" atau yl="string".

Label

lain dapat ditambahkan dengan fungsi label() atau labelbox

() . Judul dapat berupa string unicode atau gambar rumus

Latex.

cgrid : Menentukan jumlah garis grid untuk plot grid kompleks.

Harus berupa pembagi ukuran matriks dikurangi 1 (jumlah subinterval)cgrid dapat berupa vektor [cx,cy].

Gambaran Umum

Fungsi dapat memplot

- ekspresi, memanggil koleksi atau fungsi satu variabel,
- kurva parametrik,
- data x terhadap data y,
- fungsi implisit,
- plot batang,
- grid kompleks,
- poligon.

Jika fungsi atau ekspresi untuk xv diberikan, plot2d() akan menghitung nilai dalam rentang yang diberikan menggunakan fungsi atau ekspresi tersebut.Ekspresi tersebut harus berupa ekspresi dalam variabel x. Rentang tersebut harus didefinisikan dalam parameter a dan b kecuali rentang default [-2,2] harus digunakan. Rentang y akan dihitung secara otomatis,kecuali c dan d ditentukan, atau radius r, yang menghasilkan rentang [-r,r] untuk x dan y. Untuk plot fungsi, plot2d akan menggunakan evaluasi adaptif dari fungsi tersebut secara default. Untuk mempercepat

plot untuk fungsi yang rumit, matikan ini dengan <adaptive, dan secara opsional kurangi jumlah interval n. Selain itu, plot2d() secara default akan menggunakan pemetaan. Yaitu, ia akan menghitung elemen plot untuk elemen. Jika ekspresi atau fungsi Anda dapat menangani vektor x, Anda dapat menonaktifkannya dengan <maps untuk evaluasi yang lebih cepat.

Perhatikan bahwa plot adaptif selalu dihitung elemen demi elemen.

Jika fungsi atau ekspresi untuk xv dan yv ditentukan, plot2d() akan menghitung kurva dengan nilai xv sebagai koordinat x dan nilai yv sebagai koordinat y. Dalam kasus ini, rentang harus didefinisikan untuk parameter menggunakan xmin, xmax. Ekspresi yang terkandung dalam string harus selalu berupa ekspresi dalam variabel parameter x.

3.19 Latihan

1. Buatlah plot 2 dimensi dari fungsi Trigonometri

$$y = \sin(2x) + \cos(x)$$

pada interval x dari -2pi hingga 2pi. Tampilkan plot dengan ketebalan garis 2 dan grid 4

>x := -2*pi:0.1:2*pi

[-6.28319, -6.18319, -6.08319, -5.98319, -5.88319, -5.78319,
-5.68319, -5.58319, -5.48319, -5.38319, -5.28319, -5.18319,
-5.08319, -4.98319, -4.88319, -4.78319, -4.68319, -4.58319,
-4.48319, -4.38319, -4.28319, -4.18319, -4.08319, -3.98319,

```

-3.88319, -3.78319, -3.68319, -3.58319, -3.48319, -3.38319,
-3.28319, -3.18319, -3.08319, -2.98319, -2.88319, -2.78319,
-2.68319, -2.58319, -2.48319, -2.38319, -2.28319, -2.18319,
-2.08319, -1.98319, -1.88319, -1.78319, -1.68319, -1.58319,
-1.48319, -1.38319, -1.28319, -1.18319, -1.08319, -0.983185,
-0.883185, -0.783185, -0.683185, -0.583185, -0.483185, -0.383185,
-0.283185, -0.183185, -0.0831853, 0.0168147, 0.116815, 0.216815,
0.316815, 0.416815, 0.516815, 0.616815, 0.716815, 0.816815,
0.916815, 1.01681, 1.11681, 1.21681, 1.31681, 1.41681, 1.51681,
1.61681, 1.71681, 1.81681, 1.91681, 2.01681, 2.11681, 2.21681,
2.31681, 2.41681, 2.51681, 2.61681, 2.71681, 2.81681, 2.91681,
3.01681, 3.11681, 3.21681, 3.31681, 3.41681, 3.51681, 3.61681,
3.71681, 3.81681, 3.91681, 4.01681, 4.11681, 4.21681, 4.31681,
4.41681, 4.51681, 4.61681, 4.71681, 4.81681, 4.91681, 5.01681,
5.11681, 5.21681, 5.31681, 5.41681, 5.51681, 5.61681, 5.71681,
5.81681, 5.91681, 6.01681, 6.11681, 6.21681]

```

>y := sin(2*x) + cos(x)

```

[1, 1.19367, 1.36948, 1.51998, 1.63842, 1.71905, 1.75737,
1.75029, 1.69628, 1.59546, 1.4496, 1.26209, 1.03782, 0.783,
0.504955, 0.211857, -0.0875737, -0.384386, -0.669723, -0.935147,
-1.17295, -1.37642, -1.5401, -1.65997, -1.73356, -1.76007,
-1.74034, -1.67684, -1.57349, -1.43556, -1.26941, -1.08222,
-0.881746, -0.675938, -0.472685, -0.27947, -0.103091, 0.0506081,
0.176952, 0.272611, 0.335715, 0.365907, 0.364338, 0.333598,
0.277584, 0.201323, 0.110737, 0.0123868, -0.0868278, -0.179967,
-0.260359, -0.321897, -0.35931, -0.368401, -0.346243, -0.29132,
-0.203612, -0.0846157, 0.0626909, 0.233953, 0.423597, 0.625039,
0.830938, 1.03348, 1.22469, 1.39675, 1.54231, 1.65476, 1.72856,
1.75942, 1.74451, 1.68257, 1.57401, 1.42087, 1.2268, 0.996923,
0.737659, 0.456492, 0.161709, -0.137909, -0.433403, -0.715966,
-0.977262, -1.20973, -1.40686, -1.56341, -1.67562, -1.74131,
-1.75994, -1.73264, -1.66212, -1.55255, -1.40941, -1.2392,
-1.04923, -0.847295, -0.641373, -0.439299, -0.248463, -0.0755174,
0.0738737, 0.195252, 0.285527, 0.34308, 0.367811, 0.361119,
0.325823, 0.266026, 0.186921, 0.0945578, -0.00442561, -0.1031,
-0.194551, -0.27218, -0.330004, -0.362916, -0.36692, -0.339319,
-0.278844, -0.185728, -0.0617244, 0.0899504, 0.264724, 0.456836,
... ]

```

>plot2d(x,y,thickness=2,grid=4):

2. Buatlah plot 2 dimensi dari fungsi eksponensial

$$y = e^x - 2x$$

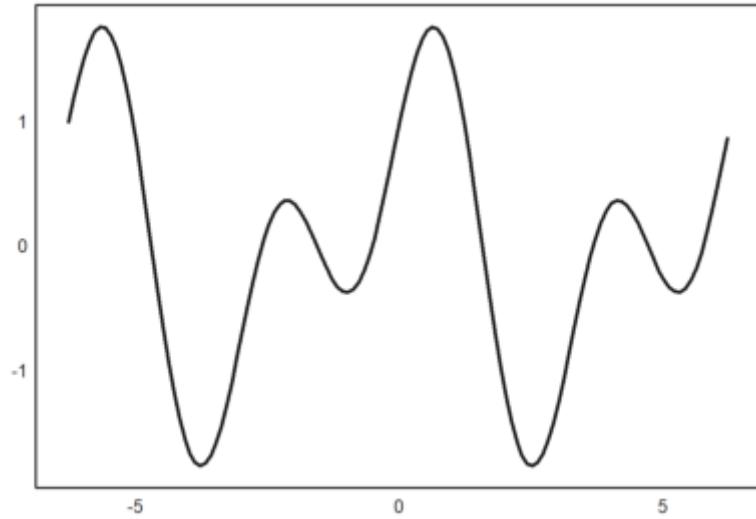
pada interval x dari -3 hingga 3, dengan ketebalan garis 3 dan grid 2

>x := -3:0.01:3

```

[-3, -2.99, -2.98, -2.97, -2.96, -2.95, -2.94, -2.93, -2.92,

```



Gambar 3.151 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-162.png

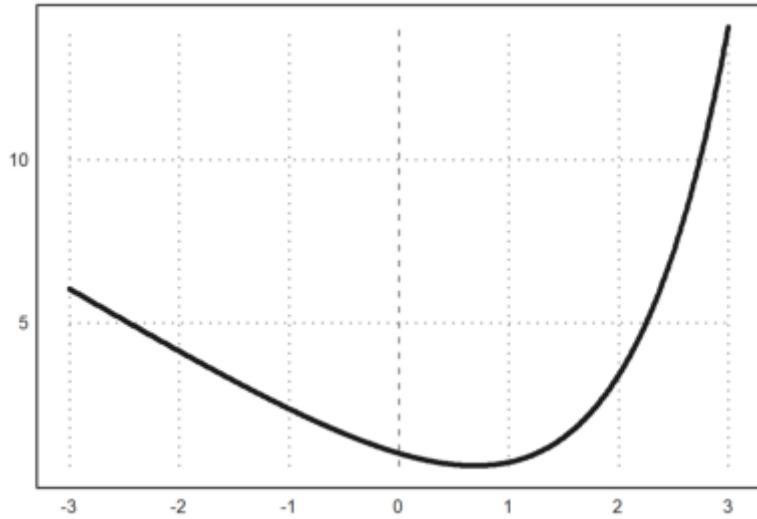
```

-2.91, -2.9, -2.89, -2.88, -2.87, -2.86, -2.85, -2.84, -2.83,
-2.82, -2.81, -2.8, -2.79, -2.78, -2.77, -2.76, -2.75, -2.74,
-2.73, -2.72, -2.71, -2.7, -2.69, -2.68, -2.67, -2.66, -2.65,
-2.64, -2.63, -2.62, -2.61, -2.6, -2.59, -2.58, -2.57, -2.56,
-2.55, -2.54, -2.53, -2.52, -2.51, -2.5, -2.49, -2.48, -2.47,
-2.46, -2.45, -2.44, -2.43, -2.42, -2.41, -2.4, -2.39, -2.38,
-2.37, -2.36, -2.35, -2.34, -2.33, -2.32, -2.31, -2.3, -2.29,
-2.28, -2.27, -2.26, -2.25, -2.24, -2.23, -2.22, -2.21, -2.2,
-2.19, -2.18, -2.17, -2.16, -2.15, -2.14, -2.13, -2.12, -2.11,
-2.1, -2.09, -2.08, -2.07, -2.06, -2.05, -2.04, -2.03, -2.02,
-2.01, -2, -1.99, -1.98, -1.97, -1.96, -1.95, -1.94, -1.93,
-1.92, -1.91, -1.9, -1.89, -1.88, -1.87, -1.86, -1.85, -1.84,
-1.83, -1.82, -1.81, -1.8, -1.79, -1.78, -1.77, -1.76, -1.75,
-1.74, -1.73, -1.72, -1.71, -1.7, -1.69, -1.68, -1.67, -1.66,
-1.65, -1.64, -1.63, -1.62, -1.61, -1.6, -1.59, -1.58, -1.57,
-1.56, -1.55, -1.54, -1.53, -1.52, -1.51, -1.5, -1.49, -1.48,
-1.47, -1.46, -1.45, -1.44, -1.43, -1.42, -1.41, -1.4, -1.39,
-1.38, -1.37, -1.36, -1.35, -1.34, -1.33, -1.32, -1.31, -1.3,
-1.29, -1.28, -1.27, -1.26, -1.25, -1.24, -1.23, -1.22, -1.21,
...
]
```

>y := exp(x)-2*x

```

[6.04979, 6.03029, 6.01079, 5.9913, 5.97182, 5.95234, 5.93287,
5.9134, 5.89393, 5.87448, 5.85502, 5.83558, 5.81613, 5.7967,
5.77727, 5.75784, 5.73843, 5.71901, 5.69961, 5.6802, 5.66081,
5.64142, 5.62204, 5.60266, 5.58329, 5.56393, 5.54457, 5.52522,
5.50587, 5.48654, 5.46721, 5.44788, 5.42856, 5.40925, 5.38995,
5.37065, 5.35136, 5.33208, 5.3128, 5.29353, 5.27427, 5.25502,
5.23577, 5.21654, 5.1973, 5.17808, 5.15887, 5.13966, 5.12046,
5.10127, 5.08208, 5.06291, 5.04374, 5.02458, 5.00543, 4.98629,
4.96716, 4.94804, 4.92892, 4.90982, 4.89072, 4.87163, 4.85255,
4.83348, 4.81442, 4.79537, 4.77633, 4.7573, 4.73827, 4.71926,
```



Gambar 3.152 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-164.png

```

4.70026,   4.68127,   4.66228,   4.64331,   4.62435,   4.6054,   4.58646,
4.56753,   4.54861,   4.5297,   4.5108,   4.49192,   4.47304,   4.45418,
4.43533,   4.41648,   4.39765,   4.37884,   4.36003,   4.34124,   4.32246,
4.30369,   4.28493,   4.26619,   4.24745,   4.22873,   4.21003,   4.19134,
4.17266,   4.15399,   4.13534,   4.1167,   4.09807,   4.07946,   4.06086,
4.04227,   4.0237,   4.00515,   3.98661,   3.96808,   3.94957,   3.93107,
3.91259,   3.89412,   3.87567,   3.85724,   3.83882,   3.82041,   3.80203,
3.78365,   3.7653,   3.74696,   3.72864,   3.71033,   3.69204,   3.67377,
3.65552,   3.63728,   3.61907,   3.60087,   3.58268,   3.56452,   3.54637,
3.52825,   3.51014,   3.49205,   3.47398,   3.45593,   3.4379,   3.41989,
...
]

```

>plot2d(x,y,thickness=3,grid=2):

3. Buatlah plot 2 dimensi dari fungsi polinomial

$$y = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x$$

pada interval x dari -2 hingga 3. gunakan grid 3 dan ketebalan 1

>x := -2:0.01:3

```

[-2,   -1.99,   -1.98,   -1.97,   -1.96,   -1.95,   -1.94,   -1.93,   -1.92,
-1.91,   -1.9,   -1.89,   -1.88,   -1.87,   -1.86,   -1.85,   -1.84,   -1.83,
-1.82,   -1.81,   -1.8,   -1.79,   -1.78,   -1.77,   -1.76,   -1.75,   -1.74,
-1.73,   -1.72,   -1.71,   -1.7,   -1.69,   -1.68,   -1.67,   -1.66,   -1.65,
-1.64,   -1.63,   -1.62,   -1.61,   -1.6,   -1.59,   -1.58,   -1.57,   -1.56,
-1.55,   -1.54,   -1.53,   -1.52,   -1.51,   -1.5,   -1.49,   -1.48,   -1.47,
-1.46,   -1.45,   -1.44,   -1.43,   -1.42,   -1.41,   -1.4,   -1.39,   -1.38,
-1.37,   -1.36,   -1.35,   -1.34,   -1.33,   -1.32,   -1.31,   -1.3,   -1.29,
-1.28,   -1.27,   -1.26,   -1.25,   -1.24,   -1.23,   -1.22,   -1.21,   -1.2,
-1.19,   -1.18,   -1.17,   -1.16,   -1.15,   -1.14,   -1.13,   -1.12,   -1.11,
-1.1,   -1.09,   -1.08,   -1.07,   -1.06,   -1.05,   -1.04,   -1.03,   -1.02,

```

```

-1.01, -1, -0.99, -0.98, -0.97, -0.96, -0.95, -0.94, -0.93,
-0.92, -0.91, -0.9, -0.89, -0.88, -0.87, -0.86, -0.85, -0.84,
-0.83, -0.82, -0.81, -0.8, -0.79, -0.78, -0.77, -0.76, -0.75,
-0.74, -0.73, -0.72, -0.71, -0.7, -0.69, -0.68, -0.67, -0.66,
-0.65, -0.64, -0.63, -0.62, -0.61, -0.6, -0.59, -0.58, -0.57,
-0.56, -0.55, -0.54, -0.53, -0.52, -0.51, -0.5, -0.49, -0.48,
-0.47, -0.46, -0.45, -0.44, -0.43, -0.42, -0.41, -0.4, -0.39,
-0.38, -0.37, -0.36, -0.35, -0.34, -0.33, -0.32, -0.31, -0.3,
-0.29, -0.28, -0.27, -0.26, -0.25, -0.24, -0.23, -0.22, -0.21,
...
]

```

>y := x^{4-3*x}3+2*x^2-x

```

[50, 49.2344, 48.4775, 47.7293, 46.9897, 46.2586, 45.536,
44.8219, 44.116, 43.4184, 42.7291, 42.0479, 41.3748, 40.7097,
40.0526, 39.4034, 38.762, 38.1284, 37.5025, 36.8843, 36.2736,
35.6705, 35.0748, 34.4866, 33.9057, 33.332, 32.7656, 32.2064,
31.6543, 31.1092, 30.5711, 30.0399, 29.5156, 28.9982, 28.4874,
27.9834, 27.486, 26.9952, 26.5109, 26.033, 25.5616, 25.0965,
24.6377, 24.1852, 23.7389, 23.2986, 22.8645, 22.4363, 22.0142,
21.5979, 21.1875, 20.7829, 20.384, 19.9909, 19.6033, 19.2214,
18.845, 18.474, 18.1085, 17.7484, 17.3936, 17.0441, 16.6998,
16.3606, 16.0266, 15.6976, 15.3737, 15.0547, 14.7407, 14.4315,
14.1271, 13.8275, 13.5326, 13.2424, 12.9568, 12.6758, 12.3993,
12.1273, 11.8597, 11.5965, 11.3376, 11.083, 10.8327, 10.5865,
10.3445, 10.1066, 9.87279, 9.64296, 9.4171, 9.19516, 8.9771,
8.76287, 8.55242, 8.34573, 8.14272, 7.94338, 7.74765, 7.55549,
7.36686, 7.18171, 7, 6.82169, 6.64674, 6.47511, 6.30675,
6.14163, 5.9797, 5.82092, 5.66526, 5.51266, 5.3631, 5.21653,
5.07291, 4.93221, 4.79438, 4.65938, 4.52718, 4.39774, 4.27103,
4.14699, 4.0256, 3.90682, 3.79061, 3.67693, 3.56575, 3.45703,
3.35074, 3.24683, 3.14528, 3.04605, 2.9491, 2.8544, 2.76191,
2.6716, 2.58344, 2.49738, 2.4134, 2.33147, 2.25155, 2.1736,
...
]

```

>plot2d(x,y,thickness=1,grid=3):

4. Buatlah plot 2 dimensi dari fungsi logaritma

$$y = \ln(x + 2) - x$$

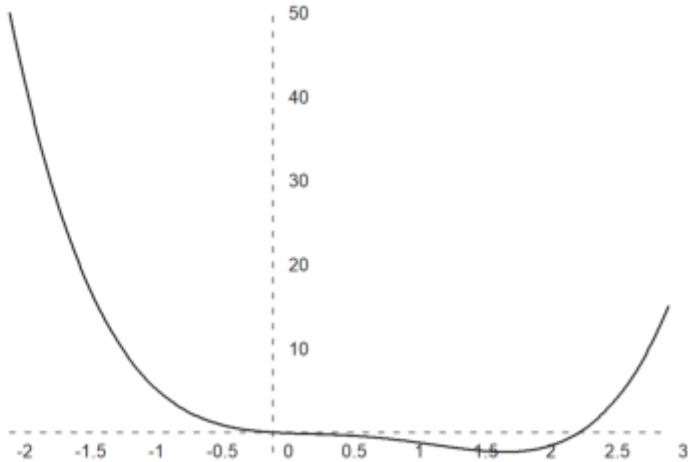
pada interval x dari -1.9 hingga 5. Gunakan ketebalan garis 2 dari grid 3.

>x := -1.9:0.01:5

```

[-1.9, -1.89, -1.88, -1.87, -1.86, -1.85, -1.84, -1.83, -1.82,
-1.81, -1.8, -1.79, -1.78, -1.77, -1.76, -1.75, -1.74, -1.73,
-1.72, -1.71, -1.7, -1.69, -1.68, -1.67, -1.66, -1.65, -1.64,
-1.63, -1.62, -1.61, -1.6, -1.59, -1.58, -1.57, -1.56, -1.55,
-1.54, -1.53, -1.52, -1.51, -1.5, -1.49, -1.48, -1.47, -1.46,
-1.45, -1.44, -1.43, -1.42, -1.41, -1.4, -1.39, -1.38, -1.37,
-1.36, -1.35, -1.34, -1.33, -1.32, -1.31, -1.3, -1.29, -1.28,
...
]

```



Gambar 3.153 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-166.png

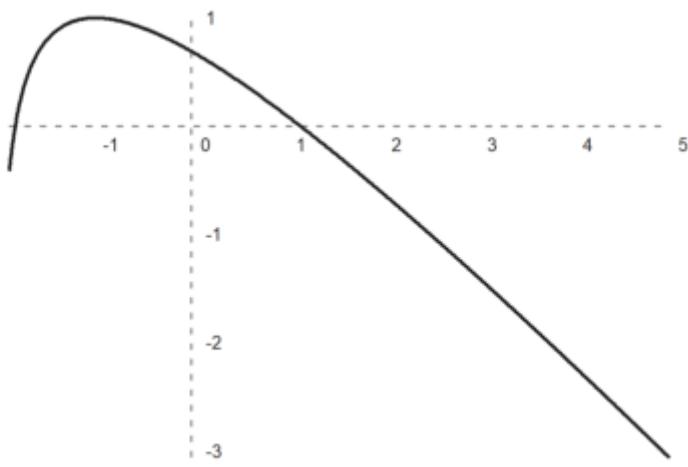
```

-1.27, -1.26, -1.25, -1.24, -1.23, -1.22, -1.21, -1.2, -1.19,
-1.18, -1.17, -1.16, -1.15, -1.14, -1.13, -1.12, -1.11, -1.1,
-1.09, -1.08, -1.07, -1.06, -1.05, -1.04, -1.03, -1.02, -1.01,
-1, -0.99, -0.98, -0.97, -0.96, -0.95, -0.94, -0.93, -0.92,
-0.91, -0.9, -0.89, -0.88, -0.87, -0.86, -0.85, -0.84, -0.83,
-0.82, -0.81, -0.8, -0.79, -0.78, -0.77, -0.76, -0.75, -0.74,
-0.73, -0.72, -0.71, -0.7, -0.69, -0.68, -0.67, -0.66, -0.65,
-0.64, -0.63, -0.62, -0.61, -0.6, -0.59, -0.58, -0.57, -0.56,
-0.55, -0.54, -0.53, -0.52, -0.51, -0.5, -0.49, -0.48, -0.47,
-0.46, -0.45, -0.44, -0.43, -0.42, -0.41, -0.4, -0.39, -0.38,
-0.37, -0.36, -0.35, -0.34, -0.33, -0.32, -0.31, -0.3, -0.29,
-0.28, -0.27, -0.26, -0.25, -0.24, -0.23, -0.22, -0.21, -0.2,
-0.19, -0.18, -0.17, -0.16, -0.15, -0.14, -0.13, -0.12, -0.11,
...
]
```

>y := ln(x+2)-x

```

[-0.402585, -0.317275, -0.240264, -0.170221, -0.106113, -0.04712,
0.00741854, 0.0580432, 0.105202, 0.149269, 0.190562, 0.229352,
0.265872, 0.300324, 0.332884, 0.363706, 0.392926, 0.420667,
0.447034, 0.472126, 0.496027, 0.518817, 0.540566, 0.561337,
0.58119, 0.600178, 0.618349, 0.635748, 0.652416, 0.668391,
0.683709, 0.698402, 0.712499, 0.72603, 0.739019, 0.751492,
0.763471, 0.774977, 0.786031, 0.79665, 0.806853, 0.816655,
0.826074, 0.835122, 0.843814, 0.852163, 0.860182, 0.867881,
0.875273, 0.882367, 0.889174, 0.895704, 0.901964, 0.907965,
0.913713, 0.919217, 0.924485, 0.929522, 0.934338, 0.938936,
0.943325, 0.94751, 0.951496, 0.955289, 0.958895, 0.962318,
0.965563, 0.968635, 0.971539, 0.974278, 0.976856, 0.979279,
0.981549, 0.98367, 0.985647, 0.987481, 0.989177, 0.990738,
0.992167, 0.993466, 0.994639, 0.995689, 0.996618, 0.997429,
0.998125, 0.998707, 0.999178, 0.999541, 0.999797, 0.99995, 1,
0.99995, 0.999803, 0.999559, 0.999221, 0.99879, 0.998269,
```



Gambar 3.154 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-168.png

```

0.997659,   0.996961,   0.996178,   0.99531,   0.99436,   0.993329,
0.992218,   0.991028,   0.989762,   0.98842,   0.987004,   0.985514,
0.983953,   0.982322,   0.98062,   0.978851,   0.977014,   0.975111,
0.973144,   0.971112,   0.969017,   0.96686,   0.964642,   0.962364,
...
]

```

>plot2d(x,y,thickness=2,grid=3):

5. Buatlah plot 2 dimensi dari fungsi Kombinasi (trigonometri dan eksponensial)

$$y = e^{-x} \cdot \sin(x)$$

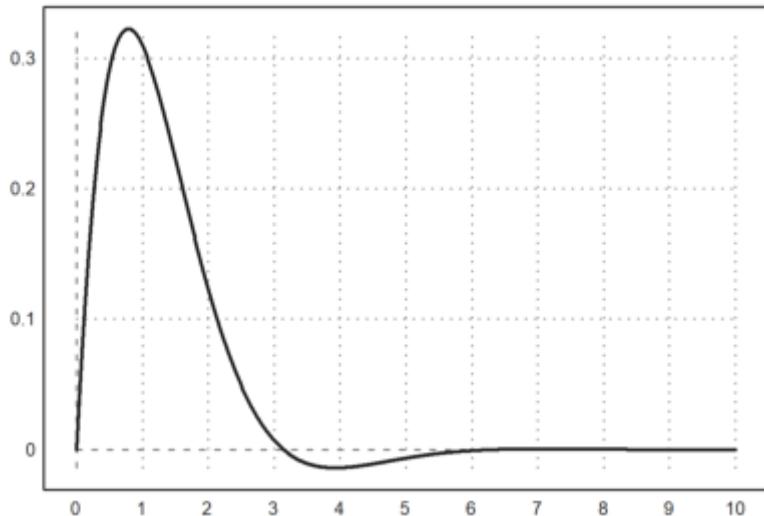
pada interval x dari 0 sampai 10,dengan ketebalan garis 2 dan grid 2

>x := 0:0.01:10

```

[0,   0.01,   0.02,   0.03,   0.04,   0.05,   0.06,   0.07,   0.08,   0.09,
0.1,   0.11,   0.12,   0.13,   0.14,   0.15,   0.16,   0.17,   0.18,   0.19,
0.2,   0.21,   0.22,   0.23,   0.24,   0.25,   0.26,   0.27,   0.28,   0.29,
0.3,   0.31,   0.32,   0.33,   0.34,   0.35,   0.36,   0.37,   0.38,   0.39,
0.4,   0.41,   0.42,   0.43,   0.44,   0.45,   0.46,   0.47,   0.48,   0.49,
0.5,   0.51,   0.52,   0.53,   0.54,   0.55,   0.56,   0.57,   0.58,   0.59,
0.6,   0.61,   0.62,   0.63,   0.64,   0.65,   0.66,   0.67,   0.68,   0.69,
0.7,   0.71,   0.72,   0.73,   0.74,   0.75,   0.76,   0.77,   0.78,   0.79,
0.8,   0.81,   0.82,   0.83,   0.84,   0.85,   0.86,   0.87,   0.88,   0.89,
0.9,   0.91,   0.92,   0.93,   0.94,   0.95,   0.96,   0.97,   0.98,   0.99,
1,   1.01,   1.02,   1.03,   1.04,   1.05,   1.06,   1.07,   1.08,   1.09,
1.1,   1.11,   1.12,   1.13,   1.14,   1.15,   1.16,   1.17,   1.18,   1.19,
1.2,   1.21,   1.22,   1.23,   1.24,   1.25,   1.26,   1.27,   1.28,   1.29,
1.3,   1.31,   1.32,   1.33,   1.34,   1.35,   1.36,   1.37,   1.38,   1.39,
1.4,   1.41,   1.42,   1.43,   1.44,   1.45,   1.46,   1.47,   1.48,   1.49,
1.5,   1.51,   1.52,   1.53,   1.54,   1.55,   1.56,   1.57,   1.58,   1.59,
1.6,   1.61,   1.62,   1.63,   1.64,   1.65,   1.66,   1.67,   1.68,   1.69,

```



Gambar 3.155 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-170.png

```

1.7,   1.71,   1.72,   1.73,   1.74,   1.75,   1.76,   1.77,   1.78,   1.79,
1.8,   1.81,   1.82,   1.83,   1.84,   1.85,   1.86,   1.87,   1.88,   1.89,
1.9,   1.91,   1.92,   1.93,   1.94,   1.95,   1.96,   1.97,   1.98,   1.99,
... ]

```

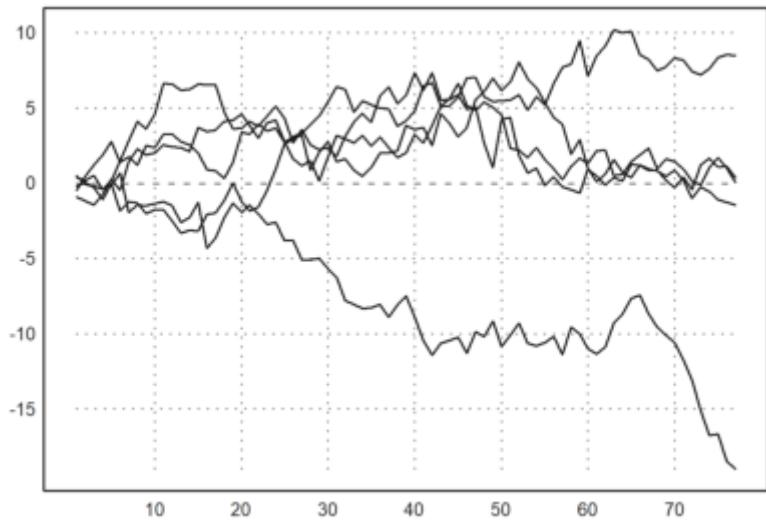
>y := exp(-x)*sin(x)

```

[0,   0.00990033,   0.0196027,   0.029109,   0.0384213,   0.0475417,
0.056472,   0.0652143,   0.0737706,   0.0821428,   0.090333,   0.0983431,
0.106175,   0.113831,   0.121313,   0.128623,   0.135762,   0.142733,
0.149538,   0.156179,   0.162657,   0.168974,   0.175133,   0.181136,
0.186984,   0.192678,   0.198222,   0.203617,   0.208865,   0.213968,
0.218927,   0.223744,   0.228422,   0.232962,   0.237366,   0.241636,
0.245773,   0.24978,   0.253658,   0.257409,   0.261035,   0.264537,
0.267918,   0.271178,   0.274321,   0.277346,   0.280257,   0.283055,
0.285741,   0.288318,   0.290786,   0.293148,   0.295405,   0.297559,
0.299612,   0.301564,   0.303418,   0.305176,   0.306838,   0.308406,
0.309882,   0.311268,   0.312565,   0.313774,   0.314897,   0.315935,
0.31689,   0.317764,   0.318557,   0.319272,   0.319909,   0.32047,
0.320957,   0.32137,   0.321712,   0.321983,   0.322185,   0.32232,
0.322388,   0.32239,   0.322329,   0.322205,   0.32202,   0.321774,
0.32147,   0.321108,   0.32069,   0.320217,   0.319689,   0.319109,
0.318477,   0.317794,   0.317062,   0.316282,   0.315455,   0.314581,
0.313663,   0.3127,   0.311695,   0.310648,   0.30956,   0.308432,
0.307266,   0.306062,   0.304821,   0.303544,   0.302233,   0.300887,
0.299509,   0.298099,   0.296657,   0.295186,   0.293685,   0.292155,
0.290598,   0.289015,   0.287405,   0.285771,   0.284112,   0.28243,
... ]

```

>plot2d(x,y,thickness=2,grid=2);
>plot2d(cumsum(randnormal(5,77))):



Gambar 3.156 images/EMT4Plot2D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani%20(1)-171.png

BAB IV

MENGGAMBAR PLOT 3D DENGAN EMT

Ini adalah pengantar plot 3D di Euler. Kita memerlukan plot 3D untuk memvisualisasikan fungsi dua variabel.

Euler menggambar fungsi tersebut menggunakan algoritma pengurutan untuk menyembunyikan bagian di latar belakang. Secara umum, Euler menggunakan proyeksi pusat. Defaultnya adalah dari kuadran x-y positif ke arah titik asal $x=y=z=0$, tetapi sudut=0° terlihat dari arah sumbu y. Sudut pandang dan tinggi dapat diubah.

Euler dapat memplot

- permukaan dengan bayangan dan garis datar atau rentang datar,
- awan titik,
- kurva parametrik,
- permukaan implisit.

Plot 3D suatu fungsi menggunakan plot3d. Cara termudah adalah memplot ekspresi dalam x dan y. Parameter r mengatur rentang plot di sekitar (0,0).

```
>aspect(1.5); plot3d("x^2+sin(y)",-5,5,0,6*pi);
>plot3d("x^2+x*sin(y)",-5,5,0,6*pi);
```

Silakan lakukan modifikasi agar gambar “talang bergelombang” tersebut tidak lurus melainkan melengkung/melingkar, baik melingkar secara mendatar maupun melingkar turun/naik (seperti papan peluncur pada kolam renang). Temukan rumusnya.

4.1 Fungsi Dua Variabel

Untuk grafik fungsi, gunakan

- ekspresi sederhana dalam x dan y,
- nama fungsi dua variabel
- atau matriks data.

Defaultnya adalah kisi kawat yang terisi dengan warna berbeda di kedua sisinya. Perhatikan bahwa jumlah interval kisi default adalah 10, tetapi plot menggunakan jumlah persegi panjang 40x40 default untuk membuat permukaan. Ini dapat diubah.

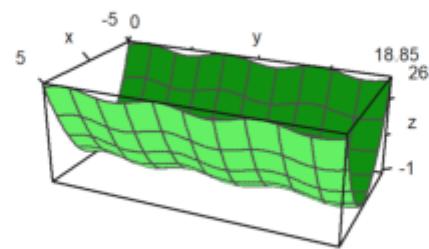
- n=40, n=[40,40]: jumlah garis kisi di setiap arah
- kisi=10, kisi=[10,10]: jumlah garis kisi di setiap arah.

Kami menggunakan default n=40 dan kisi=10.

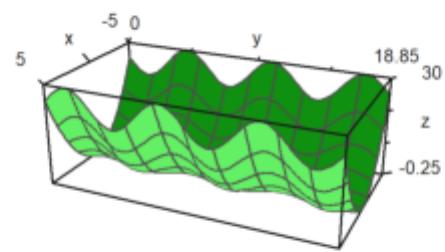
```
>plot3d("x^2+y^2");
```

Interaksi pengguna dimungkinkan dengan parameter >user. Pengguna dapat menekan tombol berikut.

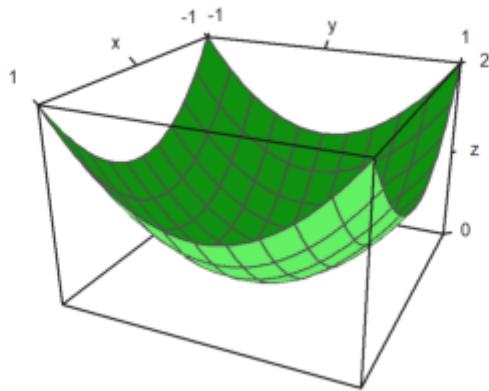
- kiri, kanan, atas, bawah: mengubah sudut pandang



Gambar 4.1 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-001.png



Gambar 4.2 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-002.png



Gambar 4.3 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-003.png

- +, -: memperbesar atau memperkecil
- a: menghasilkan anaglif (lihat di bawah)
- l: mengubah arah sumber cahaya (lihat di bawah)
- spasi: mengatur ulang ke default
- return: mengakhiri interaksi

```
>plot3d("exp(-x^2+y^2)",>user, ...
> title="Turn with the vector keys (press return to finish)":
```

Rentang plot untuk fungsi dapat ditentukan dengan

- a,b: rentang x
- c,d: rentang y
- r: persegi simetris di sekitar (0,0).
- n: jumlah subinterval untuk plot.

Ada beberapa parameter untuk menskalakan fungsi atau mengubah tampilan grafik.

fscale: skala ke nilai fungsi (default adalah <fscale>).

cale: angka atau vektor 1x2 untuk diskalakan ke arah x dan y.

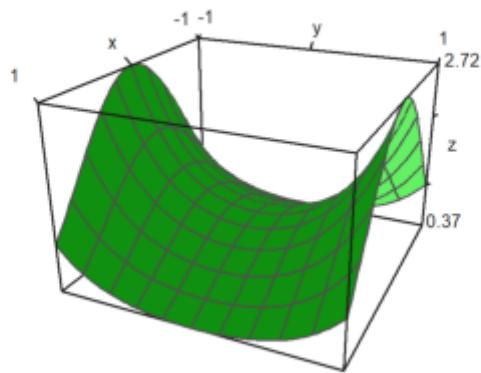
frame: jenis frame (default 1).

```
>plot3d("exp(-(x^2+y^2)/5)",r=10,n=80,fscale=4,scale=1.2,frame=3,>user):
```

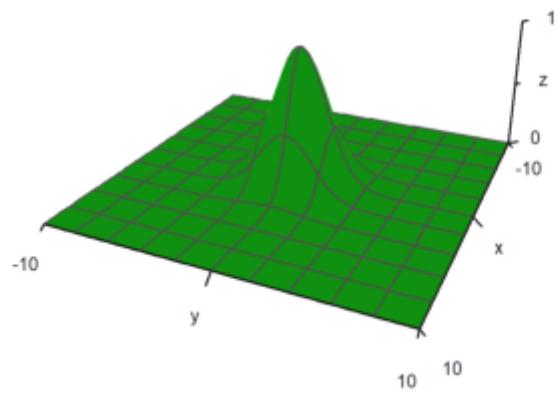
Tampilan dapat diubah dengan berbagai cara.

- jarak: jarak pandang ke plot.
- perbesaran: nilai perbesaran.
- sudut: sudut ke sumbu y negatif dalam radian.

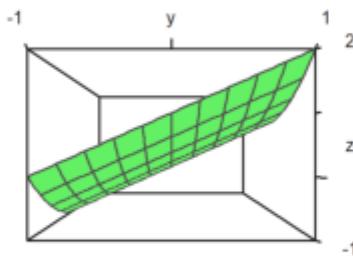
Turn with the vector keys (press return to finish)



Gambar 4.4 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-004.png



Gambar 4.5 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-005.png



Gambar 4.6 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-006.png

- **inggi:** tinggi tampilan dalam radian.

Nilai default dapat diperiksa atau diubah dengan fungsi `view()`. Fungsi ini mengembalikan parameter dalam urutan di atas.

`>view`

`[5, 2.6, 2, 0.4]`

Jarak yang lebih dekat membutuhkan zoom yang lebih sedikit. Efeknya lebih seperti lensa sudut lebar.

Dalam contoh berikut, `sudut=0` dan `tinggi=0` terlihat dari sumbu y negatif. Label sumbu untuk y disembunyikan dalam kasus ini.

`>plot3d("x^2+y",distance=3,zoom=1,angle=pi/2,height=0):`

Plot selalu mengarah ke tengah kubus plot. Anda dapat memindahkan bagian tengah dengan parameter `center`.

`>plot3d("x^4+y^2",a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°, ...`

`> center=[0.4,0,0],zoom=5):`

Plot diskalakan agar sesuai dengan kubus satuan untuk dilihat. Jadi tidak perlu mengubah jarak atau zoom tergantung pada ukuran plot. Namun, label merujuk pada ukuran sebenarnya.

Jika Anda menonaktifkannya dengan `scale=false`, Anda perlu berhati-hati agar plot tetap sesuai dengan jendela plot, dengan mengubah jarak tampilan atau zoom, dan memindahkan bagian tengah.

`>plot3d("5*exp(-x^2-y^2)",r=2,<fscale,<scale,distance=13,height=50°, ...`

`> center=[0,0,-2],frame=3):`

Plot polar juga tersedia. Parameter `polar=true` menggambar plot polar. Fungsi tersebut harus tetap berupa fungsi x dan y. Parameter "`fscale`" menskalakan fungsi dengan skalanya sendiri. Jika tidak, fungsi tersebut diskalakan agar sesuai dengan kubus.

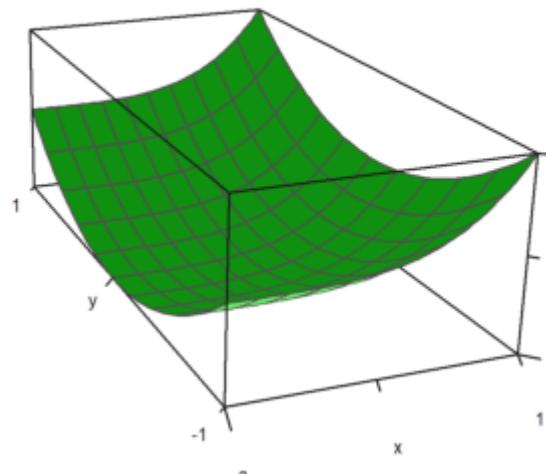
`>plot3d("1/(x^2+y^2+1)",r=5,>polar, ...`

`> fscale=2,>hue,n=100,zoom=4,>contour,color=blue):`

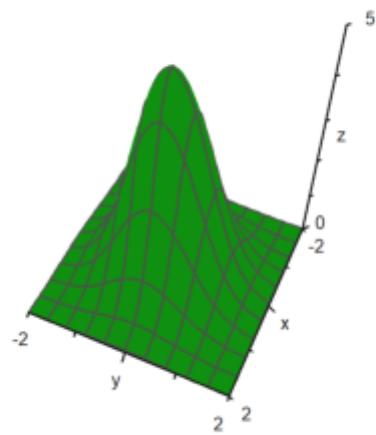
`>function f(r) := exp(-r/2)*cos(r); ...`

`> plot3d("f(x^2+y^2)",>polar,scale=[1,1,0.4],r=pi,frame=3,zoom=4):`

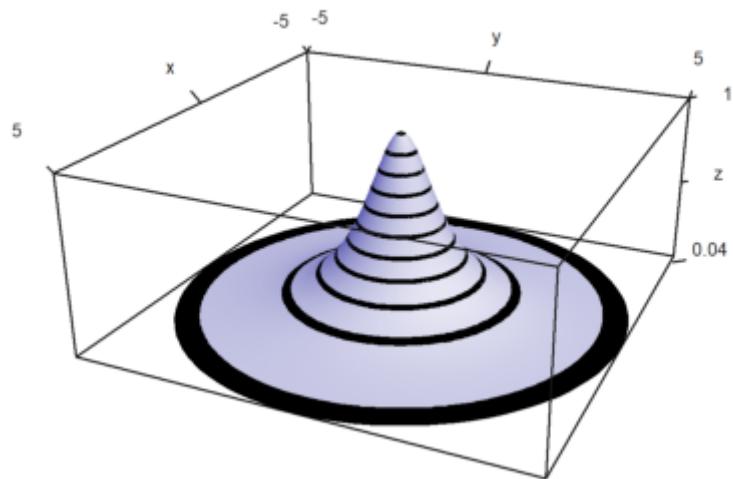
Parameter `rotate` memutar fungsi dalam x di sekitar sumbu x.



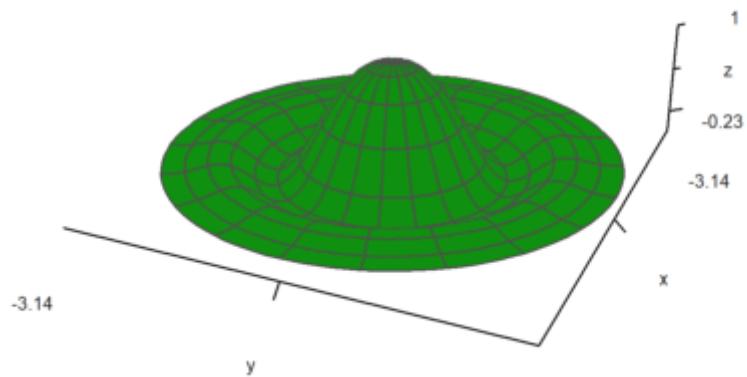
Gambar 4.7 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-007.png



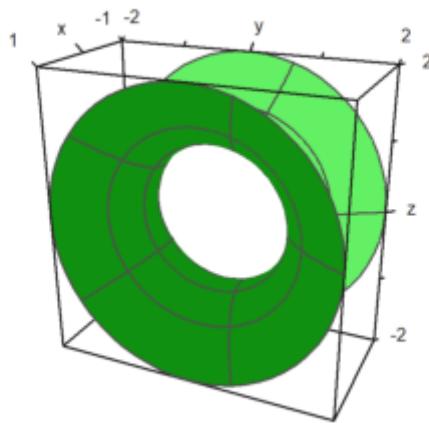
Gambar 4.8 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-008.png



Gambar 4.9 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-009.png



Gambar 4.10 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-010.png



Gambar 4.11 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-011.png

- rotate=1: Menggunakan sumbu x
- rotate=2: Menggunakan sumbu z

```
>plot3d("x^2+1",a=-1,b=1,rotate=true,grid=5);
>plot3d("x^2+1",a=-1,b=1,rotate=2,grid=5);
>plot3d("sqrt(25-x^2)",a=0,b=5,rotate=1);
>plot3d("x*sin(x)",a=0,b=6pi,rotate=2);
Berikut adalah plot dengan tiga fungsi.
```

```
>plot3d("x","x^2+y^2","y",r=2,zoom=3.5,frame=3);
```

4.2 Plot Kontur

Untuk plot, Euler menambahkan garis kisi. Sebagai gantinya, dimungkinkan untuk menggunakan garis level dan rona satu warna atau rona warna spektral. Euler dapat menggambar tinggi fungsi pada plot dengan bayangan. Dalam semua plot 3D, Euler dapat menghasilkan anaglif merah/sian.

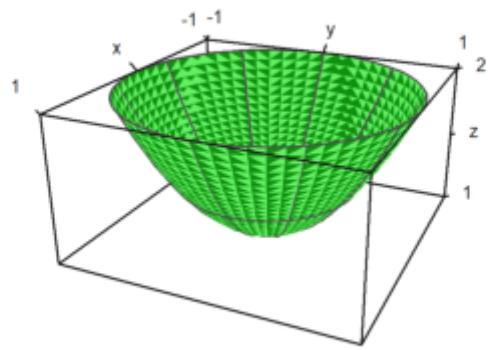
- >hue: Mengaktifkan bayangan terang alih-alih kabel.
- >contour: Memplot garis kontur otomatis pada plot.
- level=... (atau level): Vektor nilai untuk garis kontur.

Nilai default adalah level="auto", yang menghitung beberapa garis level secara otomatis. Seperti yang Anda lihat di plot, level sebenarnya adalah rentang level.

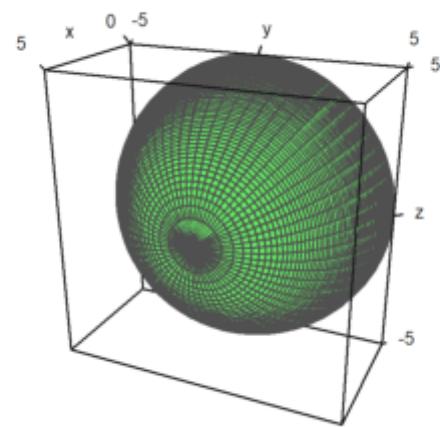
Gaya default dapat diubah. Untuk plot kontur berikut, kami menggunakan kisi yang lebih halus untuk titik 100x100, menskalakan fungsi dan plot, dan menggunakan sudut pandang yang berbeda.

```
>plot3d("exp(-x^2-y^2)",r=2,n=100,level="thin", ...
>>contour,>spectral,fscale=1,scale=1.1,angle=45°,height=20°);
>plot3d("exp(x*y)",angle=100°,>contour,color=green);
Shading default menggunakan warna abu-abu. Namun, rentang warna spektral juga tersedia.
```

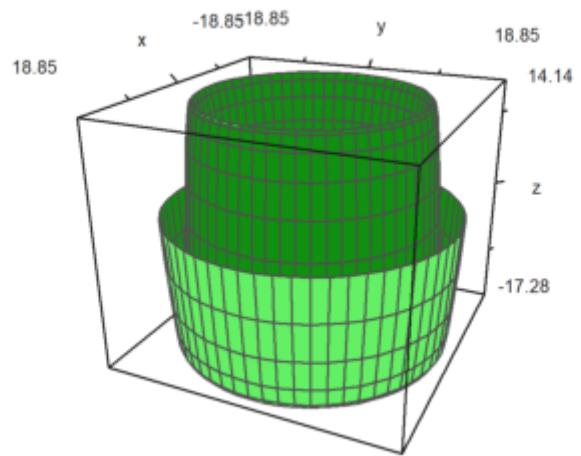
- >spectral: Menggunakan skema spektral default



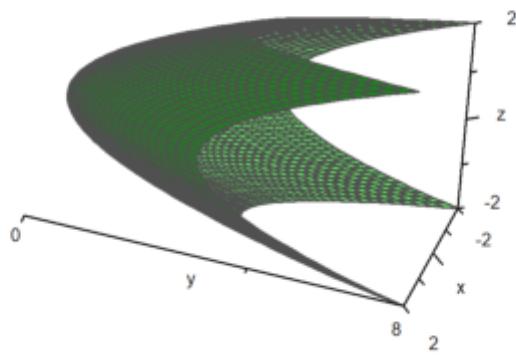
Gambar 4.12 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-012.png



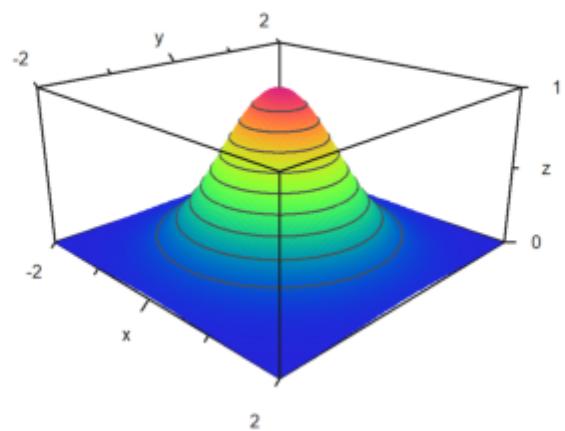
Gambar 4.13 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-013.png



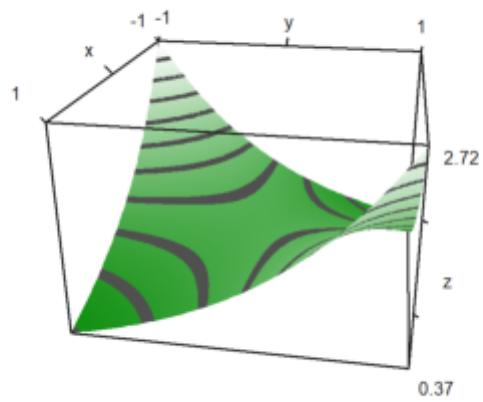
Gambar 4.14 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-014.png



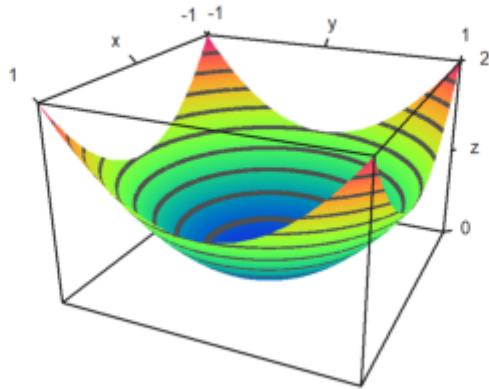
Gambar 4.15 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-015.png



Gambar 4.16 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-016.png



Gambar 4.17 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-017.png



Gambar 4.18 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-018.png

- `color=...`: Menggunakan warna khusus atau skema spektral

Untuk plot berikut, kami menggunakan skema spektral default dan menambah jumlah titik untuk mendapatkan tampilan yang sangat halus.

`>plot3d("x^2+y^2",>spectral,>contour,n=100);`

Alih-alih garis level otomatis, kita juga dapat mengatur nilai garis level. Ini akan menghasilkan garis level tipis alih-alih rentang level.

`>plot3d("x^2-y^2",0,0.5,0.5,level=-1:0.1:1,color=redgreen);`

Dalam plot berikut, kami menggunakan dua pita level yang sangat lebar dari -0,1 hingga 1, dan dari 0,9 hingga 1. Ini dimasukkan sebagai matriks dengan batas level sebagai kolom.

Selain itu, kami melapisi kisi dengan 10 interval di setiap arah.

`>plot3d("x^2+y^2",level=[-0.1,0.9;0,1], ...`

`>>spectral,angle=30°,grid=10,contourcolor=gray);`

`>plot3d("x^y-y^x",level=0,a=0,b=6,c=0,d=6,contourcolor=red,n=100);`

Dimungkinkan untuk menunjukkan bidang kontur di bawah plot. Warna dan jarak ke plot dapat ditentukan.

`>plot3d("x^2+y^4",>cp,cpcolor=green,cpdelta=0.2);`

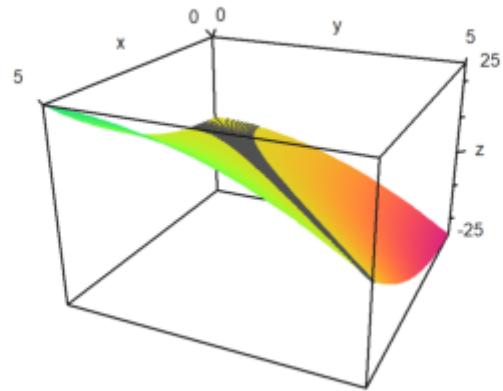
Berikut ini beberapa gaya lainnya. Kami selalu menonaktifkan bingkai, dan menggunakan berbagai skema warna untuk plot dan kisi.

```

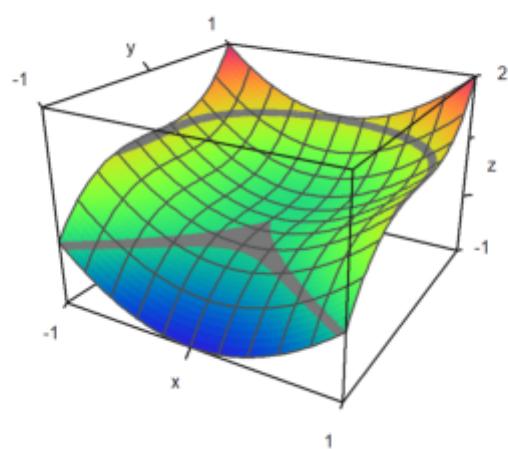
>figure(2,2); ...
>expr="y^3-x^2"; ...
>figure(1); ...
>plot3d(expr,<frame,>cp,cpcolor=spectral); ...
>figure(2); ...
>plot3d(expr,<frame,>spectral,grid=10,cp=2); ...
>figure(3); ...
>plot3d(expr,<frame,>contour,color=gray,nc=5,cp=3,cpcolor=greenred); ...
>figure(4); ...
>plot3d(expr,<frame,>hue,grid=10,>transparent,>cp,cpcolor=gray); ...
>figure(0);

```

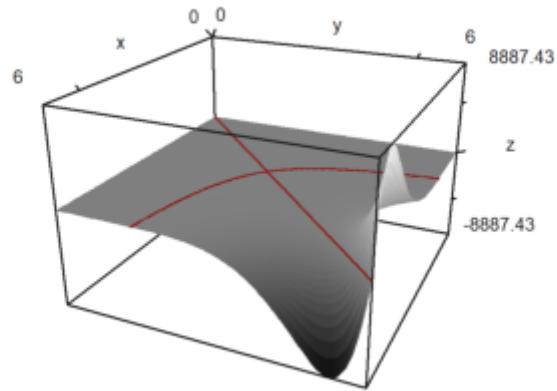
Ada beberapa skema spektral lain, yang diberi nomor dari 1 hingga 9. Namun, Anda juga dapat



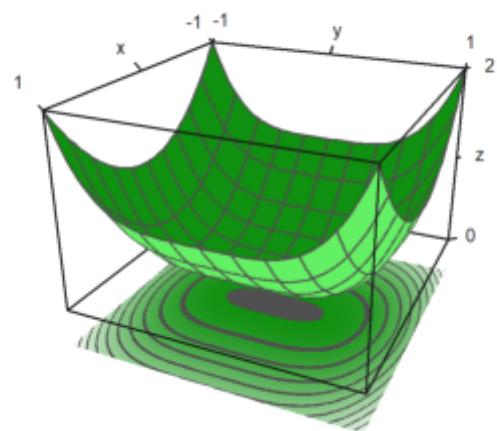
Gambar 4.19 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-019.png



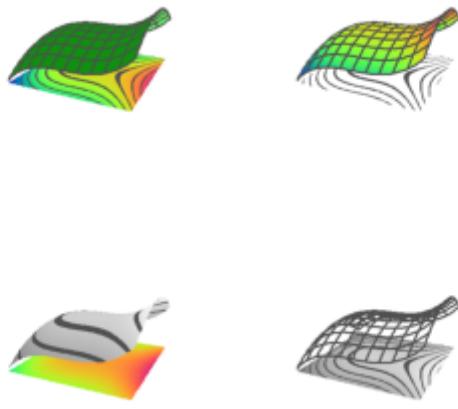
Gambar 4.20 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-020.png



Gambar 4.21 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-021.png



Gambar 4.22 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-022.png



Gambar 4.23 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-023.png

menggunakan `color=value`, di mana value

- spektral: untuk rentang dari biru hingga merah
- putih: untuk rentang yang lebih redup
- kuning biru, ungu hijau, biru kuning, hijau merah
- biru kuning, hijau ungu, kuning biru, merah hijau

```
>figure(3,3); ...
>for i=1:9; ...
>figure(i); plot3d("x^2+y^2",spectral=i,>contour,>cp,<frame,zoom=4); ...
>end; ...
>figure(0);
```

Sumber cahaya dapat diubah dengan 1 dan tombol cursor selama interaksi pengguna. Sumber cahaya juga dapat diatur dengan parameter.

- light: arah cahaya
- amb: cahaya sekitar antara 0 dan 1

Perlu dicatat bahwa program tidak membuat perbedaan antara sisi plot. Tidak ada bayangan. Untuk ini, Anda memerlukan Povray.

```
>plot3d("-x^2-y^2", ...
>hue=true,light=[0,1,1],amb=0,user=true, ...
>title="Press 1 and cursor keys (return to exit)":
```

Parameter warna mengubah warna permukaan. Warna garis level juga dapat diubah.

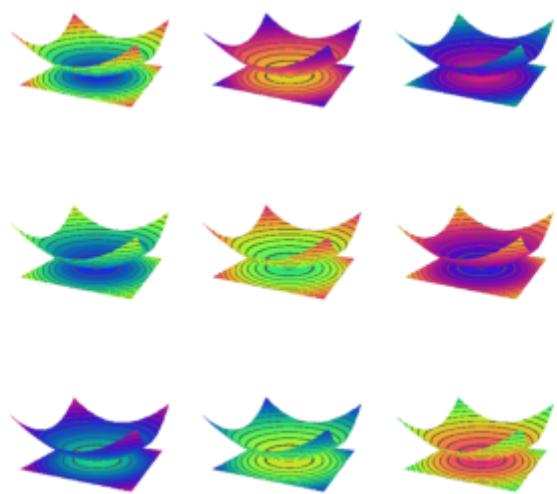
```
>plot3d("-x^2-y^2",color=rgb(0.2,0.2,0),hue=true,frame=false, ...
>zoom=3,contourcolor=red,level=-2:0.1:1,dl=0.01):
```

Warna 0 memberikan efek pelangi khusus.

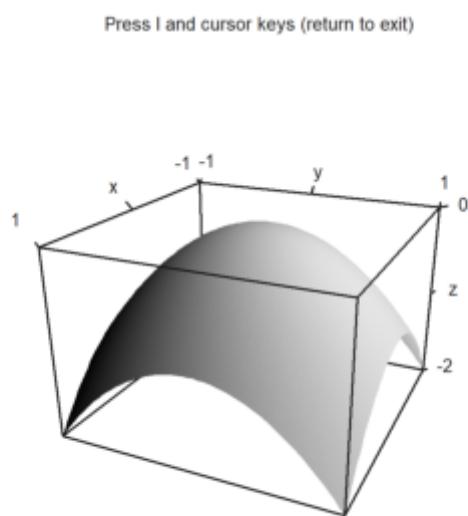
```
>plot3d("x^(2*(x^2+y^2+1))",color=0,hue=true,grid=10):
```

Permukaannya juga bisa transparan.

```
>plot3d("x^2+y^2",>transparent,grid=10,wirecolor=red):
```



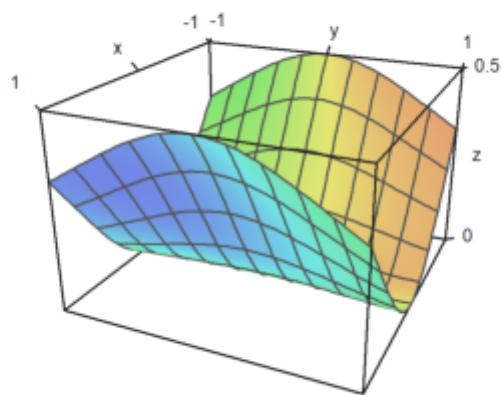
Gambar 4.24 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-024.png



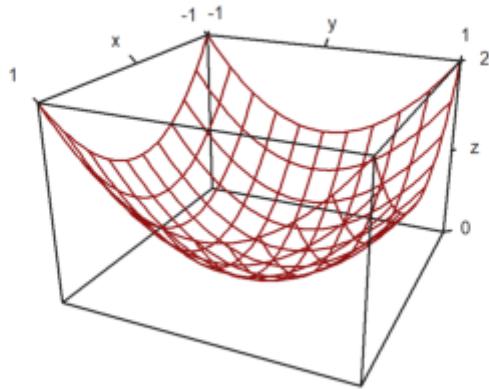
Gambar 4.25 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-025.png



Gambar 4.26 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-026.png



Gambar 4.27 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-027.png



Gambar 4.28 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-028.png

4.3 Plot Implisit

Ada juga plot implisit dalam tiga dimensi. Euler menghasilkan potongan melalui objek. Fitur plot3d mencakup plot implisit. Plot ini menunjukkan himpunan nol dari suatu fungsi dalam tiga variabel.

Solusi dari

$$f(x, y, z) = 0$$

dapat divisualisasikan dalam potongan yang sejajar dengan bidang x-y, x-z, dan y-z.

- implisit=1: potongan sejajar dengan bidang y-z
- implisit=2: potongan sejajar dengan bidang x-z
- implisit=4: potongan sejajar dengan bidang x-y

Tambahkan nilai-nilai ini, jika Anda suka. Dalam contoh ini, kami memplot

$$M = \{(x, y, z) : x^2 + y^3 + zy = 1\}$$

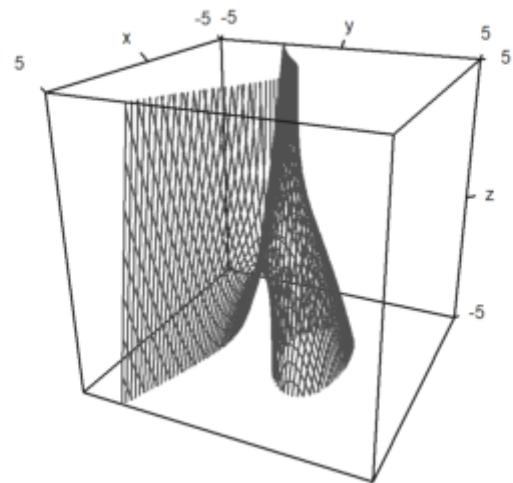
```
>plot3d("x^2+y^3+z*y-1",r=5,implicit=3):
>c=1; d=1;
>plot3d("((x^2+y^2-c^2)2+(z^2-1)2)*((y^2+z^2-c^2)2+(x^2-1)2)*((z^2+x^2-c^2)2+(y^2-1)2-
d",r=2,<frame,>implicit,>user):
>plot3d("x^2+y^2+4*x*z+z^3",>implicit,r=2,zoom=2.5):
```

4.4 Plotting 3D Data

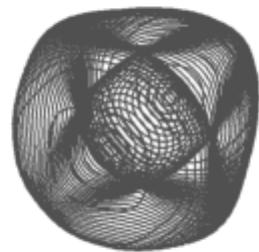
Sama seperti plot2d, plot3d menerima data. Untuk objek 3D, Anda perlu menyediakan matriks nilai x, y, dan z, atau tiga fungsi atau ekspresi $fx(x,y)$, $fy(x,y)$, $fz(x,y)$.

$$\gamma(t, s) = (x(t, s), y(t, s), z(t, s))$$

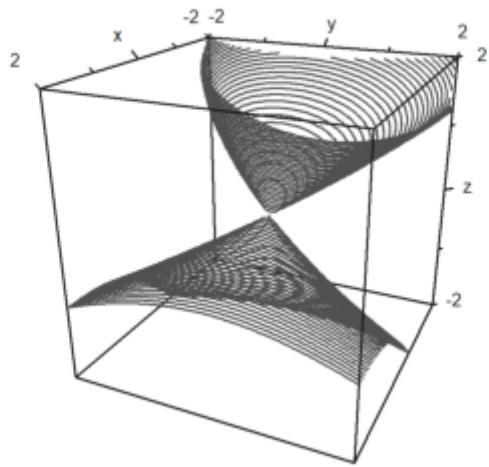
Karena x,y,z adalah matriks, kami berasumsi bahwa (t,s) berjalan melalui kisi persegi. Hasilnya, Anda dapat membuat plot gambar persegi panjang di ruang angkasa.



Gambar 4.29 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-031.png



Gambar 4.30 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-032.png



Gambar 4.31 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-033.png

Anda dapat menggunakan bahasa matriks Euler untuk menghasilkan koordinat secara efektif.

Dalam contoh berikut, kami menggunakan vektor nilai t dan vektor kolom nilai s untuk membuat parameter permukaan bola. Dalam gambar, kami dapat menandai wilayah, dalam kasus kami wilayah kutub.

```
>t=linspace(0,2pi,180); s=linspace(-pi/2,pi/2,90)';
>x=cos(s)*cos(t); y=cos(s)*sin(t); z=sin(s);
>plot3d(x,y,z,>hue, ...
>color=blue,<frame,grid=[10,20], ...
>values=s,contourcolor=red,level=[90°-24°;90°-22°], ...
>scale=1.4,height=50°):
```

Berikut adalah contoh, yang merupakan grafik suatu fungsi.

```
>t=-1:0.1:1; s=(-1:0.1:1)'; plot3d(t,s,t*s,grid=10):
```

Namun, kita dapat membuat berbagai macam permukaan. Berikut ini adalah permukaan yang sama sebagai fungsi

$$x = y z$$

```
>plot3d(t*s,t,s,angle=180°,grid=10):
```

Dengan usaha lebih, kita dapat menghasilkan banyak permukaan.

Dalam contoh berikut, kita membuat tampilan berbayang dari bola yang terdistorsi. Koordinat yang biasa untuk bola adalah

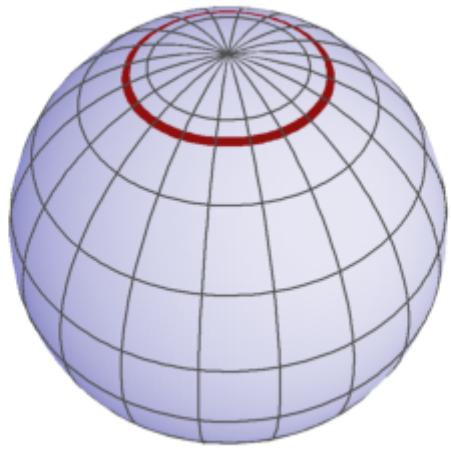
$$\gamma(t, s) = (\cos(t) \cos(s), \sin(t) \sin(s), \cos(s))$$

dengan

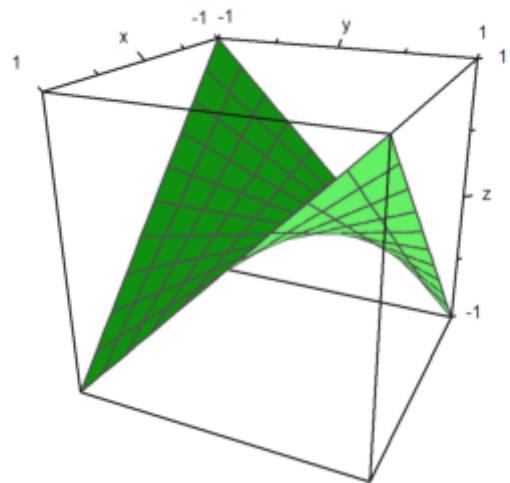
$$0 \leq t \leq 2\pi, \quad \frac{-\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}.$$

Kita mendistorsi ini dengan faktor

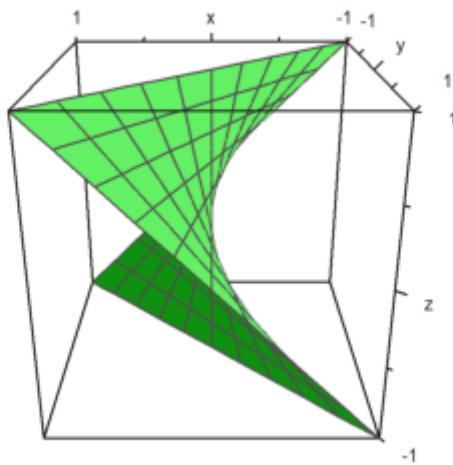
$$d(t, s) = \frac{\cos(4t) + \cos(8s)}{4}.$$



Gambar 4.32 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-035.png



Gambar 4.33 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-036.png



Gambar 4.34 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-038.png

```
>t=linspace(0,2pi,320); s=linspace(-pi/2,pi/2,160)'; ...
> d=1+0.2*(cos(4*t)+cos(8*s)); ...
> plot3d(cos(t)*cos(s)*d,sin(t)*cos(s)*d,sin(s)*d,hue=1, ...
> light=[1,0,1],frame=0,zoom=5):
```

Tentu saja, titik awan juga memungkinkan. Untuk memplot data titik di ruang, kita memerlukan tiga vektor untuk koordinat titik.

Gayanya sama seperti di plot2d dengan points=true;

```
>n=500; ...
```

```
> plot3d(normal(1,n),normal(1,n),normal(1,n),points=true,style="."):
```

Anda juga dapat memplot kurva dalam 3D. Dalam kasus ini, lebih mudah untuk menghitung titik-titik kurva terlebih dahulu. Untuk kurva dalam bidang, kami menggunakan urutan koordinat dan parameter wire=true.

```
>t=linspace(0,8pi,500); ...
```

```
> plot3d(sin(t),cos(t),t/10,>wire,zoom=3):
```

```
>t=linspace(0.4pi,1000); plot3d(cos(t),sin(t),t/2pi,>wire, ...
```

```
> linewidth=3,wirecolor=blue):
```

```
>X=cumsum(normal(3,100)); ...
```

```
> plot3d(X[1],X[2],X[3],>anaglyph,>wire):
```

EMT juga dapat membuat grafik dalam mode anaglif. Untuk melihat grafik tersebut, Anda memerlukan kacamata merah/sian.

```
> plot3d("x^2+y^3",>anaglyph,>contour,angle=30°):
```

Seringkali, skema warna spektral digunakan untuk plot. Ini menekankan tinggi fungsi.

```
>plot3d("x^2*y^3-y",>spectral,>contour,zoom=3.2):
```

Euler juga dapat memplot permukaan berparameter, ketika parameternya adalah nilai x, y, dan z dari gambar kotak persegi panjang di ruang tersebut.

Untuk demo berikut, kami menyiapkan parameter u dan v, dan menghasilkan koordinat ruang dari parameter tersebut.

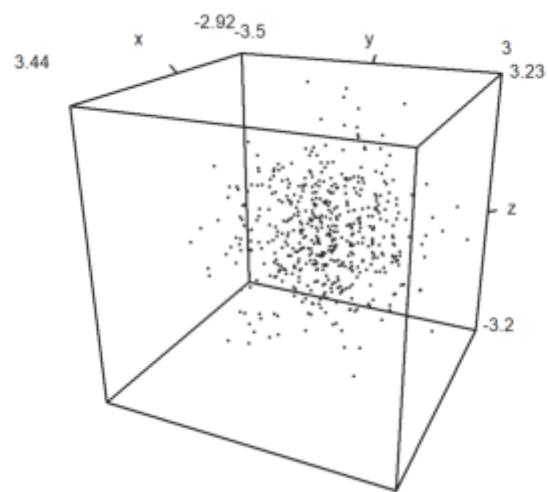
```
>u=linspace(-1,1,10); v=linspace(0,2*pi,50)'; ...
```

```
> X=(3+u*cos(v/2))*cos(v); Y=(3+u*cos(v/2))*sin(v); Z=u*sin(v/2); ...
```

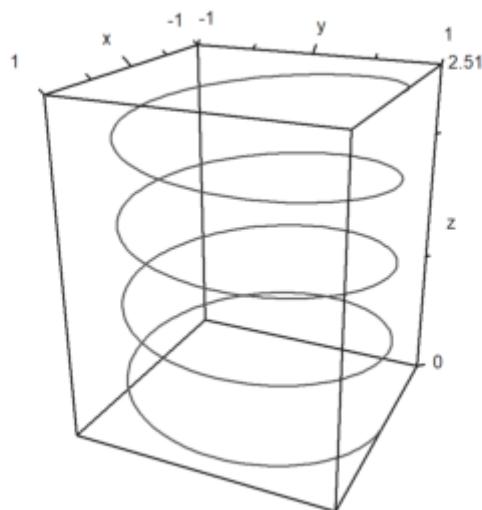
```
> plot3d(X,Y,Z,>anaglyph,<frame,>wire,scale=2.3):
```



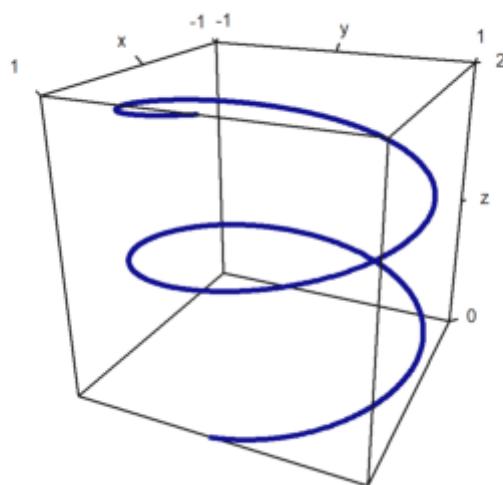
Gambar 4.35 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-042.png



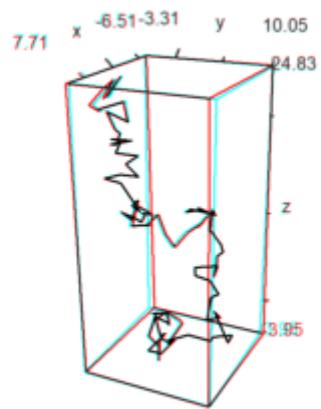
Gambar 4.36 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-043.png



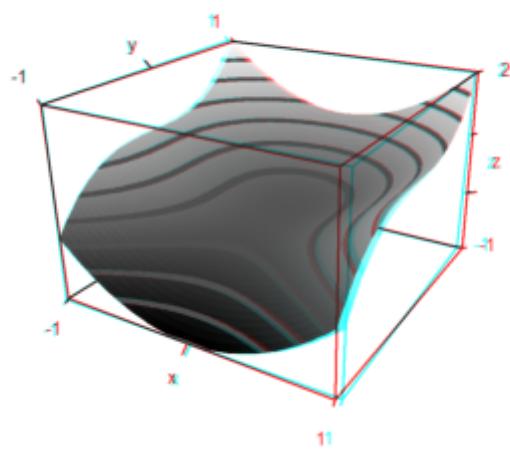
Gambar 4.37 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-044.png



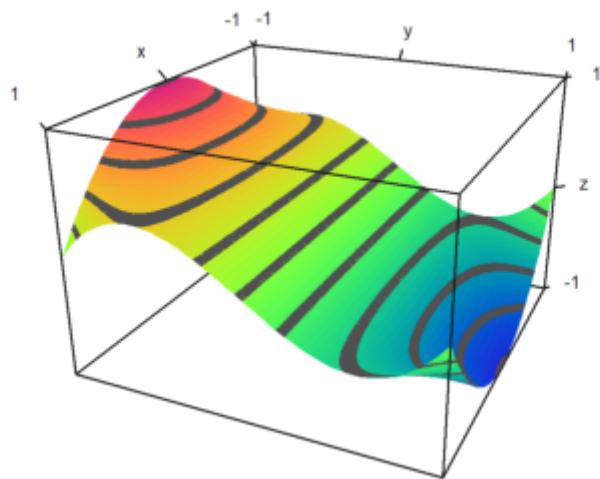
Gambar 4.38 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-045.png



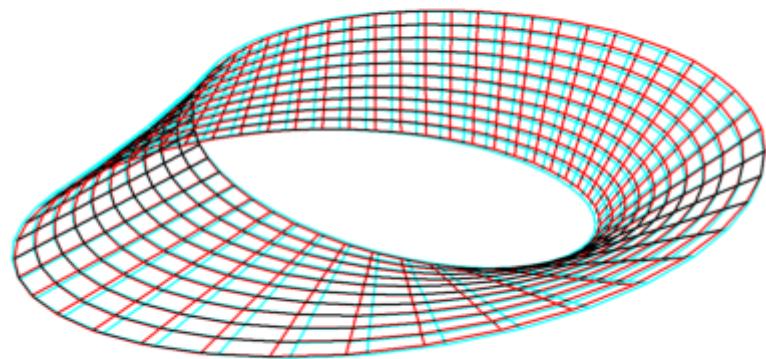
Gambar 4.39 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-046.png



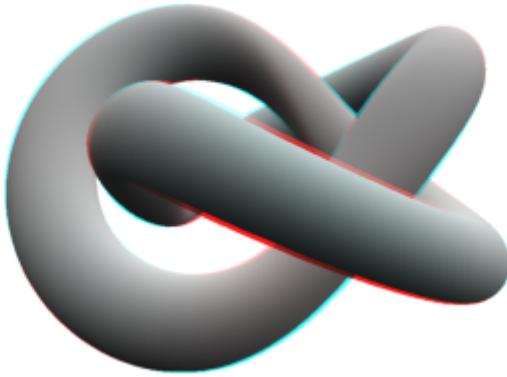
Gambar 4.40 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-047.png



Gambar 4.41 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-048.png



Gambar 4.42 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-049.png



Gambar 4.43 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-050.png

Berikut adalah contoh yang lebih rumit, yang tampak megah dengan kaca merah/cyan.

```
>u:=linspace(-pi,pi,160); v:=linspace(-pi,pi,400)'; ...
>x:=(4*(1+2.25*sin(3*v))+cos(u))*cos(2*v); ...
>y:=(4*(1+2.25*sin(3*v))+cos(u))*sin(2*v); ...
>z=sin(u)+2*cos(3*v); ...
>plot3d(x,y,z,frame=0,scale=1.5,hue=1,light=[1,0,-1],zoom=2.8,>anaglyph):
```

4.5 Plot Statistik

Plot batang juga dimungkinkan. Untuk ini, kita harus menyediakan

- x: vektor baris dengan n+1 elemen
- y: vektor kolom dengan n+1 elemen
- z: matriks nilai nxn.

z dapat lebih besar, tetapi hanya nilai nxn yang akan digunakan.

Dalam contoh, pertama-tama kita menghitung nilai. Kemudian kita menyesuaikan x dan y, sehingga vektor berpusat pada nilai yang digunakan.

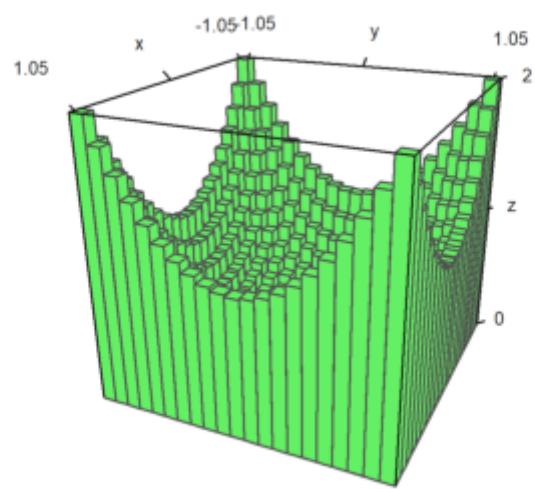
```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x^2*y^2; ...
>xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y|1.1)-0.05; ...
>plot3d(xa,ya,z,bar=true):
```

Dimungkinkan untuk membagi bidang permukaan menjadi dua bagian atau lebih.

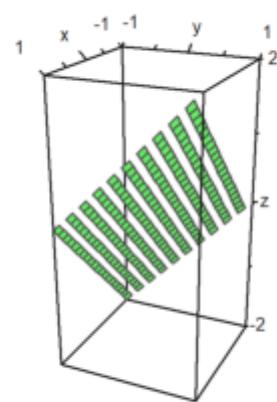
```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x+y; d=zeros(size(x)); ...
>plot3d(x,y,z,disconnect=2:2:20):
```

Jika memuat atau membuat matriks data M dari sebuah file dan perlu memplotnya dalam 3D, Anda dapat menskalakan matriks ke [-1,1] dengan scale(M), atau menskalakan matriks dengan >zscale. Ini dapat dikombinasikan dengan faktor penskalaan individual yang diterapkan sebagai tambahan.

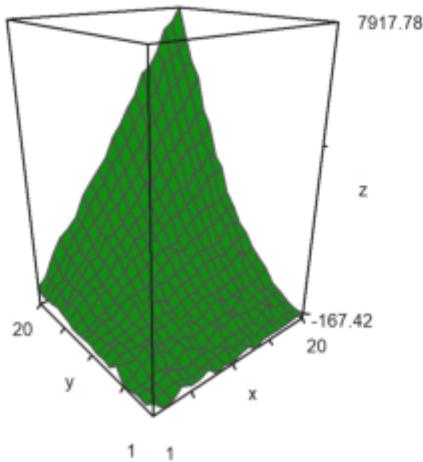
```
>i=1:20; j=i'; ...
>plot3d(i*j^2+100*normal(20,20),>zscale,scale=[1,1,1.5],angle=-40°,zoom=1.8);
>Z=intrandom(5,100,6); v=zeros(5,6); ...
```



Gambar 4.44 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-051.png



Gambar 4.45 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-052.png



Gambar 4.46 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-053.png

```
> loop 1 to 5; v[#]=getmultiplicities(1:6,Z[#]); end; ...
> columnsplot3d(v',scols=1:5,ccols=[1:5]):
```

4.6 Permukaan Benda Putar

```
>plot2d("((x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
> style="#",color=red,<outline, ...
> level=[-2;0],n=100):
>ekspresi &= (x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3; $ekspresi
```

$$(y^2 + x^2 - 1)^3 - x^2 y^3$$

Kita ingin memutar kurva jantung di sekitar sumbu y. Berikut ini adalah ekspresi yang mendefinisikan jantung:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2 \cdot y^3.$$

selanjutnya kita tetapkan

$$x = r \cos(a), \quad y = r \sin(a).$$

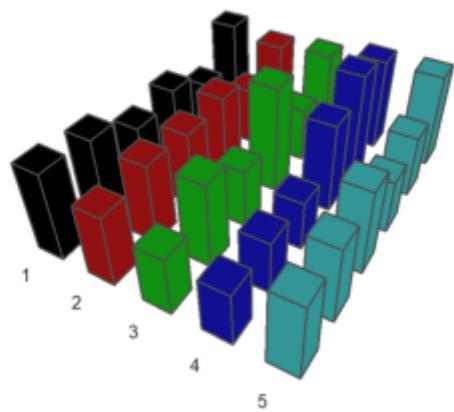
```
>function fr(r,a) &= ekspresi with [x=r*cos(a),y=r*sin(a)] | trigreduce; $fr(r,a)
```

$$(r^2 - 1)^3 + \frac{(\sin(5a) - \sin(3a) - 2 \sin a) r^5}{16}$$

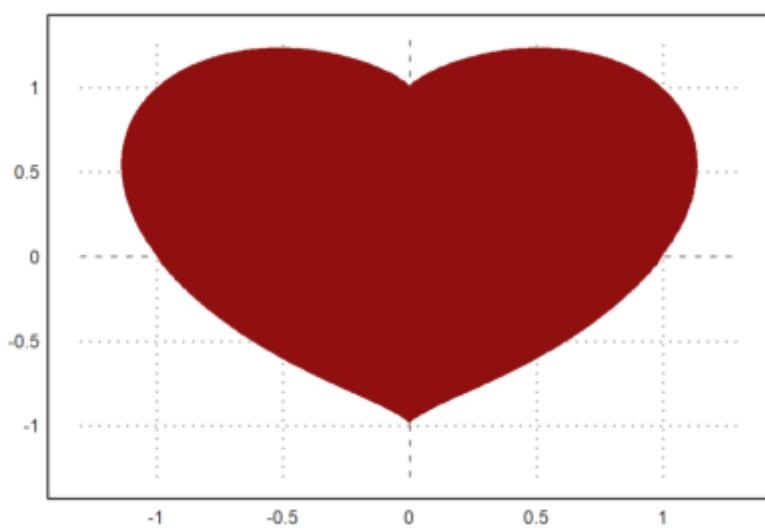
Hal ini memungkinkan untuk mendefinisikan fungsi numerik, yang memecahkan r, jika a diberikan. Dengan fungsi itu kita dapat memplot jantung yang diputar sebagai permukaan parametrik.

```
>function map f(a) := bisect("fr",0,2;a); ...
>t=linspace(-pi/2,pi/2,100); r=f(t); ...
>s=linspace(pi,2pi,100)';
>plot3d(r*cos(t)*sin(s),r*cos(t)*cos(s),r*sin(t), ...
>>hue,<frame,color=red,zoom=4,amb=0,max=0.7,grid=12,height=50°):
```

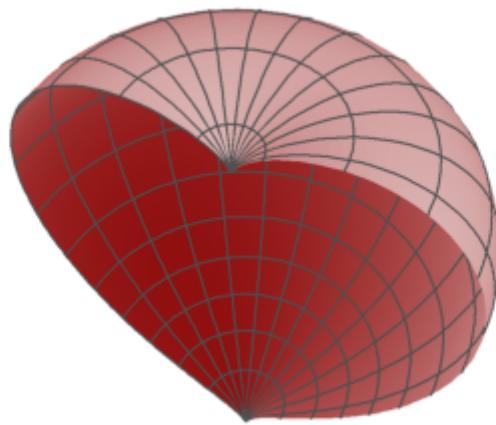
Berikut ini adalah plot 3D dari gambar di atas yang diputar di sekitar sumbu z. Kami mendefinisikan fungsi yang menggambarkan objek tersebut.



Gambar 4.47 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-054.png



Gambar 4.48 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-055.png



Gambar 4.49 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-060.png

```
>function f(x,y,z) ...
r=x^2+y^2;
return (r+z^2-1)^3-r*z^3;
endfunction

>plot3d("f(x,y,z)", ...
> xmin=0,xmax=1.2,ymin=-1.2,ymax=1.2,zmin=-1.2,zmax=1.4, ...
> implicit=1,angle=-30°,zoom=2.5,n=[10,100,60],>anaglyph):
```

4.7 Plot 3D Khusus

Fungsi plot3d memang bagus, tetapi tidak memenuhi semua kebutuhan. Selain rutinitas yang lebih mendasar, Anda dapat memperoleh plot berbingkai dari objek apa pun yang Anda suka.

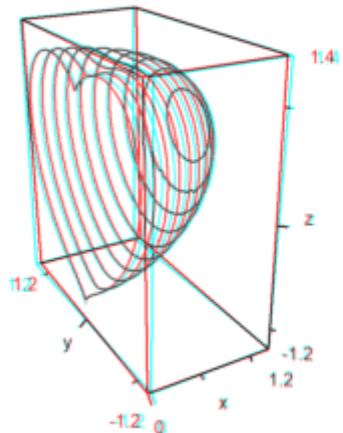
Meskipun Euler bukanlah program 3D, ia dapat menggabungkan beberapa objek dasar. Kami mencoba memvisualisasikan parabola dan garis singgungnya.

```
>function myplot ...
y=-1:0.01:1; x=(-1:0.01:1)';
plot3d(x,y,0.2*(x-0.1)/2,<scale,<frame,>hue, ...
    hues=0.5,>contour,color=orange);
h=holding(1);
plot3d(x,y,(x^2+y^2)/2,<scale,<frame,>contour,>hue);
holding(h);
endfunction
```

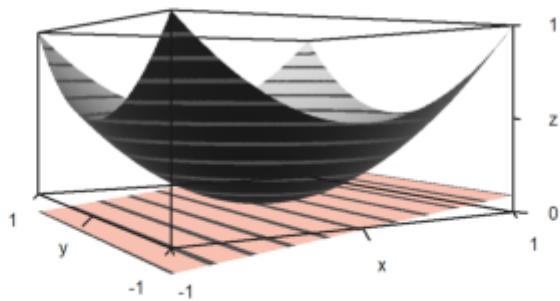
Sekarang framedplot() menyediakan bingkai dan mengatur tampilan.

```
>framedplot("myplot",[-1,1,-1,1,0,1],height=0,angle=-30°, ...
> center=[0,0,-0.7],zoom=3):
```

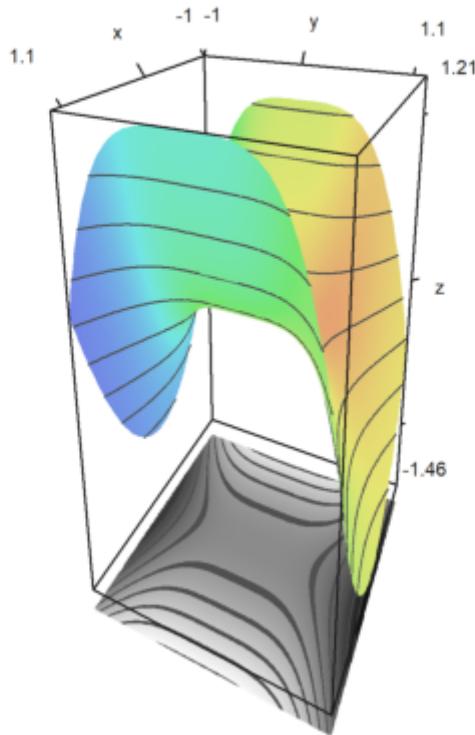
Dengan cara yang sama, Anda dapat memplot bidang kontur secara manual. Perhatikan bahwa plot3d() menetapkan jendela ke fullwindow() secara default, tetapi plotcontourplane() mengasumsikannya.



Gambar 4.50 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-061.png



Gambar 4.51 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-062.png



Gambar 4.52 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-063.png

```
>x=-1:0.02:1.1; y=x'; z=x2-y4;
>function myplot (x,y,z) ...
>
>myplot(x,y,z);
```

4.8 Animasi

Euler dapat menggunakan bingkai untuk melakukan pra-komputasi animasi.

Salah satu fungsi yang memanfaatkan teknik ini adalah rotate. Fungsi ini dapat mengubah sudut pandang dan menggambar ulang plot 3D. Fungsi ini memanggil addpage() untuk setiap plot baru. Terakhir, fungsi ini menganimasikan plot tersebut.

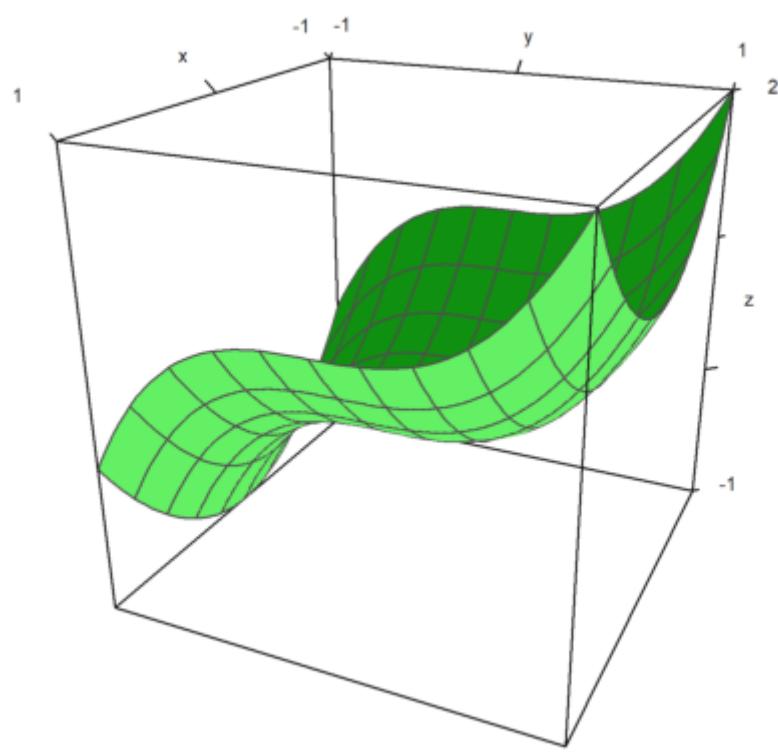
Silakan pelajari sumber rotate untuk melihat detail selengkapnya.

```
>function testplot () := plot3d("x2+y3"); ...
>rotate("testplot"); testplot();
```

4.9 Menggambar Povray

Dengan bantuan file Euler povray.e, Euler dapat membuat file Povray. Hasilnya sangat bagus untuk dilihat.

Anda perlu menginstal Povray (32bit atau 64bit) dari <http://www.povray.org/>, dan meletakkan subdirektori "bin" dari Povray ke dalam jalur lingkungan, atau mengatur variabel "defaultpovray" dengan jalur lengkap yang mengarah ke "pvengine.exe".><http://www.povray.org/>, dan



Gambar 4.53 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-064.png

meletakkan subdirektori “bin” dari Povray ke dalam jalur lingkungan, atau mengatur variabel “defaultpovray” dengan jalur lengkap yang mengarah ke “pvengine.exe”.

Antarmuka Povray dari Euler membuat file Povray di direktori home pengguna, dan memanggil Povray untuk mengurai file-file ini. Nama file default adalah current.pov, dan direktori default adalah eulerhome(), biasanya c:. Povray membuat file PNG, yang dapat dimuat oleh Euler ke dalam buku catatan. Untuk membersihkan file-file ini, gunakan povclear().

Fungsi pov3d memiliki semangat yang sama dengan plot3d. Fungsi ini dapat menghasilkan grafik fungsi $f(x,y)$, atau permukaan dengan koordinat X,Y,Z dalam matriks, termasuk garis level opsional. Fungsi ini memulai raytracer secara otomatis, dan memuat adegan ke dalam buku catatan Euler.

Selain pov3d(), ada banyak fungsi, yang menghasilkan objek Povray. Fungsi-fungsi ini mengembalikan string, yang berisi kode Povray untuk objek. Untuk menggunakan fungsi-fungsi ini, mulai file Povray dengan povstart(). Kemudian gunakan writeln(...) untuk menulis objek ke file adegan. Terakhir, akhiri file dengan povend(). Secara default, raytracer akan mulai, dan PNG akan dimasukkan ke dalam buku catatan Euler.

Fungsi objek memiliki parameter yang disebut “look”, yang memerlukan string dengan kode Povray untuk tekstur dan penyelesaian objek. Fungsi povlook() dapat digunakan untuk menghasilkan string ini. Fungsi ini memiliki parameter untuk warna, transparansi, Phong Shading, dll.

Perhatikan bahwa alam semesta Povray memiliki sistem koordinat lain. Antarmuka ini menerjemahkan semua koordinat ke sistem Povray. Jadi Anda dapat terus berpikir dalam sistem koordinat Euler dengan z menunjuk vertikal ke atas, dan sumbu x, y, z dalam arah kanan.

anda perlu memuat berkas povray.

>load povray;

Pastikan direktori bin Povray ada di jalur tersebut. Jika tidak, edit variabel berikut sehingga berisi jalur ke povray yang dapat dieksekusi.

>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"

C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe

Untuk kesan pertama, kami membuat fungsi sederhana. Perintah berikut menghasilkan file povray di direktori pengguna Anda, dan menjalankan Povray untuk melakukan ray tracing pada file ini.

Jika Anda menjalankan perintah berikut, GUI Povray akan terbuka, menjalankan file, dan menutup secara otomatis. Karena alasan keamanan, Anda akan ditanya apakah Anda ingin mengizinkan file exe untuk berjalan. Anda dapat menekan batal untuk menghentikan pertanyaan lebih lanjut. Anda mungkin harus menekan OK di jendela Povray untuk mengakui dialog awal Povray.

>plot3d("x^{2+y}2",zoom=2);

>pov3d("x^{2+y}2",zoom=3);

Kita dapat membuat fungsi tersebut transparan dan menambahkan penyelesaian lainnya. Kita juga dapat menambahkan garis level pada plot fungsi.

>pov3d("x^{2+y}3",axiscolor=red,angle=-45°,>anaglyph, ...

> look=povlook(cyan,0.2),level=-1:0.5:1,zoom=3.8);

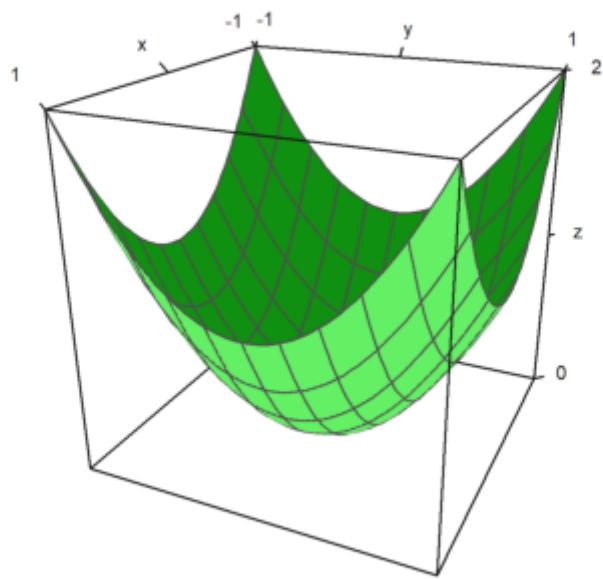
Terkadang perlu untuk mencegah penskalaan fungsi, dan menskalakan fungsi secara manual.

Kami memplot himpunan titik pada bidang kompleks, di mana hasil kali jarak ke 1 dan -1 sama dengan 1.

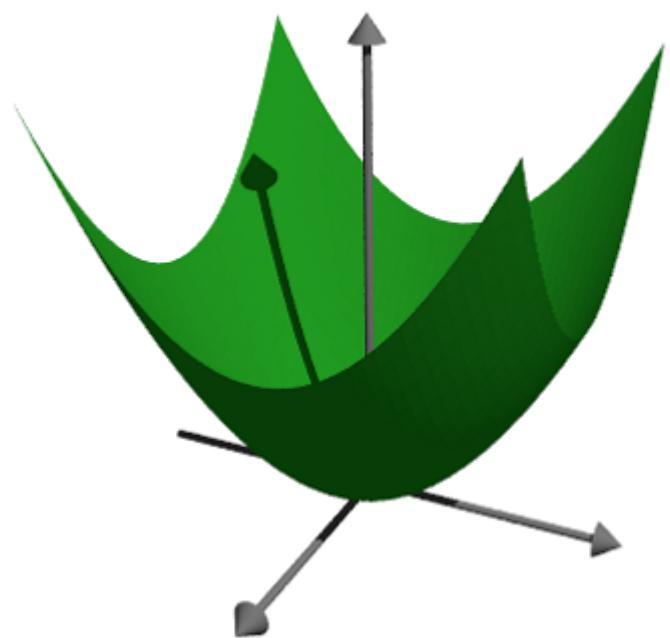
>pov3d("((x-1)^{2+y}2)*((x+1)^{2+y}2)/40",r=2, ...

> angle=-120°,level=1/40,dlevel=0.005,light=[-1,1,1],height=10°,n=50, ...

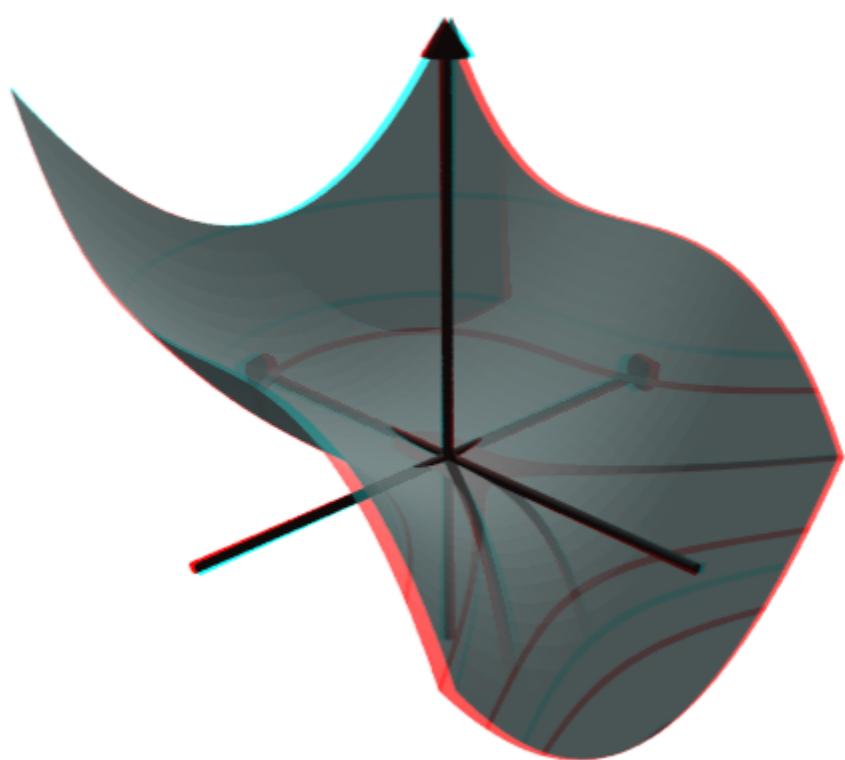
><fscale,zoom=3.8);



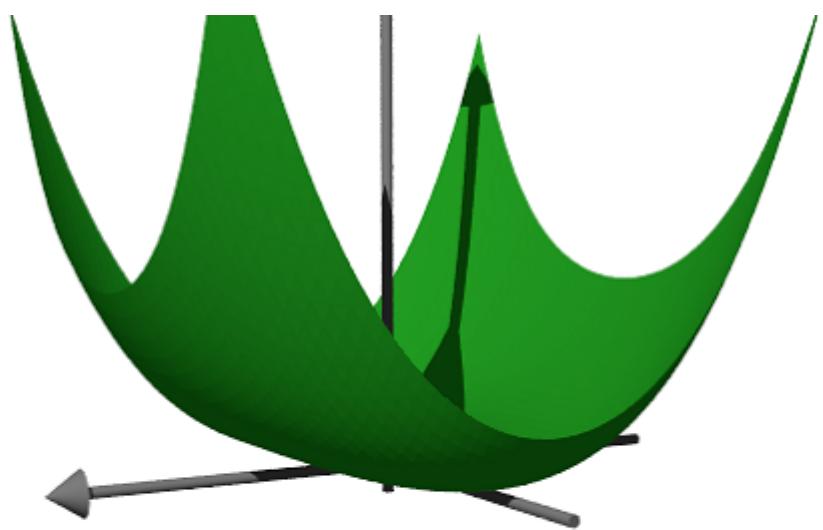
Gambar 4.54 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-065.png



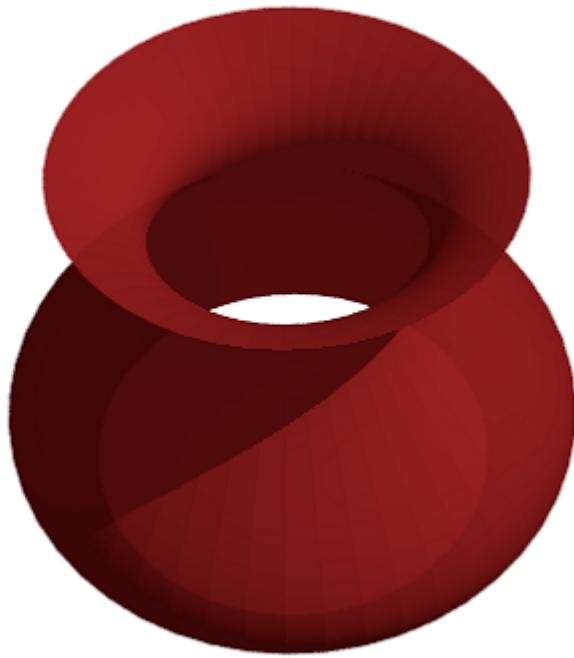
Gambar 4.55 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-066.png



Gambar 4.56 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-067.png



Gambar 4.57 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-068.png



Gambar 4.58 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-069.png

4.10 Membuat Plot dengan Koordinat

Alih-alih fungsi, kita dapat membuat plot dengan koordinat. Seperti dalam plot3d, kita memerlukan tiga matriks untuk menentukan objek.

Dalam contoh ini, kita memutar fungsi di sekitar sumbu z.

```
>function f(x) := x^3-x+1; ...
>x=-1:0.01:1; t=linspace(0,2pi,50)';
>Z=x; X=cos(t)*f(x); Y=sin(t)*f(x);
>pov3d(X,Y,Z,angle=40°,look=povlook(red,0.1),height=50°,axis=0,zoom=4,light=[10,5,15]);
```

Dalam contoh berikut, kami memplot gelombang yang direndam. Kami menghasilkan gelombang dengan bahasa matriks Euler.

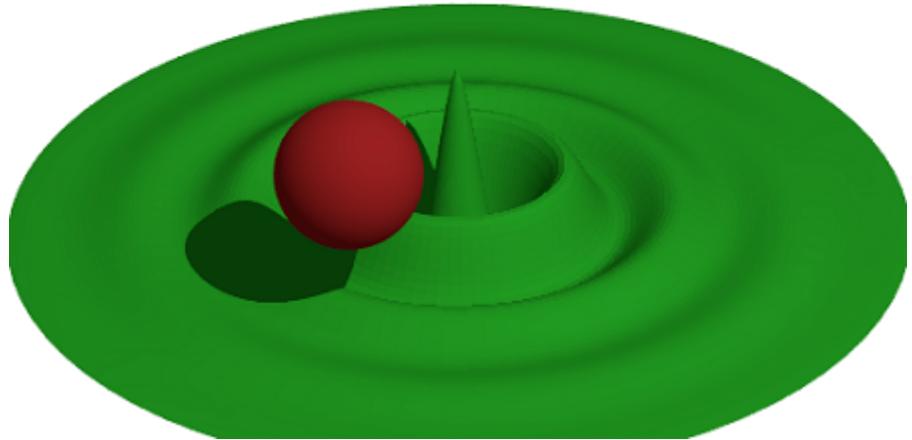
Kami juga menunjukkan, bagaimana objek tambahan dapat ditambahkan ke adegan pov3d. Untuk pembuatan objek, lihat contoh berikut. Perhatikan bahwa plot3d menskalakan plot, sehingga sesuai dengan kubus satuan.

```
>r=linspace(0,1,80); phi=linspace(0,2pi,80)';
>x=r*cos(phi); y=r*sin(phi); z=exp(-5*r)*cos(8*pi*r)/3; ...
>pov3d(x,y,z,zoom=6,axis=0,height=30°,add=povsphere([0.5,0,0.25],0.15,povlook(red)),...
>w=500,h=300);
```

Dengan metode shading Povray yang canggih, hanya sedikit titik yang dapat menghasilkan permukaan yang sangat halus. Hanya pada batas dan bayangan, triknya mungkin menjadi jelas.

Untuk ini, kita perlu menambahkan vektor normal di setiap titik matriks.

```
>Z &= x^2*y^3
```



Gambar 4.59 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-070.png

$$\begin{matrix} 2 & 3 \\ x & y \end{matrix}$$

Persamaan permukaannya adalah $[x,y,Z]$. Kita hitung dua turunan x dan y dari persamaan ini dan ambil perkalian silang sebagai normalnya.

$>dx \&= \text{diff}([x,y,Z],x); dy \&= \text{diff}([x,y,Z],y);$

Kami mendefinisikan normal sebagai perkalian silang turunan-turunan ini dan mendefinisikan fungsi koordinat.

$>N \&= \text{crossproduct}(dx,dy); NX \&= N[1]; NY \&= N[2]; NZ \&= N[3]; N,$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2x^y, -3x^y, 1 \end{bmatrix}$$

Kami hanya menggunakan 25 poin.

$>x=-1:0.5:1; y=x^3;$

$>\text{pov3d}(x,y,Z(x,y),\text{angle}=10^\circ, \dots$

$>xv=NX(x,y),yv=NY(x,y),zv=NZ(x,y), \text{<shadow});$

Berikut ini adalah simpul Trefoil yang dibuat oleh A. Busser di Povray. Ada versi yang lebih baik dari simpul ini dalam contoh-contohnya.

Lihat: [ContohTrefoil | Simpul Trefoil](#)

Untuk tampilan yang bagus dengan tidak terlalu banyak titik, kami menambahkan vektor normal di sini. Kami menggunakan Maxima untuk menghitung normal bagi kami. Pertama, tiga fungsi untuk koordinat sebagai ekspresi simbolik.

$>X \&= ((4+\sin(3*y))+\cos(x))*\cos(2*y); \dots$

$>Y \&= ((4+\sin(3*y))+\cos(x))*\sin(2*y); \dots$

$>Z \&= \sin(x)+2*\cos(3*y);$

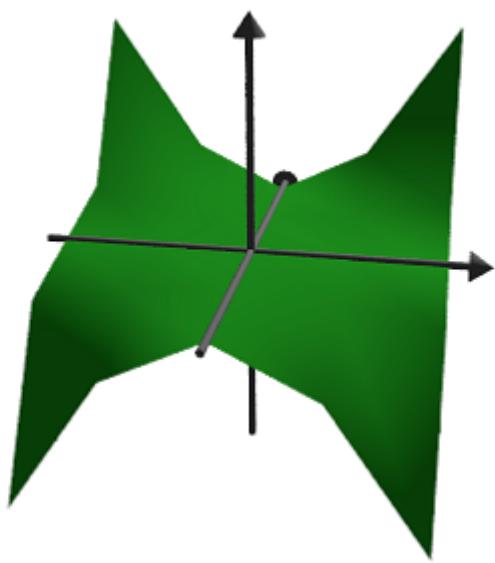
Kemudian dua vektor turunan ke x dan y .

$>dx \&= \text{diff}([X,Y,Z],x); dy \&= \text{diff}([X,Y,Z],y);$

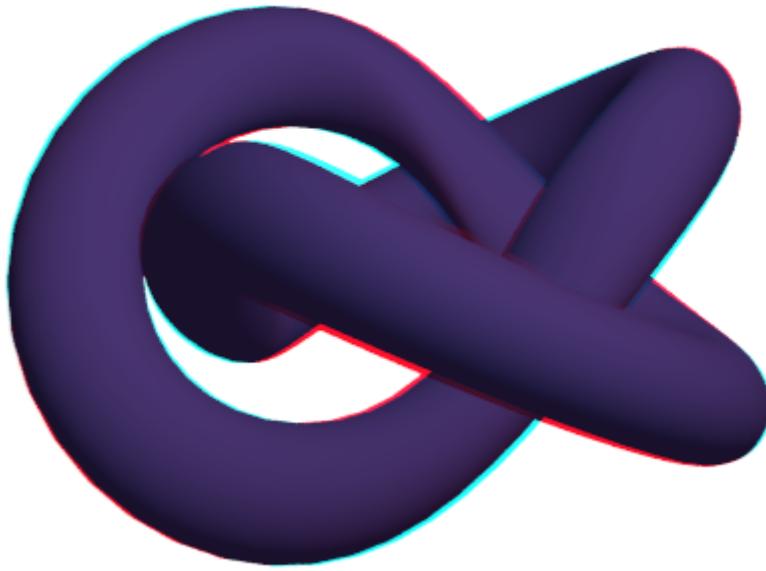
Sekarang normal, yang merupakan perkalian silang dari dua turunan.

$>dn \&= \text{crossproduct}(dx,dy);$

Sekarang mari kita evaluasi semua ini secara numerik.



Gambar 4.60 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-071.png



Gambar 4.61 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-072.png

```
>x:=linspace(-%pi,%pi,40); y:=linspace(-%pi,%pi,100)';
```

Vektor normal adalah evaluasi ekspresi simbolik $dn[i]$ untuk $i=1,2,3$. Sintaks untuk ini adalah &“ekspresi”(parameter). Ini adalah alternatif untuk metode pada contoh sebelumnya, di mana kita mendefinisikan ekspresi simbolik NX, NY, NZ terlebih dahulu.

```
>pov3d(X(x,y),Y(x,y),Z(x,y),>anaglyph,axis=0,zoom=5,w=450,h=350, ...
><shadow,look=povlook(blue), ...
>xv=&“dn[1]”(x,y), yv=&“dn[2]”(x,y), zv=&“dn[3]”(x,y));
```

Kita juga dapat membuat grid dalam 3D.

```
>povstart(zoom=4); ...
>x=-1:0.5:1; r=1-(x+1)^2/6; ...
>t=(0°:30°:360°)'; y=r*cos(t); z=r*sin(t); ...
>writeln(povgrid(x,y,z,d=0.02,dballs=0.05)); ...
>povend();
```

Dengan povgrid(), kurva dimungkinkan.

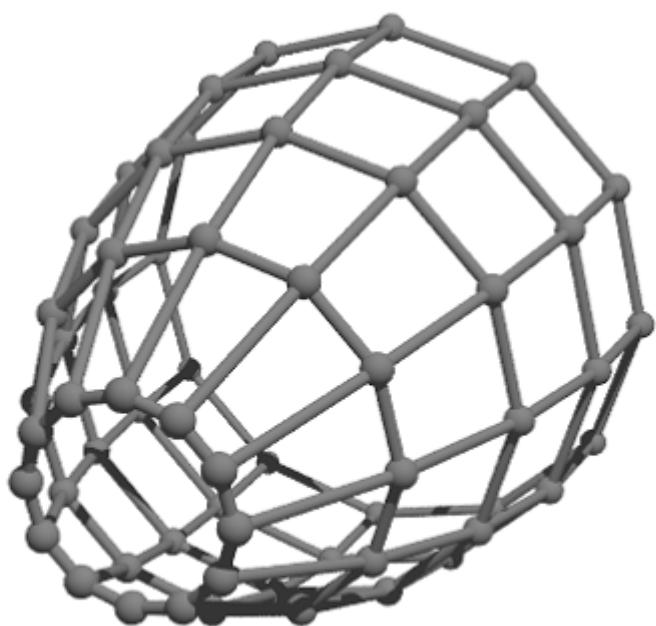
```
>povstart(center=[0,0,1],zoom=3.6); ...
>t=linspace(0,2,1000); r=exp(-t); ...
>x=cos(2*pi*10*t)*r; y=sin(2*pi*10*t)*r; z=t; ...
>writeln(povgrid(x,y,z,povlook(red))); ...
>writeAxis(0,2,axis=3); ...
>povend();
```

4.11 Objek Povray

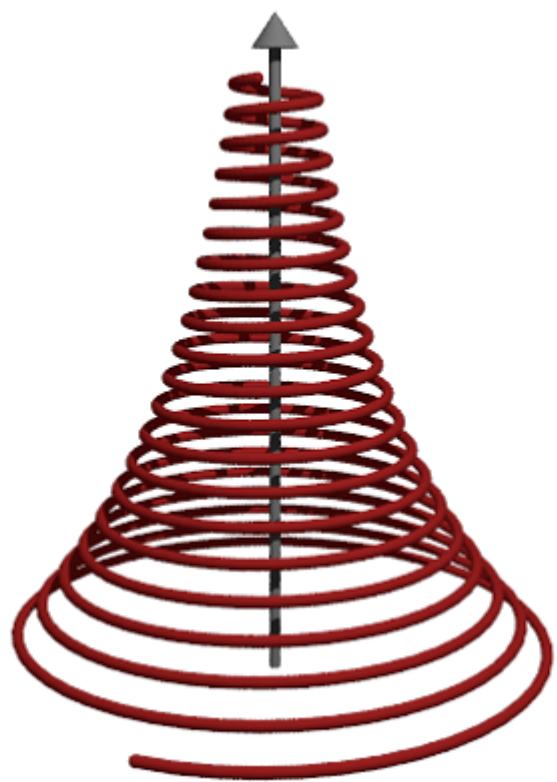
Di atas, kami menggunakan pov3d untuk memplot permukaan. Antarmuka povray di Euler juga dapat menghasilkan objek Povray. Objek-objek ini disimpan sebagai string di Euler, dan perlu ditulis ke berkas Povray.

Kami mulai output dengan povstart().

```
>povstart(zoom=4);
```



Gambar 4.62 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-073.png



Gambar 4.63 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-074.png

Pertama, kita mendefinisikan tiga silinder, dan menyimpannya dalam string di Euler.

Fungsi povx() dll. hanya mengembalikan vektor [1,0,0], yang dapat digunakan sebagai gantinya.

```
>c1=povcylinder(-povx,povx,1,povlook(red)); ...
```

```
>c2=povcylinder(-povy,povy,1,povlook(yellow)); ...
```

```
>c3=povcylinder(-povz,povz,1,povlook(blue)); ...
```

```
>
```

Rangkaian tersebut berisi kode Povray, yang tidak perlu kita pahami saat itu.

```
>c2
```

```
cylinder { <0,0,-1>, <0,0,1>, 1
texture { pigment { color rgb <0.941176,0.941176,0.392157> } }
finish { ambient 0.2 }
}
```

Seperti yang Anda lihat, kami menambahkan tekstur ke objek dalam tiga warna berbeda.

Hal itu dilakukan oleh povlook(), yang mengembalikan string dengan kode Povray yang relevan. Kita dapat menggunakan warna Euler default, atau menentukan warna kita sendiri. Kita juga dapat menambahkan transparansi, atau mengubah cahaya sekitar.

```
>povlook(rgb(0.1,0.2,0.3),0.1,0.5)
```

```
texture { pigment { color rgbf <0.101961,0.2,0.301961,0.1> } }
finish { ambient 0.5 }
```

Sekarang kita mendefinisikan objek persimpangan dan menulis hasilnya ke berkas.

```
>writeln(povintersection([c1,c2,c3]));
```

Persimpangan tiga silinder sulit dibayangkan, jika Anda belum pernah melihatnya sebelumnya.

```
>povend;
```

Fungsi-fungsi berikut menghasilkan fraktal secara rekursif.

Fungsi pertama menunjukkan bagaimana Euler menangani objek-objek Povray sederhana. Fungsi povbox() mengembalikan string yang berisi koordinat kotak, tekstur, dan hasil akhir.

```
>function onebox(x,y,z,d) := povbox([x,y,z],[x+d,y+d,z+d],povlook());
```

```
>function fractal (x,y,z,h,n) ...
```

```
>
```

```
>povstart(fade=10,<shadow);
```

```
>fractal(-1,-1,-1,2,4);
```

```
>povend();
```

Perbedaan memungkinkan pemisahan satu objek dari objek lainnya. Seperti halnya persimpangan, ada beberapa objek CSG dari Povray.

```
>povstart(light=[5,-5,5],fade=10);
```

Untuk demonstrasi ini, kami mendefinisikan objek dalam Povray, alih-alih menggunakan string dalam Euler. Definisi langsung ditulis ke berkas.

Koordinat kotak -1 berarti [-1,-1,-1].

```
>povdefine("mycube",povbox(-1,1));
```

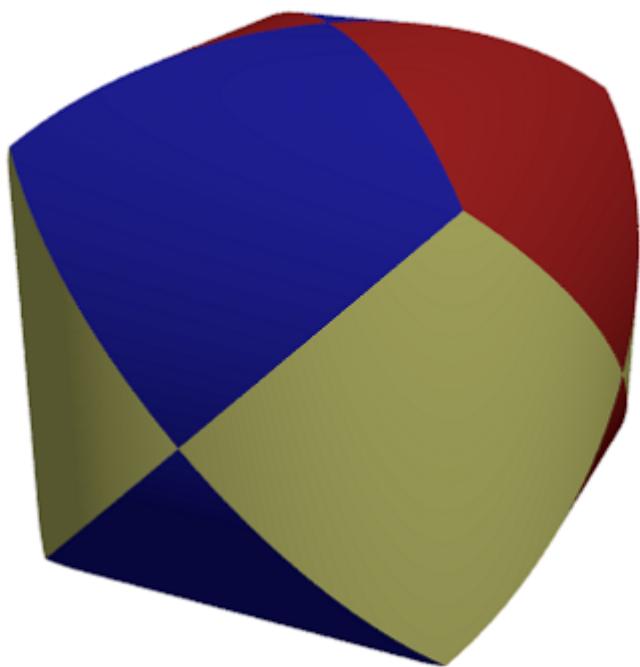
Kita dapat menggunakan objek ini dalam povobject(), yang mengembalikan string seperti biasa.

```
>c1=povobject("mycube",povlook(red));
```

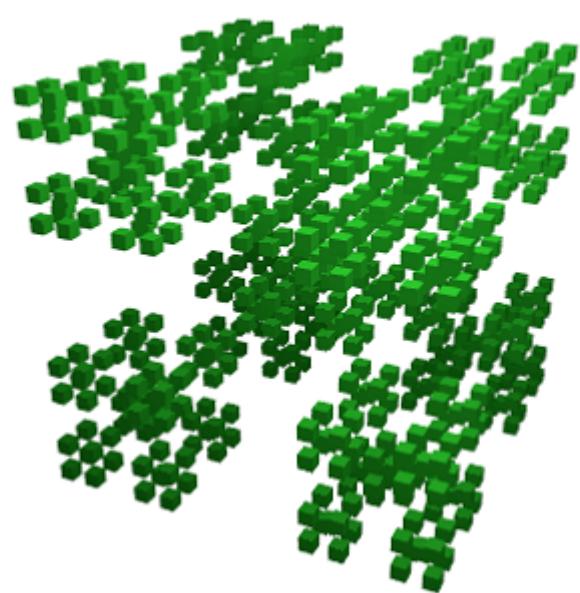
Kita buat kubus kedua, lalu putar dan ubah skalanya sedikit.

```
>c2=povobject("mycube",povlook(yellow),translate=[1,1,1], ...
```

```
>rotate=xrotate(10°)+yrotate(10°), scale=1.2);
```



Gambar 4.64 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-075.png



Gambar 4.65 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-076.png

Lalu kita ambil selisih kedua benda tersebut.

```
>writeln(povdifference(c1,c2));
Sekarang tambahkan tiga sumbu.
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=1); ...
> writeAxis(-1.2,1.2,axis=2); ...
> writeAxis(-1.2,1.2,axis=4); ...
> povend();

Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

4.12 Fungsi Implisit

Povray dapat memplot himpunan di mana $f(x,y,z)=0$, sama seperti parameter implisit dalam plot3d. Namun, hasilnya terlihat jauh lebih baik.

Sintaks untuk fungsi-fungsi tersebut sedikit berbeda. Anda tidak dapat menggunakan output dari ekspresi Maxima atau Euler.

$$((x^2 + y^2 - c^2)^2 + (z^2 - 1)^2) * ((y^2 + z^2 - c^2)^2 + (x^2 - 1)^2) * ((z^2 + x^2 - c^2)^2 + (y^2 - 1)^2) = d$$

```
>povstart(angle=70°,height=50°,zoom=4);
>c=0.1; d=0.1; ...
>           writeln(povsurface("pow(pow(x,2)+pow(y,2)-pow(c,2),2)+pow(pow(z,2)-1,2)*(pow(pow(y,2)+pow(z,2)-pow(c,2),2)+pow(pow(x,2)-1,2))*(pow(pow(z,2)+pow(x,2)-pow(c,2),2)+pow(po
>povend();
>povstart(angle=25°,height=10°);
>writeln(povsurface("pow(x,2)+pow(y,2)*pow(z,2)-1",povlook(blue),povbox(-2,2,"")));
>povend();
>povstart(angle=70°,height=50°,zoom=4);
Buat permukaan implisit. Perhatikan sintaksis yang berbeda dalam ekspresi.
>writeln(povsurface("pow(x,2)*y-pow(y,3)-pow(z,2)",povlook(green))); ...
> writeAxes(); ...
> povend();
```

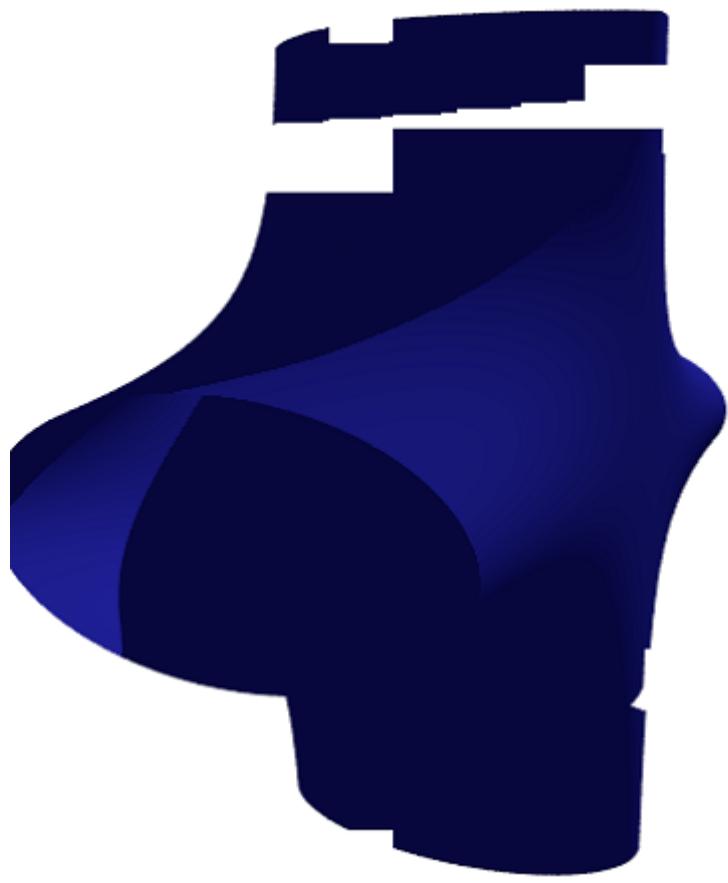
4.13 Objek Mesh

Dalam contoh ini, kami menunjukkan cara membuat objek mesh, dan menggambarnya dengan informasi tambahan.

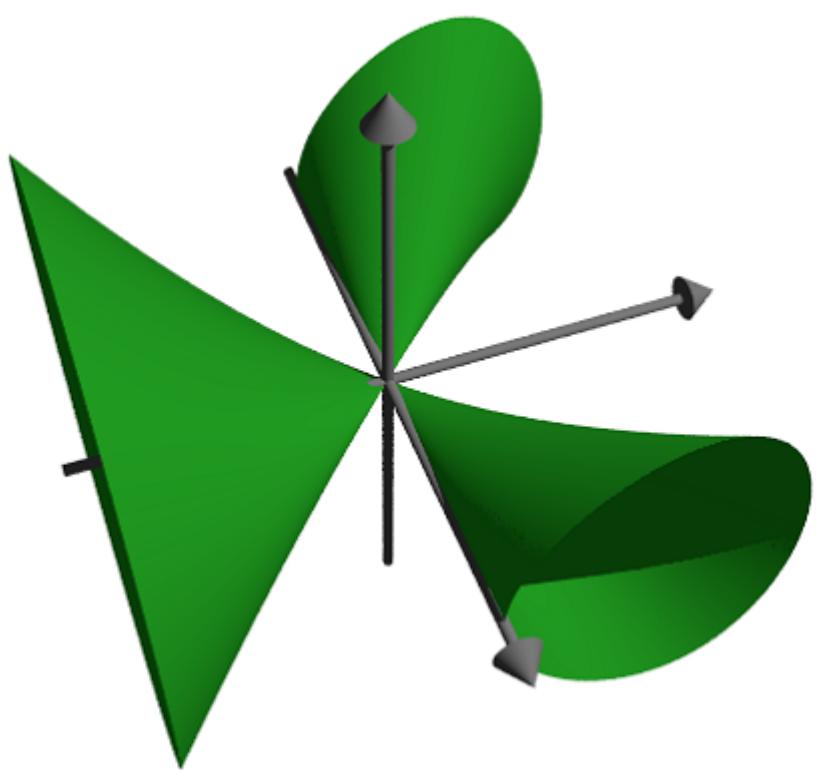
Kami ingin memaksimalkan xy dalam kondisi $x+y=1$ dan menunjukkan sentuhan tangensial garis-garis level.

```
>povstart(angle=-10°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=7);
```

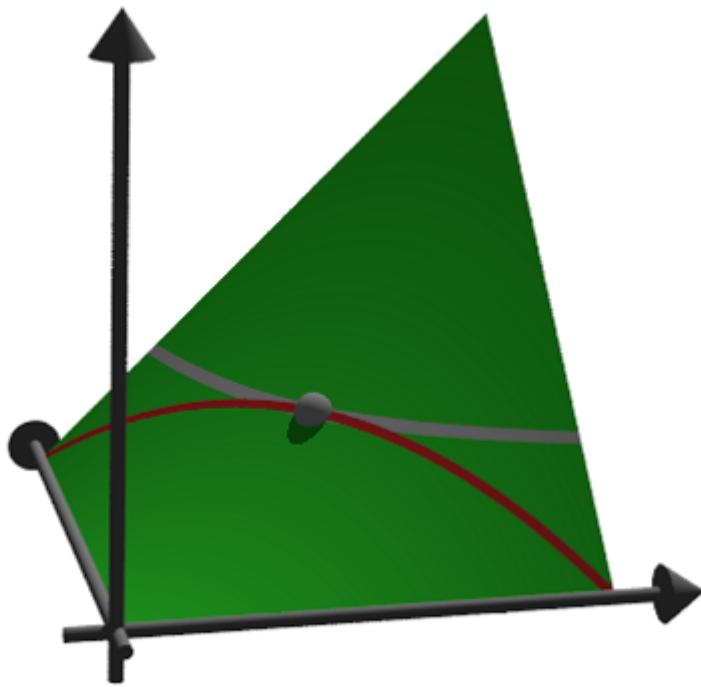
Kita tidak dapat menyimpan objek dalam string seperti sebelumnya, karena terlalu besar. Jadi



Gambar 4.66 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-078.png



Gambar 4.67 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-079.png



Gambar 4.68 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-080.png

kita mendefinisikan objek dalam file Povray menggunakan #declare. Fungsi povtriangle() melakukan ini secara otomatis. Fungsi ini dapat menerima vektor normal seperti pov3d().

Berikut ini mendefinisikan objek mesh, dan langsung menuliskannya ke dalam file.

```
>x=0:0.02:1; y=x'; z=x*y; vx=-y; vy=-x; vz=1;
```

```
>mesh=povtriangles(x,y,z,"",vx,vy,vz);
```

Sekarang kita definisikan dua cakram, yang akan berpotongan dengan permukaan.

```
>cl=povdisc([0.5,0.5,0],[1,1,0],2); ...
```

```
> ll=povdisc([0,0,1/4],[0,0,1],2);
```

Tuliskan permukaan dikurangi kedua cakram.

```
>writeln(povdifference(mesh,povunion([cl,ll]),povlook(green)));
```

Tuliskan dua titik potongnya.

```
>writeln(povintersection([mesh,cl],povlook(red))); ...
```

```
> writeln(povintersection([mesh,ll],povlook(gray)));
```

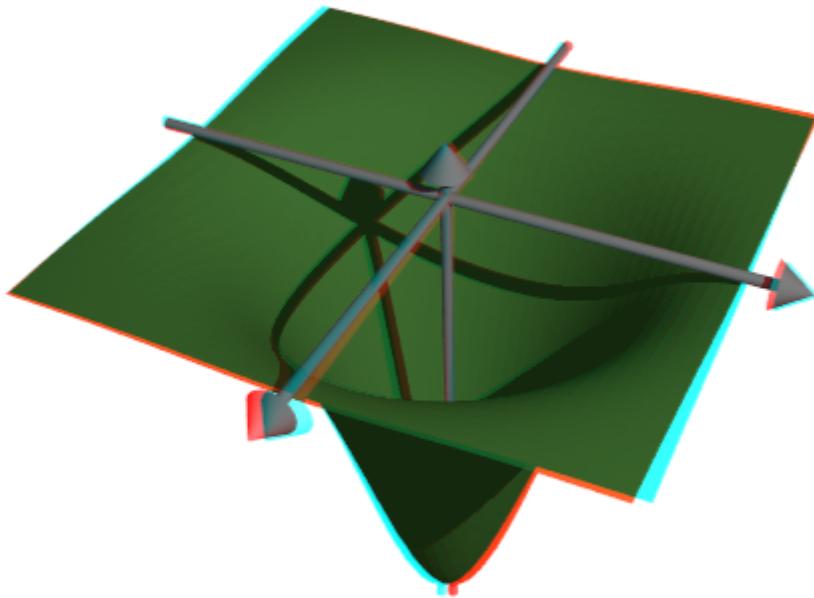
Tuliskan titik maksimumnya.

```
>writeln(povpoint([1/2,1/2,1/4],povlook(gray),size=2*defaultpointszie));
```

Tambahkan sumbu dan selesaikan.

```
>writeAxes(0,1,0,1,0,1,d=0.015); ...
```

```
> povend();
```



Gambar 4.69 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-081.png

4.14 Anaglif dalam Povray

Untuk menghasilkan anaglif untuk kacamata merah/sian, Povray harus dijalankan dua kali dari posisi kamera yang berbeda. Ia menghasilkan dua file Povray dan dua file PNG, yang dimuat dengan fungsi loadanaglyph().

Tentu saja, Anda memerlukan kacamata merah/sian untuk melihat contoh berikut dengan benar.

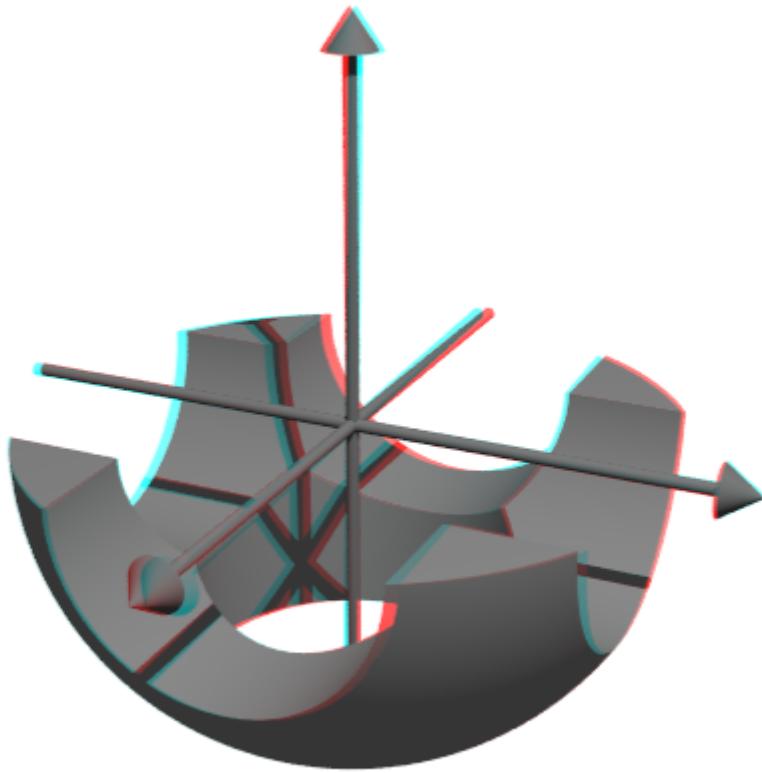
Fungsi pov3d() memiliki sakelar sederhana untuk menghasilkan anaglif.

```
>pov3d("-exp(-x2-y2)/2",r=2,height=45°,>anaglyph,...  
>center=[0,0,0.5],zoom=3.5);
```

Jika Anda membuat suatu pemandangan dengan objek, Anda perlu memasukkan pembuatan pemandangan tersebut ke dalam suatu fungsi, dan menjalankannya dua kali dengan nilai yang berbeda untuk parameter anaglyph.

```
>function myscene ...
```

```
s=povsphere(povc,1);  
cl=povcylinder(-povz,povz,0.5);  
clk=povobject(cl,rotate=xrotate(90°));  
cly=povobject(cl,rotate=yrotate(90°));  
c=povbox([-1,-1,0],1);  
un=povunion([cl,clk,cly,c]);  
obj=povdifference(s,un,povlook(red));  
writeln(obj);  
writeAxes();
```



Gambar 4.70 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-082.png

```
endfunction
```

Fungsi povanaglyph() melakukan semua ini. Parameternya seperti pada povstart() dan povend() yang digabungkan.

```
>povanaglyph("myscene",zoom=4.5);
```

4.15 Menentukan Objek Sendiri

Antarmuka povray Euler berisi banyak objek. Namun, Anda tidak terbatas pada objek-objek ini. Anda dapat membuat objek sendiri, yang menggabungkan objek lain, atau objek yang sama sekali baru.

Kami mendemonstrasikan sebuah torus. Perintah Povray untuk ini adalah "torus". Jadi, kami mengembalikan string dengan perintah ini dan parameternya. Perhatikan bahwa torus selalu berpusat di titik asal.

```
>function povdonat (r1,r2,look="") ...
```

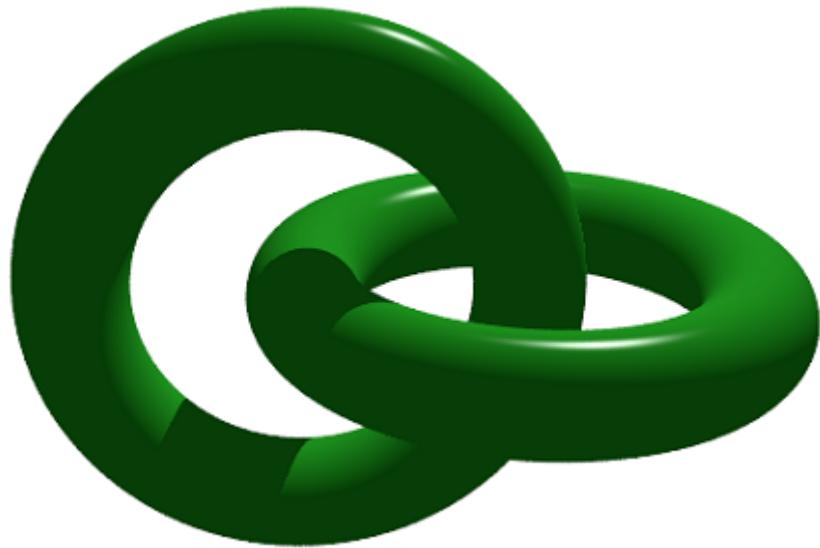
```
    return "torus {" + r1 + ", " + r2 + look + "} ";
endfunction
```

Inilah torus pertama kita.

```
>t1=povdonat(0.8,0.2)
```

```
torus {0.8, 0.2}
```

Mari kita gunakan objek ini untuk membuat torus kedua, diterjemahkan dan diputar.



Gambar 4.71 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-083.png

```
>t2=povobject(t1,rotate=xrotate(90°),translate=[0.8,0,0])
object { torus { 0.8, 0.2 }
rotate 90 *x
translate <0.8, 0, 0>;
}
```

Sekarang kita tempatkan objek-objek ini ke dalam sebuah scene. Untuk tampilannya, kita gunakan Phong Shading.

```
>povstart(center=[0.4,0,0],angle=0°,zoom=3.8,aspect=1.5); ...
> writeln(povobject(t1,povlook(green,phong=1))); ...
> writeln(povobject(t2,povlook(green,phong=1))); ...
>
>povend();
```

memanggil program Povray. Namun, jika terjadi kesalahan, program tersebut tidak menampilkan kesalahan tersebut. Oleh karena itu, Anda harus menggunakan

```
>povend(<exit);
jika ada yang tidak berhasil. Ini akan membiarkan jendela Povray terbuka.
>povend(h=320,w=480);
```

Berikut adalah contoh yang lebih rinci. Kami memecahkan

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad c.x \rightarrow \text{Max.}$$

dan menunjukkan titik-titik yang layak dan titik-titik optimum dalam plot 3D.

```
>A=[10,8,4;5,6,8;6,3,2;9,5,6];
>b=[10,10,10,10]';
>c=[1,1,1];
```

Pertama, mari kita periksa, apakah contoh ini punya solusi.

```
>x=simplex(A,b,c,>max,>check)'
```

```
[ 0,    1,    0.5 ]
```

Ya, benar.

Berikutnya kita mendefinisikan dua objek. Yang pertama adalah bidang datar

$$a \cdot x \leq b$$

```
>function oneplane (a,b,look="") ...
```

```
    return povplane (a,b,look)
endfunction
```

Kemudian kita mendefinisikan irisan semua ruang setengah dan sebuah kubus.

```
>function adm (A, b, r, look="") ...
```

```
ol=[];
loop 1 to rows (A); ol=ol|oneplane (A[#],b[#]); end;
ol=ol|povbox ([0,0,0],[r,r,r]);
return povintersection (ol,look);
endfunction
```

Sekarang, kita dapat merencanakan adegannya.

```
>povstart(angle=120°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=3.5); ...
```

```
> writeln(adm(A,b,2,povlook(green,0.4))); ...
```

```
> writeAxes(0,1.3,0,1.6,0,1.5); ...
```

```
>
```

Berikut ini adalah lingkaran di sekitar titik optimum.

```
>writeln(povintersection([povsphere(x,0.5),povplane(c,c.x')], ...
```

```
> povlook(red,0.9)));
```

Dan kesalahan dalam arah yang optimum.

```
>writeln(povarrow(x,c*0.5,povlook(red)));
```

Kita menambahkan teks ke layar. Teks hanyalah objek 3D. Kita perlu menempatkan dan memutarnya sesuai dengan pandangan kita.

```
>writeln(povtext("Linear Problem",[0,0.2,1.3],size=0.05,rotate=5°)); ...
```

```
> povend();
```

4.16 Contoh Lainnya

Anda dapat menemukan beberapa contoh lainnya untuk Povray di Euler dalam berkas berikut.

Lihat: Contoh/Bola Dandelin

Lihat: Contoh/Donat Math

Lihat: Contoh/Simpul Trefoil

Lihat: Contoh/Optimasi dengan Penskalaan Afinitas

4.17 Latihan

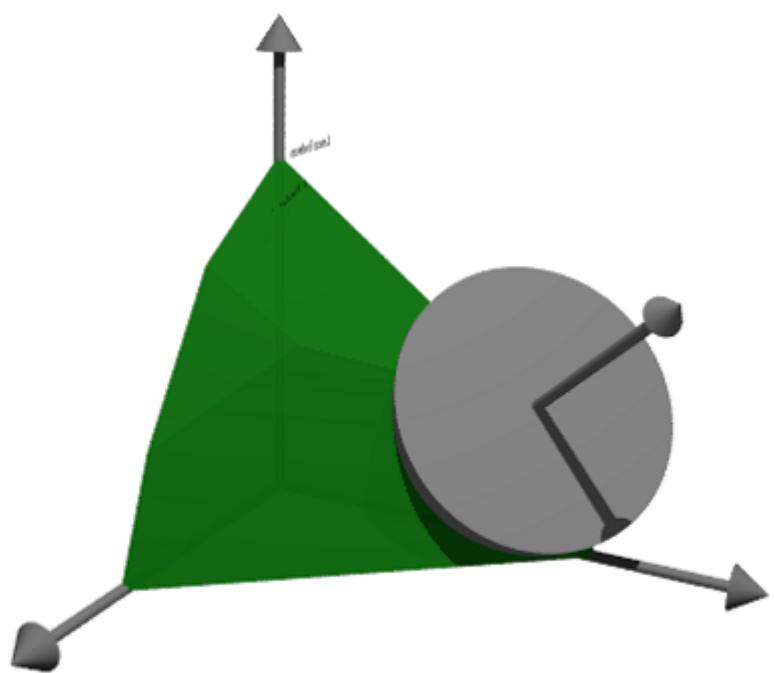
Soal 1

Diberikan tiga garis pada bidang xy, yaitu:

a. garis g1 melalui titik (0,0) dan (1,a)

b. garis g2 melalui titik (0,0) dan (-1,a)

c. garis g melalui titik (-1,0) dan (1,1)



Gambar 4.72 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-086.png

dengan $a=2$, tentukan dua lingkaran yang pusatnya berada pada sumbu y dan setiap titik pada lingkaran tersebut memiliki jarak yang sama terhadap garis g_1 dan garis g

jawab:

Memuat modul geometri untuk melakukan operasi geometris seperti menggambar garis, lingkaran, dan menghitung jarak di dalam perangkat lunak yang digunakan (misalnya, Euler Math Toolbox atau sejenisnya).

>load geometry;

Mendefinisikan garis g_1 yang melalui dua titik: $(0,0)$ dan $(1,a)$. nilai a belum ditentukan pada tahap ini

> $g_1 \&= \text{lineThrough}([0,0],[1,a])$

$$[- \ a, \ 1, \ 0]$$

mendefinisikan garis g_2 yang melalui dua titik: $(0,0)$ dan $(-1,a)$

> $g_2 \&= \text{lineThrough}([0,0],[-1,a])$

$$[- \ a, \ - 1, \ 0]$$

mendefinisikan garis g yang melalui dua titik: $(-1,0)$ dan $(1,1)$

> $g \&= \text{lineThrough}([-1,0],[1,1])$

$$[- \ 1, \ 2, \ 1]$$

Mengatur rentang sumbu x dari -1 hingga 1 dan sumbu y dari 0 hingga 2 pada grafik.

> $\text{setPlotRange}(-1,1,0,2);$

Mengatur warna garis menjadi hitam dan menggambar garis di grafik.

> $\text{color(black); plotLine}(g(),““)$

Menetapkan nilai $a=2$, mengatur warna menjadi biru, dan menggambar garis g_1 dan g_2 di grafik.

> $a:=2; \text{color(blue); plotLine}(g_1(),““), \text{plotLine}(g_2(),““):$

Mendefinisikan titik P pada sumbu y dengan koordinat $(0,u)$. titik P adalah pusat lingkaran yang akan dicari.

> $P \&= [0,u]$

$$[0, \ u]$$

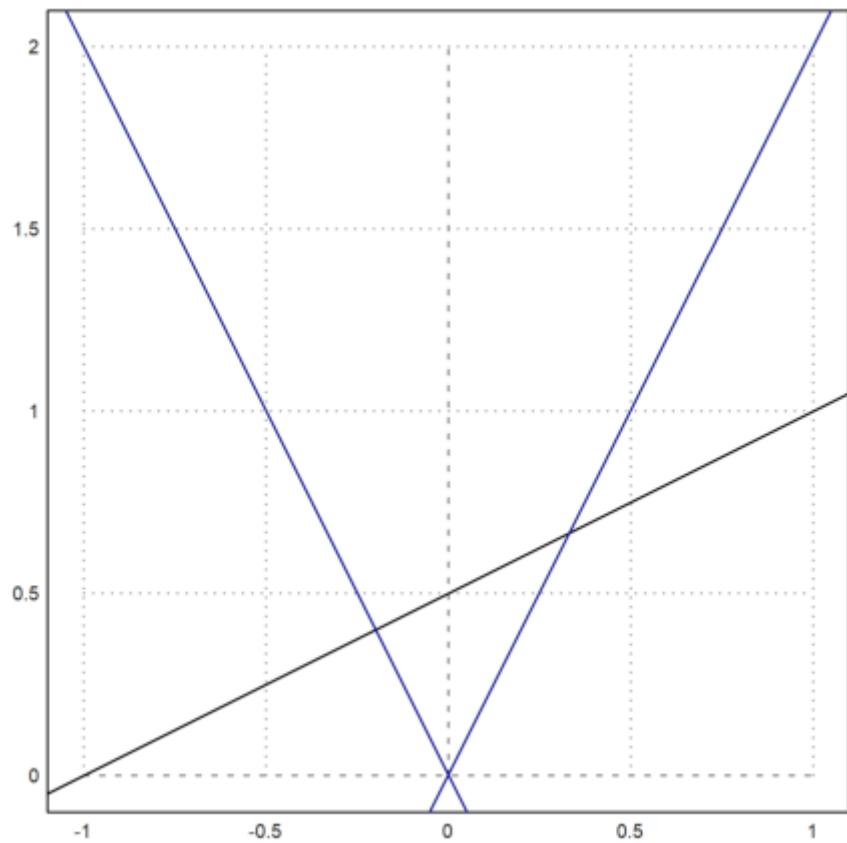
menghitung jarak d_1 antara titik P dan proyeksinya ke garis g_1 . proyeksi ini adalah titik terdekat di garis g_1 dari titik P

> $d_1 \&= \text{distance}(P,\text{projectToLine}(P,g_1))$

$$\begin{aligned} &\frac{2}{a-u} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{2}{a-u} \\ &\sqrt{\left(\frac{2}{a+1}\right)^2 + \left(\frac{2}{a+1}\right)^2} \end{aligned}$$

menghitung jarak d antara titik P dan proyeksinya ke garis g

> $d \&= \text{distance}(P,\text{projectToLine}(P,g))$



Gambar 4.73 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-087.png

$$\sqrt{\frac{u^2 + 2u - 1}{5}} = \sqrt{\frac{(2u-1)^2}{25}}$$

memecahkan persamaan $d1^2 = d2^2$ untuk mencari nilai u, yaitu koordinat y dari titik p dimana jaraknya kegaris g1 sama dengan jaraknya kegaris g.

>sol &= solve(d1^2=d2,u)

$$[u = \frac{-\sqrt{5}\sqrt{a^2+1} + 2a + 2}{4a^2 - 1}, u = \frac{\sqrt{5}\sqrt{a^2+1} + 2a + 2}{4a^2 - 1}]$$

Menetapkan solusi dari persamaan yang diselesaikan sebelumnya ke variabel u.

>u := sol()

[0.333333, 1]

menghitung jarak d untuk nilai u yang diperoleh dari solusi

>dd := d()

[0.149071, 0.447214]

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimg;
```

Soal 2

buatkan grafik plot implisit

$$x^2 + y^2 + 7xz + 4z^2$$

>plot3d("x^2+y^2+5*x*z+3*z^3",>implicit,r=2,zoom=2.2):

Soal 3

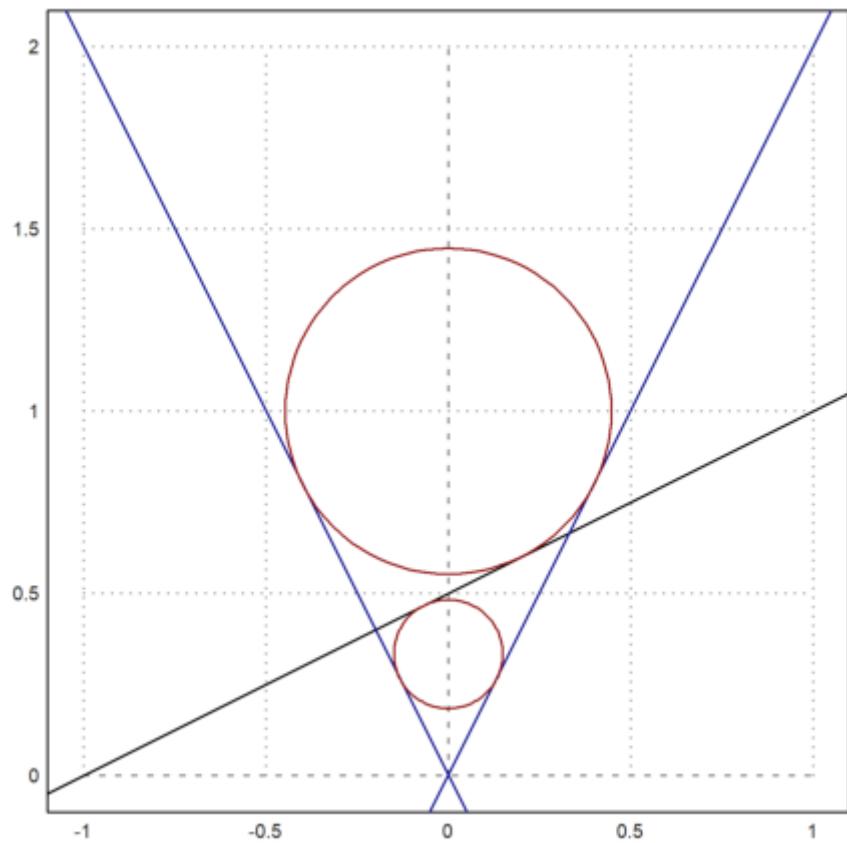
```
>x:=(4*(1+.4*sin(5*v))+cos(u))*cos(2*v); ...
>y:=(4*(1+.4*sin(5*v))+cos(u))*sin(2*v); z=sin(u)+2*cos(5*v); ...
>plot3d(x,y,z,frame=0,scale=1.5,hue=1,light=[1,0,-1], ...
>zoom=3,anaglyph=1):
```

Soal 4

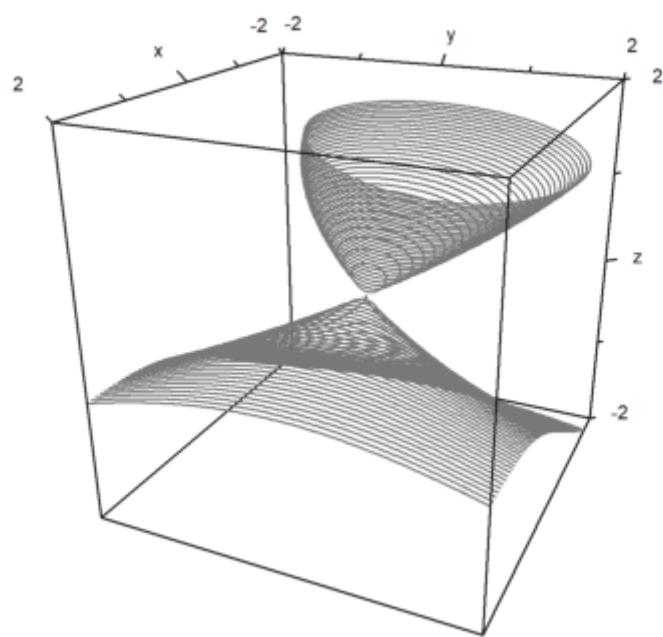
Diberikan fungsi linear

$$g(x) = 1.5x + 0.2$$

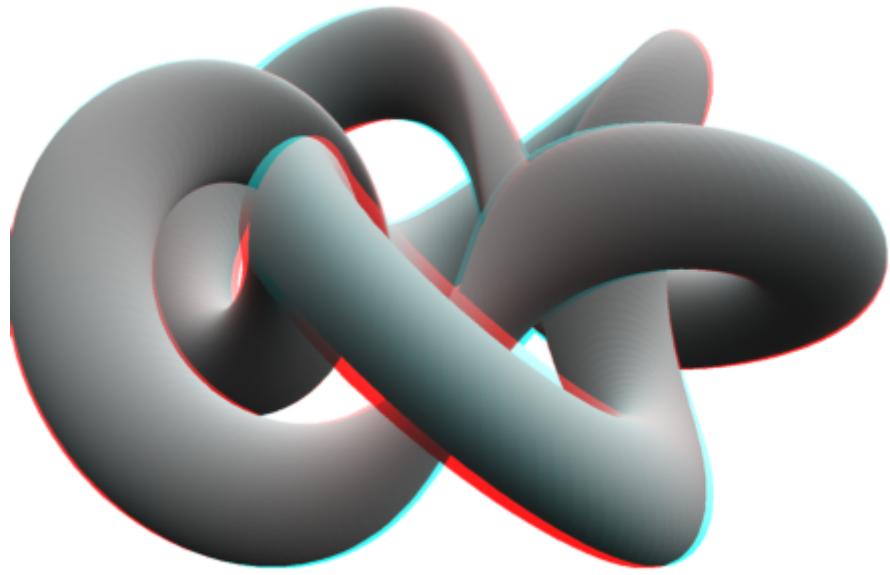
memodelkan hubungan antara variabel



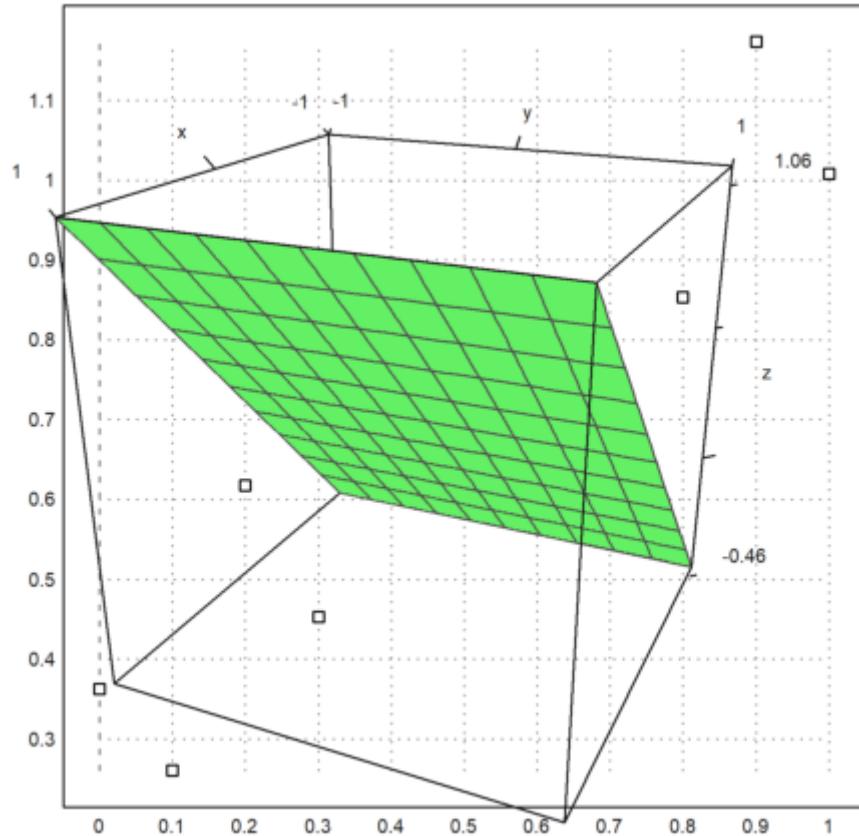
Gambar 4.74 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-088.png



Gambar 4.75 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-090.png



Gambar 4.76 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-091.png



Gambar 4.77 images/EMT4Plot3D_23030630084_Amalia%20Rahmadhani-093.png

x dan dengan menambahkan sedikit variasi acak pada nilai- nilai. Selanjutnya, carilah regresi linear untuk mendekati hubungan antara dan menggunakan pemodelan polinomial derajat 1.

```
>function f(x) := 0.8*x+0.1; // correct function
>x=0:0.1:1; y=f(x)+random(cols(x))*0.4; // random values
>plot2d(x,y,>points); // plot values
>p=polyfit(x,y,1) // fit with polynomial of degree 1
[0.303192, 0.761032]

>plot3d("polyval(p,x)",>add,color=red); // add fit to plot
```

BAB V

KALKULUS DENGAN EMT

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:

- Fungsi (fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi)
- Limit Fungsi,
- Turunan Fungsi,
- Integral Tak Tentu,
- Integral Tentu dan Aplikasinya,
- Barisan dan Deret (kekonvergenan barisan dan deret).

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).

5.1 Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:

- Menggunakan format `nama_fungsi := rumus fungsi` (untuk fungsi numerik),
- Menggunakan format `nama_fungsi &= rumus fungsi` (untuk fungsi simbolik, namun dapat dihitung secara numerik),
- Menggunakan format `nama_fungsi &&= rumus fungsi` (untuk fungsi simbolik murni, tidak dapat dihitung langsung),
- Fungsi sebagai program EMT.

Setiap format harus diawali dengan perintah `function` (bukan sebagai ekspresi).

Berikut adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi:

$$f(x) = 2x^2 + e^{\sin(x)}.$$

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik
```

```
>f(0), f(1), f(pi)
```

```
1  
4.31977682472  
20.7392088022
```

```
>f(a) // tidak dapat dihitung nilainya
```

```
Variable or function a not found.
```

```
Error in:
```

```
f(a) // tidak dapat dihitung nilainya ...  
^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

Berikutnya kita definisikan fungsi:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x + 1}.$$

```
>function g(x) := sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
```

```
>g(3)
```

0

```
>g(0)
```

0

```
>g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik
```

Floating point error!

Error in sqrt

Try "trace errors" to inspect local variables after errors.

g:

```
useglobal; return sqrt (x^2-3*x) / (x+1)
```

Error in:

```
g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik ...  
^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

```
>f(g(5)) // komposisi fungsi
```

2.20920171961

```
>g(f(5))
```

0.950898070639

```
>function h(x) := f(g(x)) // definisi komposisi fungsi
```

```
>h(5) // sama dengan f(g(5))
```

2.20920171961

Silakan Anda plot kurva fungsi komposisi fungsi f dan g:

$$h(x) = f(g(x))$$

dan

$$u(x) = g(f(x))$$

bersama-sama kurva fungsi f dan g dalam satu bidang koordinat.

```
>f(0:10) // nilai-nilai f(0), f(1), f(2), ..., f(10)
```

```
[1, 4.31978, 10.4826, 19.1516, 32.4692, 50.3833, 72.7562,  
99.929, 130.69, 163.51, 200.58]
```

```
>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi
```

```
[1, 4.31978, 10.4826, 19.1516, 32.4692, 50.3833, 72.7562,  
99.929, 130.69, 163.51, 200.58]
```

```
>gmap(200:210)
```

```
[0.987534, 0.987596, 0.987657, 0.987718, 0.987778, 0.987837,  
0.987896, 0.987954, 0.988012, 0.988069, 0.988126]
```

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0. \end{cases}$$

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara “inline” menggunakan format :=, melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata “map” digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata “map” fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

```
>function map f(x) ...
```

```
if x>0 then return x^3  
else return x^2  
endif;  
endfunction
```

```
>f(1)
```

```
1
```

```
>f(-2)
```

```
4
```

```
>f(-5:5)
```

```
[25, 16, 9, 4, 1, 0, 1, 8, 27, 64, 125]
```

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)", -5, 5):  
>function f(x) &= 2*E^x // fungsi simbolik
```

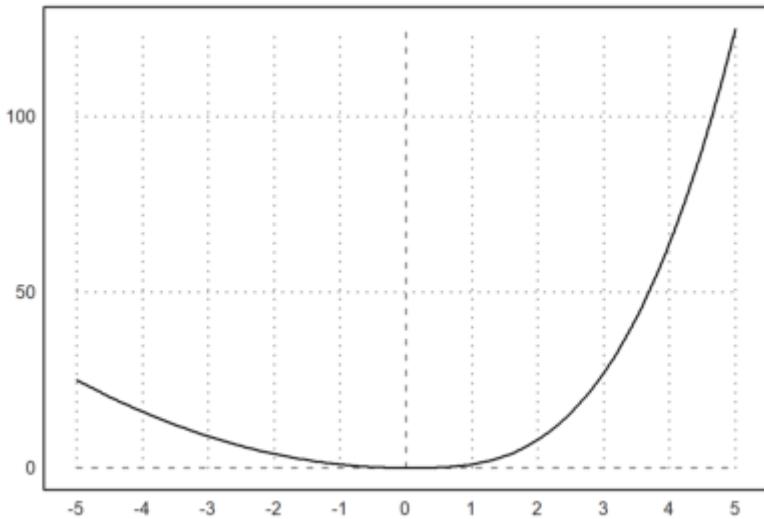
$$\begin{matrix} x \\ 2^x \end{matrix}$$

```
>$f(a) // nilai fungsi secara simbolik
```

$$2e^a$$

```
>f(E) // nilai fungsi berupa bilangan desimal
```

```
30.308524483
```



Gambar 5.1 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-006.png

```
>$f(E), $float(%)
```

30.30852448295852

30.30852448295852

```
>function g(x) &= 3*x+1
```

$3 \ x + 1$

```
>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi
```

$\frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2}$

```
>plot2d("h(x)",-1,1):
```

5.2 Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan fungsi-fungsi tersebut dan komposisinya di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung beberapa nilainya, baik untuk satu nilai maupun vektor. Gambar grafik fungsi-fungsi tersebut dan komposisi-komposisi 2 fungsi.

Juga, carilah fungsi beberapa (dua) variabel. Lakukan hal sama seperti di atas.

- fungsi aljabar

diberikan fungsi aljabar

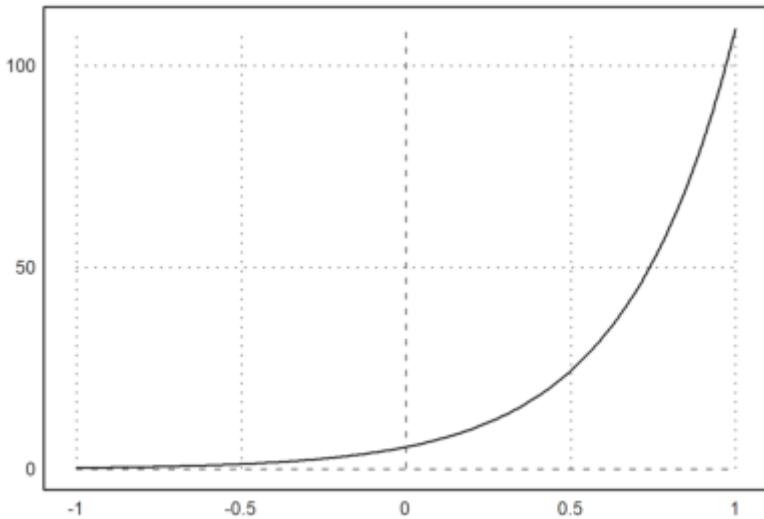
$$f(x) : x^3 + y^3 - 3xy$$

mendefinisikan sebuah fungsi aljabar dua variabel

```
>function f(x,y):= x^3 + y^3 - 3*x*y;
```

menghitung nilai fungsi untuk $x=2$ dan $y=3$.

```
>f(2,3)
```



Gambar 5.2 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-010.png

17

menghitung turunan parsial fungsi terhadap x dan terhadap y, lalu Menyimpan hasil turunan dalam bentuk vektor

>dx &= diff([x,y],x)

$$[1, 0]$$

>dy &= diff([x,y],y)

$$[0, 1]$$

memvisualisasikan fungsi dalam bentuk permukaan 3D dalam rentang dan y dari -5 hingga 5.

>plot3d("x^3 + y^3 - 3*x*y", -5, 5, -5, 5);

2. fungsi Trigonometri

diberikan fungsi trigonometri

$$f(x, y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

mendefinisikan fungsi

>function f(x,y):= sin(x)*cos(y) - cos(x)*sin(y);

>f(pi/3, pi/6)

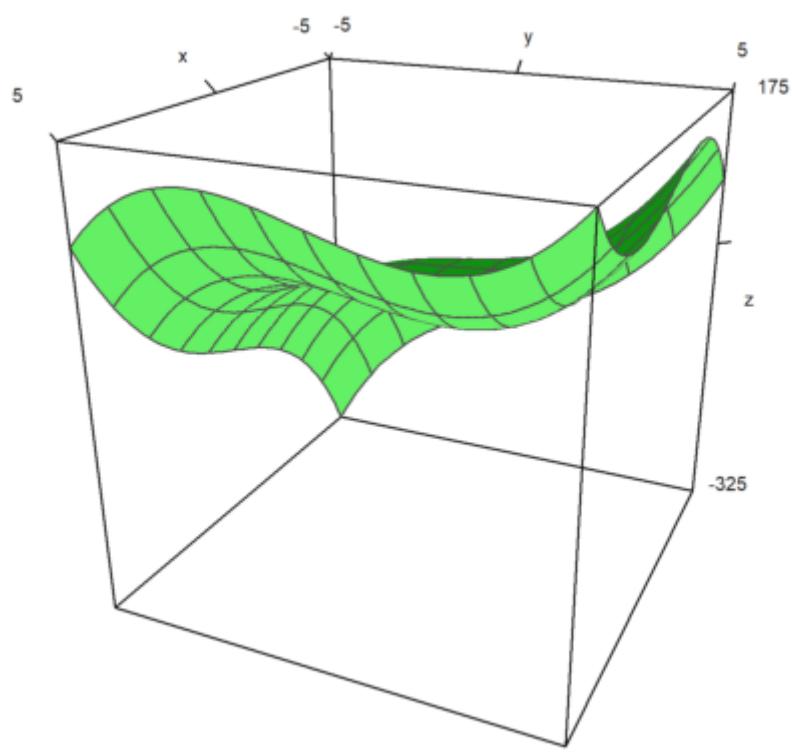
0 . 5

Menghitung turunan parsial f terhadap x dan y

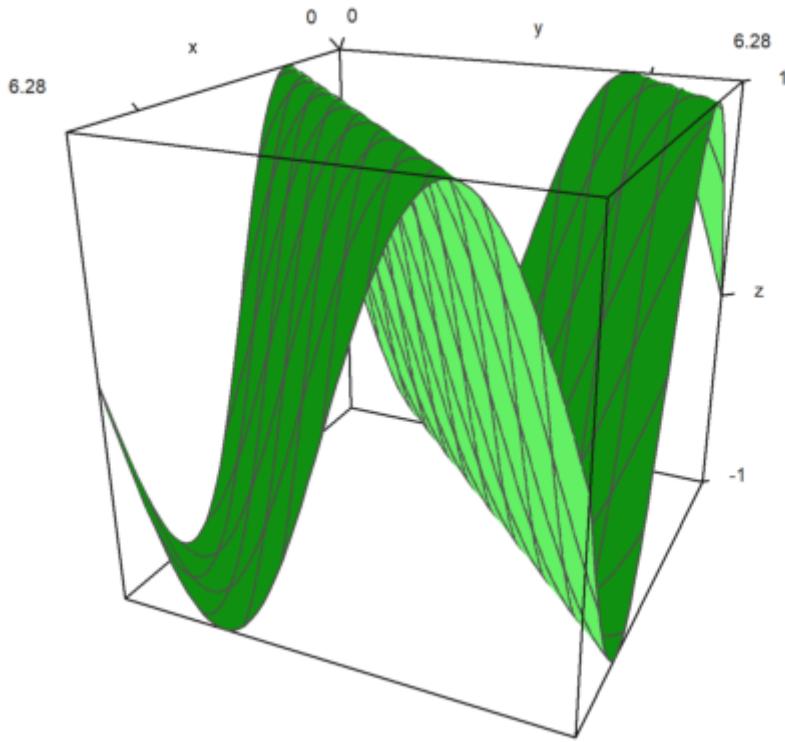
>dx &= diff(f, x)

$$0$$

>dy &= diff(f, y)



Gambar 5.3 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-012.png



Gambar 5.4 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-014.png

0

menggambarkan grafik fungsi dalam rentang x dan y dari 0 hingga 2π :

>plot3d("sin(x)*cos(y) - cos(x)*sin(y)", 0, 2π , 0, 2π):

3. fungsi eksponensial

diberikan fungsi eksponensial

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$$

mendefinisikan fungsi

```
>function f(x,y) := exp(x^2 - y^2);
>f(1,1), f(2,0)
```

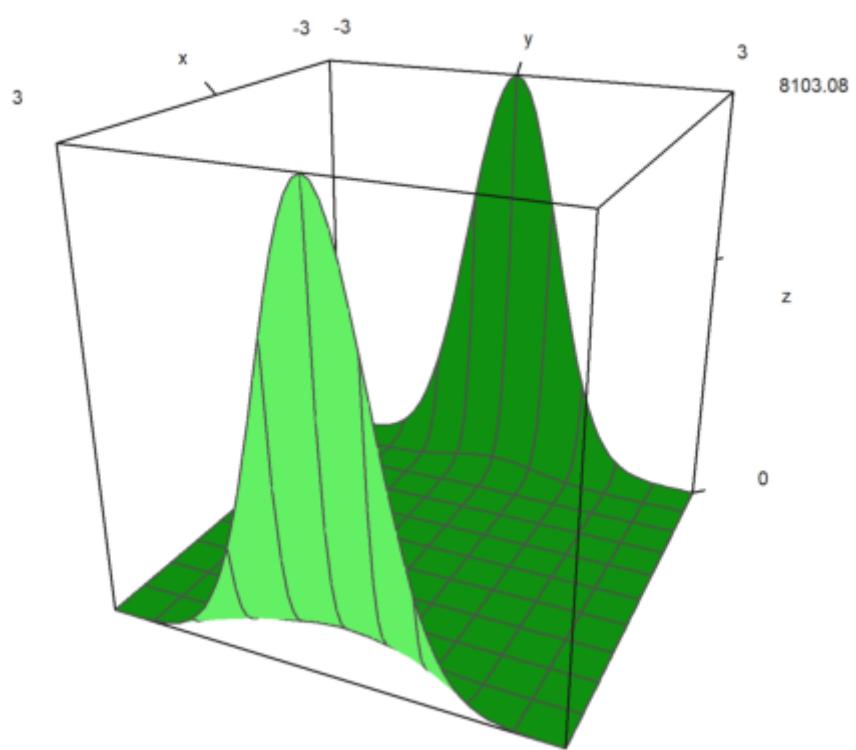
1

54.5981500331

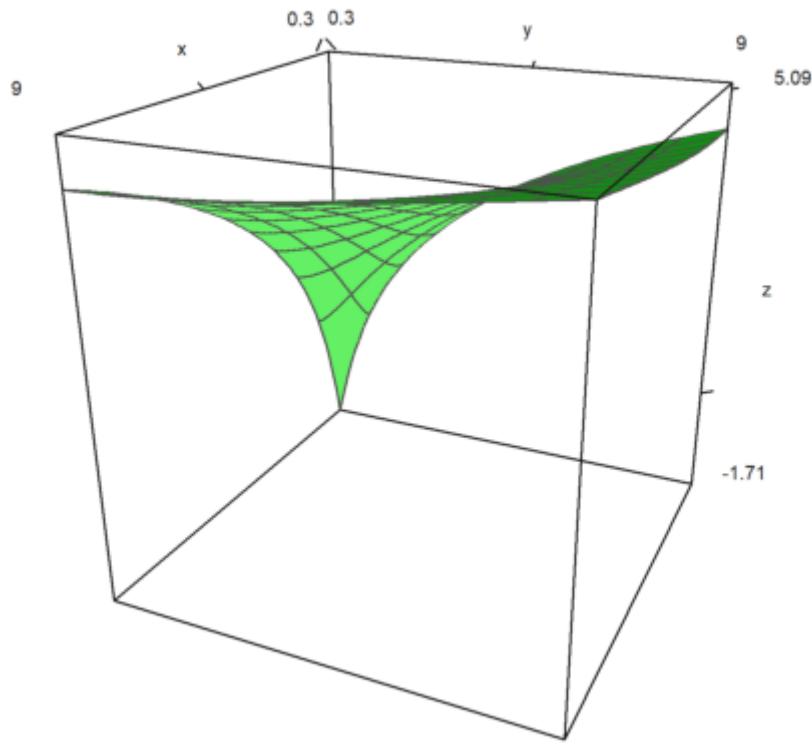
mem-plot grafik 3D fungsi eksponensial dalam rentang x dan y dari -3 hingga 3

>plot3d("exp(x^2 - y^2)", -3, 3, -3, 3):

4. fungsi logaritma



Gambar 5.5 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-016.png



Gambar 5.6 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-018.png

diberikan fungsi logaritma

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

mendefinisikan fungsi

```
>function f(x,y) := ln(x^2 + y^2);
>f(1,8), f(5,4)
```

4.1743872699

3.7135720667

mem-plot grafik 3D fungsi logaritma dalam rentang x dan y dari 0.3 hingga 9
 $>\text{plot3d}(\text{"ln}(x^2 + y^2)\text{"}, 0.3, 9, 0.3, 9)$:

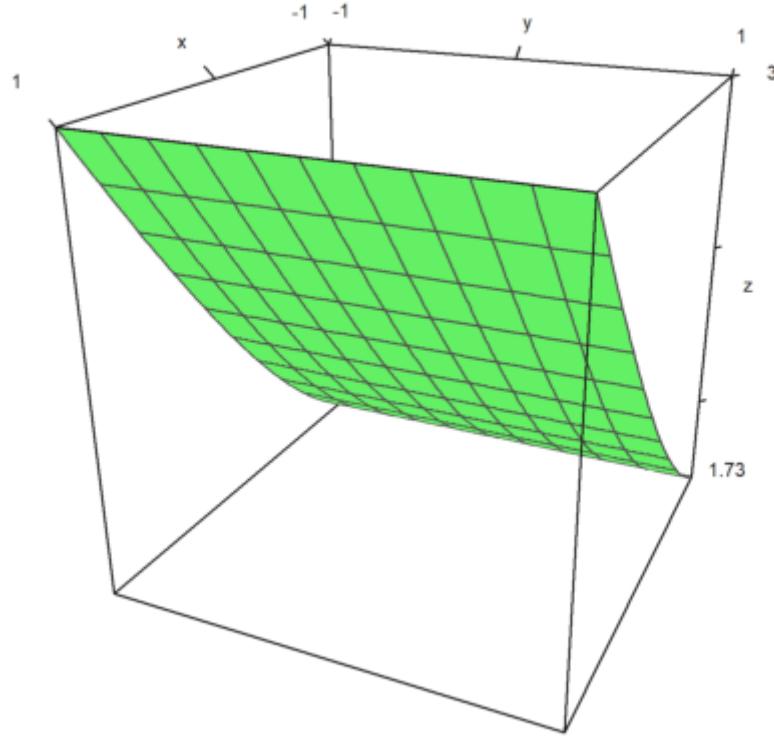
5. komposisi fungsi

diberikan komposisi fungsi

$$f(x) = x^2 + 3x + 1$$

dan

$$g(x) = \sqrt{x + 4}$$



Gambar 5.7 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-021.png

mendefinisikan fungsi

```
>function f(x):= x^2 + 3x + 1;
>function h(x):= \sqrt(x+4);
>plot3d("sqrt((x^2 + 3*x + 5))", -2, 2);
```

5.3 Menghitung Limit

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni “limit”. Fungsi “limit” dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi “plus” atau “minus”. Hasil limit dapat berupa nilai, “und” (tak definisi), “ind” (tak tentu namun terbatas), “infinity” (kompleks tak hingga).

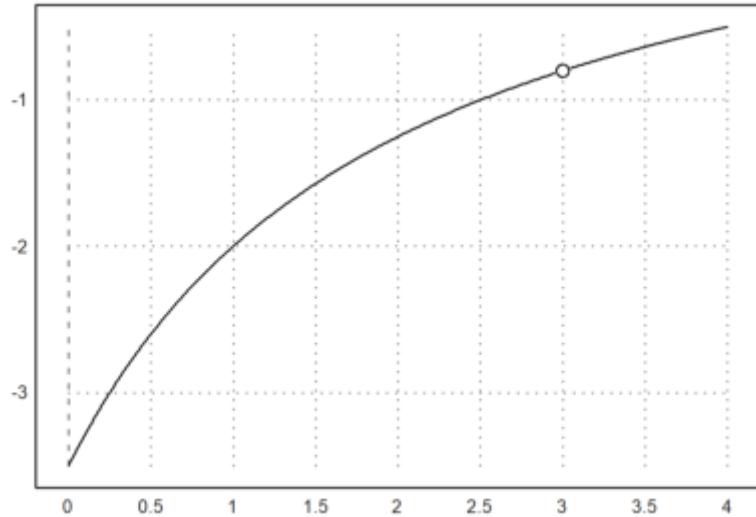
Perhatikan beberapa contoh berikut. Perhatikan cara menampilkan perhitungan secara lengkap, tidak hanya menampilkan hasilnya saja.

```
>$showev('limit(sqrt(x^2-3*x)/(x+1),x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x + 1} = 1$$

```
>$limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3)
```

$$-\frac{4}{5}$$



Gambar 5.8 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-025.png

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 13x^2 + 51x - 63}{x^3 - 4x^2 - 3x + 18} = -\frac{4}{5}$$

Fungsi tersebut diskontinu di titik $x=3$. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>aspect(1.5);
plot2d((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),0,4);
plot2d(3,-4/5,>points,style="ow",>add):
>$limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)
```

$$2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \right) = 4$$

Fungsi tersebut diskontinu di titik $x=0$. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>plot2d("2*x*sin(x)/(1-cos(x))",-pi,pi); plot2d(0,4,>points,style="ow",>add):
>$limit(cot(7*h)/cot(5*h),h,0)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cot(7h)}{\cot(5h)} = \frac{5}{7}$$

Fungsi tersebut juga diskontinu (karena tidak terdefinisi) di $x=0$. Berikut adalah grafiknya.

```
>plot2d("cot(7*x)/cot(5*x)",-0.001,0.001); plot2d(0,5/7,>points,style="ow",>add):
>$showev('limit(((x/8)^(1/3)-1)/(x-8),x,8))
```

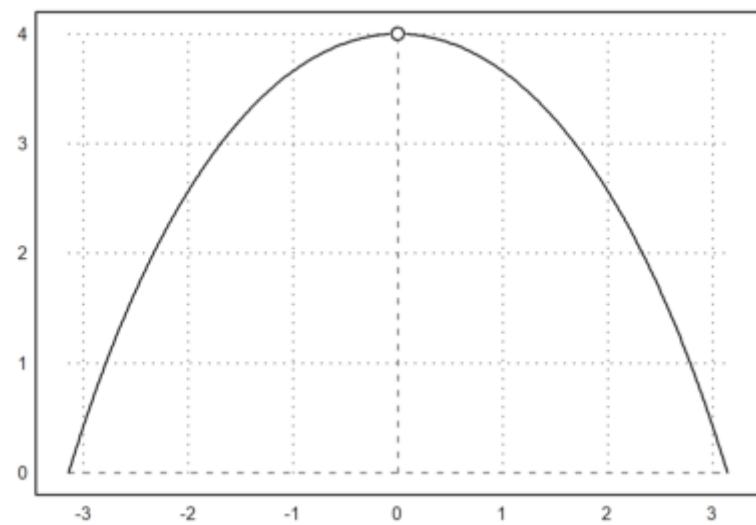
$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\frac{x^{1/3}}{2} - 1}{x - 8} = \frac{1}{24}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

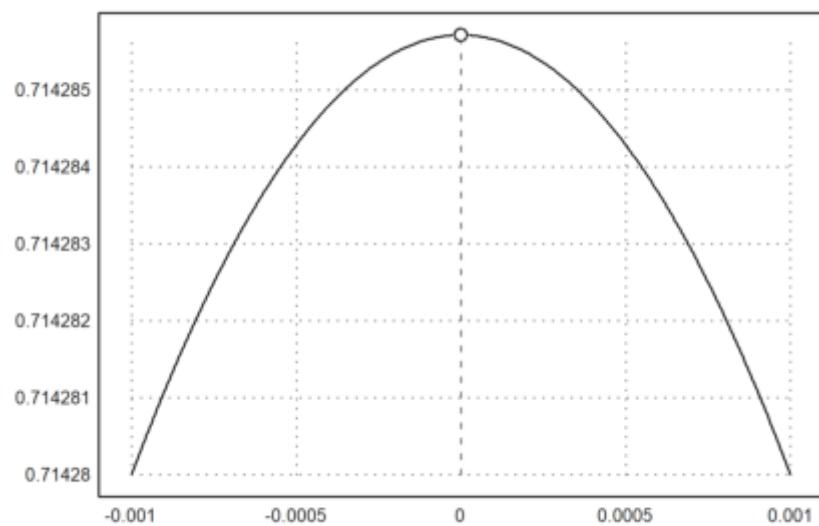
```
>$showev('limit(1/(2*x-1),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x - 1} = -1$$

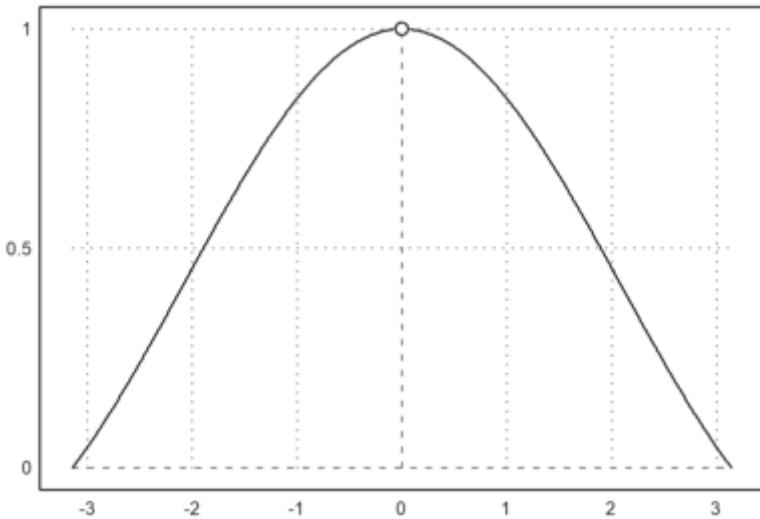
Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.



Gambar 5.9 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-028.png



Gambar 5.10 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-031.png



Gambar 5.11 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-038.png

```
>$showev('limit((x^2-3*x-10)/(x-5),x,5))
```

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5} = 7$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(sqrt(x^2+x)-x,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \frac{1}{2}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(abs(x-1)/(x-1),x,1,minus))
```

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{|x - 1|}{x - 1} = -1$$

Hitung limit di atas untuk x menuju 1 dari kanan.

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(sin(x)/x,x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

```
>plot2d("sin(x)/x",-pi,pi); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```

```
>$showev('limit(sin(x^3)/x,x,0))
```

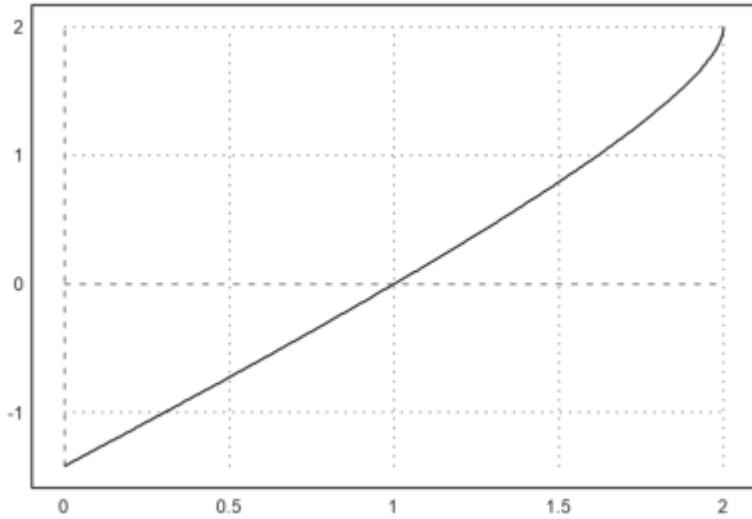
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x} = 0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(log(x), x, minf))
```

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log x = \text{infinity}$$

```
>$showev('limit((-2)^x,x, inf))
```



Gambar 5.12 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-045.png

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-2)^x = \text{infinity}$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,minus))
```

$$\lim_{t \uparrow 2} t - \sqrt{2-t} = 2$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,plus))
```

$$\lim_{t \downarrow 2} t - \sqrt{2-t} = 2$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,5,plus)) // Perhatikan hasilnya
```

$$\lim_{t \downarrow 5} t - \sqrt{2-t} = 5 - \sqrt{3}i$$

```
>plot2d("x-sqrt(2-x)",0,2):
```

```
>$showev('limit((x^2-9)/(2*x^2-5*x-3),x,3))
```

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 5x - 3} = \frac{6}{7}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((1-cos(x))/x,x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

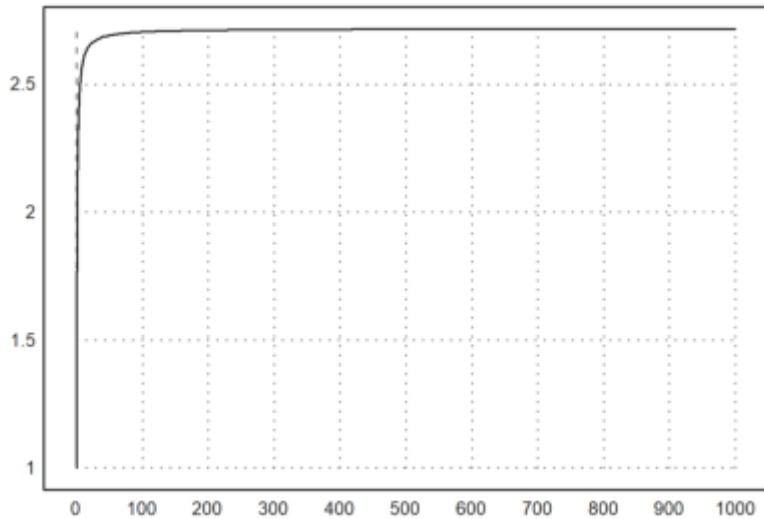
Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((x^(2+abs(x)))/(x^2-abs(x)),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + x^2}{x^2 - |x|} = -1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((1+1/x)^x,x,inf))
```



Gambar 5.13 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-050.png

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^x = e$$

```
>plot2d("((1+1/x)^x",0,1000);
>$showev('limit((1+k/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{x} + 1 \right)^x = e^k$$

```
>$showev('limit((1+x)^(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{\frac{1}{x}} = e$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((x/(x+k))^x,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x + k} \right)^x = e^{-k}$$

```
>$showev('limit((E^x-E^2)/(x-2),x,2))
```

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} = e^2$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

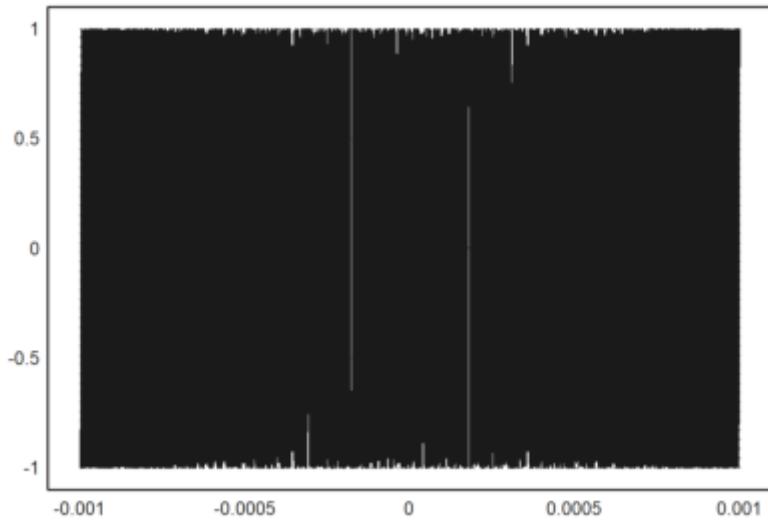
```
>$showev('limit(sin(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{1}{x} \right) = \text{ind}$$

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

```
>plot2d("sin(1/x)",-0.001,0.001);
```



Gambar 5.14 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-057.png

5.4 Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung nilai limit fungsi tersebut di beberapa nilai dan di tak hingga. Gambar grafik fungsi tersebut untuk mengkonfirmasi nilai-nilai limit tersebut.

1. Fungsi linear

```
>function f(x) := 2*x + 3;
>$showev('limit((2*x + 3),x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x + 3 = \infty$$

```
>plot2d("2*x + 3",-pi,pi); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```

2. fungsi kuadrat

```
>function f(x) := x^2 - 4*x + 4;
>$showev('limit((x^2 - 4*x + 4),x,5))
```

$$\lim_{x \rightarrow 5} x^2 - 4x + 4 = 9$$

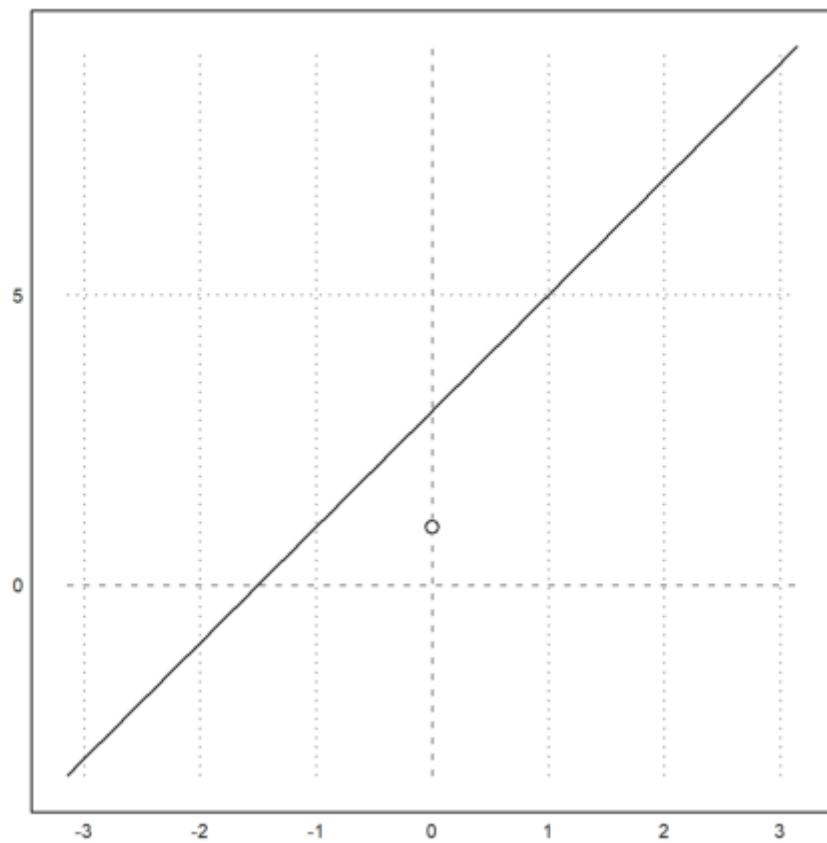
```
>plot2d("x^2 - 4*x + 4",-pi,pi); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```

3. fungsi rasional

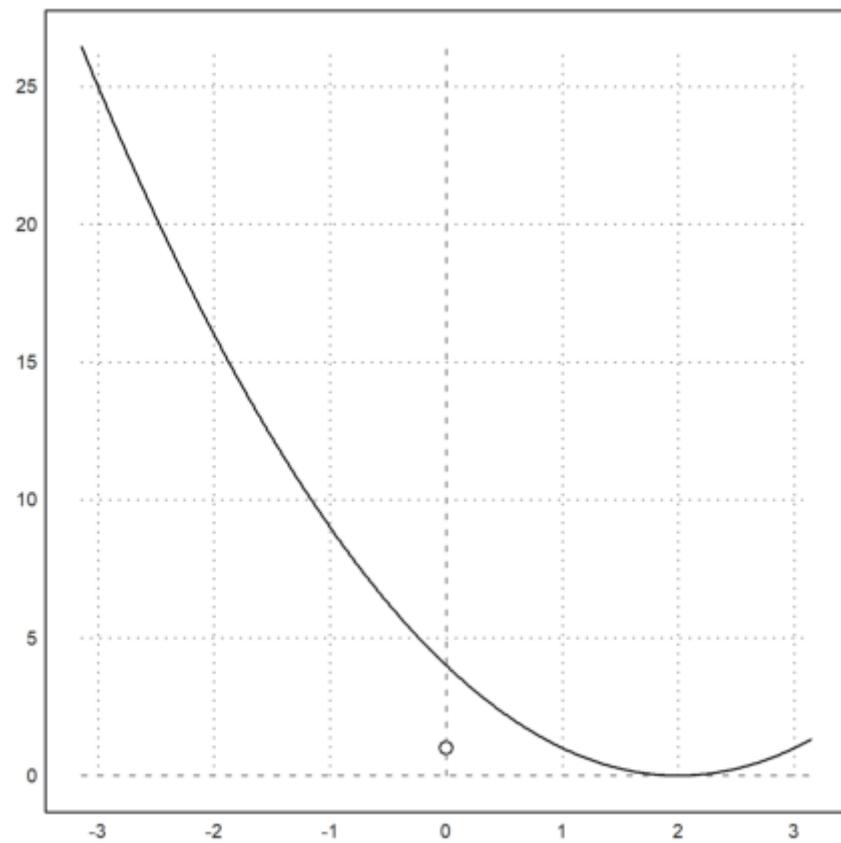
```
>function f(x) := 1/x
>$showev('limit((1/x),x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

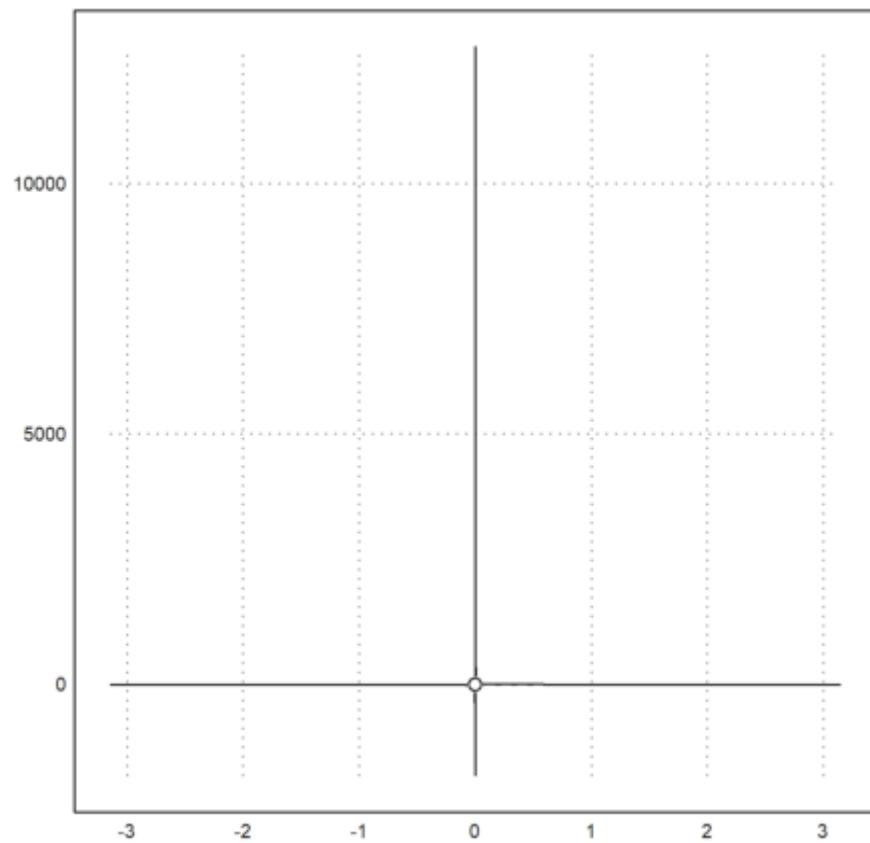
```
>plot2d("1/x",-pi,pi); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```



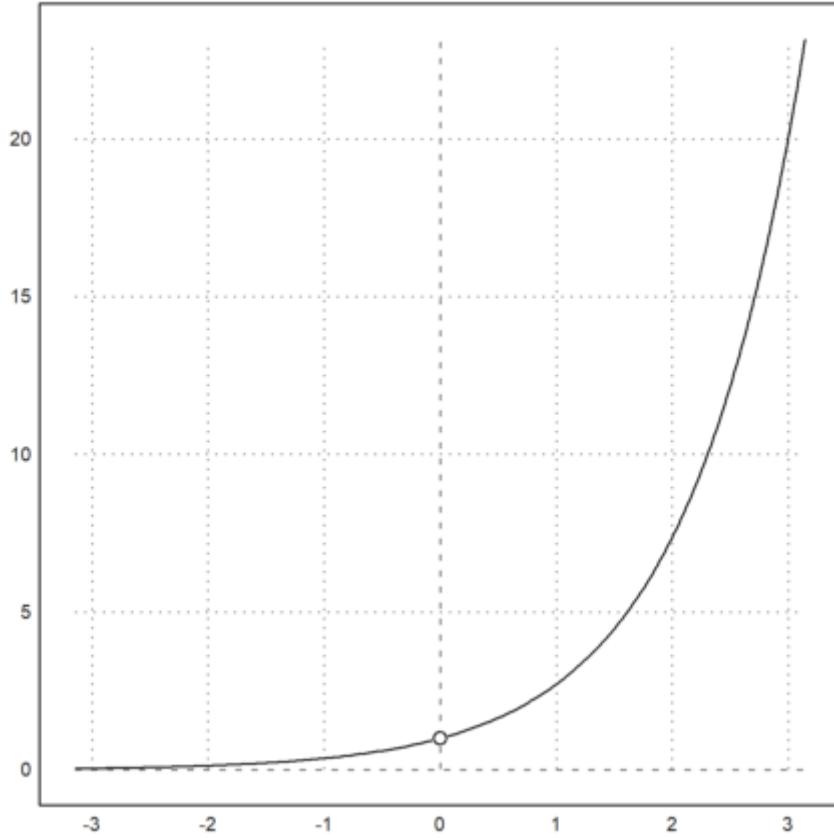
Gambar 5.15 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-059.png



Gambar 5.16 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-061.png



Gambar 5.17 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-063.png



Gambar 5.18 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-065.png

4. fungsi eksponensial

```
>function f(x) := exp(x);
>$showev('limit((exp(x)) ,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

```
>plot2d("exp(x)",-pi,pi); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```

5. fungsi trigonometri

```
>function f(x) := sin(x);
>$showev('limit((sin(x)) ,x,inf))
```

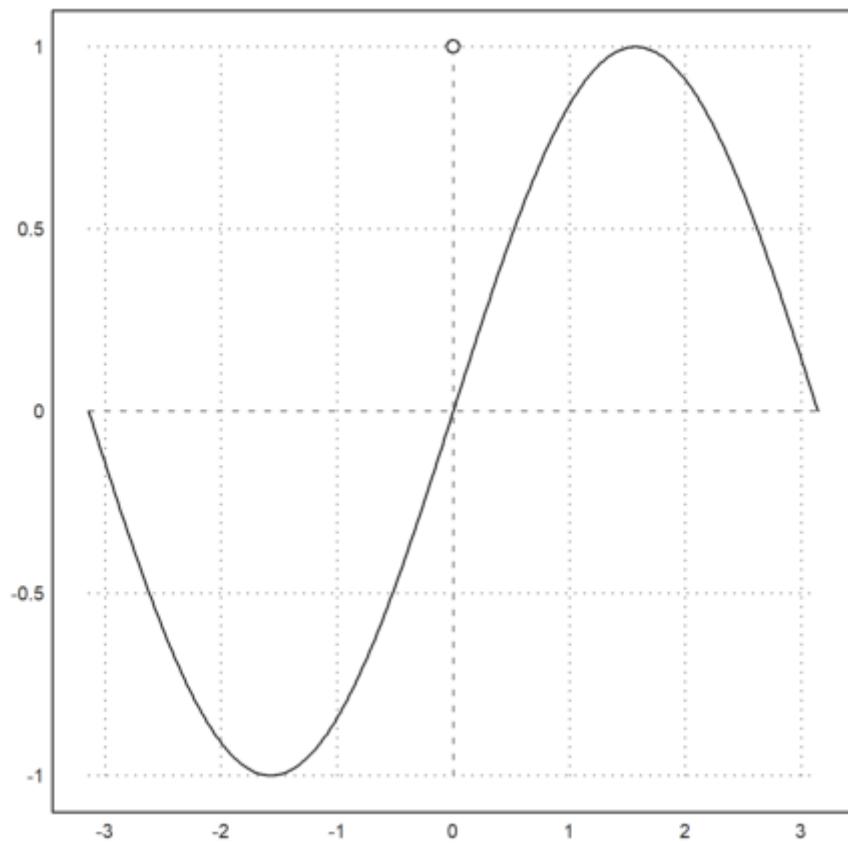
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x = \text{ind}$$

```
>plot2d("sin(x)",-pi,pi); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```

5.5 Turunan Fungsi

Definisi turunan:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Gambar 5.19 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-067.png

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan (limit).

>\$showev('limit(((x+h)^2-x^2)/h,h,0)) // turunan x^2

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$$

>p &= expand((x+h)^2-x^2)|simplify; \$p // pembilang dijabarkan dan disederhanakan

$$2hx + h^2$$

>q &= ratsimp(p/h); \$q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan

$$2x + h$$

>\$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan

$$2x$$

>\$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan $(x+h)^n$ dengan menggunakan teorema binomial.

>\$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut

benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan $\sin(x+h)$ dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut.

>\$showev('limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut

benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, gunakan sifat-sifat logaritma dan hasil limit pada bagian sebelumnya di atas.

>\$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = -\frac{1}{x^2}$$

>\$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x

Answering "Is x an integer?" with "integer"

Maxima is asking

Acceptable answers are: yes, y, Y, no, n, N, unknown, uk
 Is x an integer?

Use assume!

Error in:

```
$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x ...
```

Maxima bermasalah dengan limit:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}.$$

Oleh karena itu diperlukan trik khusus agar hasilnya benar.

```
>$showev('limit((E^h-1)/h,h,0))
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

```
>$showev('factor(E^(x+h)-E^x))
```

$$factor(e^{x+h} - e^x) = (e^h - 1) e^x$$

```
>$showev('limit(factor((E^(x+h)-E^x)/h),h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

$$\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \right) e^x = e^x$$

```
>function f(x) &= x^x
```

$$\begin{matrix} x \\ x \end{matrix}$$

```
>$showev('limit(f(x),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$$

Silakan Anda gambar kurva

$$y = x^x.$$

```
>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^{x+h} - x^x}{h} = infinity$$

Di sini Maxima juga bermasalah terkait limit:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^{x+h} - x^x}{h}.$$

Dalam hal ini diperlukan asumsi nilai x.

```
>&assume(x>0); $showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^{x+h} - x^x}{h} = x^x (\log x + 1)$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

>&forget(x>0) // jangan lupa, lupakan asumsi untuk kembali ke semula

[x > 0]

>&forget(x<0)

[x < 0]

>&facts()

[]

>\$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x + h) - \arcsin x}{h} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

>\$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x + h) - \tan x}{h} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

>function f(x) &= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)

sinh(x)

>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); \$df(x) // df(x) = f'(x)

$$\frac{e^{-x} (e^{2x} + 1)}{2}$$

Hasilnya adalah cosh(x), karena

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

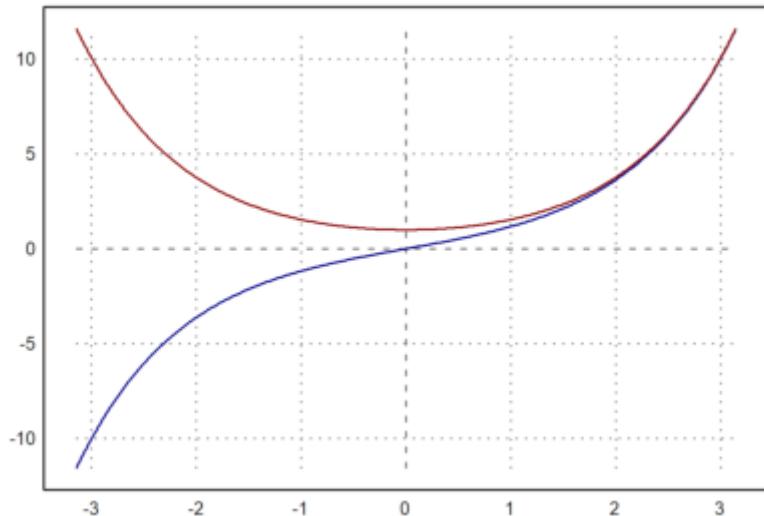
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], -pi, pi, color=[blue, red]):

>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2

$$\sin(3x^5 + 7)^2$$

>diff(f,3), diffc(f,3)

1198.32948904
1198.72863721



Gambar 5.20 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-090.png

Apakah perbedaan diff dan diffc?

>showev('diff(f(x),x))

$$\frac{d}{dx} \sin^2(3x^5 + 7) = 30x^4 \cos(3x^5 + 7) \sin(3x^5 + 7)$$

>% with x=3

$$\%at \left(\frac{d}{dx} \sin^2(3x^5 + 7), x = 3 \right) = 2430 \cos 736 \sin 736$$

>float(%)

$$\%at \left(\frac{d^{1.0}}{dx^{1.0}} \sin^2(3.0x^5 + 7.0), x = 3.0 \right) = 1198.728637211748$$

>plot2d(f,0,3.1):

>function f(x) &=5*cos(2*x)-2*x*sin(2*x) // mendefinisikan fungsi f

$$5 \cos(2x) - 2x \sin(2x)$$

>function df(x) &=diff(f(x),x) // fd(x) = f'(x)

$$- 12 \sin(2x) - 4x \cos(2x)$$

>'f(1)=f(1), \$float(f(1)), '\$f(2)=f(2), \$float(f(2)) // nilai f(1) dan f(2)

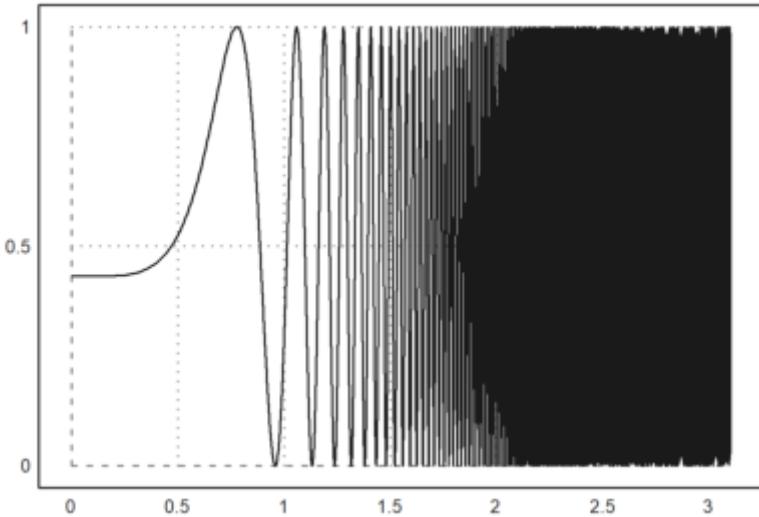
$$-0.2410081230863468$$

-3.899329036387075

>xp=solve("df(x)",1,2,0) // solusi f'(x)=0 pada interval [1, 2]

1.35822987384

>df(xp), f(xp) // cek bahwa f'(xp)=0 dan nilai ekstrim di titik tersebut



Gambar 5.21 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-094.png

$$f(2) = 5 \cos 4 - 4 \sin 4$$

Gambar 5.22 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-097.png

0
-5.67530133759

>plot2d(["f(x)", "df(x)"], 0, 2*pi, color=[blue, red]): //grafik fungsi dan turunannya

Perhatikan titik-titik “puncak” grafik $y=f(x)$ dan nilai turunan pada saat grafik fungsinya mencapai titik “puncak” tersebut.

5.6 Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, tentukan turunannya dengan menggunakan definisi turunan (limit), menggunakan perintah diff, dan secara manual (langkah demi langkah yang dihitung dengan Maxima) seperti contoh-contoh di atas. Gambar grafik fungsi asli dan fungsi turunannya pada sumbu koordinat yang sama.

1. polinomial

diberikan fungsi sebagai berikut

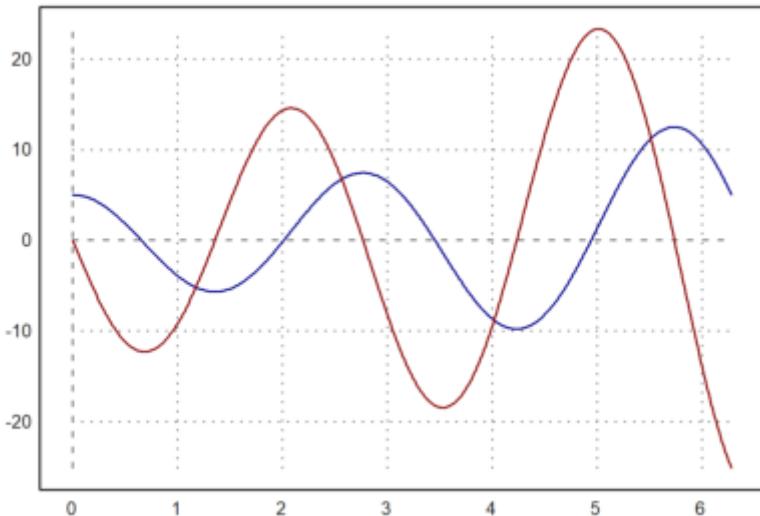
$$f(x) = (x + h)^3 - 2x^2 + x$$

>\$showev('limit(((x+h)^3 - 2*x^2 + x)/h,h,2))

$$\lim_{h \rightarrow 2} \frac{(x + h)^3 - 2x^2 + x}{h} = \frac{x^3 + 4x^2 + 13x + 8}{2}$$

$$-0.2410081230863468$$

Gambar 5.23 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-098.png



Gambar 5.24 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-099.png

`diff(f, n)` adalah perintah untuk menghitung turunan simbolik

`diffc(f, n)` adalah perintah untuk menghitung turunan numerik

`>diff(f,3), diffc(f,3)`

56.662531794

56.662531794

`>$showev('diff(f(x),x))`

$$\frac{d}{dx} x^x = x^x (\log x + 1)$$

`>% with x=3`

$$\% \text{at} \left(\frac{d}{dx} x^x, x = 3 \right) = 27 (\log 3 + 1)$$

`>float(%)`

$$\% \text{at} \left(\frac{d^{1.0}}{dx^{1.0}} x^x, x = 3.0 \right) = 56.66253179403897$$

`>plot2d(f,3,9.1):`

2. eksponensial

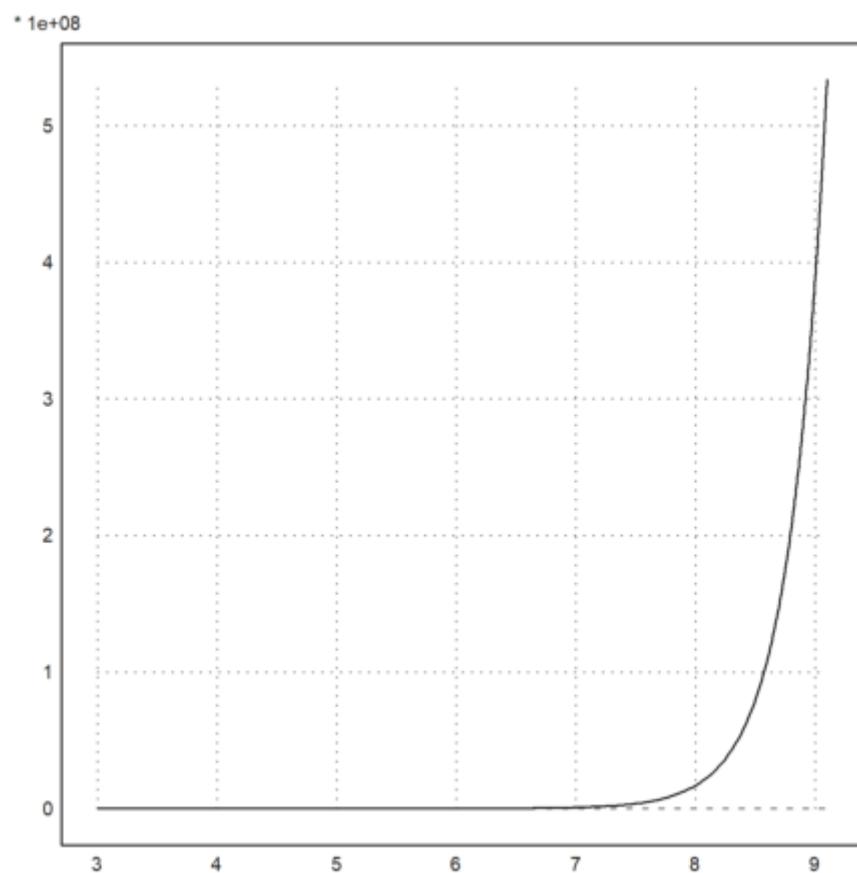
diberikan fungsi sebagai berikut

$$f(x) = (e + h)^x + 2x$$

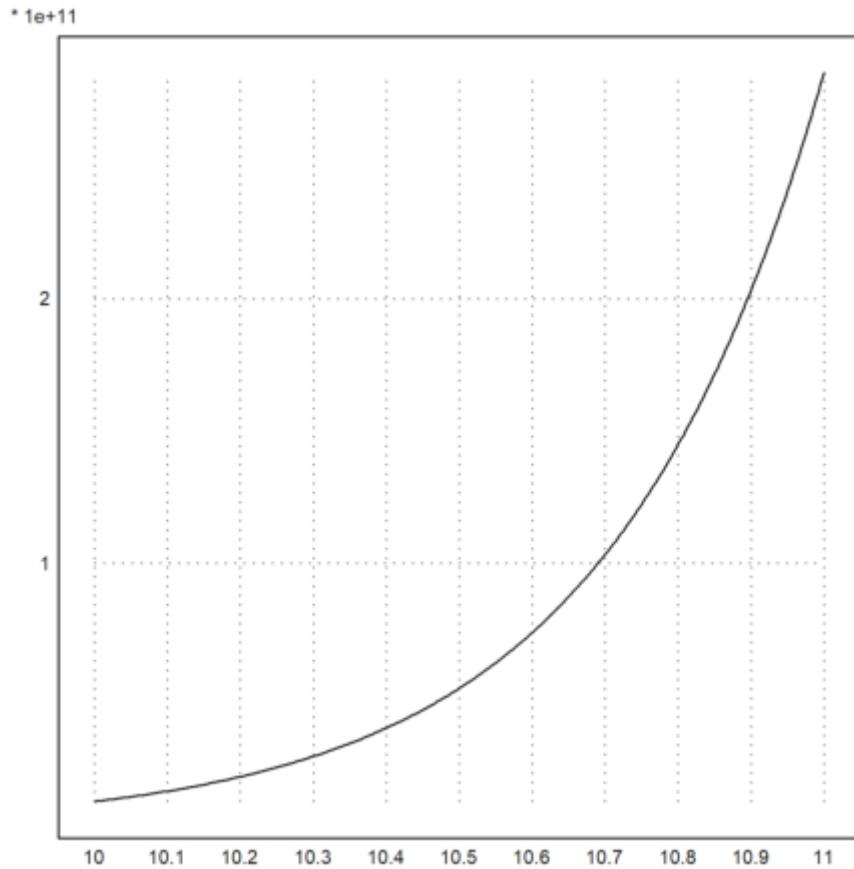
`>$showev('limit(((e+h)^x - 2*x)/h,h,4))`

$$\lim_{h \rightarrow 4} \frac{(h + e)^x - 2x}{h} = \frac{(e + 4)^x - 2x}{4}$$

`>diff(f,7), diffc(f,8)`



Gambar 5.25 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-105.png



Gambar 5.26 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-111.png

2426083.68187
51664455.9041

>\$showev('diff(f(x),x))

$$\frac{d}{dx} x^x = x^x (\log x + 1)$$

> \$% with x=5

$$\% \text{at} \left(\frac{d}{dx} x^x, x = 5 \right) = 3125 (\log 5 + 1)$$

>\$float(%)

$$\% \text{at} \left(\frac{d^{1.0}}{dx^{1.0}} x^x, x = 5.0 \right) = 8154.493476356564$$

>plot2d(f,10,11):

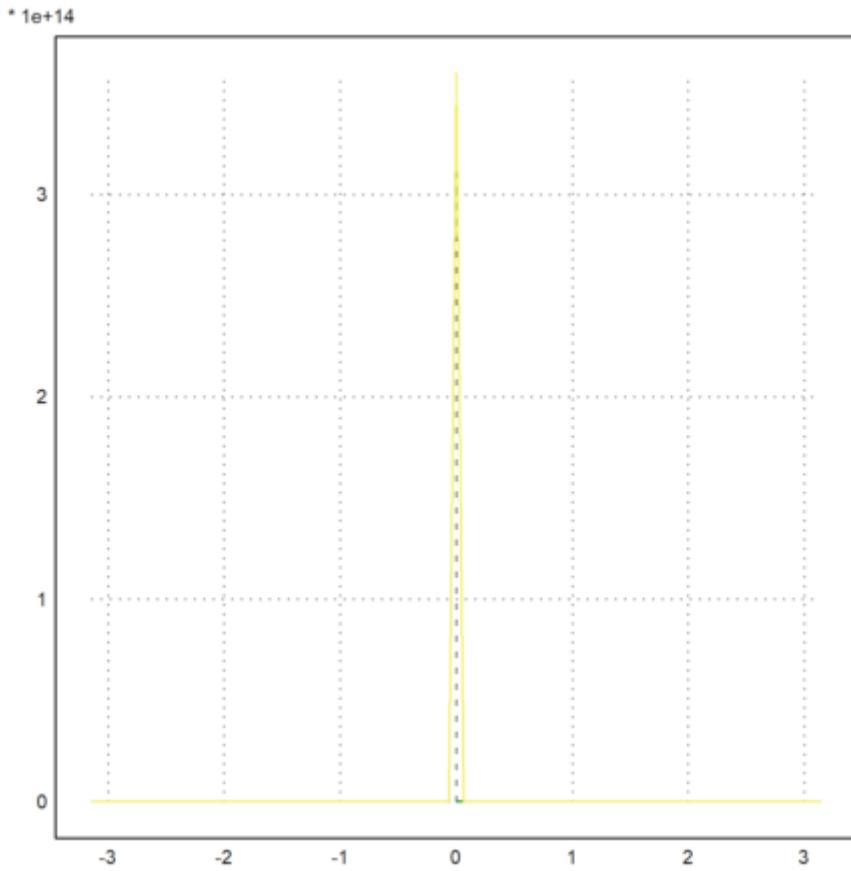
3. logaritma

diberikan fungsi sebagai berikut

$$f(x) = \ln(x) + 2$$

>function f(x):= ln(x)+2

>function df(x) &= diff(f(x),x) // fd(x) = f'(x)



Gambar 5.27 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-113.png

1
—
x

>plot2d(["f(x)", "df(x)"], -pi, pi, color=[green, yellow]):

4. trigonometri

diberikan fungsi sebagai berikut

$$f(x) = \sin(x)$$

```
>function f(x):=sin(x)
>$showev('limit((sin(x),x,0)))
```

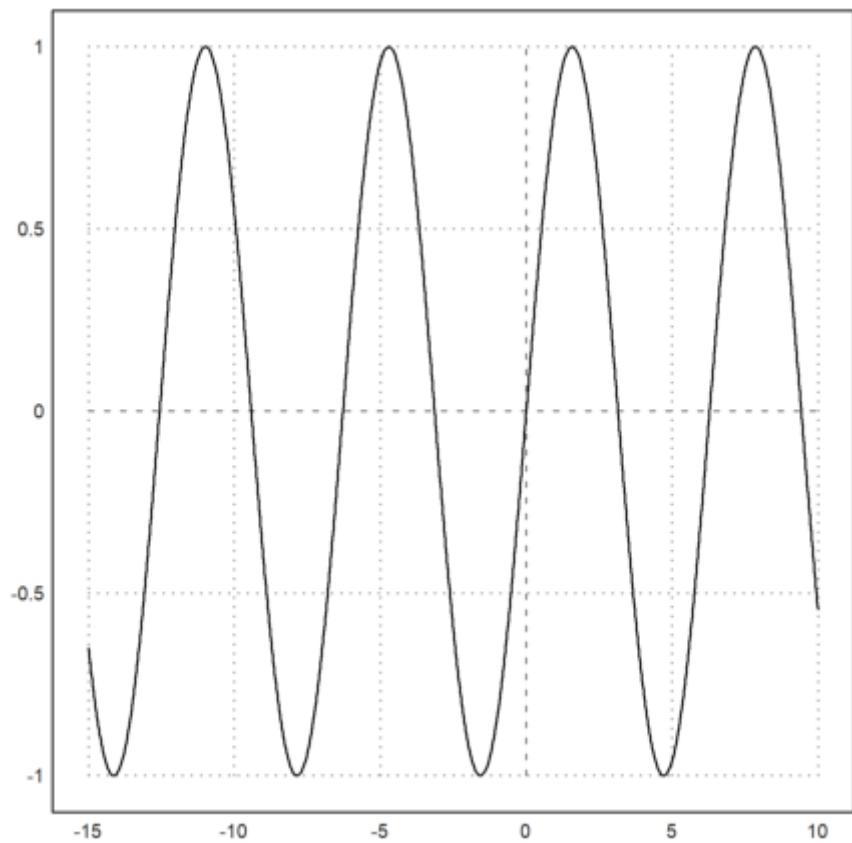
$$0 = 0$$

>plot2d("sin(x)", -15, 10):

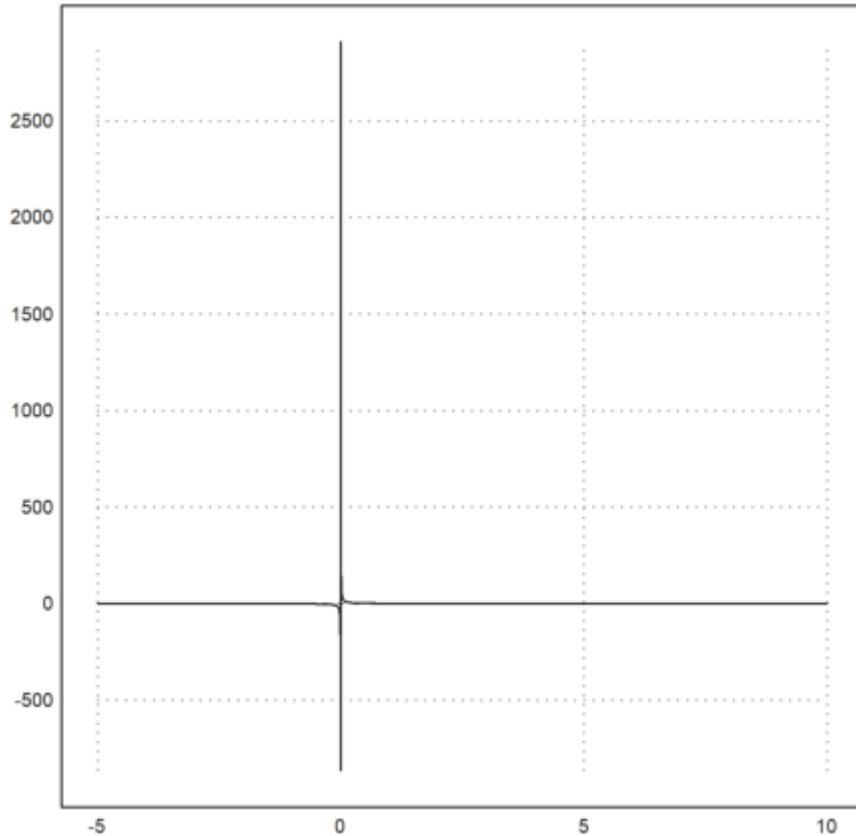
5. rasional

diberikan fungsi sebagai berikut

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



Gambar 5.28 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-116.png



Gambar 5.29 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-119.png

```
>function f(x):=1/x
>$showev('limit((1/x),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \text{infinity}$$

```
>plot2d("1/x",-5,10):
```

5.7 Integral

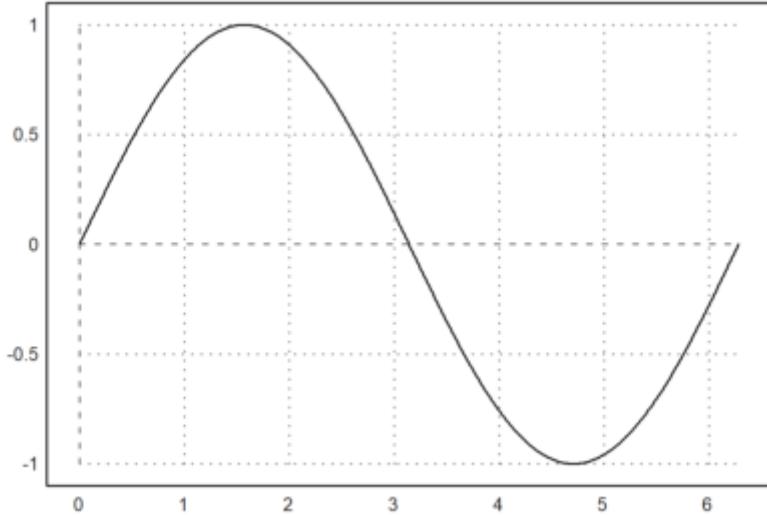
EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu. Untuk integral tak tentu (simbolik) sudah tentu EMT menggunakan Maxima, sedangkan untuk perhitungan integral tentu EMT sudah menyediakan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

Pada notebook ini akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{dengan } F'(x) = f(x).$$

Fungsi untuk menentukan integral adalah integrate. Fungsi ini dapat digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu (jika fungsinya memiliki antiderivatif). Untuk perhitungan integral tentu fungsi integrate menggunakan metode numerik (kecuali fungsinya tidak integrabel, kita tidak akan menggunakan metode ini).

```
>$showev('integrate(x^n,x))
```



Gambar 5.30 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-126.png

Answering "Is n equal to -1?" with "no"

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

>\$showev('integrate(1/(1+x),x))

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \log(x+1)$$

>\$showev('integrate(1/(1+x^2),x))

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x$$

>\$showev('integrate(1/sqrt(1-x^2),x))

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

>\$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))

$$\int_0^\pi \sin x dx = 2$$

>plot2d("sin(x)",0,2*pi):

>\$showev('integrate(sin(x),x,a,b))

$$\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b$$

>\$showev('integrate(x^n,x,a,b))

Answering "Is n positive, negative or zero?" with "positive"

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

> \$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x))

$$\int x^2 \sqrt{2x+1} dx = \frac{(2x+1)^{\frac{7}{2}}}{28} - \frac{(2x+1)^{\frac{5}{2}}}{10} + \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

> \$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x,0,2))

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{2x+1} dx = \frac{25^{\frac{5}{2}}}{21} - \frac{2}{105}$$

> \$ratsimp(%)

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{2x+1} dx = \frac{25^{\frac{7}{2}} - 2}{105}$$

> \$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)*E^(sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi/2))

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x}+a) e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = (-e^\pi - 1) \sin a + (e^\pi + 1) \cos a$$

> \$factor(%)

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x}+a) e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = (-e^\pi - 1) (\sin a - \cos a)$$

> function map f(x) &= E^(-x)2

$$\frac{2}{E^{-x}}$$

> \$showev('integrate(f(x),x))

$$\int e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)}{2}$$

Fungsi f tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

$$\operatorname{erf}(x) = \int \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx.$$

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).

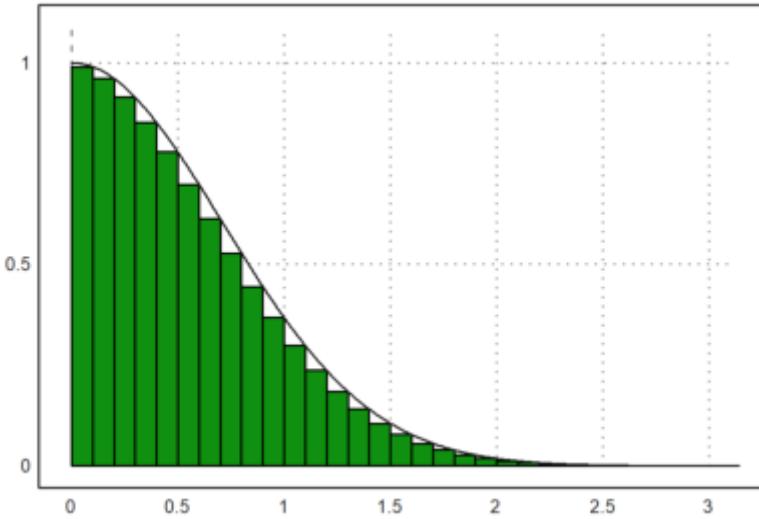
Misalkan kita akan menghitung:

$$\int_0^\pi e^{-x^2} dx$$

>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add);

Integral tentu

$$\int_0^\pi e^{-x^2} dx$$



Gambar 5.31 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-137.png

dapat dihampiri dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva $y=f(x)$ tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

```
>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1); // t sebagai list untuk menyimpan nilai-nilai x
>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t)); // simpan nilai-nilai f(x)
>/> jangan menggunakan x sebagai list, kecuali Anda pakar Maxima!
```

Hasilnya adalah:

$$\int_0^{\pi} e^{-x^2} dx = 0.8362196102528469$$

Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval (=0.1) dan jumlah nilai-nilai $f(x)$ untuk $x = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 3.2$.

```
>0.1*sum(f(x+0.1)) // cek langsung dengan perhitungan numerik EMT
```

0.836219610253

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval 0.001. (Silakan dicoba!)

Meskipun Maxima tidak dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut untuk batas-batas yang berhingga, namun integral tersebut dapat dihitung secara eksak jika batas-batasnya tak hingga. Ini adalah salah satu keajaiban di dalam matematika, yang terbatas tidak dapat dihitung secara eksak, namun yang tak hingga malah dapat dihitung secara eksak.

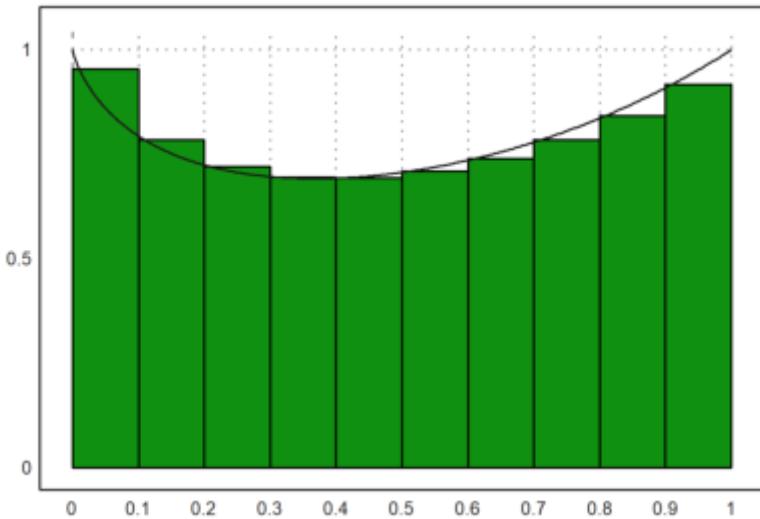
```
>$showev('integrate(f(x),x,0,inf))
```

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Tunjukkan kebenaran hasil di atas!

Berikut adalah contoh lain fungsi yang tidak memiliki antiderivatif, sehingga integral tentunya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

```
>function f(x) &= x^x
```



Gambar 5.32 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-142.png

x
x

>\$showev('integrate(f(x),x,0,1))

$$\int_0^1 x^x \, dx = \int_0^1 x^x \, dx$$

>x=0:0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add);

Maxima gagal menghitung integral tentu tersebut secara langsung menggunakan perintah integrate. Berikut kita lakukan seperti contoh sebelumnya untuk mendapat hasil atau pendekatan nilai integral tentu tersebut.

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
```

$$\int_0^1 \sin^2(3x^5 + 7) \, dx = 0.7834935879025506$$

Apakah hasil tersebut cukup baik? perhatikan gambarnya.

>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2

$$\sin^2(3x^5 + 7)$$

>integrate(f,0,1)

0.542581176074

>&showev('integrate(f(x),x,0,1))

$$\frac{1}{[2]}\gamma\left(\frac{1}{5}\right)\sin\left(\frac{\pi}{14}\right)\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

```

I   sin (3 x + 7) dx = -----
]                               1/5
/
0
4/5           1           4/5           1
- ((6 gamma_incomplete(-, 6 I) + 6 gamma_incomplete(-, - 6 I))
      5
        4/5           1
sin(14) + (6 I gamma_incomplete(-, 6 I)
      5
        4/5           1           pi
- 6 I gamma_incomplete(-, - 6 I)) cos(14)) sin(--pi - 60)/120
      5           10

>&float(%)

1.0
/
[      2      5
I   sin (3.0 x + 7.0) dx =
]
/
0.0
0.09820784258795788 - 0.008333333333333333
(0.3090169943749474 (0.1367372182078336
(4.192962712629476 I gamma_incomplete(0.2, 6.0 I)
- 4.192962712629476 I gamma_incomplete(0.2, - 6.0 I))
+ 0.9906073556948704 (4.192962712629476 gamma_incomplete(0.2, 6.0 I)
+ 4.192962712629476 gamma_incomplete(0.2, - 6.0 I))) - 60.0)

>$showev('integrate(x*exp(-x),x,0,1)) // Integral tentu (eksak)
```

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = 1 - 2e^{-1}$$

```

# Aplikasi Integral Tentu
>plot2d("x^3-x",-0.1,1.1); plot2d("-x^2",>add); ...
>b=solve("x^3-x+x^2",0.5); x=linspace(0,b,200); xi=flipx(x); ...
>plot2d(x|xi,x^3-x|-xi^2,>filled,style="|",fillcolor=1,>add); // Plot daerah antara 2 kurva
>a=solve("x^3-x+x^2",0), b=solve("x^3-x+x^2",1) // absis titik-titik potong kedua kurva
0
0.61803398875

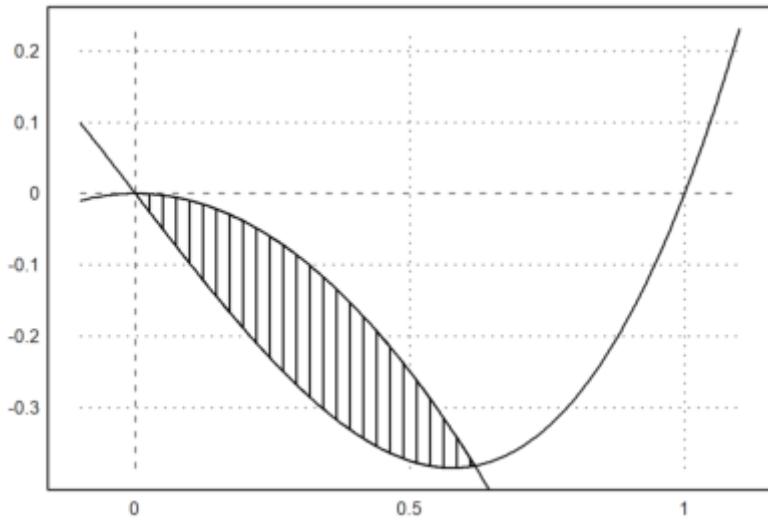
>integrate("(-x^2)-(x^3-x)",a,b) // luas daerah yang diarsir
```

0.0758191713542

Hasil tersebut akan kita bandingkan dengan perhitungan secara analitik.

>a &= solve((-x^2)-(x^3-x),x); \$a // menentukan absis titik potong kedua kurva secara eksak

$$\left[x = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}, x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, x = 0 \right]$$



Gambar 5.33 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-145.png

>\$showev('integrate(-x^2-x,0,(sqrt(5)-1)/2)) // Nilai integral secara eksak

$$\int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} -x^3 - x^2 + x \, dx = \frac{13 - 5^{\frac{3}{2}}}{24}$$

>\$float(%)

$$\int_{0.0}^{0.6180339887498949} -1.0 x^3 - 1.0 x^2 + x \, dx = 0.07581917135421037$$

Panjang Kurva

Hitunglah panjang kurva berikut ini dan luas daerah di dalam kurva tersebut.

$$\gamma(t) = (r(t) \cos(t), r(t) \sin(t))$$

dengan

$$r(t) = 1 + \frac{\sin(3t)}{2}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...

>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style='/,r=1.5); // Kita gambar kurvanya terlebih dahulu

>function r(t) &= 1+sin(3*t)/2; \$'r(t)=r(t)

r ([0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2, 0.21, 0.22])

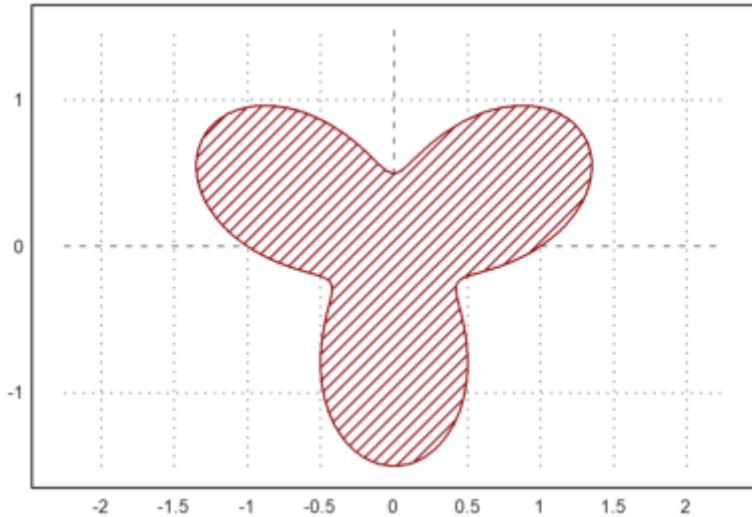
>function fx(t) &= r(t)*cos(t); \$'fx(t)=fx(t)

fx ([0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2, 0.21, 0.22])

>function fy(t) &= r(t)*sin(t); \$'fy(t)=fy(t)

fy ([0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2, 0.21, 0.22])

>function ds(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); \$'ds(t)=ds(t)



Gambar 5.34 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-151.png

Maxima said:

```
diff: second argument must be a variable; found errexp1
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
... e(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $' ds(t)=ds(t ...
```

>\$integrate(ds(x),x,0,2*pi) //panjang (keliling) kurva

$$\int_0^{2\pi} ds(x) \, dx$$

Maxima gagal melakukan perhitungan eksak integral tersebut.

Berikut kita hitung integralnya secara umerik dengan perintah EMT.

>integrate("ds(x)",0,2*pi)

Function ds not found.

Try list ... to find functions!

Error in expression: ds(x)

%mapexpression1:

 return expr(x,args());

Error in map.

%evalexpression:

 if maps then return %mapexpression1(x,f\$;args());

gauss:

 if maps then y=%evalexpression(f\$,a+h-(h*xn)',maps;args());

adaptivegauss:

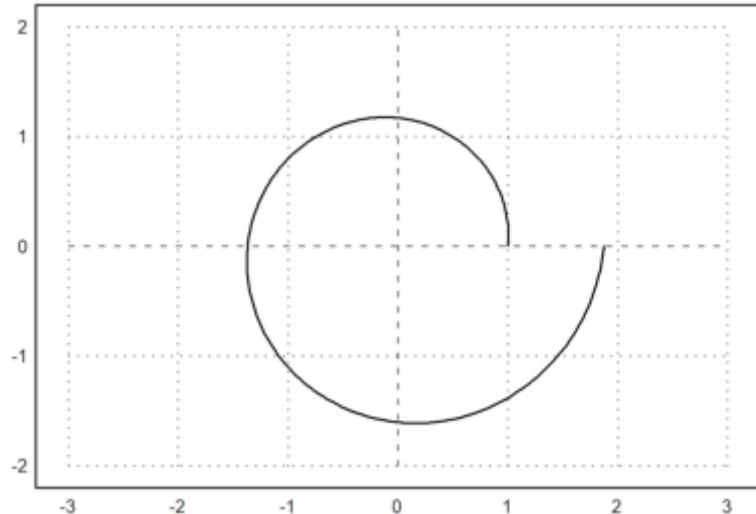
 t1=gauss(f\$,c,c+h;args(),=maps);

Try "trace errors" to inspect local variables after errors.

integrate:

 return adaptivegauss(f\$,a,b,eps*1000;args(),=maps);

Spiral Logaritmik



Gambar 5.35 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-156.png

```
>a=0.1; plot2d("exp(a*x)*cos(x)","exp(a*x)*sin(x)",r=2,xmin=0,xmax=2*pi);
>&kill(a) // hapus expresi a
```

done

```
>function fx(t) &= exp(a*t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

$fx([0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2, 0.21,$

$>function fy(t) &= exp(a*t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)$

$fy([0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.2, 0.21,$

$>function df(t) &= \text{trigreduce}(\text{radcan}(\sqrt(\text{diff}(fx(t),t)^2 + \text{diff}(fy(t),t)^2))); $'df(t)=df(t)$

Maxima said:

```
diff: second argument must be a variable; found errexp1
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
... e(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2 + diff(fy(t),t)^2))); $' df(t)=df(t ...
```

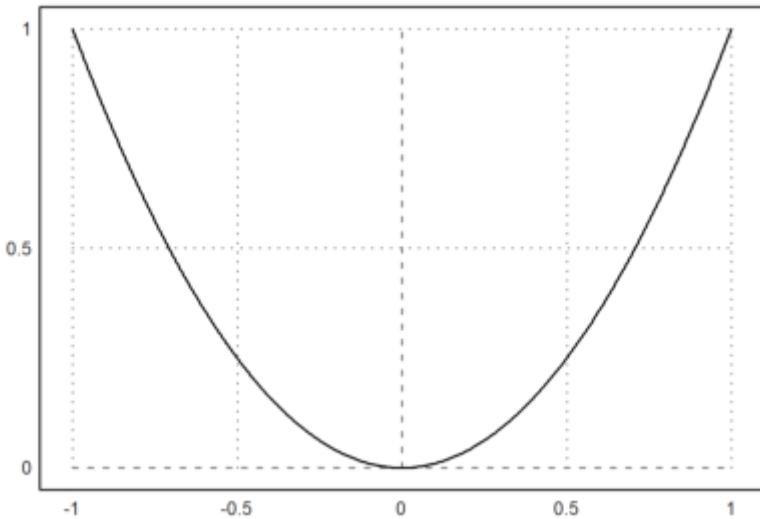
$>S &= \text{integrate}(df(t),t,0,2*\pi); \$S // \text{panjang kurva (spiral)}$

Maxima said:

```
defint: variable of integration cannot be a constant; found errexp1
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

$S &= \text{integrate}(df(t),t,0,2*\pi); \$S // \text{panjang kurva (spiral)} ...$



Gambar 5.36 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-159.png

>S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1

```
Function S not found.
Try list ... to find functions!
Error in:
S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1 ...
^
```

Soal:

Tunjukkan bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah $K=2\pi r$.

Berikut adalah contoh menghitung panjang parabola.

>plot2d("x^2",xmin=-1,xmax=1):

>\$showev('integrate(sqrt(1+diff(x^2,x)^2),x,-1,1))

$$\int_{-1}^1 \sqrt{4x^2 + 1} dx = \frac{\operatorname{asinh} 2 + 2\sqrt{5}}{2}$$

>\$float(%)

$$\int_{-1.0}^{1.0} \sqrt{4.0x^2 + 1.0} dx = 2.957885715089195$$

>x=-1:0.2:1; y=x^2; plot2d(x,y); ...

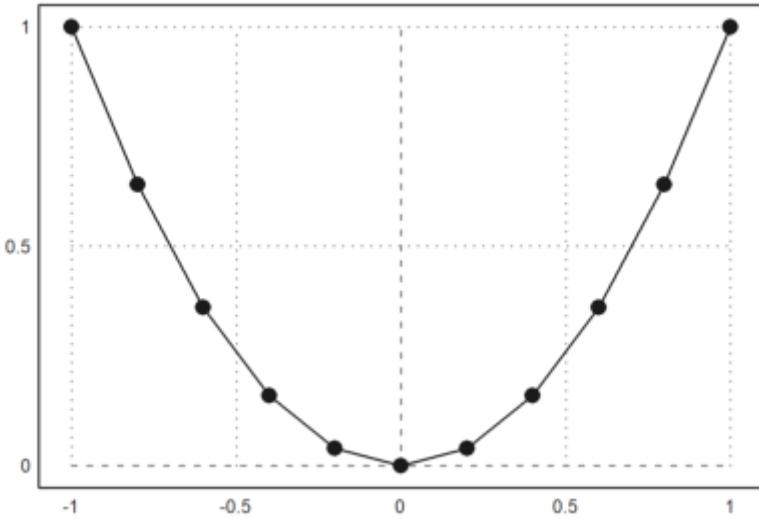
> plot2d(x,y,points=1,style="o#",add=1):

Panjang tersebut dapat dihampiri dengan menggunakan jumlah panjang ruas-ruas garis yang menghubungkan titik-titik pada parabola tersebut.

>i=1:cols(x)-1; sum(sqrt((x[i+1]-x[i])^2+(y[i+1]-y[i])^2))

2.95191957027

Hasilnya mendekati panjang yang dihitung secara eksak. Untuk mendapatkan hampiran yang cukup akurat, jarak antar titik dapat diperkecil, misalnya 0.1, 0.05, 0.01, dan seterusnya. Cobalah Anda ulangi perhitungannya dengan nilai-nilai tersebut.



Gambar 5.37 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-162.png

5.8 Koordinat Kartesius

Berikut diberikan contoh perhitungan panjang kurva menggunakan koordinat Kartesius. Kita akan hitung panjang kurva dengan persamaan implisit:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

>z &= x^{3+y}3-3*x*y; \$z

$$y^3 - 3xy + x^3$$

>plot2d(z,r=2,level=0,n=100);

Kita tertarik pada kurva di kuadran pertama.

>plot2d(z,a=0,b=2,c=0,d=2,level=[-10;0],n=100,contourwidth=3,style="/"');

Kita selesaikan persamaannya untuk x.

>\$z with y=l*x, sol &= solve(% ,x); \$sol

$$\left[x = \frac{3l}{l^3 + 1}, x = 0 \right]$$

$$\left[x = \frac{3l}{l^3 + 1}, x = 0 \right]$$

Kita gunakan solusi tersebut untuk mendefinisikan fungsi dengan Maxima.

>function f(l) &= rhs(sol[1]); \$'f(l)=f(l)

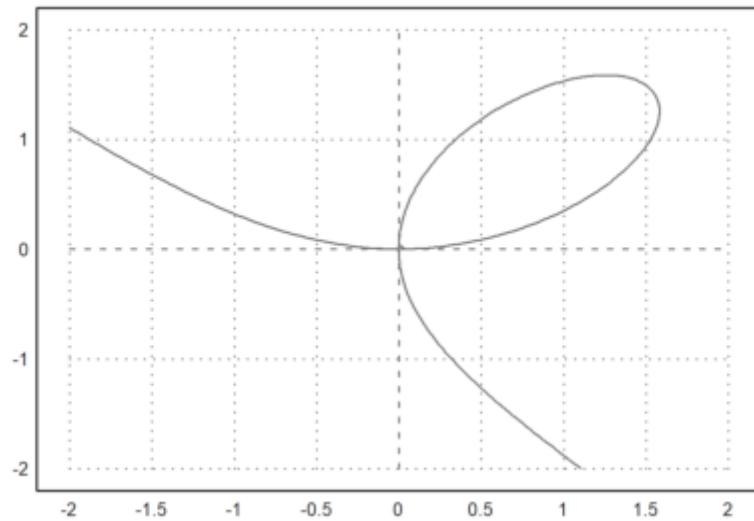
$$f(l) = \frac{3l}{l^3 + 1}$$

Fungsi tersebut juga dapat digunakan untuk menggambar kurvanya. Ingat, bahwa fungsi tersebut adalah nilai x dan nilai y=lx, yakni $x=f(l)$ dan $y=lf(l)$.

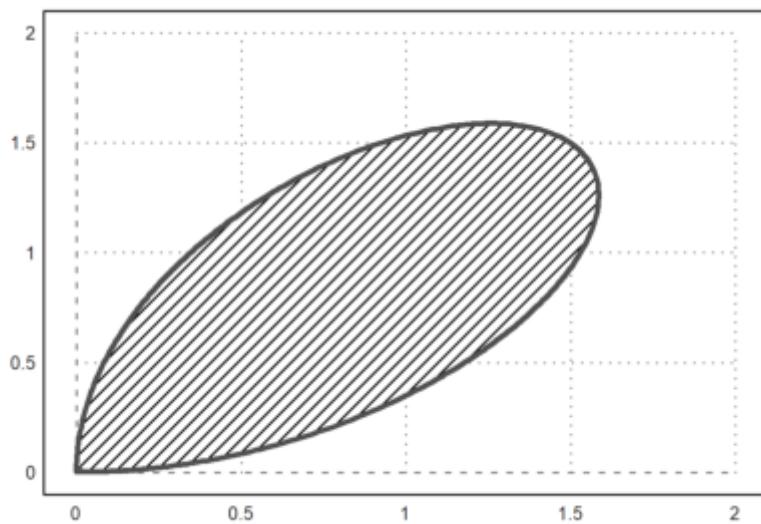
>plot2d(&f(x),&x*f(x),xmin=-0.5,xmax=2,a=0,b=2,c=0,d=2,r=1.5);

Elemen panjang kurva adalah:

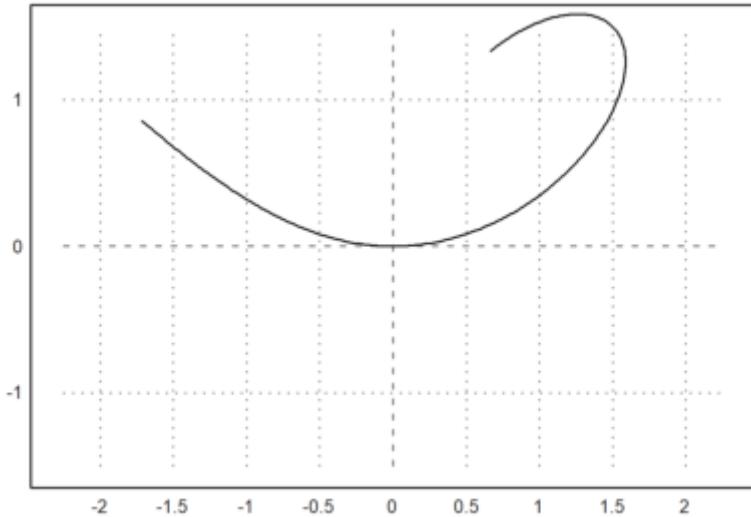
$$ds = \sqrt{f'(l)^2 + (lf'(l) + f(l))^2}.$$



Gambar 5.38 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-165.png



Gambar 5.39 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-166.png



Gambar 5.40 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-170.png

```
>function ds(l) &= ratsimp(sqrt(diff(f(l),l)^2+diff(l*f(l),l)^2)); $'ds(l)=ds(l)
ds (l) =  $\frac{\sqrt{9 l^8 + 36 l^6 - 36 l^5 - 36 l^3 + 36 l^2 + 9}}{\sqrt{l^{12} + 4 l^9 + 6 l^6 + 4 l^3 + 1}}$ 
```

>\$integrate(ds(l),l,0,1)

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{9 l^8 + 36 l^6 - 36 l^5 - 36 l^3 + 36 l^2 + 9}}{\sqrt{l^{12} + 4 l^9 + 6 l^6 + 4 l^3 + 1}} dl$$

Integral tersebut tidak dapat dihitung secara eksak menggunakan Maxima. Kita hitung integral tersebut secara numerik dengan Euler. Karena kurva simetris, kita hitung untuk nilai variabel integrasi dari 0 sampai 1, kemudian hasilnya dikalikan 2.

>2*integrate("ds(x)",0,1)

4.91748872168

>2*romberg(&ds(x),0,1)// perintah Euler lain untuk menghitung nilai hampiran integral yang sama

4.91748872168

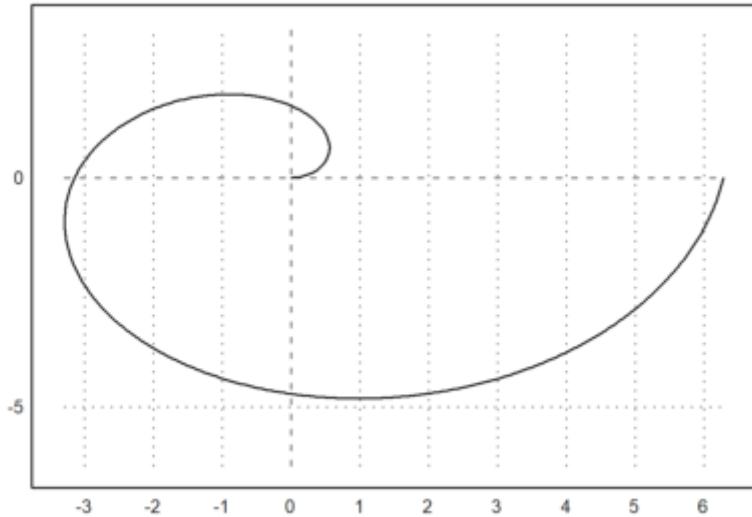
Perhitungan di atas dapat dilakukan untuk sebarang fungsi x dan y dengan mendefinisikan fungsi EMT, misalnya kita beri nama panjangkurva. Fungsi ini selalu memanggil Maxima untuk menurunkan fungsi yang diberikan.

>function panjangkurva(fx,fy,a,b) ...

```
ds=mxm("sqrt (diff (@fx, x) ^2+diff (@fy, x) ^2) ";
return romberg(ds, a, b);
endfunction
```

>panjangkurva("x","x^2",-1,1) // cek untuk menghitung panjang kurva parabola sebelumnya

2.95788571509



Gambar 5.41 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-174.png

Bandingkan dengan nilai eksak di atas.

>2*panjangkurva(mxm("f(x)"),mxm("x*f(x)'),0,1) // cek contoh terakhir, bandingkan hasilnya!

4.91748872168

Kita hitung panjang spiral Archimedes berikut ini dengan fungsi tersebut.

>plot2d("x*cos(x)","x*sin(x)",xmin=0,xmax=2*pi,square=1):

>panjangkurva("x*cos(x)","x*sin(x)",0,2*pi)

21.2562941482

Berikut kita definisikan fungsi yang sama namun dengan Maxima, untuk perhitungan eksak.

>&kill(ds,x,fx,fy)

done

>function ds(fx,fy) &&= sqrt(diff(fx,x)^2+diff(fy,x)^2)

$$\text{sqrt}(\text{diff}(fy, x)^2 + \text{diff}(fx, x)^2)$$

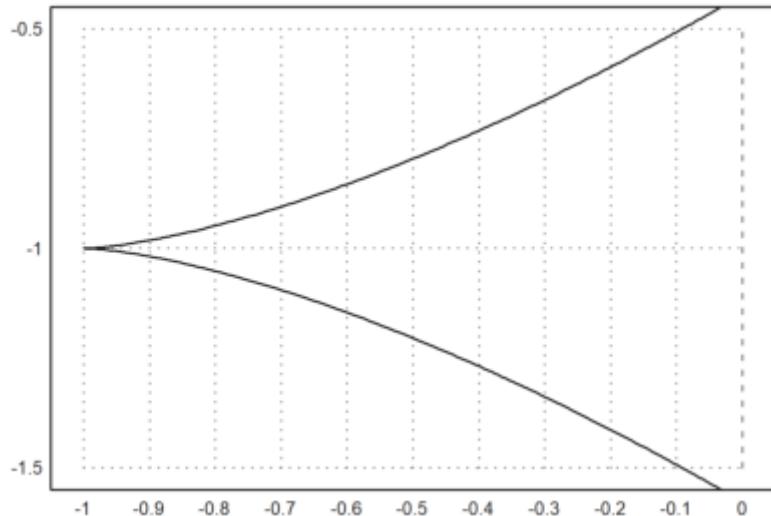
>sol &= ds(x*cos(x),x*sin(x)); \$sol // Kita gunakan untuk menghitung panjang kurva terakhir di atas

$$\sqrt{(\cos x - x \sin x)^2 + (\sin x + x \cos x)^2}$$

>\$sol | trigreduce | expand, \$integrate(% ,x,0,2*pi), %()

$$\frac{\text{asinh}(2\pi) + 2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1}}{2}$$

$$\frac{\text{asinh}(2\pi) + 2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1}}{2}$$



Gambar 5.42 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-178.png

21.2562941482

Hasilnya sama dengan perhitungan menggunakan fungsi EMT.

Berikut adalah contoh lain penggunaan fungsi Maxima tersebut.

```
>plot2d("3*x^2-1","3*x^3-1",xmin=-1/sqrt(3),xmax=1/sqrt(3),square=1):
```

```
>sol &= radcan(ds(3*x^2-1,3*x^3-1)); $sol
```

$$3x \sqrt{9x^2 + 4}$$

```
>$showev('integrate(sol,x,0,1/sqrt(3))), $2*float(%); // panjang kurva di atas
```

$$6.0 \int_{0.0}^{0.5773502691896258} x \sqrt{9.0 x^2 + 4.0} dx = 2.337835372767141$$

$$6.0 \int_{0.0}^{0.5773502691896258} x \sqrt{9.0 x^2 + 4.0} dx = 2.337835372767141$$

5.9 Sikloid

Berikut kita akan menghitung panjang kurva lintasan (sikloid) suatu titik pada lingkaran yang berputar ke kanan pada permukaan datar. Misalkan jari-jari lingkaran tersebut adalah r . Posisi titik pusat lingkaran pada saat t adalah:

$$(rt, r).$$

Misalkan posisi titik pada lingkaran tersebut mula-mula $(0,0)$ dan posisinya pada saat t adalah:

$$(r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t))).$$

Berikut kita plot lintasan tersebut dan beberapa posisi lingkaran ketika $t=0$, $t=\pi/2$, $t=r*\pi$.

```
>x &= r*(t-sin(t))
```

$$x(t - \sin(t))$$

```

>y &= r*(1-cos(t))

r (1 - cos(t))

```

Berikut kita gambar sikloid untuk $r=1$.

```

>ex &= x-sin(x); ey &= 1-cos(x); aspect(1);
>plot2d(ex,ey,xmin=0,xmax=4pi,square=1); ...
>plot2d("2+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
>plot2d([2,ex(2)],[1,ey(2)],color=red,>add); ...
>plot2d(ex(2),ey(2),>points,>add,color=red); ...
>plot2d("2pi+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
>plot2d([2pi,ex(2pi)],[1,ey(2pi)],color=red,>add); ...
>plot2d(ex(2pi),ey(2pi),>points,>add,color=red):

```

Variable or function t not found.

Error in expression: $r*(t-\sin(t))-\sin(r*(t-\sin(t)))$

adaptiveeval:

```
sx=f$(t;args());
```

Try "trace errors" to inspect local variables after errors.

plot2d:

```
dw/n, dw/n^2, dw/n; args());
```

Berikut dihitung panjang lintasan untuk 1 putaran penuh. (Jangan salah menduga bahwa panjang lintasan 1 putaran penuh sama dengan keliling lingkaran!)

```
>ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(ds) // elemen panjang kurva sikloid
```

Maxima said:

```
diff: second argument must be a variable; found r*(t-sin(t))
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(ds ...  
^
```

```
>ds &= trigsimp(ds); $ds
```

ds

```
>$showev('integrate(ds,x,0,2*pi)) // hitung panjang sikloid satu putaran penuh
```

Maxima said:

```
defint: variable of integration must be a simple or subscripted variable.
defint: found r*(t-sin(t))
#0: showev(f='integrate(ds,r*(t-sin(t)),0,2*pi))
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
$showev('integrate(ds,x,0,2*pi)) // hitung panjang sikloid sat ...  
^
```

```
>integrate(mxm("ds"),0,2*pi) // hitung secara numerik
```

```

Illegal function result in map.
%evalexpression:
  if maps then return %mapexpression1(x,f$;args());
gauss:
  if maps then y=%evalexpression(f$,a+h-(h*xn)',maps;args());
adaptivegauss:
  t1=gauss(f$,c,c+h;args(),=maps);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
integrate:
  return adaptivegauss(f$,a,b,eps*1000;args(),=maps);

>romberg(mxm("ds"),0,2*pi) // cara lain hitung secara numerik

```

Wrong argument!

Cannot combine a symbolic expression here.
 Did you want to create a symbolic expression?
 Then start with &#amp;.

Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
 romberg:
 if cols(y)==1 then return y*(b-a); endif;
Error in:
romberg(mxm("ds"),0,2*pi) // cara lain hitung secara numerik ...

Perhatikan, seperti terlihat pada gambar, panjang sikloid lebih besar daripada keliling lingkarannya, yakni:

$$2\pi.$$

Kurvatur (Kelengkungan) Kurva
 image: Osculating.png

Aslinya, kelengkungan kurva diferensiabel (yakni, kurva mulus yang tidak lancip) di titik P didefinisikan melalui lingkaran oskulasi (yaitu, lingkaran yang melalui titik P dan terbaik memperkirakan, paling banyak menyinggung kurva di sekitar P). Pusat dan radius kelengkungan kurva di P adalah pusat dan radius lingkaran oskulasi. Kelengkungan adalah kebalikan dari radius kelengkungan:

$$\kappa = \frac{1}{R}$$

dengan R adalah radius kelengkungan. (Setiap lingkaran memiliki kelengkungan ini pada setiap titiknya, dapat diartikan, setiap lingkaran berputar 2π sejauh $2\pi R$.)

Definisi ini sulit dimanipulasi dan dinyatakan ke dalam rumus untuk kurva umum. Oleh karena itu digunakan definisi lain yang ekivalen.

5.10 Definisi Kurvatur dengan Fungsi Parametrik Panjang Kurva

Setiap kurva diferensiabel dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik terhadap panjang kurva s:

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)),$$

dengan x dan y adalah fungsi riil yang diferensiabel, yang memenuhi:

$$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} = 1.$$

Ini berarti bahwa vektor singgung

$$\mathbf{T}(s) = (x'(s), y'(s))$$

memiliki norm 1 dan merupakan vektor singgung satuan.

Apabila kurvanya memiliki turunan kedua, artinya turunan kedua x dan y ada, maka $\mathbf{T}'(s)$ ada. Vektor ini merupakan normal kurva yang arahnya menuju pusat kurvatur, norm-nya merupakan nilai kurvatur (kelengkungan):

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(s) &= \gamma'(s), \\ \mathbf{T}^2(s) &= 1 \text{ (konstanta)} \Rightarrow \mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 0 \\ \kappa(s) &= \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\gamma''(s)\| = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2}.\end{aligned}$$

Nilai

$$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

disebut jari-jari (radius) kelengkungan kurva.

Bilangan riil

$$k(s) = \pm \kappa(s)$$

disebut nilai kelengkungan bertanda.

Contoh:

Akan ditentukan kurvatur lingkaran

$$x = r \cos t, y = r \sin t.$$

```
>fx &= r*cos(t); fy &= r*sin(t);
```

```
>&assume(t>0,r>0); s &=integrate(sqrt(diff(fx,t)^2+diff(fy,t)^2),t,0,t); s // elemen panjang kurva,  
panjang busur lingkaran (s)
```

$$r \quad t$$

```
>&kill(s); fx &= r*cos(s/r); fy &= r*sin(s/r); // definisi ulang persamaan parametrik terhadap s  
dengan substitusi t=s/r
```

```
>k &= trigsimp(sqrt(diff(fx,s,2)^2+diff(fy,s,2)^2)); $k // nilai kurvatur lingkaran dengan menggunakan  
definisi di atas
```

$$\frac{1}{r}$$

Untuk representasi parametrik umum, misalkan

$$x = x(t), y = y(t)$$

merupakan persamaan parametrik untuk kurva bidang yang terdiferensialkan dua kali. Kurvatur untuk kurva tersebut didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \quad (\phi \text{ adalah sudut kemiringan garis singgung dan } s \text{ adalah panjang kurva}) \\ &= \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.\end{aligned}$$

Selanjutnya, pembilang pada persamaan di atas dapat dicari sebagai berikut.

$$\sec^2 \phi \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} (\tan \phi) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy/dt}{dx/dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \frac{1}{\sec^2 \phi} \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 \phi} \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}.\end{aligned}$$

Jadi, rumus kurvatur untuk kurva parametrik

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

adalah

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Jika kurvanya dinyatakan dengan persamaan parametrik pada koordinat kutub

$$x = r(\theta) \cos \theta, \quad y = r(\theta) \sin \theta,$$

maka rumus kurvaturnya adalah

$$\kappa(\theta) = \frac{r(\theta)^2 + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta)}{(r'(\theta)^2 + r''(\theta)^2)^{3/2}}.$$

(Silakan Anda turunkan rumus tersebut!)

Contoh:

Lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari r dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t.$$

Nilai kelengkungan lingkaran tersebut adalah

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

Hasil cocok dengan definisi kurvatur suatu kelengkungan.

Kurva

$$y = f(x)$$

dapat dinyatakan ke dalam persamaan parametrik

$$x = t, \quad y = f(t), \quad \text{dengan } x'(t) = 1, \quad x''(t) = 0,$$

sehingga kurvaturnya adalah

$$\kappa(t) = \frac{y''(t)}{(1 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Contoh:

Akan ditentukan kurvatur parabola

$$y = ax^2 + bx + c.$$

```
>function f(x) &= a*x^2+b*x+c; $y=f(x)
```

$$r (1 - \cos t) = b r (t - \sin t) + a r^2 (t - \sin t)^2 + c$$

```
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)(3/2); $'k(x)=k(x) // kelengkungan parabola
```

Maxima said:

```
diff: second argument must be a variable; found r*(t-sin(t))
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
... (x) &= (diff(f(x),x,2)) / (1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $' k(x)=k(x) ...
```

```
>function f(x) &= x^2+x+1; $y=f(x) // akan kita plot kelengkungan parabola untuk a=b=c=1
```

$$r (1 - \cos t) = r (t - \sin t) + r^2 (t - \sin t)^2 + 1$$

```
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)(3/2); $'k(x)=k(x) // kelengkungan parabola
```

Maxima said:

```
diff: second argument must be a variable; found r*(t-sin(t))
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
... (x) &= (diff(f(x),x,2)) / (1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $' k(x)=k(x) ...
```

Berikut kita gambar parabola tersebut beserta kurva kelengkungan, kurva jari-jari kelengkungan dan salah satu lingkaran oskulasi di titik puncak parabola. Perhatikan, puncak parabola dan jari-jari lingkaran oskulasi di puncak parabola adalah

$$(-1/2, 3/4), \quad 1/k(2) = 1/2,$$

sehingga pusat lingkaran oskulasi adalah (-1/2, 5/4).

```
>plot2d(["f(x)", "k(x)"], -2, 1, color=[blue, red]); plot2d("1/k(x)", -1.5, 1, color=green, >add); ...
> plot2d("-1/2+1/k(-1/2)*cos(x)", "5/4+1/k(-1/2)*sin(x)", xmin=0, xmax=2pi, >add, color=blue);
```

```

Variable or function t not found.
f:
useglobal; return r*(t-sin(t))+r^2*(t-sin(t))^2+1
Error in expression: f(x)
%ploteval:
y0=f$(x[1],args());
adaptiveevalone:
s=%ploteval(g$,t,args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args();

```

Untuk kurva yang dinyatakan dengan fungsi implisit

$$F(x, y) = 0$$

dengan turunan-turunan parsial

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, F_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right), F_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right), F_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right),$$

berlaku

$$F_x dx + F_y dy = 0 \text{ atau } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y},$$

sehingga kurvturnya adalah

$$\kappa = \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}.$$

(Silakan Anda turunkan sendiri!)

Contoh 1:

Parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

dapat dinyatakan ke dalam persamaan implisit

$$ax^2 + bx + c - y = 0.$$

```
>function F(x,y) &=a*x^2+b*x+c-y; $F(x,y)
```

$$b r (t - \sin t) + a r^2 (t - \sin t)^2 - r (1 - \cos t) + c$$

```
>Fx &= diff(F(x,y),x), Fxx &= diff(F(x,y),x,2), Fy &= diff(F(x,y),y), Fxy &= diff(diff(F(x,y),x),y), Fyy
&= diff(F(x,y),y,2)
```

Maxima said:

```
diff: second argument must be a variable; found r*(t-sin(t))
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
Fx &= diff(F(x,y),x), Fxx &= diff(F(x,y),x,2), Fy &= diff(F(x,y) ...
```

>function k(x) &= (Fy²*Fxx-2*Fx*Fy*Fxy+Fx²*Fyy)/(Fx²+Fy²)^(3/2); \$'k(x)=k(x) // kurvatur parabola tersebut

$$k(r(t - \sin t)) = \frac{Fx^2 Fyy + Fxx Fy^2 - 2 Fx Fxy Fy}{(Fy^2 + Fx^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Hasilnya sama dengan sebelumnya yang menggunakan persamaan parabola biasa.

5.11 Latihan

- Bukalah buku Kalkulus.
- Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi).
- Untuk setiap fungsi, tentukan anti turunannya (jika ada), hitunglah integral tentu dengan batas-batas yang menarik (Anda tentukan sendiri), seperti contoh-contoh tersebut.
- Lakukan hal yang sama untuk fungsi-fungsi yang tidak dapat diintegralkan (cari sedikitnya 3 fungsi).
- Gambar grafik fungsi dan daerah integrasinya pada sumbu koordinat yang sama.
- Gunakan integral tentu untuk mencari luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva yang berpotongan di dua titik. (Cari dan gambar kedua kurva dan arsir (warnai) daerah yang dibatasi oleh keduanya.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung volume benda putar kurva $y = f(x)$ yang diputar mengelilingi sumbu x dari $x=a$ sampai $x=b$, yakni

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx.$$

(Pilih fungsinya dan gambar kurva dan benda putar yang dihasilkan. Anda dapat mencari contoh-contoh bagaimana cara menggambar benda hasil perputaran suatu kurva.)

- Gunakan integral tentu untuk menghitung panjang kurva $y=f(x)$ dari $x=a$ sampai $x=b$ dengan menggunakan rumus:

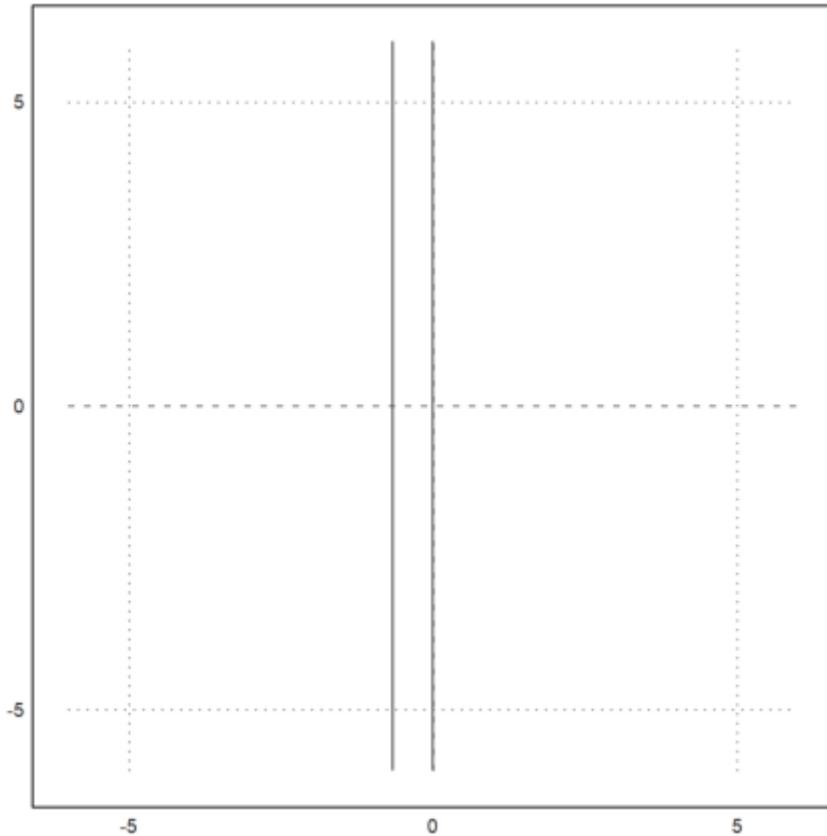
$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

(Pilih fungsi dan gambar kurvanya.)

- Apabila fungsi dinyatakan dalam koordinat kutub $x=f(r,t)$, $y=g(r,t)$, $r=h(t)$, $x=a$ bersesuaian dengan $t=t_0$ dan $x=b$ bersesuaian dengan $t=t_1$, maka rumus di atas akan menjadi:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

* Pilih beberapa kurva menarik (selain lingkaran dan parabola) dari + buku kalkulus. Nyatakan setiap kurva tersebut dalam bentuk: + a. koordinat Kartesius (persamaan $y=f(x)$) + b. koordinat kutub ($r=r(\theta)$) + c. persamaan parametrik $x=x(t)$, $y=y(t)$ + d. persamaan implisit $F(x,y)=0$



Gambar 5.43 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-224.png

- Tentukan kurvatur masing-masing kurva dengan menggunakan keempat representasi tersebut (hasilnya harus sama).
- Gambarlah kurva asli, kurva kurvatur, kurva jari-jari lingkaran oskulasi, dan salah satu lingkaran oskulasinya.

1. polinomial kuadrat

diberikan fungsi

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

```
>function f(x) := 3*x^2 + 2*x + 1
>z &= 3*x^2 + 2*x + 1 ; $z
```

$$3x^2 + 2x + 1$$

```
>plot2d(z,r=6,level=1,n=200):
```

2. eksponensial

diberikan fungsi

$$f(x) = 5e^{2x}$$

```

>function f(x) := 5*r^{2a}
>function f(y) := 2*r
>&assume(a>0,r>0); s &=integrate(sqrt(diff(fx,a)^2+diff(fy,a)^2),a,0,a); s // elemen panjang kurva,
0

>&kill(s); fx &= r*cos(s/r); fy &=r*sin(s/r); // definisi ulang persamaan parametrik terhadap s
dengan substitusi a=s/r
>k &= trigsimp(sqrt(diff(fx,s,2)^2+diff(fy,s,2)^2)); $k // nilai kurvatur lingkaran dengan menggunakan
definisi di atas

1
r
>$showev('integrate(sqrt(1+(f(x))^2),x,a,b))

```

5.12 Barisan dan Deret

(Catatan: bagian ini belum lengkap. Anda dapat membaca contoh-contoh penggunaan EMT dan Maxima untuk menghitung limit barisan, rumus jumlah parsial suatu deret, jumlah tak hingga suatu deret konvergen, dan sebagainya. Anda dapat mengeksplor contoh-contoh di EMT atau perbagai panduan penggunaan Maxima di software Maxima atau dari Internet.)

Barisan dapat didefinisikan dengan beberapa cara di dalam EMT, di antaranya:

- dengan cara yang sama seperti mendefinisikan vektor dengan elemen-elemen beraturan (menggunakan titik dua “:”);
- menggunakan perintah “sequence” dan rumus barisan (suku ke -n);
- menggunakan perintah “iterate” atau “niterate”;
- menggunakan fungsi Maxima “create_list” atau “makelist” untuk menghasilkan barisan simbolik;
- menggunakan fungsi biasa yang inputnya vektor atau barisan;
- menggunakan fungsi rekursif.

EMT menyediakan beberapa perintah (fungsi) terkait barisan, yakni:

- sum: menghitung jumlah semua elemen suatu barisan
- cumsum: jumlah kumulatif suatu barisan
- differences: selisih antar elemen-elemen berturutan

EMT juga dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga maupun deret tak hingga, dengan menggunakan perintah (fungsi) “sum”. Perhitungan dapat dilakukan secara numerik maupun simbolik dan eksak.

Berikut adalah beberapa contoh perhitungan barisan dan deret menggunakan EMT.

>1:10 // barisan sederhana

[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

>1:2:30

[1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29]

5.13 Iterasi dan Barisan

EMT menyediakan fungsi iterate("g(x)", x0, n) untuk melakukan iterasi

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad x_0 = x_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Berikut ini disajikan contoh-contoh penggunaan iterasi dan rekursi dengan EMT. Contoh pertama menunjukkan pertumbuhan dari nilai awal 1000 dengan laju pertambahan 5%, selama 10 periode.

```
>q=1.05; iterate("x*q",1000,n=10)'
```

```
1000  
1050  
1102.5  
1157.63  
1215.51  
1276.28  
1340.1  
1407.1  
1477.46  
1551.33  
1628.89
```

Contoh berikutnya memperlihatkan bahaya menabung di bank pada masa sekarang! Dengan bunga tabungan sebesar 6% per tahun atau 0.5% per bulan dipotong pajak 20%, dan biaya administrasi 10000 per bulan, tabungan sebesar 1 juta tanpa diambil selama sekitar 10 tahunan akan habis diambil oleh bank!

```
>r=0.005; plot2d(iterate("(1+0.8*r)*x-10000",1000000,n=130)):
```

Silakan Anda coba-coba, dengan tabungan minimal berapa agar tidak akan habis diambil oleh bank dengan ketentuan bunga dan biaya administrasi seperti di atas.

Berikut adalah perhitungan minimal tabungan agar aman di bank dengan bunga sebesar r dan biaya administrasi a, pajak bunga 20%.

```
>$solve(0.8*r*A-a,A), $% with [r=0.005, a=10]
```

$$[A = 2500.0]$$

$$[A = 2500.0]$$

Berikut didefinisikan fungsi untuk menghitung saldo tabungan, kemudian dilakukan iterasi.

```
>function saldo(x,r,a) := round((1+0.8*r)*x-a,2);  
>iterate({{"saldo"},0.005,10}},1000,n=6)
```

$$[1000, \quad 994, \quad 987.98, \quad 981.93, \quad 975.86, \quad 969.76, \quad 963.64]$$

```
>iterate({{"saldo"},0.005,10}},2000,n=6)
```

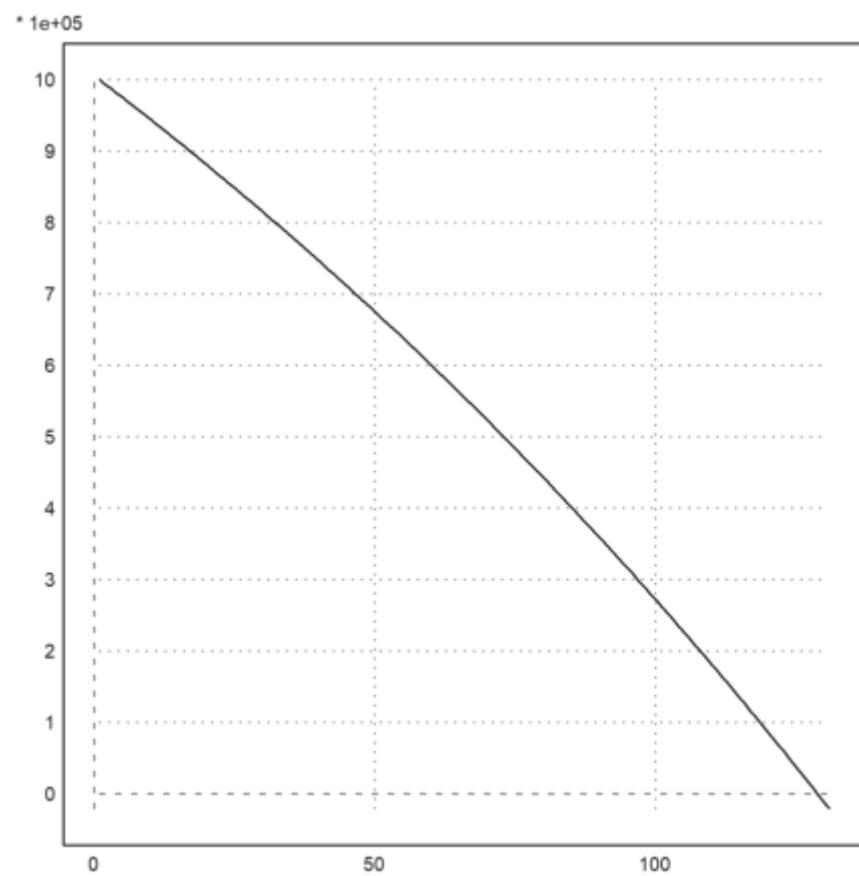
$$[2000, \quad 1998, \quad 1995.99, \quad 1993.97, \quad 1991.95, \quad 1989.92, \quad 1987.88]$$

```
>iterate({{"saldo"},0.005,10}},2500,n=6)
```

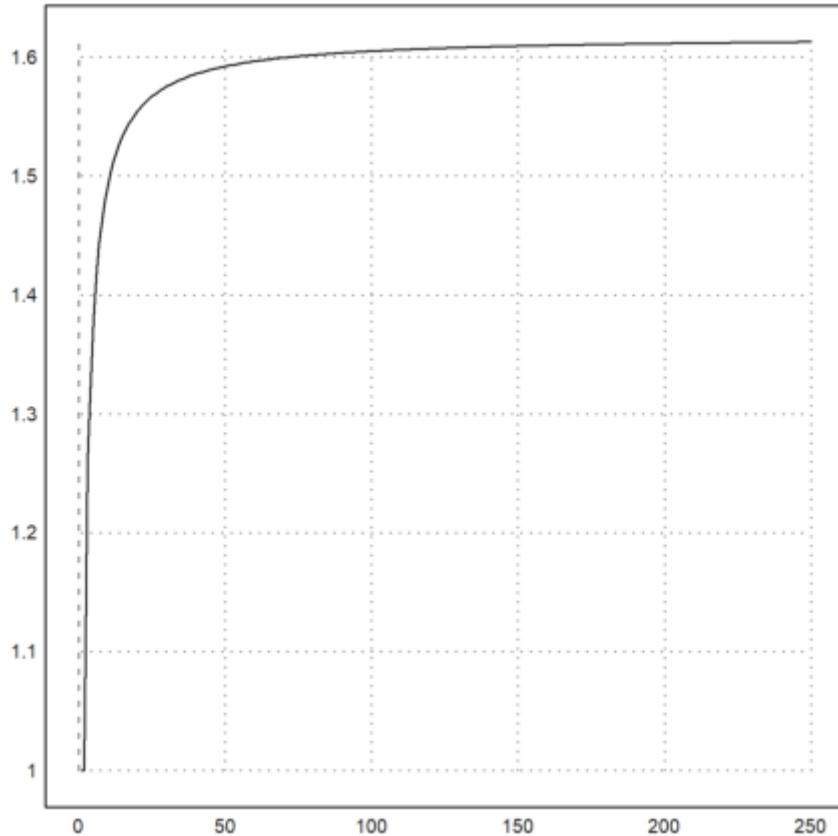
$$[2500, \quad 2500, \quad 2500, \quad 2500, \quad 2500, \quad 2500, \quad 2500]$$

Tabungan senilai 2,5 juta akan aman dan tidak akan berubah nilai (jika tidak ada penarikan), sedangkan jika tabungan awal kurang dari 2,5 juta, lama kelamaan akan berkurang meskipun tidak pernah dilakukan penarikan uang tabungan.

```
>iterate({{"saldo"},0.005,10}},3000,n=6)
```



Gambar 5.44 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-228.png



Gambar 5.45 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-233.png

[3000, 3002, 3004.01, 3006.03, 3008.05, 3010.08, 3012.12]

Tabungan yang lebih dari 2,5 juta baru akan bertambah jika tidak ada penarikan.

Untuk barisan yang lebih kompleks dapat digunakan fungsi “sequence()”. Fungsi ini menghitung nilai-nilai $x[n]$ dari semua nilai sebelumnya, $x[1], \dots, x[n-1]$ yang diketahui.

Berikut adalah contoh barisan Fibonacci.

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1$$

>sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],15)

[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610]

Barisan Fibonacci memiliki banyak sifat menarik, salah satunya adalah akar pangkat ke-n suku ke-n akan konvergen ke pecahan emas:

>\$'(1+sqrt(5))/2=float((1+sqrt(5))/2)

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1.618033988749895$$

>plot2d(sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],250)^(1/(1:250))):

Barisan yang sama juga dapat dihasilkan dengan menggunakan loop.

>x=ones(500); for k=3 to 500; x[k]=x[k-1]+x[k-2]; end;

Rekursi dapat dilakukan dengan menggunakan rumus yang tergantung pada semua elemen sebelumnya. Pada contoh berikut, elemen ke-n merupakan jumlah (n-1) elemen sebelumnya, dimulai dengan 1 (elemen ke-1). Jelas, nilai elemen ke-n adalah $2^{(n-2)}$, untuk n=2, 4, 5,

```
>sequence("sum(x)",1,10)
```

```
[1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256]
```

Selain menggunakan ekspresi dalam x dan n, kita juga dapat menggunakan fungsi.

Pada contoh berikut, digunakan iterasi

$$x_n = A \cdot x_{n-1},$$

dengan A suatu matriks 2x2, dan setiap x[n] merupakan matriks/vektor 2x1.

```
>A=[1,1;1,2]; function suku(x,n) := A.x[,n-1]
```

```
>sequence("suku",[1;1],6)
```

Real 2 x 6 matrix

1	2	5	13	...
1	3	8	21	...

Hasil yang sama juga dapat diperoleh dengan menggunakan fungsi perpangkatan matriks "matrixpower()". Cara ini lebih cepat, karena hanya menggunakan perkalian matriks sebanyak $\log_2(n)$.

$$x_n = A \cdot x_{n-1} = A^2 \cdot x_{n-2} = A^3 \cdot x_{n-3} = \dots = A^{n-1} \cdot x_1.$$

```
>sequence("matrixpower(A,n).[1;1]",1,6)
```

Real 2 x 6 matrix

1	5	13	34	...
1	8	21	55	...

5.14 Spiral Theodorus

image: Spiral_of_Theodorus.png

Spiral Theodorus (spiral segitiga siku-siku) dapat digambar secara rekursif. Rumus rekursifnya adalah:

$$x_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n-1}}\right) x_{n-1}, \quad x_1 = 1,$$

yang menghasilkan barisan bilangan kompleks.

```
>function g(n) := 1+I/sqrt(n)
```

Rekursinya dapat dijalankan sebanyak 17 untuk menghasilkan barisan 17 bilangan kompleks, kemudian digambar bilangan-bilangan kompleksnya.

```
>x=sequence("g(n-1)*x[n-1]",1,17); plot2d(x,r=3.5); textbox(latex("Spiral\ Theodorus"),0.4);
```

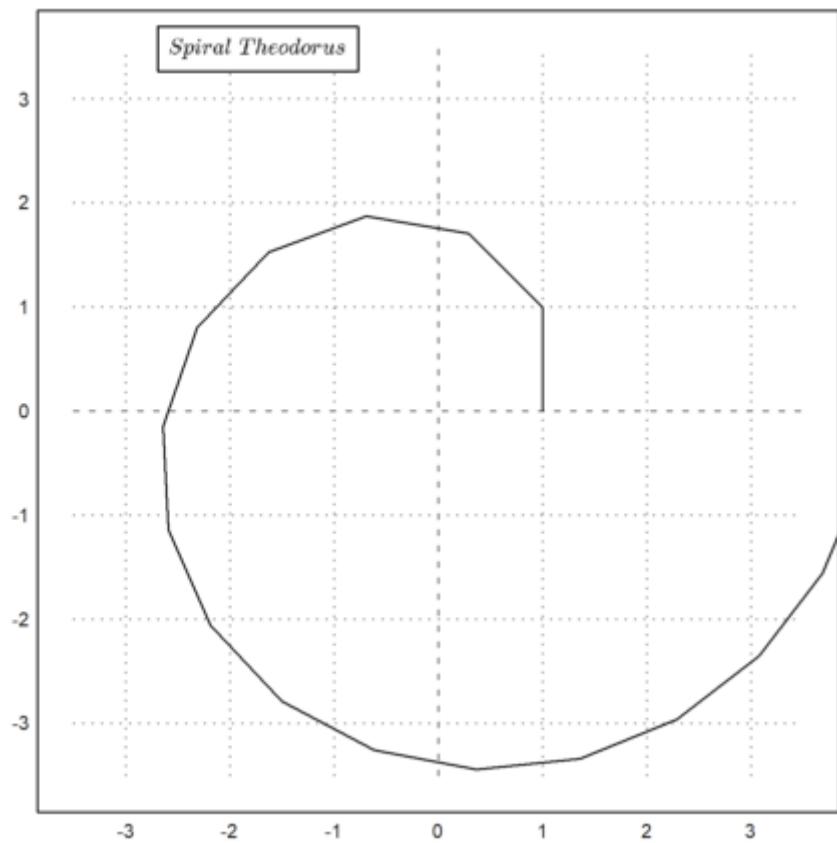
Selanjutnya dihubungan titik 0 dengan titik-titik kompleks tersebut menggunakan loop.

```
>for i=1:cols(x); plot2d([0,x[i]],>add); end;
```

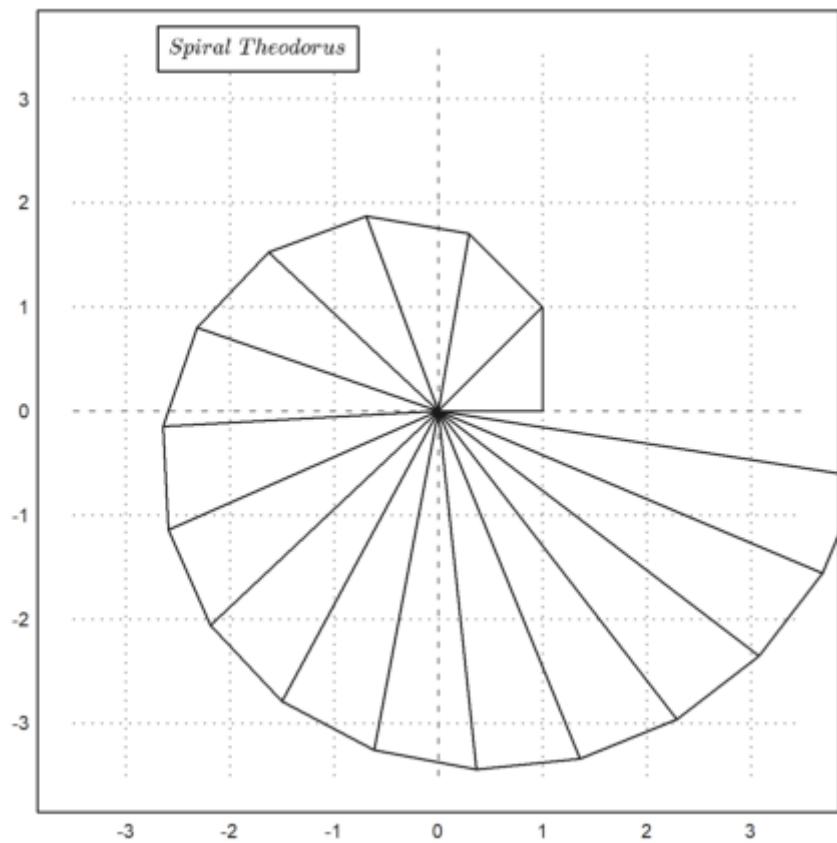
```
>
```

Spiral tersebut juga dapat didefinisikan menggunakan fungsi rekursif, yang tidak memerlukan indeks dan bilangan kompleks. Dalam hal ini digunakan vektor kolom pada bidang.

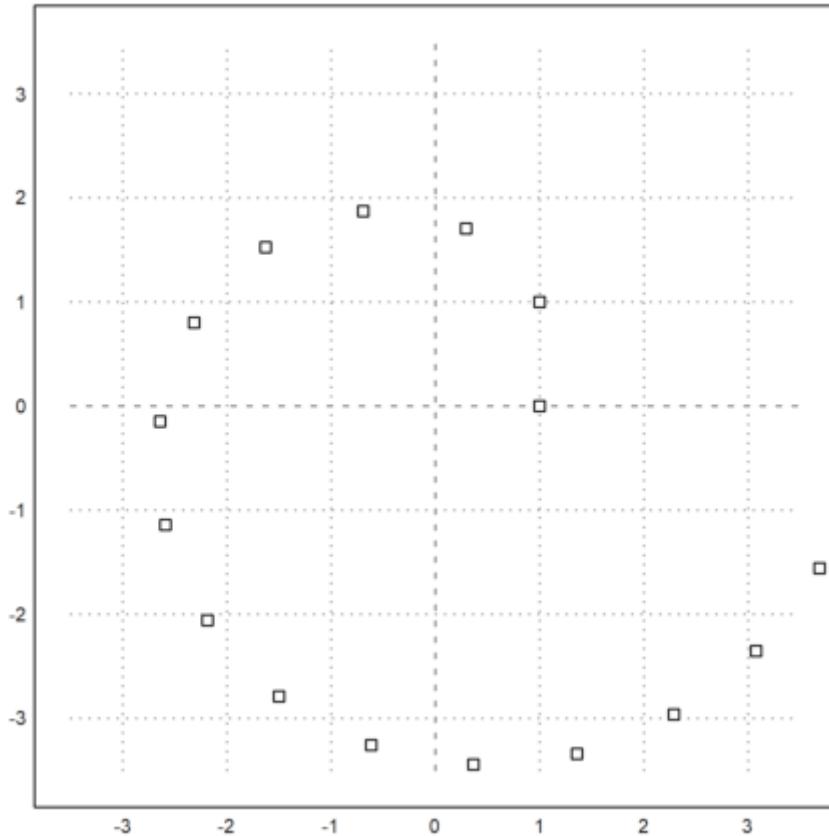
```
>function gstep (v) ...
```



Gambar 5.46 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-237.png



Gambar 5.47 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-238.png



Gambar 5.48 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-239.png

```
w=[-v[2];v[1]];
return v+w/norm(w);
endfunction
```

Jika dilakukan iterasi 16 kali dimulai dari [1;0] akan didapatkan matriks yang memuat vektor-vektor dari setiap iterasi.

>x=iterate("gstep",[1;0],16); plot2d(x[1],x[2],r=3.5,>points):

5.15 Kekonvergenan

Terkadang kita ingin melakukan iterasi sampai konvergen. Apabila iterasinya tidak konvergen setelah ditunggu lama, Anda dapat menghentikannya dengan menekan tombol [ESC].

>iterate("cos(x)",1) // iterasi $x_{(n+1)} = \cos(x_n)$, dengan $x(0)=1$.

0.739085133216

Iterasi tersebut konvergen ke penyelesaian persamaan

$$x = \cos(x).$$

Iterasi ini juga dapat dilakukan pada interval, hasilnya adalah barisan interval yang memuat akar tersebut.

>hasil := iterate("cos(x)",1,2) //iterasi $x_{(n+1)} = \cos(x_n)$, dengan interval awal (1, 2)

$\sim 0.739085133211, 0.739085133213 \sim$

Jika interval hasil tersebut sedikit diperlebar, akan terlihat bahwa interval tersebut memuat akar persamaan $x=\cos(x)$.

```
>h=expand(hasil,100), cos(h) << h
```

```
~0.73908513309, 0.73908513333~
```

```
1
```

Iterasi juga dapat digunakan pada fungsi yang didefinisikan.

```
>function f(x) := (x+2/x)/2
```

Iterasi $x(n+1)=f(x(n))$ akan konvergen ke akar kuadrat 2.

```
>iterate("f",2), sqrt(2)
```

```
1.41421356237
```

```
1.41421356237
```

Jika pada perintah iterate diberikan tambahan parameter n, maka hasil iterasinya akan ditampilkan mulai dari iterasi pertama sampai ke-n.

```
>iterate("f",2,5)
```

```
[2, 1.5, 1.41667, 1.41422, 1.41421, 1.41421]
```

Untuk iterasi ini tidak dapat dilakukan terhadap interval.

```
>niterate("f",1,2,5)
```

```
[ ~1,2~, ~1,2~, ~1,2~, ~1,2~, ~1,2~, ~1,2~ ]
```

Perhatikan, hasil iterasinya sama dengan interval awal. Alasannya adalah perhitungan dengan interval bersifat terlalu longgar. Untuk meningkatkan perhitungan pada ekspresi dapat digunakan pembagian intervalnya, menggunakan fungsi ieval().

```
>function s(x) := ieval("(x+2/x)/2",x,10)
```

Selanjutnya dapat dilakukan iterasi hingga diperoleh hasil optimal, dan intervalnya tidak semakin mengecil. Hasilnya berupa interval yang memuat akar persamaan:

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right).$$

Satu-satunya solusi adalah

$$x = \sqrt{2}.$$

```
>iterate("s",1,2)
```

```
~1.41421356236, 1.41421356239~
```

Fungsi "iterate()" juga dapat bekerja pada vektor. Berikut adalah contoh fungsi vektor, yang menghasilkan rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri.

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n} \right)$$

Iterasi ke-n disimpan pada vektor kolom x[n].

```
>function g(x) := [(x[1]+x[2])/2;sqrt(x[1]*x[2])]
```

Iterasi dengan menggunakan fungsi tersebut akan konvergen ke rata-rata aritmetika dan geometri dari nilai-nilai awal.

```
>iterate("g",[1;5])
```

```
2.60401  
2.60401
```

Hasil tersebut konvergen agak cepat, seperti kita cek sebagai berikut.
>iterate("g",[1;5],4)

1	3	2.61803	2.60403	2.60401
5	2.23607	2.59002	2.60399	2.60401

Iterasi pada interval dapat dilakukan dan stabil, namun tidak menunjukkan bahwa limitnya pada batas-batas yang dihitung.

```
>iterate("g",[1;5],4)
```

Interval 2 x 5 matrix

```
~0.99999999999999778,1.0000000000000022~ ...  
~4.999999999999911,5.0000000000000089~ ...
```

Iterasi berikut konvergen sangat lambat.

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

```
>iterate("sqrt(x)",2,10)
```

```
[2, 1.41421, 1.18921, 1.09051, 1.04427, 1.0219, 1.01089,  
1.00543, 1.00271, 1.00135, 1.00068]
```

Kekonvergenan iterasi tersebut dapat dipercepat dengan percepatan Steffenson:

```
>steffenson("sqrt(x)",2,10)
```

```
[1.04888, 1.00028, 1, 1]
```

5.16 Iterasi menggunakan Loop yang ditulis Langsung

Berikut adalah beberapa contoh penggunaan loop untuk melakukan iterasi yang ditulis langsung pada baris perintah.

```
>x=2; repeat x=(x+2/x)/2; until x^2~=2; end; x,
```

```
1.41421356237
```

Penggabungan matriks menggunakan tanda “|” dapat digunakan untuk menyimpan semua hasil iterasi.

```
>v=[1]; for i=2 to 8; v=v|(v[i-1]*i); end; v,
```

```
[1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320]
```

hasil iterasi juga dapat disimpan pada vektor yang sudah ada.

```
>v=ones(1,100); for i=2 to cols(v); v[i]=v[i-1]*i; end; ...
```

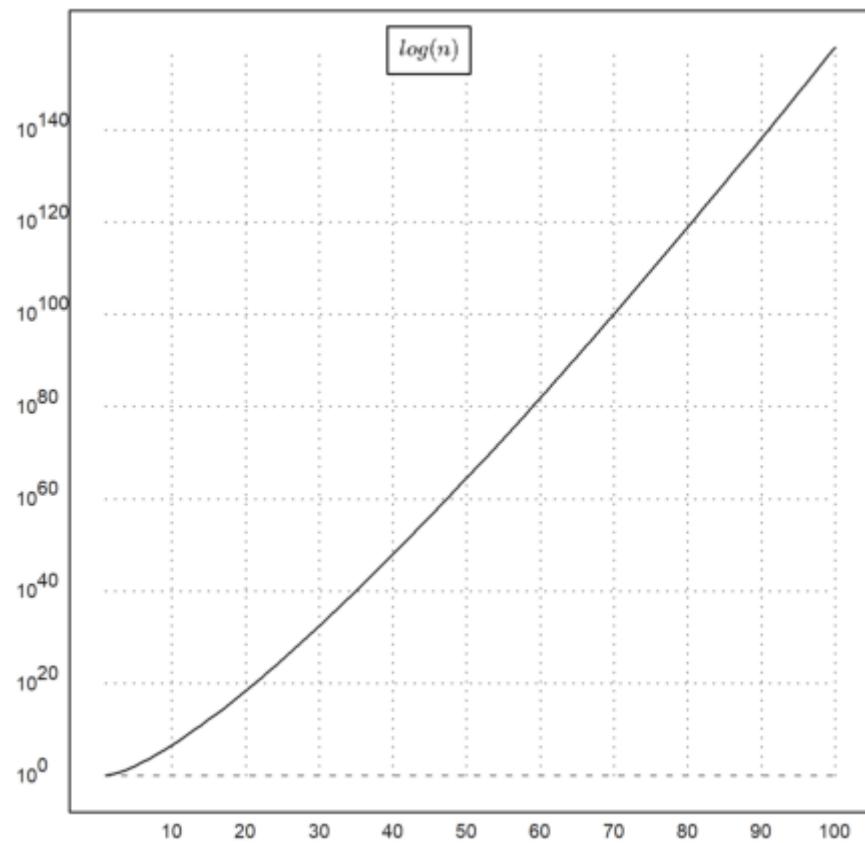
```
> plot2d(v,logplot=1); textbox(latex(&log(n)),x=0.5):
```

```
>A =[0.5,0.2;0.7,0.1]; b=[2;2]; ...
```

```
> x=[1;1]; repeat xnew=A.x-b; until all(xnew~x); x=xnew; end; ...
```

```
> x,
```

```
-7.09677  
-7.74194
```



Gambar 5.49 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-245.png

5.17 Iterasi di dalam Fungsi

Fungsi atau program juga dapat menggunakan iterasi dan dapat digunakan untuk melakukan iterasi. Berikut adalah beberapa contoh iterasi di dalam fungsi.

Contoh berikut adalah suatu fungsi untuk menghitung berapa lama suatu iterasi konvergen. Nilai fungsi tersebut adalah hasil akhir iterasi dan banyak iterasi sampai konvergen.

```
>function map hiter(f$,x0) ...
```

```
x=x0;
maxiter=0;
repeat
    xnew=f$(x);
    maxiter=maxiter+1;
    until xnew~ =x;
    x=xnew;
end;
return maxiter;
endfunction
```

Misalnya, berikut adalah iterasi untuk mendapatkan hampiran akar kuadrat 2, cukup cepat, konvergen pada iterasi ke-5, jika dimulai dari hampiran awal 2.

```
>riter("(x+2/x)/2",2)
```

5

Karena fungsinya didefinisikan menggunakan “map”. maka nilai awalnya dapat berupa vektor.

```
>x=1.5:0.1:10; hasil=riter("(x+2/x)/2",x); ...
```

```
>plot2d(x,hasil):
```

Dari gambar di atas terlihat bahwa kekonvergenan iterasinya semakin lambat, untuk nilai awal semakin besar, namun penambahannya tidak kontinu. Kita dapat menemukan kapan maksimum iterasinya bertambah.

```
>hasil[1:10]
```

```
[4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6]
```

```
>x[nonzeros(differences(hasil))]
```

```
[1.5, 2, 3.4, 6.6]
```

maksimum iterasi sampai konvergen meningkat pada saat nilai awalnya 1.5, 2, 3.4, dan 6.6.

Contoh berikutnya adalah metode Newton pada polinomial kompleks berderajat 3.

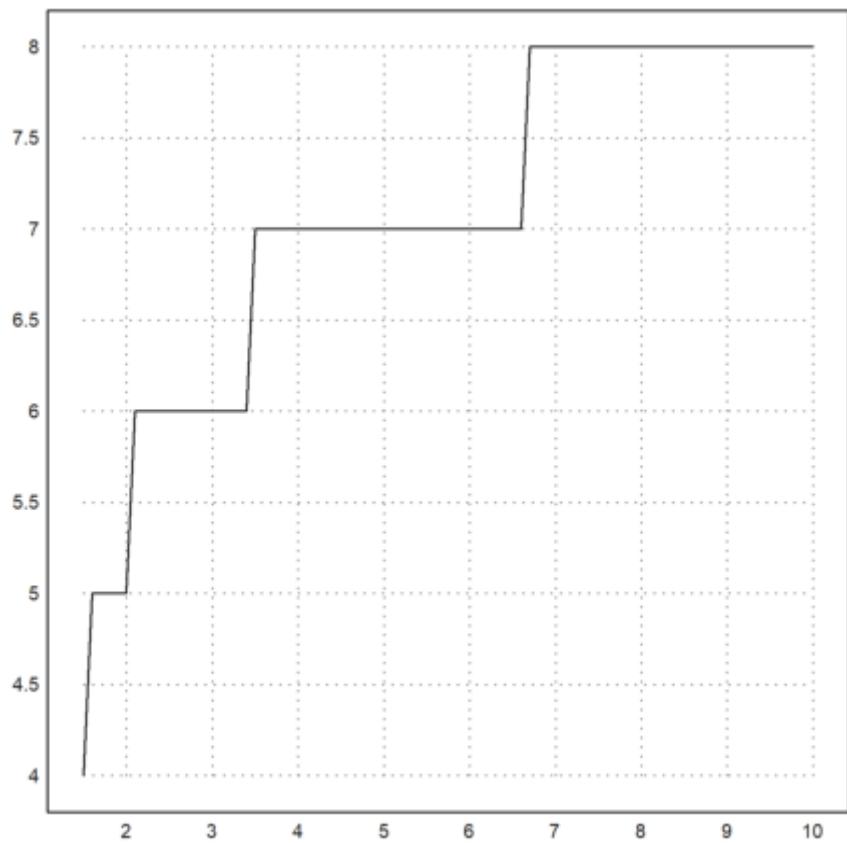
```
>p &= x^3-1; newton &= x-p/diff(p,x); $newton
```

Maxima said:

```
diff: second argument must be a variable; found errexp1
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
p &= x^3-1; newton &= x-p/diff(p,x); $newton ...
```



Gambar 5.50 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-246.png

Selanjutnya didefinisikan fungsi untuk melakukan iterasi (aslinya 10 kali).

```
>function iterasi(f$,x,n=10) ...
```

```
loop 1 to n; x=f$(x); end;
return x;
endfunction
```

Kita mulai dengan menentukan titik-titik grid pada bidang kompleksnya.

```
>r=1.5; x=linspace(-r,r,501); Z=x+I*x'; W=iterasi(newton,Z);
```

```
Function newton needs at least 3 arguments!
```

```
Use: newton (f$: call, df$: call, x: scalar complex {, y: number, eps: none})
```

```
Error in:
```

```
... x=linspace(-r,r,501); Z=x+I*x'; W=iterasi(newton,Z); ...
```

^

Berikut adalah akar-akar polinomial di atas.

```
>z=&solve(p)()
```

```
Maxima said:
```

```
solve: more equations than unknowns.
```

```
Unknowns given :
```

```
[r]
```

```
Equations given:
```

```
errexp1
```

```
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

```
Error in:
```

```
z=& solve(p) () ...
```

^

Untuk menggambar hasil iterasinya, dihitung jarak dari hasil iterasi ke-10 ke masing-masing akar, kemudian digunakan untuk menghitung warna yang akan digambar, yang menunjukkan limit untuk masing-masing nilai awal.

Fungsi plotrgb() menggunakan jendela gambar terkini untuk menggambar warna RGB sebagai matriks.

```
>C=rgb(max(abs(W-z[1]),1),max(abs(W-z[2]),1),max(abs(W-z[3]),1)); ...
```

```
> plot2d(None,-r,r,-r,r); plotrgb(C);
```

```
Variable W not found!
```

```
Error in:
```

```
C=rgb (max (abs (W-z [1]) , 1) , max (abs (W-z [2]) , 1) , max (abs (W-z [3]) , 1) ...
```

^

5.18 Iterasi Simbolik

Seperti sudah dibahas sebelumnya, untuk menghasilkan barisan ekspresi simbolik dengan Maxima dapat digunakan fungsi makelist().

```
>&powerdisp:true // untuk menampilkan deret pangkat mulai dari suku berpangkat terkecil
```

```
true
```

```

>deret &= makelist(taylor(exp(x),x,0,k),k,1,3); $deret // barisan deret Taylor untuk e^x

Maxima said:
taylor: 0.1539740213994798*r cannot be a variable.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
deret &= makelist(taylor(exp(x),x,0,k),k,1,3); $deret // baris ...

```

Untuk mengubah barisan deret tersebut menjadi vektor string di EMT digunakan fungsi mxm2str(). Selanjutnya, vektor string/ekspresi hasilnya dapat digambar seperti menggambar vektor ekspresi pada EMT.

```

>plot2d("exp(x)",0,3); // plot fungsi aslinya, e^x
>plot2d(mxm2str("deret"),>add,color=4:6); // plot ketiga deret taylor hampiran fungsi tersebut

Maxima said:
length: argument cannot be a symbol; found deret
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

mxmeval:
  return evaluate(mxm(s));
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxm2str:
n=mxmeval("length(VVV) ");

Selain cara di atas dapat juga dengan cara menggunakan indeks pada vektor/list yang dihasilkan.
>$deret[3]

```

deret₃

```

>plot2d(["exp(x),&deret[1],&deret[2],&deret[3]],0,3,color=1:4);

deret is not a variable!
Error in expression: deret[1]
%ploteval:
y0=f$(x[1],args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
u=u_(%ploteval(xx[#],t,args()));

>$sum(sin(k*x)/k,k,1,5)

```

$$\dots + \frac{\sin(0.22585\sqrt{65049463528}r)}{2} \frac{\sin(0.338784757419529\sqrt{3}r)}{3} \frac{\sin(0.333466067518830098927056r)}{2} \frac{\sin(0.40093750002723258810r)}{4} \dots$$

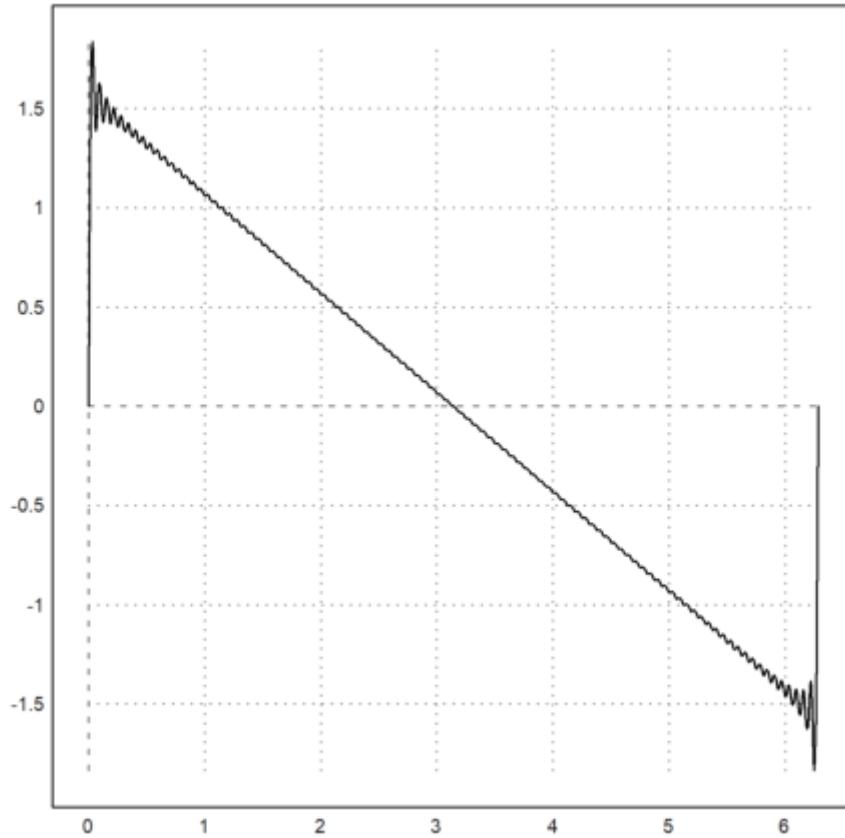
Berikut adalah cara menggambar kurva

$$y = \sin(x) + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots$$

```

>plot2d(&sum(sin((2*k+1)*x)/(2*k+1),k,0,20),0,2pi);

```



Gambar 5.51 images/EMT4Kalkulus_23030630084_Amalia_Rahmadhani-251.png

```
Maxima output too long!
Error in:
plot2d(&sum(sin((2*k+1)*x)/(2*k+1),k,0,20),0,2pi): ...
```

Hal serupa juga dapat dilakukan dengan menggunakan matriks, misalkan kita akan menggambar kurva

$$y = \sum_{k=1}^{100} \frac{\sin(kx)}{k}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

```
>x=linspace(0,2pi,1000); k=1:100; y=sum(sin(k*x')/k)'; plot2d(x,y);
```

5.19 Tabel Fungsi

Terdapat cara menarik untuk menghasilkan barisan dengan ekspresi Maxima. Perintah mxmtable() berguna untuk menampilkan dan menggambar barisan dan menghasilkan barisan sebagai vektor kolom.

Sebagai contoh berikut adalah barisan turunan ke-n x^x di $x=1$.

```
>mxmtable("diffat(x^x,x=1,n)","n",1,8,frac=1);
```

Maxima said:

```
diff: second argument must be a variable; found errexp1
#0: diffat(expr=[0,1.66665833335744e-7*r,1.33330666692022e-6*r,4.499797504338432
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

```
%mxmevtable:
    return mxm("@expr,@var=@value")();
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxmtable:
y[#,1]=%mxmevtable(expr,var,x[#]);
```

>\$'sum(k, k, 1, n)=factor(ev(sum(k, k, 1, n),simpsum=true)) // simpsum:menghitung deret secara simbolik

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(1+n)}{2}$$

>\$'sum(1/(3^k+k), k, 0, inf)=factor(ev(sum(1/(3^k+k), k, 0, inf),simpsum=true))

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+3^k}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

>\$'sum(1/x^2, x, 1, inf)=ev(sum(1/x^2, x, 1, inf),simpsum=true) // ev: menghitung nilai ekspresi

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

>\$'sum((-1)^(k-1)/k, k, 1, inf)=factor(ev(sum((-1)^(x-1)/x, x, 1, inf),simpsum=true))

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{-1+k}}{k} = -\sum_{x=1}^{\infty} \frac{(-1)^x}{x}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

>\$'sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf)=factor(ev(sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf),simpsum=true))

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{-1+2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{-1+2k}$$

>\$ev(sum(1/n!, n, 0, inf),simpsum=true)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung, harusnya hasilnya e.

>&assume(abs(x)<1); \$'sum(a*x^k, k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsum=true),
&forget(abs(x)<1);

Answering "Is $-94914474571+15819\sqrt{r}$ positive, negative or zero?" with "positive" Maxima said:

sum: sum is divergent.

-- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:

... k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsum=true), &forget(abs ...

Deret geometri tak hingga, dengan asumsi rasional antara -1 dan 1.

```
> $'sum(x^k/k!,k,0,inf)=ev(sum(x^k/k!,k,0,inf),simpsum=true)
```

$$\left[0, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1.66665833335744 \times 10^{-7})^k r^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1.33330666692022 \times 10^{-6})^k r^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4.499797504338432 \times 10^{-6})^k r^k}{k!} \right]$$

```
> $limit(sum(x^k/k!,k,0,n),n,inf)
```

$$\left[0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(1.66665833335744 \times 10^{-7})^k r^k}{k!}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(1.33330666692022 \times 10^{-6})^k r^k}{k!}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(4.499797504338432 \times 10^{-6})^k r^k}{k!} \right]$$

```
> function d(n) &= sum(1/(k^2-k),k,2,n); $'d(n)=d(n)
```

$$d(n) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{-k + k^2}$$

```
> $d(10)=ev(d(10),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=2}^{10} \frac{1}{-k + k^2} = \frac{9}{10}$$

```
> $d(100)=ev(d(100),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=2}^{100} \frac{1}{-k + k^2} = \frac{99}{100}$$

Deret Taylor

Deret Taylor suatu fungsi f yang diferensiabel sampai tak hingga di sekitar $x=a$ adalah:

```
> $'e^x=taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x=0, sampai suku ke-11
```

Maxima said:

```
taylor: 0.1539740213994798*r cannot be a variable.  
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
$'e^x=taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x= ...  
^
```

```
> $'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1
```

Maxima said:

```
log: encountered log(0).  
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
$'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1 ...  
^
```

BAB VI

VISUALISASI DAN PERHITUNGAN GEOMETRI DENGAN EMT

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometri tersebut disimpan di dalam file program “geometry.e”, sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

6.1 Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

```
defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d  
setPlotRange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang koordinat  
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas sumbu-x dan y adalah -r sd r  
plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"  
plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label "AB" sejauh d  
plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d  
plotCircle (c, "c", v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"  
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P
```

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

```
turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi  
turnLeft(v): memutar vektor v ke kiri  
turnRight(v): memutar vektor v ke kanan  
normalize(v): normal vektor v  
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektorv dan w.  
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh. ax+by=c.  
lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v  
getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g  
getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g  
getPointOnLine(g): titik pada garis g  
perpendicular(A, g): garis melalui A tegak lurus garis g  
parallel (A, g): garis melalui A sejajar garis g  
lineIntersection(g, h): titik potong garis g dan h  
projectToLine(A, g): proyeksi titik A pada garis g  
distance(A, B): jarak titik A dan B  
distanceSquared(A, B): kuadrat jarak A dan B  
quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B  
areaTriangle(A, B, C): luas segitiga ABC  
computeAngle(A, B, C): besar sudut <ABC  
angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut <ABC  
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r  
getCircleCenter(c): pusat lingkaran c  
getCircleRadius(c): jari-jari lingkaran c  
circleThrough(A,B,C): lingkaran melalui A, B, C  
middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB  
lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkran c
```

circleCircleIntersections (c1, c2): titik potong lingkaran c1 dan c2

planeThrough(A, B, C): bidang melalui titik A, B, C

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y

getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan y dengan titik A pada sisi positif (kanan/atas) garis

quad(A,B): kuadrat jarak AB

spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni $\sin(\alpha)^2$ dengan alpha sudut yang menghadap sisi a.

crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga dengan panjang sisi a, b, c.

triplespread(sa,sb,sc): persamaan 3 spread sa,sb,sc yang memebntuk suatu segitiga

doublespread(sa): Spread sudut rangkap 2ϕ , dengan $sa=\sin(\phi)^2$ spread a.

6.2 Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang tetapkan tiga titik dan plotlah.

```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
```

```
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
```

```
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
```

Lalu tiga segmen.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
```

```
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
```

```
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

Fungsi geometri mencakup fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format untuk garis adalah [a,b,c], yang merepresentasikan garis dengan persamaan $ax+by=c$.

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
[-1, 2, 2]
```

Hitunglah garis tegak lurus melalui A pada BC.

```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
```

Dan persimpangannya dengan BC.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
```

Gambarkan itu.

```
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan
```

```
>aspect(1); plotSegment(A,D); // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```

Hitung luas ABC:

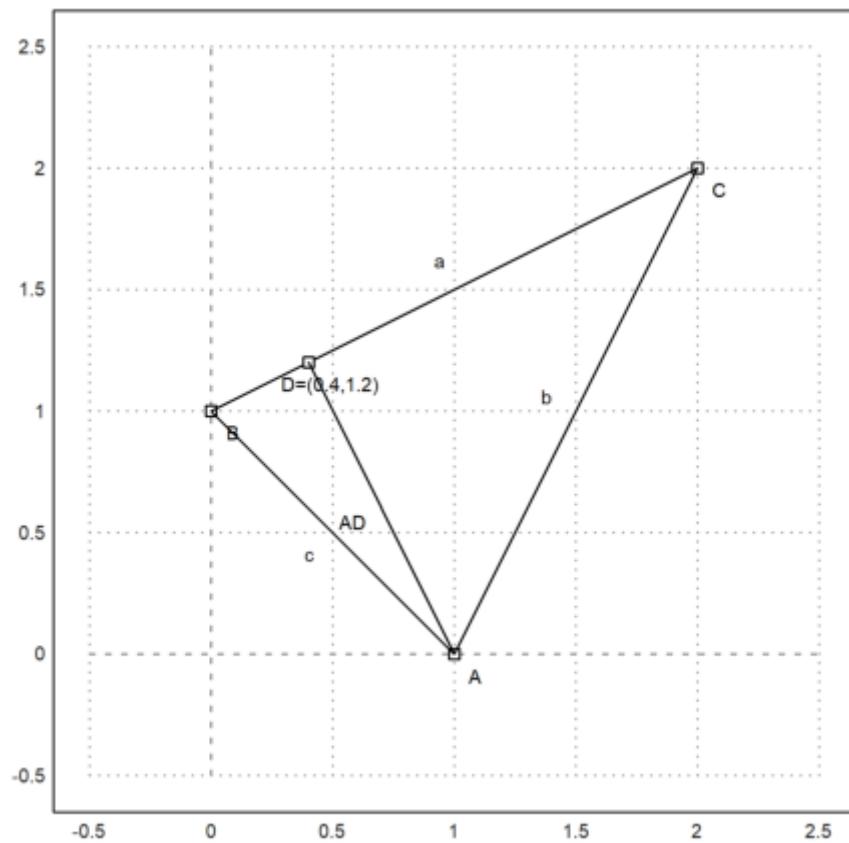
$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

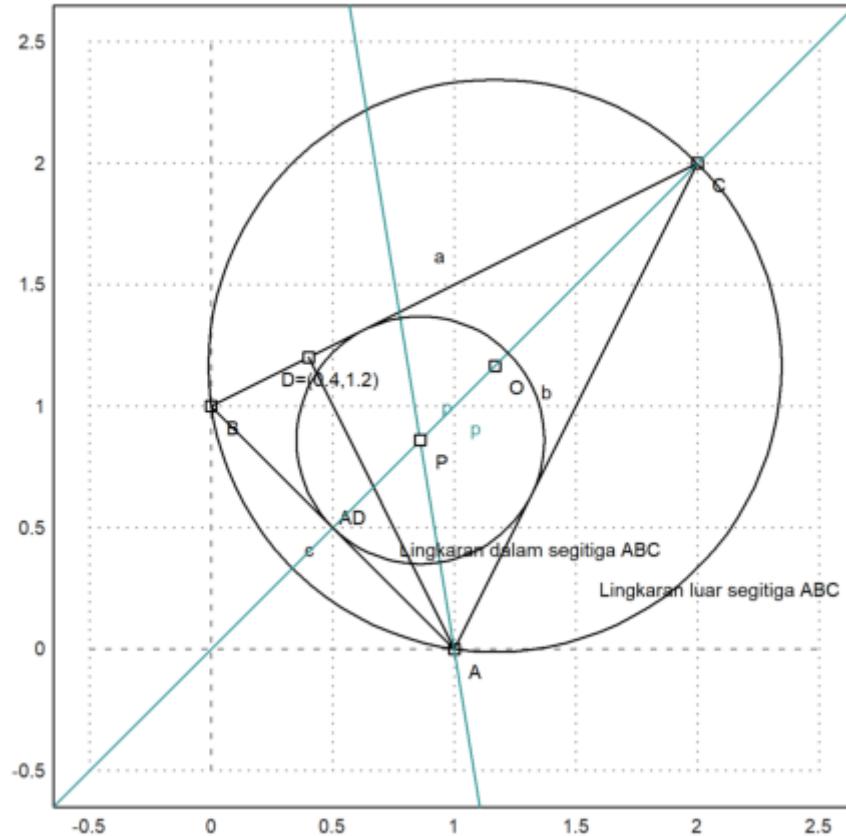
1.5

Bandingkan dengan rumus determinan.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langsung dengan fungsi
```



Gambar 6.1 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-001.png



Gambar 6.2 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-003.png

1.5

Cara lain menghitung luas segitiga ABC:

>distance(A,D)*distance(B,C)/2

1.5

Sudut di C.

>degrprint(computeAngle(B,C,A))

$36^\circ 52' 11.63''$

Sekarang lingkaran luar segitiga.

>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC

>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar

>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c

>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"

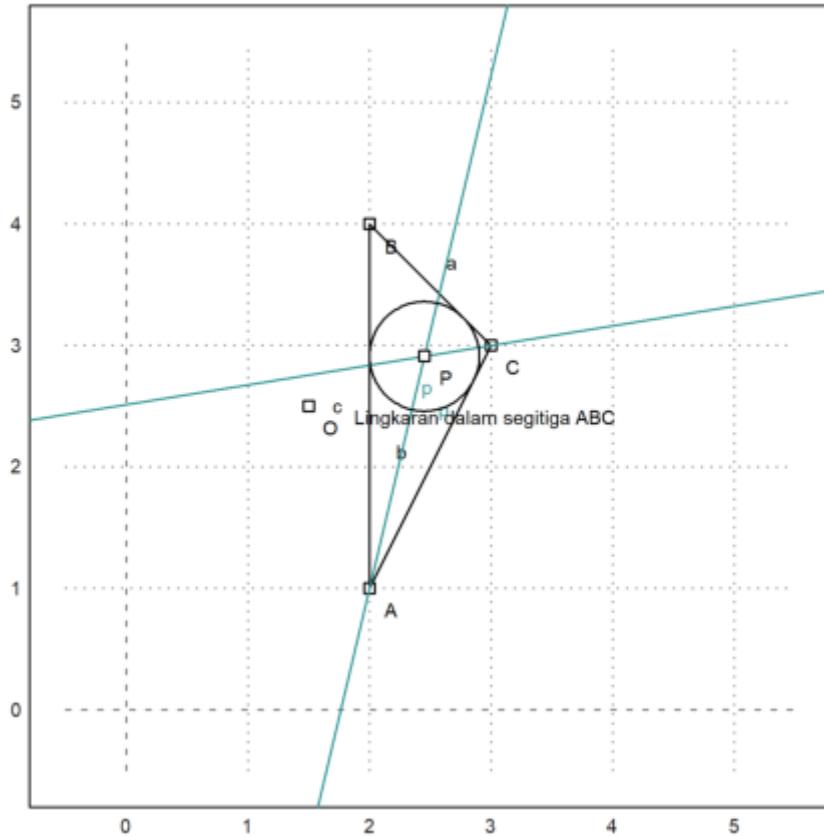
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC");

Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

>O, R

[1.16667, 1.16667]

1.17851130198



Gambar 6.3 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-004.png

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

[0.86038 , 0 . 86038]

Tambahkan semuanya ke dalam alur cerita.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

0 . 509653732104

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"); // gambar lingkaran dalam
```

6.3 Latihan

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.
2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Merupakan segitiga apakah itu?

3. Hitung luas segitiga tersebut.
4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.
5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.
6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?

>load geometry

Numerical and symbolic geometry.

```
>setPlotRange(-0.5,5.5,-0.5,5.5);
>A=[2,1]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[2,4]; plotPoint(B,"B");
>C=[3,3]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
>lineThrough(A,B) // garis yang melalui B dan C
```

[-3, 0, -6]

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

[2.45111, 2.91093]

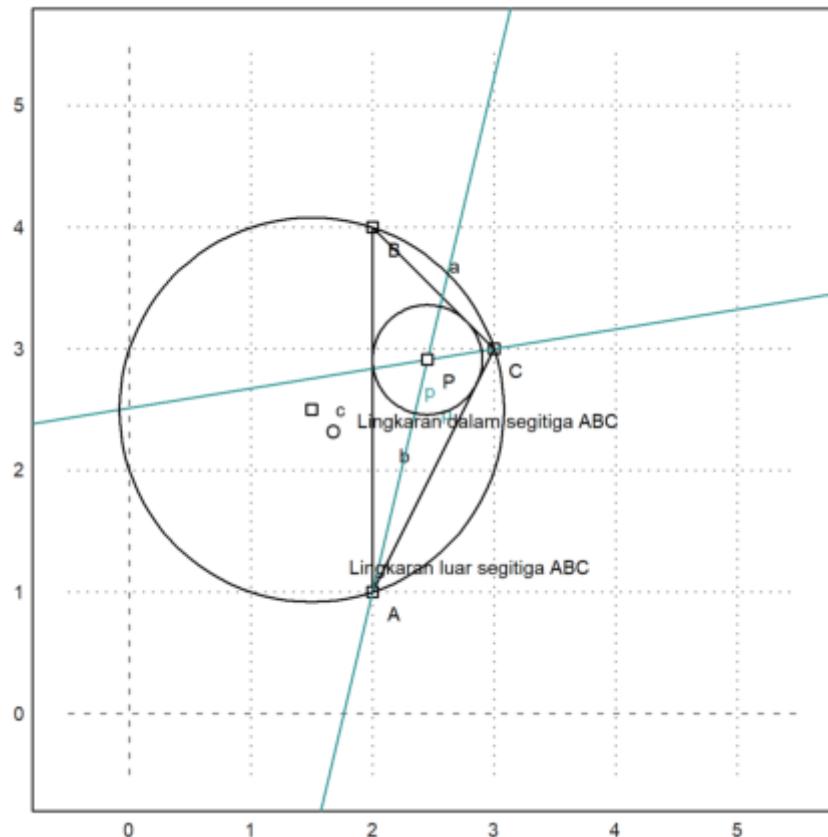
```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

0.451108721039

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"):
membentuk segitiga sama kaki
>norm(A-C)*norm(P-C)/2 // AC=norm(A-C), PC=norm(P-C)(luas segitiga tersebut)
```

0.621706922987

```
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
luas lingkaran dalam segitiga abc
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```



Gambar 6.4 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-005.png

$$2y - x = 2$$

Gambar 6.5 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-006.png

0.451108721039

>LD=pi*r^2

0.639311209077

luas lingkaran luar segitiga abc
>O, R

[1.5, 2.5]
1.58113883008

>LU=pi*R^2

7.85398163397

dari diketahui diatas dan berdasarkan plot yang telah ditunjukkan diatas dapat ditarik kesimpulan bahwa dalam segitiga ABC terdapat hubungan pada lingkaran dalam yaitu diameter lingkaran dalam = tinggi segitiga ABC, namun tidak ada hubungan segitiga ABC dengan lingkaran luar

6.4

Contoh 2: Geometri Smbolik

Kita dapat menghitung geometri yang tepat dan simbolik menggunakan Maxima

File geometry.e menyediakan fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Akan tetapi, kita sekarang dapat menggunakan perhitungan simbolik.

>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C

Fungsi untuk garis dan lingkaran bekerja seperti fungsi Euler, tetapi menyediakan perhitungan simbolis.

>c &= lineThrough(B,C) // c=BC

[- 1, 2, 2]

Kita dapat memperoleh persamaan garis dengan mudah.

>\$getLineEquation(c,x,y), \$solve(%,y) | expand // persamaan garis c

$$2y - x = 2$$

$$\left[y = \frac{x}{2} + 1 \right]$$

>\$getLineEquation(lineThrough([x1,y1],[x2,y2]),x,y), \$solve(%,y) // persamaan garis melalui(x1, y1) dan (x2, y2)

$$x(y_1 - y_2) + (x_2 - x_1)y = x_1(y_1 - y_2) + (x_2 - x_1)y_1$$
$$\left[y = \frac{-(x_1 - x)y_2 - (x - x_2)y_1}{x_2 - x_1} \right]$$

>\$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)

$$(x_1 - 1)y - x y_1 = -y_1$$

>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC

```
[2, 1, 2]
```

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ - & - \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[\frac{2}{5}, \frac{6}{5} \right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

$$\left[\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3\sqrt{2}} \right]$$

```
>r=&getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$\frac{5}{3\sqrt{2}}$$

```
1.178511301977579
```

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB
```

$$y = x$$

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2 garis bagi sudut
```

$$\left[\frac{\sqrt{2}\sqrt{5} + 2}{6}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{5} + 2}{6} \right]$$

```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya
```

$$[0.86038, 0.86038]$$

6.5 Garis dan Lingkaran yang Berpotongan

Tentu saja, kita juga dapat membuat garis berpotongan dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

```
>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
```

$$\left[\left[\sqrt{7} + 2, 1 - \sqrt{7} \right], \left[2 - \sqrt{7}, \sqrt{7} + 1 \right] \right]$$

Gambar 6.6 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-020.png

Perpotongan garis dengan lingkaran menghasilkan dua titik dan jumlah titik perpotongan.

>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);

>P1, P2, f

[4.64575, -1.64575]

[-0.645751, 3.64575]

2

>plotPoint(P1); plotPoint(P2);

Sama halnya di Maxima.

>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4

[1, 0, 4]

>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C

[1, 1, 3]

>\$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l

$$\left[\left[\sqrt{7} + 2, 1 - \sqrt{7} \right], \left[2 - \sqrt{7}, \sqrt{7} + 1 \right] \right]$$

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap bsuusr yang sama adalah sama besar.

>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);

>deprint(computeAngle(P1,C,P2))

$69^\circ 17' 42.68''$

>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);

>deprint(computeAngle(P1,C,P2))

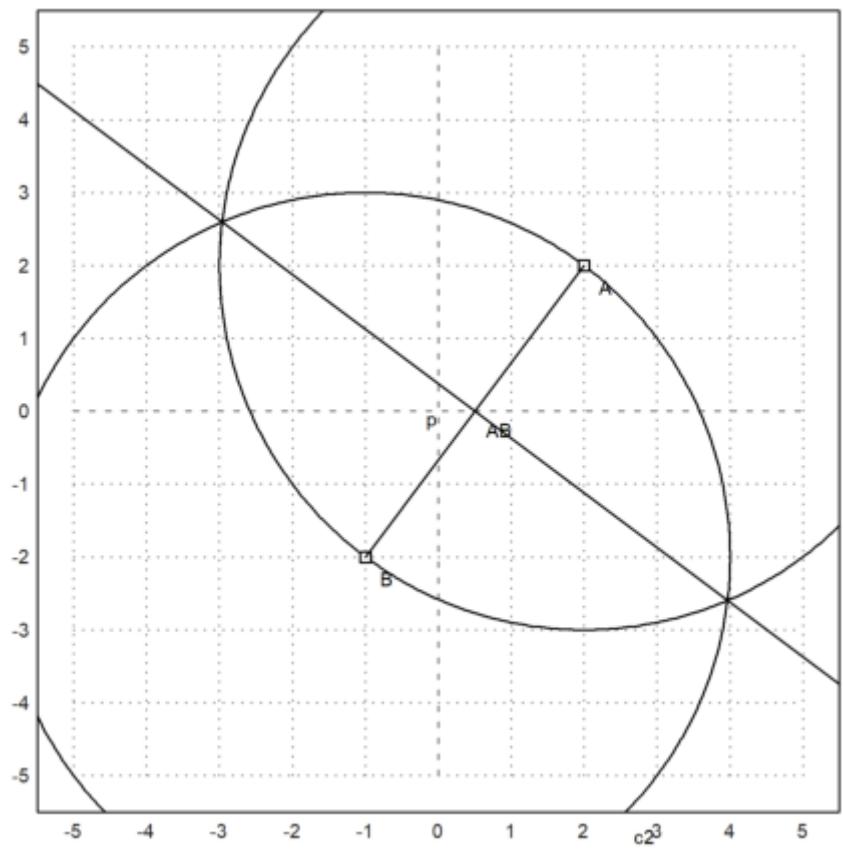
$69^\circ 17' 42.68''$

>insimg;

6.6 Garis Sumbu

Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:

1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melallui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.



Gambar 6.7 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-022.png

$$\left[y = \frac{-(2 b_1 - 2 a_1) x + b_2^2 + b_1^2 - a_2^2 - a_1^2}{2 b_2 - 2 a_2} \right]$$

Gambar 6.8 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-023.png

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l);

Selanjutnya, kita melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
Persamaan untuk perpotongan cukup rumit. Namun, kita dapat menyederhanakannya, jika kita mencari nilai y.
```

```
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[y = \frac{-(2 b_1 - 2 a_1) x + b_2^2 + b_1^2 - a_2^2 - a_1^2}{2 b_2 - 2 a_2} \right]$$

Ini memang sama dengan tegak lurus tengah, yang dihitung dengan cara yang sepenuhnya berbeda.

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[y = \frac{-(2 b_1 - 2 a_1) x + b_2^2 + b_1^2 - a_2^2 - a_1^2}{2 b_2 - 2 a_2} \right]$$

```
>h &= getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[y = \frac{(b_2 - a_2) x - a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 - a_1} \right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1 - a_1)}{(b_2 - a_2)} \times \frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)} = -1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.

6.7 Contoh 3: Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dengan } s = (a+b+c)/2,$$

atau bisa ditulis dalam bentuk lain:

$$H(a, b, [-1, 2, 2]) = \frac{a |ysol|}{2}$$

Gambar 6.9 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-032.png

$$L = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \times y.$$

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad (x-a)^2 + y^2 = c^2.$$

```
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)"); ...
> plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");

>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6],"c",15); ...
> plotSegment([0,0],[7.5,6],"b",25);

>plotSegment([7.5,6],[7.5,0],"t=y",25);
>&assume(a>0); sol &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

[]

Ekstrak solusi y.

```
>ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2))
```

Maxima said:

```
part: invalid index of list or matrix.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2)) ...
```

Kita mendapatkan rumus Heron.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H(a, b, [1, 0, 4]) = \frac{a |ysol|}{2}$$

```
>$'Luas=H(2,5,6) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 2, 5, 6
```

$$Luas = |ysol|$$

Tentu saja, setiap segitiga siku-siku adalah kasus yang terkenal.

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

Variable or function ysol not found.

Try "trace errors" to inspect local variables after errors.

H:

```

useglobal; return a*abs(ysol)/2
Error in:
H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5 ...
^

```

Dan jelas pula, bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan dua sisinya 3 dan 4.

```

>aspect(1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7); // Kurva luas segitiga dengan panjang sisi 3, 4, x (1<= x
<=7)

```

```

Variable or function ysol not found.
Error in expression: 3*abs(ysol)/2
%ploteval:
y0=f$(x[1],args());
adaptiveevalone:
s=%ploteval(g$,t,args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args());

```

Kasus umum juga berfungsi.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

Maxima said:

```

diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

```

Error in:

```
$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c) ...
^
```

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana $b+c=d$ untuk suatu konstanta d. Diketahui bahwa ini adalah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

Maxima said:

```

part: invalid index of list or matrix.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);

```

Error in:

```
s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1 ...
^
```

Dan buat fungsi ini.

```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d)
```

0

0

Sekarang kita dapat menggambar himpunannya. Sisi b bervariasi dari 1 hingga 4. Diketahui bahwa kita mendapatkan elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```

$$\frac{(x - x_m)^2}{u^2} + \frac{(y - y_m)^2}{v^2} = 1,$$

Gambar 6.10 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-037.png

Kita dapat memeriksa persamaan umum untuk elips ini, yaitu:

$$\frac{(x - x_m)^2}{u^2} + \frac{(y - y_m)^2}{v^2} = 1,$$

di mana (x_m, y_m) adalah pusat, dan u dan v adalah sumbu setengah.

>\$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^{2/u}2+fy(a,c,d)^{2/v}2 \text{ with } [u=d/2, v=sqrt(d^2-a^2)/2])

$$\frac{a^2}{d^2}$$

Kita melihat bahwa tinggi dan luas segitiga tersebut adalah maksimum untuk $x=0$. Jadi luas segitiga dengan $a+b+c=d$ adalah maksimum, jika segitiga tersebut sama sisi. Kita ingin memperolehnya secara analitis.

>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b)))^2,a=0,diff(H(a,b,d-(a+b)))2,b=0]; \$eqns

$$\left[\frac{a y sol^2}{2} = 0, 0 = 0 \right]$$

Kita memperoleh beberapa nilai minimum, yang dimiliki oleh segitiga dengan satu sisi 0, dan solusinya $a=b=c=d/3$.

>\$solve(eqns,[a,b])

$$[[a = 0, b = \%r_1]]$$

Ada juga metode Lagrange, yang memaksimalkan $H(a,b,c)^2$ terhadap $a+b+d=d$.

>&solve([diff(H(a,b,c))^2,a]=la,diff(H(a,b,c))2,b)=la, ...

> diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])

Maxima said:

```
diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
... la,      diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d], [a,b,c,la]) ...
```

Kita bisa membuat plot dari situasinya

Pertama-tama atur titik di Maxima.

>A &= at([x,y],sol[2]); \$A

Maxima said:

```
part: invalid index of list or matrix.
-- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

Error in:

```
A &= at([x,y],sol[2]); $A ...
```

```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

[0, 0]

[a, 0]

Kemudian atur rentang plot dan plot titik-titiknya.

```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
>a=4; b=3; c=2; ...
>plotPoint(mxmeval("B"), "B"); plotPoint(mxmeval("C"), "C"); ...
>plotPoint(mxmeval("A"), "A");
```

Variable a1 not found!

Use global variables or parameters for string evaluation.

Error in Evaluate, superfluous characters found.

Try "trace errors" to inspect local variables after errors.

mxmeval:

```
    return evaluate(mxm(s));
Error in:
... otPoint(mxmeval("C"), "C"); plotPoint(mxmeval("A"), "A") : ...
^
```

Gambarkan segmen-segmenya.

```
>plotSegment(mxmeval("A"), mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"), mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"), mxmeval("A"));
```

Variable a1 not found!

Use global variables or parameters for string evaluation.

Error in Evaluate, superfluous characters found.

Try "trace errors" to inspect local variables after errors.

mxmeval:

```
    return evaluate(mxm(s));
Error in:
plotSegment(mxmeval("A"), mxmeval("C")); plotSegment(mxmeval("B") ...
^
```

Hitunglah garis tegak lurus tengah di Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan pusat kelilingnya.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

Kita mendapatkan rumus untuk jari-jari lingkaran luar.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$\frac{\sqrt{a_2^2 + a_1^2} \sqrt{a_2^2 + a_1^2 - 2 a a_1 + a^2}}{2 |a_2|}$$

Mari kita tambahkan ini ke dalam alur cerita.

```
>plotPoint(U()); ...
>plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"), mxmeval("distance(U,C"))));
```

$$-\frac{7}{2}$$

Gambar 6.11 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-047.png

```
Variable a2 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in ^
Error in expression: [a/2, (a2^2+a1^2-a*a1) / (2*a2) ]
Error in:
plotPoint(U()); plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"), mxmev ...
^
```

Dengan menggunakan geometri, kita peroleh rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$$

untuk jari-jari. Kita dapat memeriksa apakah ini benar dengan Maxima. Maxima akan memfaktorkan ini hanya jika kita mengkuadratkannya.

> \$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))2 | factor

$$\left[\frac{a_2^2 + a_1^2}{a_2^2}, 0, \frac{16 (a_2^2 + a_1^2)}{a_2^2} \right]$$

Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari sembarang segitiga yang tidak sama sisi. Garis ini merupakan garis pusat segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga tersebut, termasuk orthocenter, circumcenter, centroid, titik Exeter, dan titik pusat lingkaran sembilan titik pada segitiga tersebut.

Sebagai contoh, kita hitung dan plot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kita definisikan sudut-sudut segitiga dalam Euler. Kita gunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolik.

> A:=[-1,-1]; B:=[2,0]; C:=[1,2];

Untuk memplot objek geometris, kita menyiapkan area plot, dan menambahkan titik-titik ke dalamnya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

> setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");

Kita juga dapat menambahkan sisi-sisi segitiga.

> plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,"");

Berikut adalah luas segitiga, menggunakan rumus determinan. Tentu saja, kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

> \$areaTriangle(A,B,C)

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien sisi c.

> c &= lineThrough(A,B)

$$[-1, 3, -2]$$

Dan dapatkan juga rumus untuk garis ini.

$$\left[\frac{11}{7}, \frac{2}{7} \right]$$

Gambar 6.12 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-054.png

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Gambar 6.13 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-057.png

>\$getLineEquation(c,x,y)

$$3y - x = -2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan suatu titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif bentuk Hesse. Memasukkan titik akan menghasilkan jarak positif ke garis.

>\$getHesseForm(c,x,y,C), \$at(%,[x=C[1],y=C[2]])

$$\begin{aligned} & \frac{3y - x + 2}{\sqrt{10}} \\ & \frac{7}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

Sekarang kita hitung lingkaran luar ABC.

>LL &= circleThrough(A,B,C); \$getCircleEquation(LL,x,y)

$$\left(y - \frac{5}{14} \right)^2 + \left(x - \frac{3}{14} \right)^2 = \frac{325}{98}$$

>O &= getCircleCenter(LL); \$O

$$\left[\frac{3}{14}, \frac{5}{14} \right]$$

Gambarkan lingkaran dan titik pusatnya. Cu dan U adalah simbol. Kita evaluasi ekspresi ini untuk Euler.

>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),“O”):

Kita dapat menghitung perpotongan tinggi di ABC (orthocenter) secara numerik dengan perintah berikut.

>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...

> perpendicular(B,lineThrough(A,C))); \$H

$$\left[\frac{11}{7}, \frac{2}{7} \right]$$

Sekarang kita dapat menghitung garis Euler dari segitiga tersebut.

>el &= lineThrough(H,O); \$getLineEquation(el,x,y)

$$-\frac{19y}{14} - \frac{x}{14} = -\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot kita.

>plotPoint(H(),“H”); plotLine(el(),“Garis Euler”):

Pusat gravitasi seharusnya berada pada garis ini.

>M &= (A+B+C)/3; \$getLineEquation(el,x,y) with

Gambar 6.14 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-059.png

$$\frac{3y - x + 2}{\sqrt{10}} - \sqrt{(2-y)^2 + (1-x)^2} = 0$$

Gambar 6.15 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-064.png

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

>plotPoint(M(), "M"); // titik berat

Teori ini memberi tahu kita $MH=2*MO$. Kita perlu menyederhanakannya dengan radcan untuk mencapainya.

>\$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan

Fungsinya termasuk fungsi untuk sudut juga.

>\$computeAngle(A,C,B), degprint(%())

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}}\right)$$

$60^\circ 15' 18.43''$

Persamaan untuk pusat lingkaran dalam tidak terlalu bagus.

>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; \$Q

$$\left[\frac{\left(2^{\frac{3}{2}} + 1\right) \sqrt{5} \sqrt{13} - 15 \sqrt{2} + 3}{14}, \frac{(\sqrt{2} - 3) \sqrt{5} \sqrt{13} + 5 2^{\frac{3}{2}} + 5}{14} \right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi untuk jari-jari lingkaran dalam.

>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; \$r

$$\frac{\sqrt{(-41\sqrt{2} - 31)\sqrt{5}\sqrt{13} + 115\sqrt{2} + 614}}{7\sqrt{2}}$$

>LD &= circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam

Mari kita tambahkan ini ke dalam alur cerita.

>color(5); plotCircle(LD()):

6.8 Parabola

Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); \$p='0

$$\frac{3y - x + 2}{\sqrt{10}} - \sqrt{(2-y)^2 + (1-x)^2} = 0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):

akar₁

Gambar 6.16 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-066.png

$$g(x) = -3x - \sqrt{70} \sqrt{9 - 2x} + 26$$

Gambar 6.17 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-068.png

Ini seharusnya merupakan suatu fungsi, tetapi penyelesaian default Maxima hanya dapat menemukan solusinya, jika kita mengkuadratkan persamaannya. Akibatnya, kita mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

$$\begin{aligned}[y &= -3x - \sqrt{70} \sqrt{9 - 2x} + 26, \\ y &= -3x + \sqrt{70} \sqrt{9 - 2x} + 26]\end{aligned}$$

Solusi pertama adalah

akar₁

Dengan menambahkan solusi pertama ke dalam plot, terlihat bahwa itu memang jalur yang kita cari. Teori tersebut memberi tahu kita bahwa itu adalah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1);  
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)=g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g(x) = -3x - \sqrt{70} \sqrt{9 - 2x} + 26$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut  
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

2.135605779339061

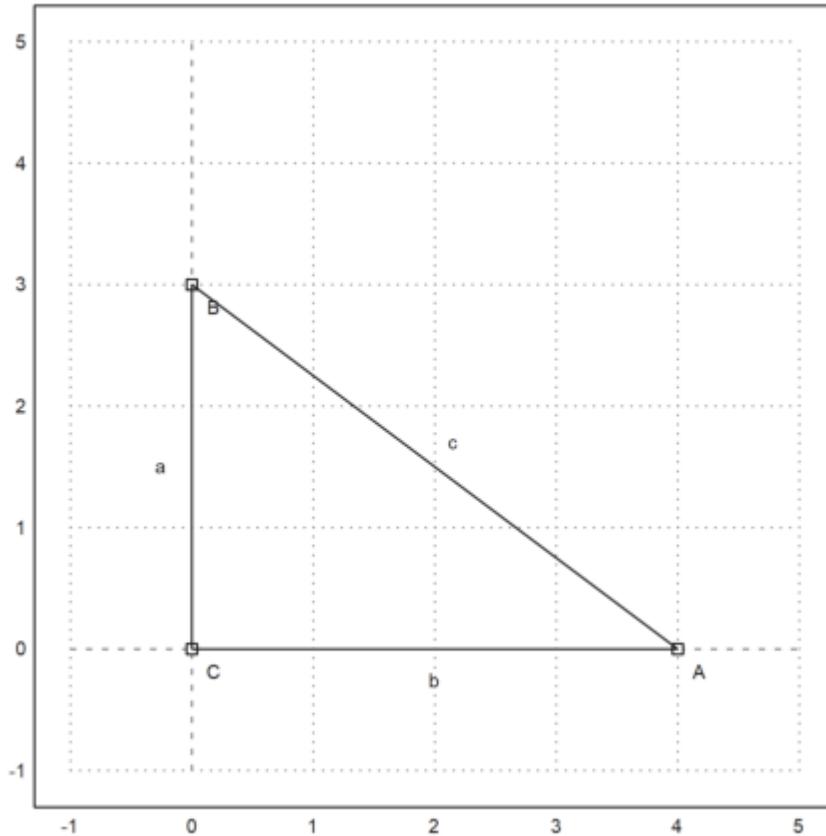
$$\left[\frac{80 - 3\sqrt{11}\sqrt{70}}{10}, \frac{20 - \sqrt{11}\sqrt{70}}{10} \right]$$

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[\frac{80 - 3\sqrt{11}\sqrt{70}}{10}, \frac{20 - \sqrt{11}\sqrt{70}}{10} \right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jarak T ke AB
```

2.135605779339061



Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

6.9 Contoh 5: Trigonometri Rasional

Hal ini terinspirasi dari ceramah N.J.Wildberger. Dalam bukunya “Divine Proportions”, Wildberger mengusulkan untuk mengganti konsep klasik jarak dan sudut dengan kuadran dan sebaran. Dengan menggunakan konsep ini, memang memungkinkan untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap “rasional”.

Berikut ini, saya memperkenalkan konsep-konsep tersebut, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan perhitungan simbolik Maxima di sini, yang menyembunyikan keuntungan utama trigonometri rasional bahwa perhitungan dapat dilakukan hanya dengan kertas dan pensil. Anda diundang untuk memeriksa hasilnya tanpa komputer.

Intinya adalah bahwa perhitungan simbolik rasional sering kali menghasilkan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang hanya mengevaluasi perkiraan numerik.

>load geometry;

Untuk pengenalan pertama, kami menggunakan segitiga siku-siku dengan proporsi Mesir yang terkenal yaitu 3, 4, dan 5. Perintah berikut adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat dalam file Euler “geometry.e”.

>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...

> setPlotRange(-1,5,-1,5); ...

> plotPoint(A,“A”); plotPoint(B,“B”); plotPoint(C,“C”); ...

> plotSegment(B,A,“c”); plotSegment(A,C,“b”); plotSegment(C,B,“a”); ...

> insimg(30);

Tentu saja,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

Gambar 6.18 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-075.png

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

di mana wa adalah sudut di A. Cara yang biasa untuk menghitung sudut ini adalah dengan mengambil kebalikan dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak secara perkiraan.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

$36^{\circ}52'11.63''$

Rational trigonometry tries to avoid this.

The first notion of rational trigonometry is a quadrance, which replaces the distance. In fact, it is just the distance squared. In the following, a, b, and c denote the quadrances of the sides.

The Pythagoras theorem simply becomes $a+b=c$ then.

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

$$25 = 25$$

The second notion of rational trigonometry is the spread. The spread measures the opening between lines. It is 0, if the lines are parallel, and 1, if the lines are rectangular. It is the square of the sine of the angle between the two lines.

The spread of the lines AB and AC in the image above is defined as

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

where a and c are the quadrances of any rectangular triangle with one corner in A.

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{9}{25}$$

This is easier to compute than the angle, of course. But you lose the property that angles can be added easily.

Of course, we can convert our approximate value for the angle wa to a sprad, and print it as a fraction.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

$9/25$

Hukum kosinus dari trigonometri klasik diterjemahkan ke dalam “hukum silang” berikut.

$$(c + b - a)^2 = 4bc(1 - s_a)$$

Di sini a, b, dan c adalah kuadran sisi-sisi segitiga, dan sa adalah sebaran di sudut A. Sisi a, seperti biasa, berseberangan dengan sudut A.

Hukum-hukum ini diimplementasikan dalam berkas geometry.e yang kami muat ke Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$(cc + bb - aa)^2 = 4 bb cc (1 - saa)$$

Dalam kasus kami, kami mendapatkan

>\$crosslaw(a,b,c,sa)

$$1024 = 1024$$

Mari kita gunakan hukum silang ini untuk menemukan sebaran di A. Untuk melakukannya, kita buat hukum silang untuk kuadran a, b, dan c, dan selesaikan untuk sebaran yang tidak diketahui sa.

Anda dapat melakukannya dengan mudah secara manual, tetapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kita mendapatkan hasil yang sudah kita miliki.

>\$crosslaw(a,b,c,x), \$solve(% ,x)

$$\left[x = \frac{9}{25} \right]$$

$$\frac{9}{25}$$

Kita sudah tahu ini. Definisi sebaran adalah kasus khusus dari hukum silang.

Kita juga dapat memecahkan ini untuk a,b,c umum. Hasilnya adalah rumus yang menghitung sebaran sudut segitiga yang diberikan kuadran ketiga sisinya.

>\$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)

$$\left[x = \frac{-cc^2 - (-2 bb - 2 aa) cc - bb^2 + 2 aa bb - aa^2}{4 bb cc} \right]$$

Kita dapat membuat fungsi dari hasil tersebut. Fungsi tersebut telah didefinisikan dalam berkas geometry.e milik Euler.

>\$spread(a,b,c)

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita dapat menggunakan untuk menghitung sudut segitiga dengan sisi-sisi

$$a, \quad a, \quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

>\$spread(a,a,4*a/7)

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat.

>deprint(arcsin(sqrt(6/7)))

$$67^\circ 47' 32.44''$$

6.10 Contoh Lain

Sekarang, mari kita coba contoh yang lebih maju.

Kita tentukan tiga sudut segitiga sebagai berikut.

>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...

> setPlotRange(-1,5,1,7); ...

Gambar 6.19 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-088.png

$$\mathbf{a} = C - B = \langle -4, 1 \rangle, \quad \mathbf{c} = A - B = \langle -3, -1 \rangle, \quad \beta = \angle ABC$$

Gambar 6.20 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-092.png

```
> plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
> plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
> insimg;
```

Dengan menggunakan Pythagoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Pertama-tama saya menggunakan fungsi distance dari file Euler untuk geometri. Fungsi distance menggunakan geometri klasik.

$\geq \$distance(A,B)$

$$\sqrt{10}$$

Euler juga memuat fungsi untuk kuadran antara dua titik.

Dalam contoh berikut, karena $c+b$ bukan a , segitiga tersebut bukan persegi panjang.

$\geq c \&= quad(A,B); \$c, b \&= quad(A,C); \$b, a \&= quad(B,C); \$a,$

$$A = \langle 1, 2 \rangle \quad B = \langle 4, 3 \rangle, \quad C = \langle 0, 4 \rangle$$

Pertama, mari kita hitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode biasa berdasarkan perkalian titik dua vektor. Hasilnya adalah beberapa perkiraan floating point.

$$A = \langle 1, 2 \rangle \quad B = \langle 4, 3 \rangle, \quad C = \langle 0, 4 \rangle$$

$$\mathbf{a} = C - B = \langle -4, 1 \rangle, \quad \mathbf{c} = A - B = \langle -3, -1 \rangle, \quad \beta = \angle ABC$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}| \cos \beta$$

$$\cos \angle ABC = \cos \beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}|} = \frac{12 - 1}{\sqrt{17} \sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17} \sqrt{10}}$$

$\geq wb \&= computeAngle(A,B,C); \$wb, \$(wb/pi*180)()$

$$\arccos \left(\frac{11}{\sqrt{10} \sqrt{17}} \right)$$

32.4711922908

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita dapat melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kita masukkan kuadran a , b , dan c ke dalam hukum silang dan selesaikan untuk x .

$\geq \$crosslaw(a,b,c,x), \$solve(\%,x), //((b+c-a)^=4b.c(1-x))$

$$\left[x = \frac{49}{50} \right]$$

$\frac{49}{170}$

Yaitu, apa yang dilakukan fungsi sebaran yang didefinisikan dalam “geometry.e”.

$\geq sb \&= spread(b,a,c); \sb

$$\frac{49}{170}$$

Maxima memperoleh hasil yang sama dengan menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksakannya. Maxima memang menyelesaikan suku $\sin(\arccos(\dots))$ menjadi hasil pecahan. Sebagian besar siswa tidak dapat melakukan ini.

>\$sin(computeAngle(A,B,C))^2

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita memiliki sebaran di B, kita dapat menghitung tinggi ha pada sisi a. Ingat bahwa

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

menurut definisi.

>ha &= c*sb; \$ha

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut ini dibuat dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadran dan sebaran.

image: (20) Rational_Geometry_CaR.png

Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadrannya.

>\$sqrt(ha)

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita bisa menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita sedang membahas tentang kuadran!

>\$sqrt(ha)*sqrt(a)/2

$$\frac{7}{2}$$

Rumus determinan yang biasa menghasilkan hasil yang sama.

>\$areaTriangle(B,A,C)

$$\frac{7}{2}$$

Rumus Heron

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

>&remvalue(a,b,c,sb,ha);

Pertama-tama kita hitung sebaran di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita hitung luas kuadrat (yang disebut “quadrea”?), faktorkan dengan Maxima, dan kita dapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang, ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

>\$spread(b^2*c^2*a^2), \$factor(%*c^2*a/4)

$$\frac{(-c + b + a)(c - b + a)(c + b - a)(c + b + a)}{16}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

6.11 Aturan Triple Spread

Kerugian spread adalah tidak lagi sekadar menambahkan sudut yang sama.

Namun, tiga spread segitiga memenuhi aturan “triple spread” berikut.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$(sc + sb + sa)^2 = 2 (sc^2 + sb^2 + sa^2) + 4 sa sb sc$$

Aturan ini berlaku untuk tiga sudut yang jumlahnya mencapai 180° .

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Since the spreads of

$$\alpha, \pi - \alpha$$

sama, aturan sebaran rangkap tiga juga berlaku, jika

$$\alpha + \beta = \gamma$$

Karena sebaran sudut negatif sama, aturan sebaran rangkap tiga juga berlaku, jika

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

Misalnya, kita dapat menghitung sebaran sudut 60° . Yaitu $3/4$. Persamaan tersebut memiliki solusi kedua, di mana semua sebarannya adalah 0.

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[x = \frac{3}{4}, x = 0 \right]$$

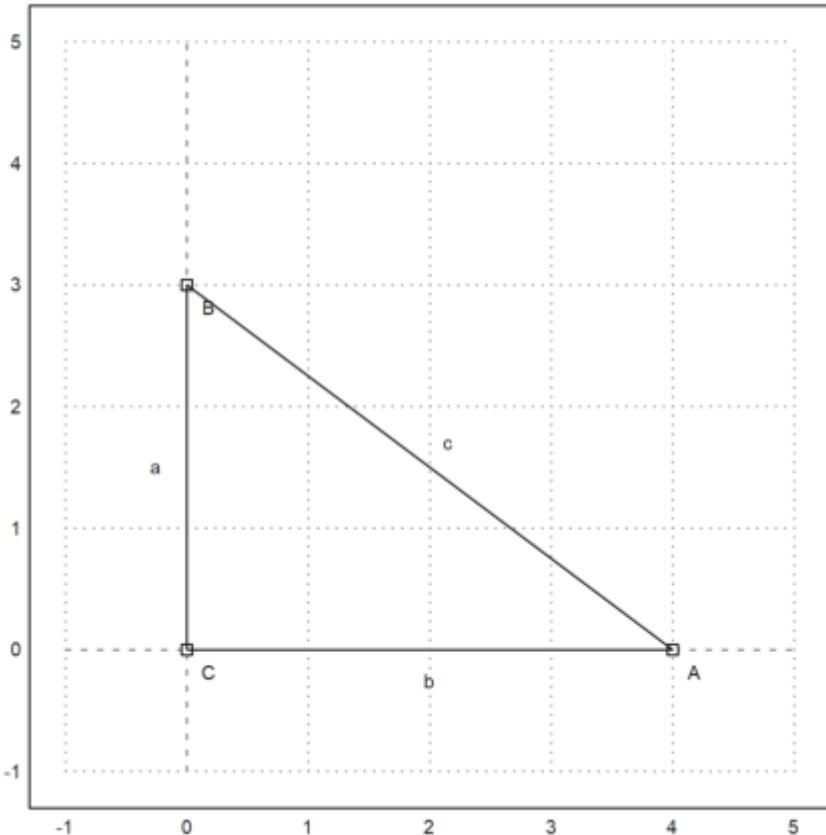
Sebaran 90° jelas adalah 1. Jika dua sudut dijumlahkan menjadi 90° , sebarannya memecahkan persamaan sebaran rangkap tiga dengan a,b,1. Dengan perhitungan berikut kita memperoleh $a+b=1$.

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(% ,x)
```

$$[x = 1 - y]$$

$$\left[x = \frac{-\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b + 2a}, x = \frac{\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b + 2a} \right]$$

Gambar 6.21 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-118.png



Karena sebaran $180^\circ - t$ sama dengan sebaran t , rumus sebaran rangkap tiga juga berlaku, jika satu sudut adalah jumlah atau selisih dari dua sudut lainnya.

Jadi kita dapat menemukan sebaran sudut yang digandakan. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kita buat ini menjadi fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))
```

$$[x = 4a - 4a^2, x = 0]$$

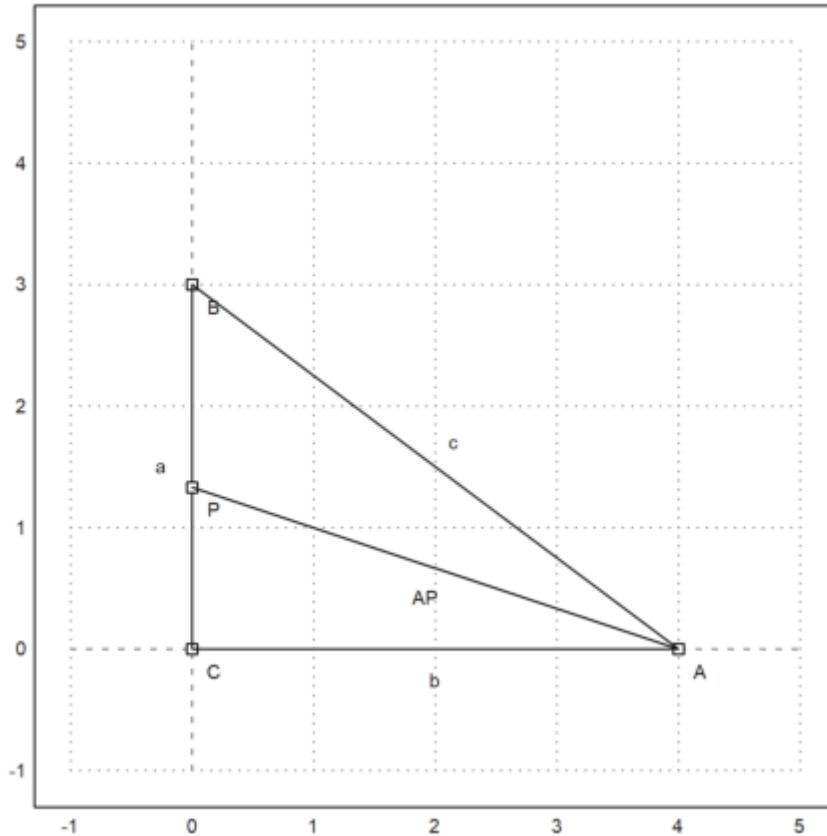
$-4(a - 1)a$

6.12 Garis Bagi Sudut

Kita sudah tahu situasinya seperti ini.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```

Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Namun, kita ingin menyelesaikannya untuk a,b,c umum.



Gambar 6.22 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-121.png

>&remvalue(a,b,c);

Jadi pertama-tama kita hitung sebaran sudut yang dibagi dua di A, menggunakan rumus sebaran rangkap tiga.

Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Rumus ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut yang dibagi dua 180° -wa.

>\$triplespread(x,x,a/(a+b)), \$solve(% ,x), sa2 &= rhs(%[1]); \$sa2

$$\frac{-\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b + 2a}$$

$$\frac{1}{10}$$

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

>\$sa2 with [a=3^2,b=4^2]

$$\frac{1}{10}$$

Kita dapat mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer sebaran ke radian.

>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); deprint(wa2)

$$18^\circ 26' 5.82''$$

Titik P merupakan perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

>P := [0,tan(wa2)*4]

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

Gambar 6.23 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-123.png

[0 , 1.33333]

>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):

Mari kita periksa sudut-sudut pada contoh spesifik kita.

>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)

0.321750554397

0.321750554397

Sekarang kita hitung panjang garis bagi AP.

Kita gunakan teorema sinus dalam segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

berlaku di sembarang segitiga. Kuadratkan, maka akan menghasilkan apa yang disebut "hukum sebaran"

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

di mana a,b,c menunjukkan kuadran.

Karena CPA sebaran adalah $1 - sa^2$, kita peroleh darinya $bisa/1 = b/(1 - sa^2)$ dan dapat menghitung bisa (kuadran garis bagi sudut).

>&factor(ratsimp(b/(1-sa^2))); bisa &= %; \$bisa

$$\frac{2b(b+a)}{\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai-nilai Mesir kita.

>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])")), distance(A,P)

4.21637021356

4.21637021356

Kita juga dapat menghitung P menggunakan rumus spread.

>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); \$py

$$-\frac{b(\sqrt{b}\sqrt{b+a} - b - a)}{\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}$$

Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.

>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))

1.33333333333

$$\frac{b}{4}$$

Gambar 6.24 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-128.png

6.13 Sudut Tali Busur

Perhatikan situasi berikut.

```
>setPlotRange(1.2); ...
> color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
> A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
> plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
> color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
> color(1); O:=[0,0]; plotPoint(O,"O"); ...
> plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
> insimg;
```

Kita dapat menggunakan Maxima untuk memecahkan rumus penyebaran rangkap tiga untuk sudut-sudut di pusat O untuk r. Dengan demikian, kita memperoleh rumus untuk jari-jari kuadrat pericircle dalam bentuk kuadran sisi-sisinya.

Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa nol kompleks, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$-\frac{a b c}{c^2 - 2 b c + a (-2 c - 2 b) + b^2 + a^2}$$

Kita dapat menjadikannya fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasilnya untuk titik A, B, C.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

Radiusnya memang 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

1

Faktanya, sebaran CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut tali busur.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Faktanya, sebarannya adalah b/(4r), dan kita melihat bahwa sudut tali busur b adalah setengah sudut pusat.

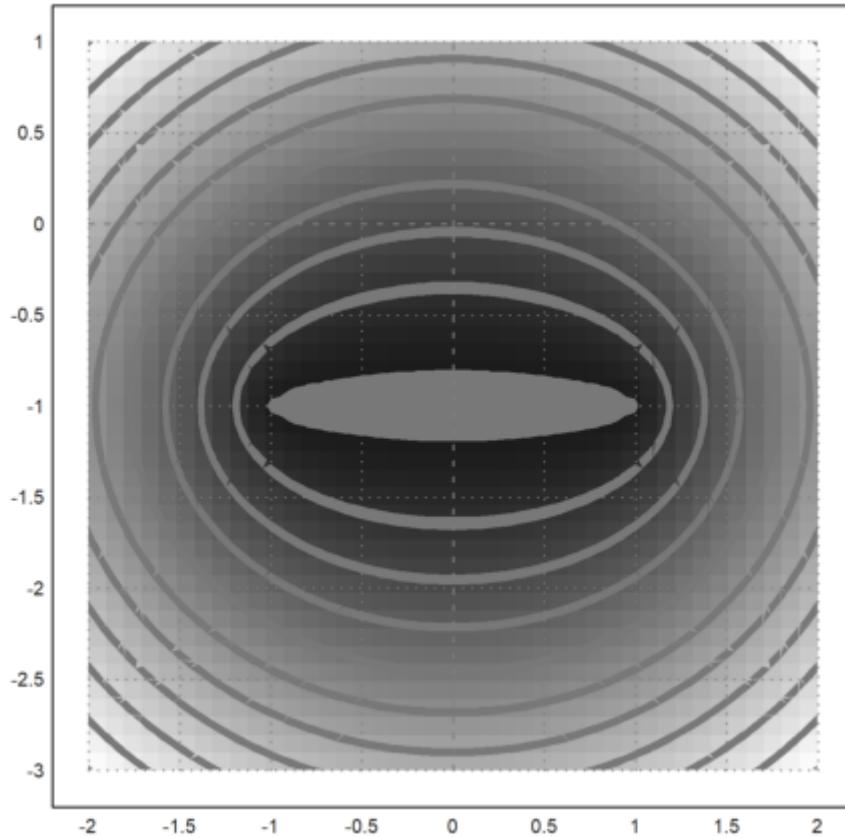
```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

$$0$$

Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

6.14 Catatan awal

Fungsi yang, pada titik M di bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki garis datar yang agak sederhana: lingkaran yang berpusat di A.



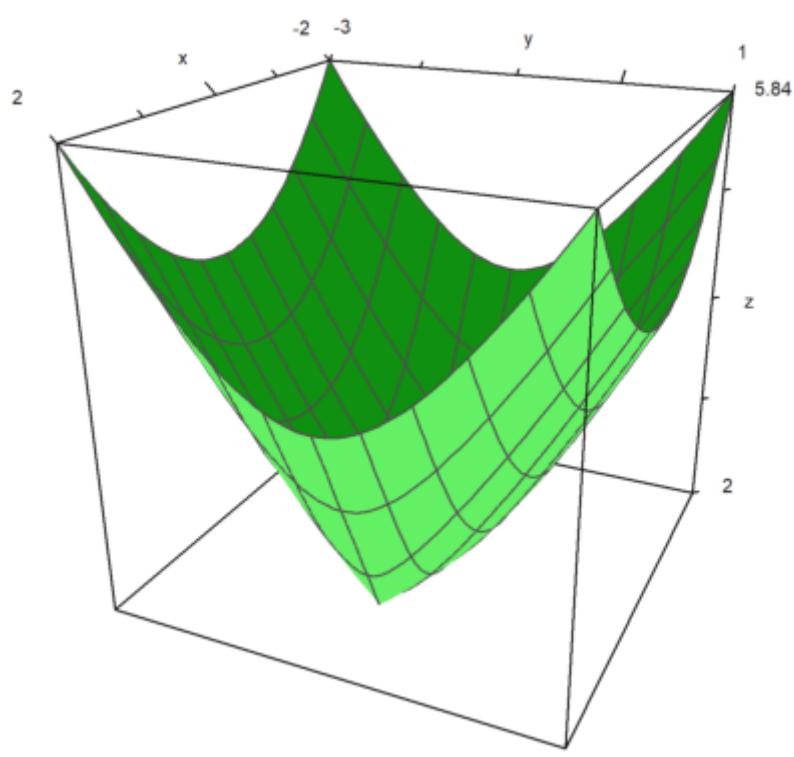
Gambar 6.25 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-132.png

```
>&remvalue();
>A=[-1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
> title="If you see ellipses, please set your window square");
dan grafiknya cukup sederhana: bagian atas kerucut:
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0);
Tentu saja minimum 0 dicapai di A.
```

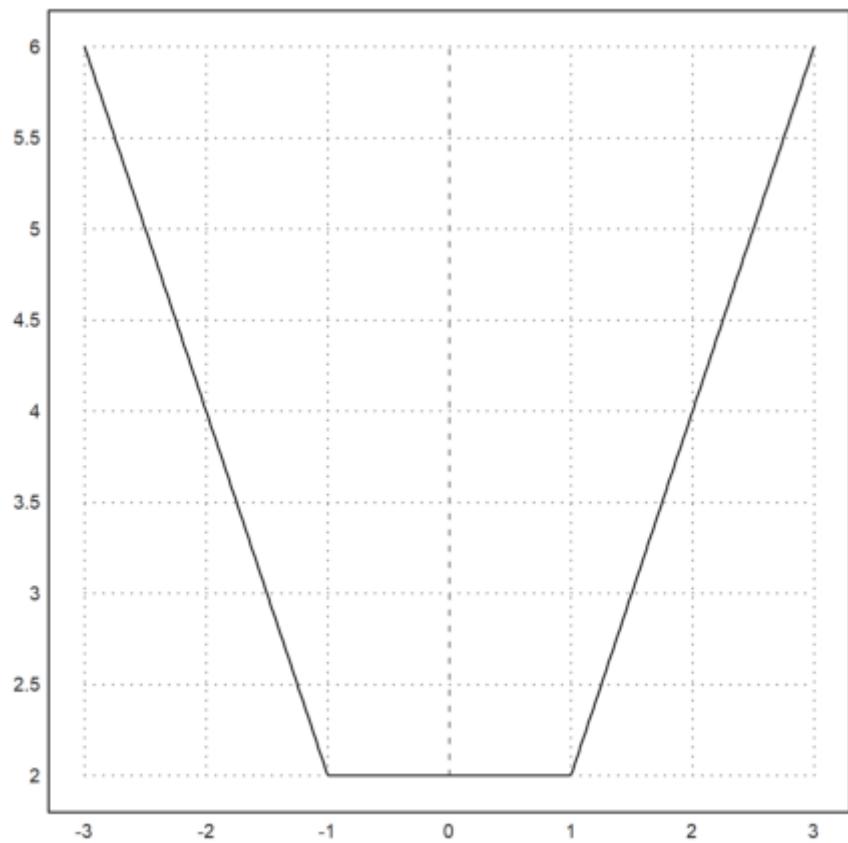
6.15 Dua titik

Sekarang kita lihat fungsi $MA+MB$ di mana A dan B adalah dua titik (tetap). Merupakan “fakta yang diketahui” bahwa kurva level adalah elips, titik fokusnya adalah A dan B ; kecuali untuk minimum AB yang konstan pada segmen $[AB]$:

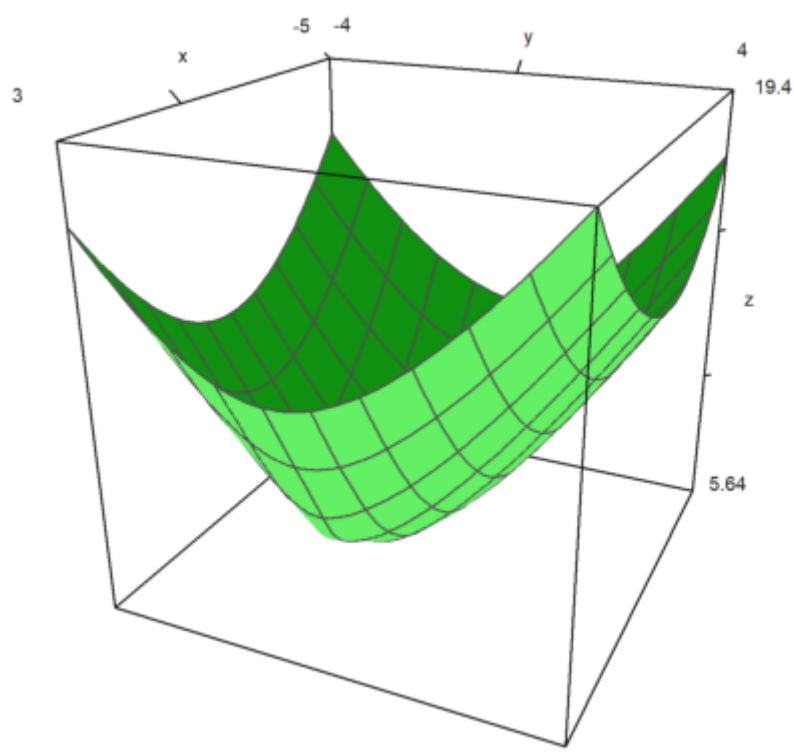
```
>B=[1,-1];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
Grafiknya lebih menarik:
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1);
Pembatasan pada garis ( $AB$ ) lebih terkenal:
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



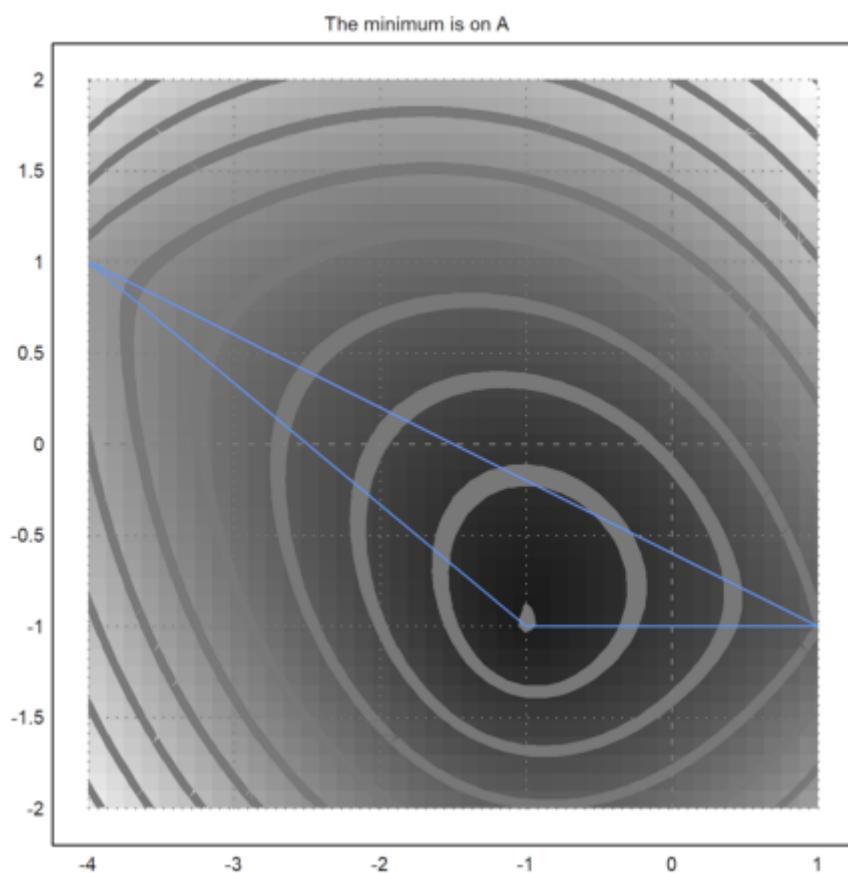
Gambar 6.26 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-133.png



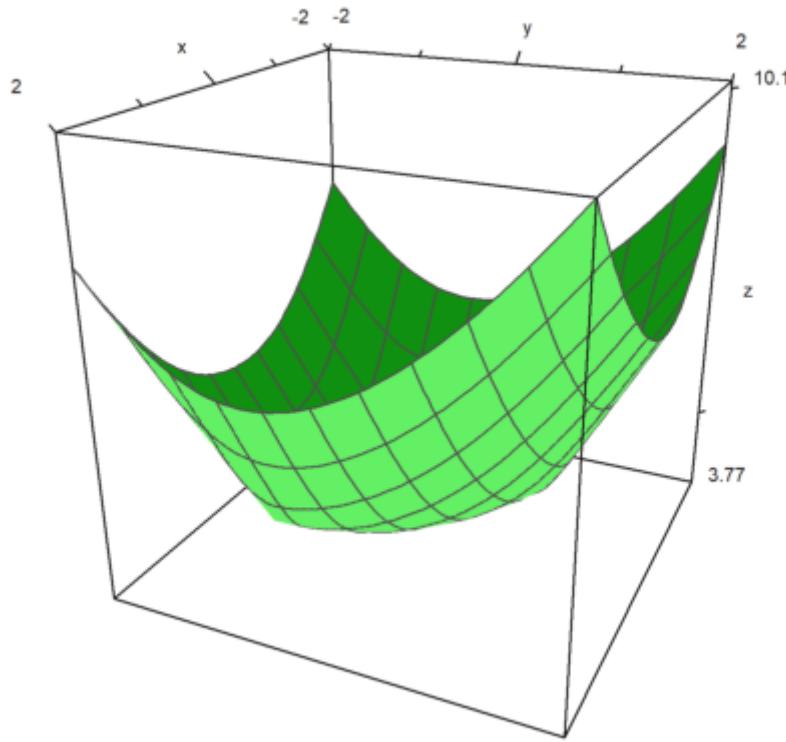
Gambar 6.27 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-134.png



Gambar 6.28 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-135.png



Gambar 6.29 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-136.png



Gambar 6.30 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-137.png

6.16 Tiga poin

Sekarang semuanya menjadi kurang sederhana: Tidak banyak yang tahu bahwa $MA+MB+MC$ mencapai nilai minimumnya di satu titik bidang, tetapi menentukannya tidaklah sesederhana itu:

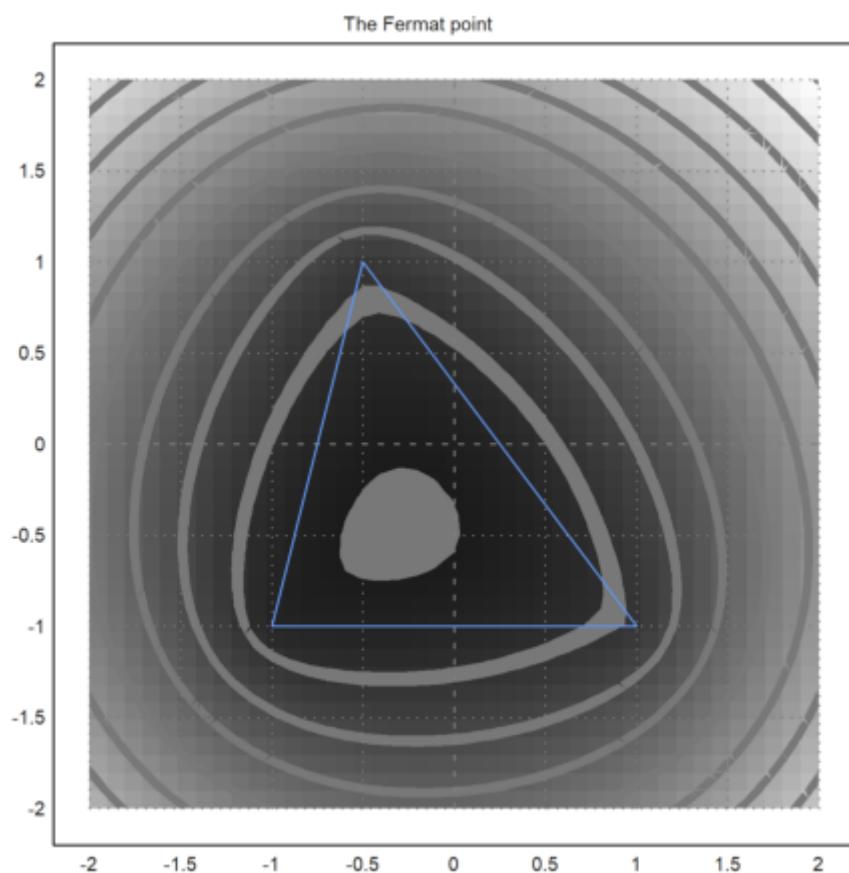
- 1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (misalkan di A), maka nilai minimumnya tercapai di titik ini (misalkan $AB+AC$).

Contoh:

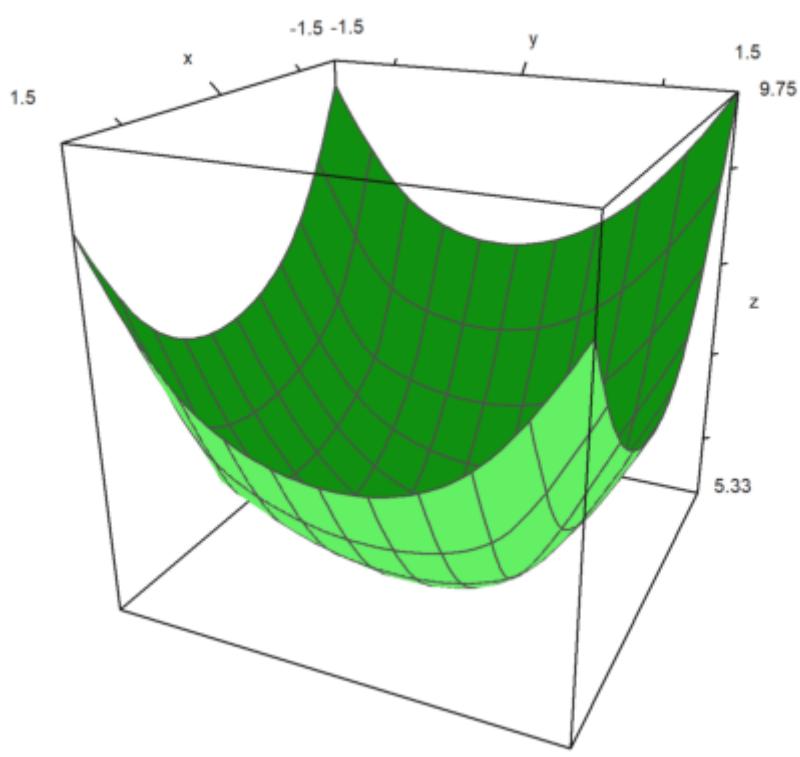
```
>C=[-4,1];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A); plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

- 2) Namun jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120° , maka nilai minimumnya berada di titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang sudut-sudut sisi ABC-nya sama (masing-masing sudutnya 120°):

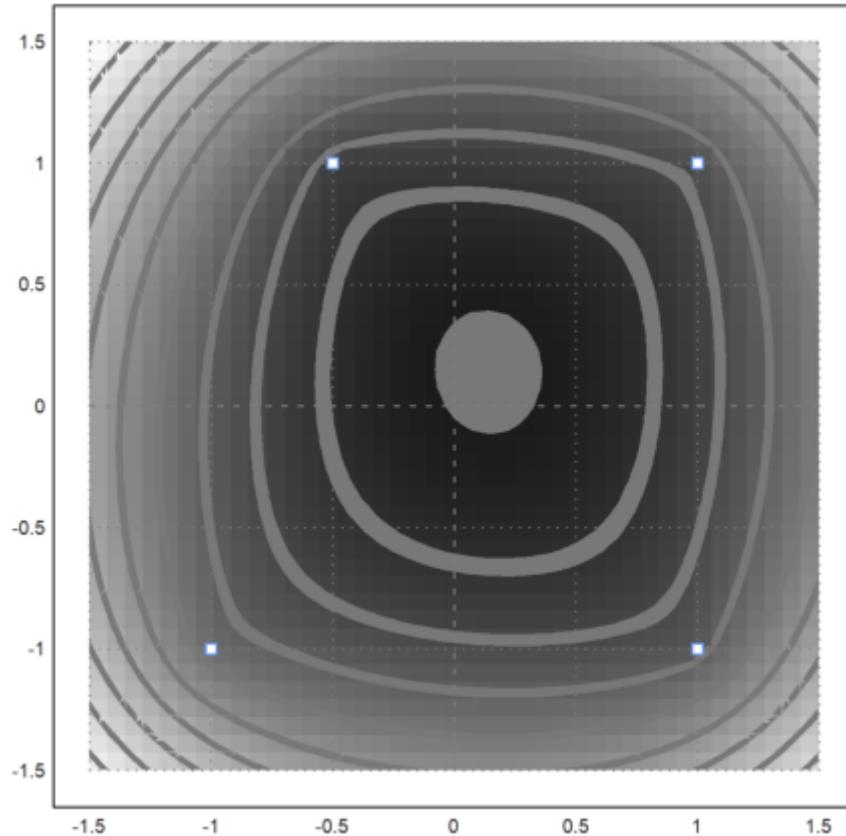
```
>C=[-0.5,1];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```



Gambar 6.31 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-138.png



Gambar 6.32 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-139.png



Gambar 6.33 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-140.png

```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A); plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

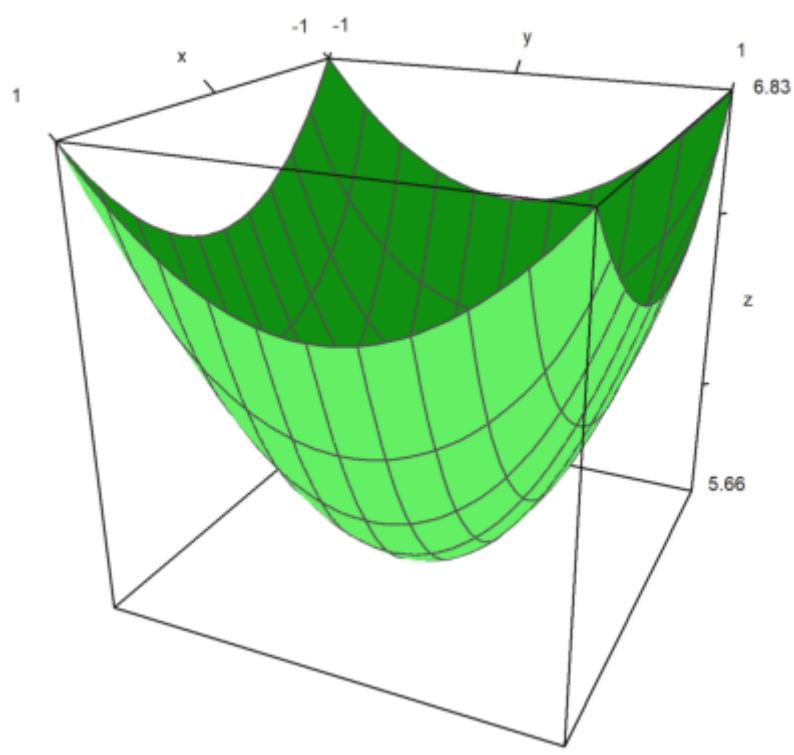
Merupakan aktivitas yang menarik untuk mewujudkan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; misalnya, saya mengetahui perangkat lunak yang ditulis dalam Java yang memiliki instruksi “garis kontur”...

Semua ini ditemukan oleh seorang hakim Prancis bernama Pierre de Fermat; ia menulis surat kepada para dilettan lain seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di pajak penghasilan. Jadi titik unik F sehingga $FA+FB+FC$ minimal, disebut titik Fermat dari segitiga tersebut. Namun tampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torriccelli dari Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat menemukannya! Bagaimanapun tradisinya adalah mencatat titik F ini...

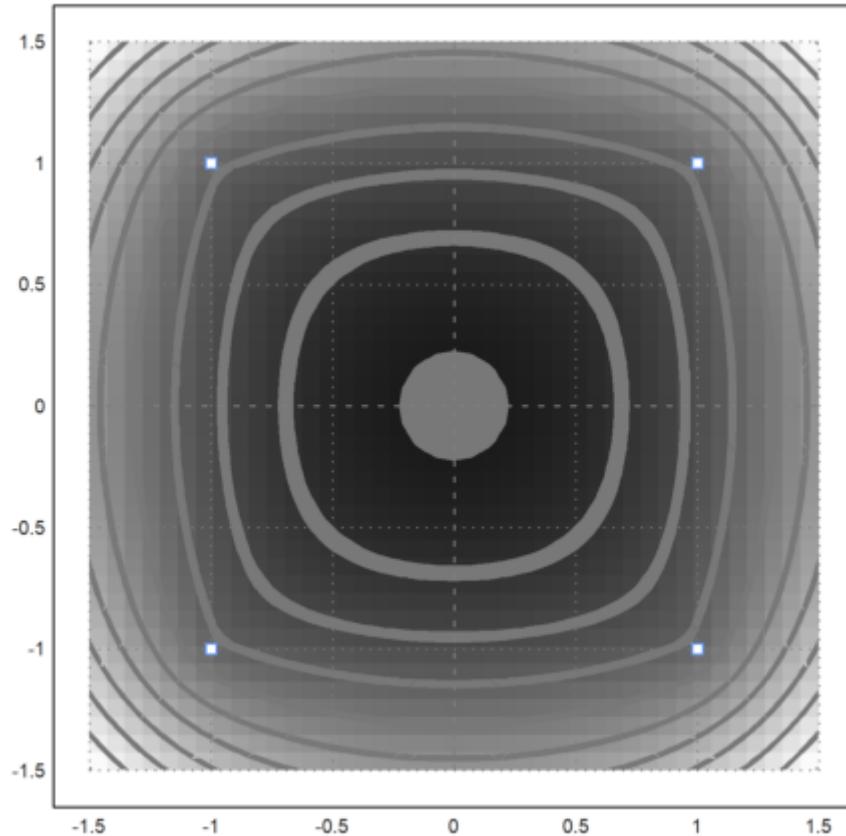
6.17 Empat titik

Langkah berikutnya adalah menambahkan titik ke-4 D dan mencoba meminimalkan $MA+MB+MC+MD$; katakanlah Anda adalah operator TV kabel dan ingin mencari di bidang mana Anda harus meletakkan antena Anda sehingga Anda dapat menyalurkan sinyal ke empat desa dan menggunakan panjang kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
```



Gambar 6.34 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-141.png



Gambar 6.35 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-142.png

```
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```

Masih terdapat nilai minimum dan tidak tercapai di titik A, B, C, maupun D:

```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f",[0.2,0.2])
```

```
[0.142858, 0.142857]
```

Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal bersifat rasional atau mendekati rasional...

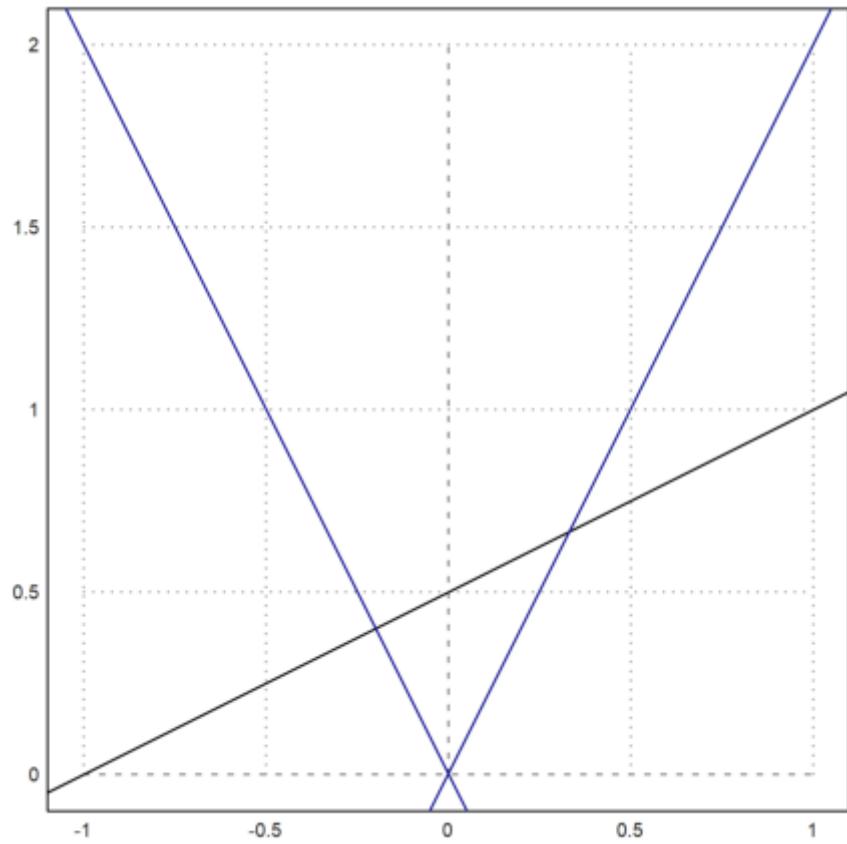
Sekarang ABCD adalah persegi, kita mengharapkan bahwa titik optimal akan menjadi pusat ABCD:

```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```

6.18 Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda telah menginstal Povray, dan pvengine.exe di jalur program.

Pertama, kita hitung jari-jari bola.



Gambar 6.36 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-143.png

$$\sqrt{\left(\frac{a^2 u}{a^2 + 1} - u\right)^2 + \frac{a^2 u^2}{(a^2 + 1)^2}}$$

Gambar 6.37 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-144.png

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5} - u\right)^2 + \frac{(2u-1)^2}{25}}$$

Gambar 6.38 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-145.png

Jika Anda melihat gambar di bawah, Anda melihat bahwa kita memerlukan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

Kami menggunakan file geometry.e milik Euler untuk ini.

>load geometry;

Pertama dua garis membentuk kerucut.

>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])

$$[- a, 1, 0]$$

>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])

$$[- a, - 1, 0]$$

Lalu baris ketiga.

>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])

$$[- 1, 2, 1]$$

Kita merencanakan segalanya sejauh ini.

>setPlotRange(-1,1,0,2);

>color(black); plotLine(g(),““)

>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),““), plotLine(g2(),““):

Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

>P &= [0,u]

$$[0, u]$$

Hitunglah jarak ke g1.

>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); \$d1

$$\sqrt{\left(\frac{a^2 u}{a^2 + 1} - u\right)^2 + \frac{a^2 u^2}{(a^2 + 1)^2}}$$

Hitunglah jarak ke g.

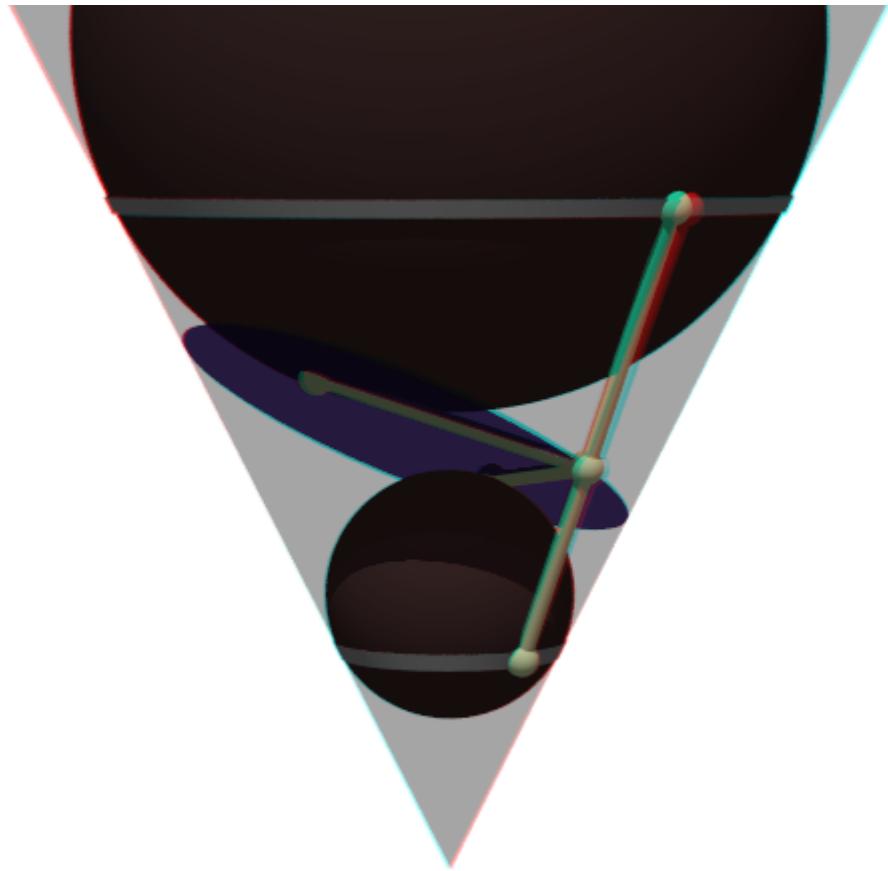
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); \$d

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5} - u\right)^2 + \frac{(2u-1)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran, yang jaraknya sama.

>sol &= solve(d1^2=d2,u); \$sol

$$\left[u = \frac{-\sqrt{5} \sqrt{a^2 + 1} + 2 a^2 + 2}{4 a^2 - 1}, u = \frac{\sqrt{5} \sqrt{a^2 + 1} + 2 a^2 + 2}{4 a^2 - 1}\right]$$



Gambar 6.39 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-149.png

Ada dua solusi.

Kita mengevaluasi solusi simbolik, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

>u := sol()

[0.333333, 1]

>dd := d()

[0.149071, 0.447214]

Gambarkan lingkaran-lingkaran tersebut ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimg;
```

6.19 Plot dengan Povray

Selanjutnya kita plot semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut, dan menjalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return.

Pertama-tama kita memuat fungsi povray.

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kami menyiapkan suasannya dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Berikutnya kita menulis kedua bola itu ke dalam file Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
```

```
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kerucutnya, transparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kita buat bidang yang dibatasi pada kerucut.

```
>gp=g();
```

```
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
```

```
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
```

```
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kita buat dua titik pada lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return
```

```
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
```

```
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
```

```
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
```

```
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Kemudian kita buat dua titik tempat bola-bola tersebut menyentuh bidang. Titik-titik ini adalah fokus ellips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
```

```
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
```

```
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
```

```
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Berikutnya kita hitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
```

```
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kita menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.

```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
```

```
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
```

```
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang kita buat pita abu-abu, di mana bola-bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
```

```
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
```

```
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
```

```
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
```

```
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

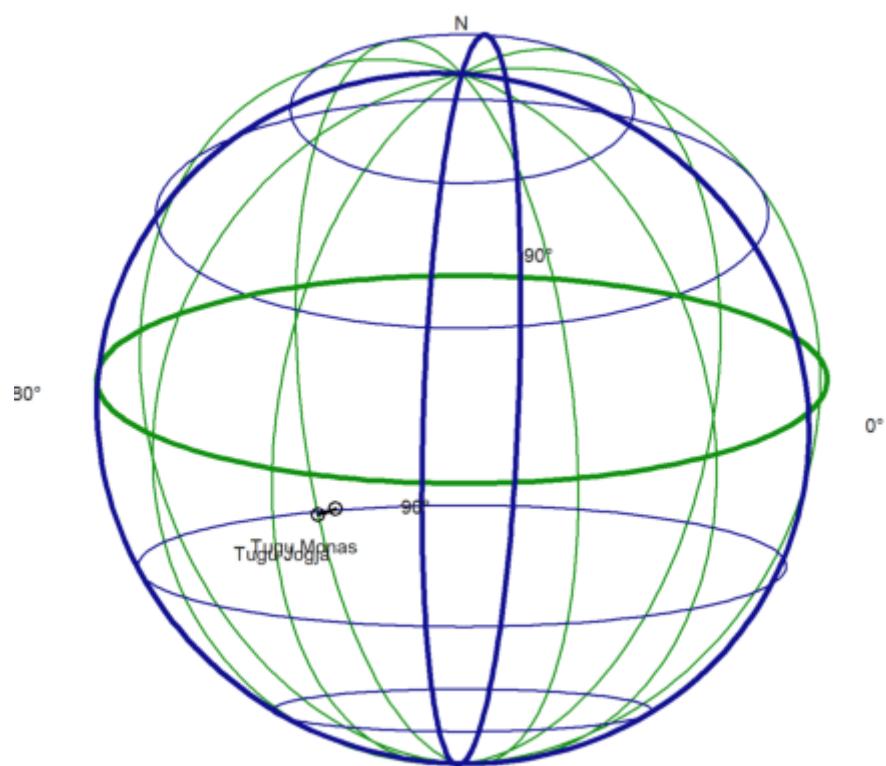
Mulai program Povray.

```
>povend();
```

Untuk mendapatkan Anaglyph ini, kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali nanti.

```
>function scene () ...
```

```
global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
```



Gambar 6.40 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-150.png

```

writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1)
writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1)
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction

```

Anda memerlukan kacamata merah/cyan untuk menghargai efek berikut.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

6.20 Contoh 8: Geometri Bumi

Dalam buku catatan ini, kami ingin melakukan beberapa perhitungan sferis. Fungsi-fungsi tersebut terdapat dalam berkas “spherical.e” di folder contoh. Kami perlu memuat berkas tersebut terlebih dahulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kami menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut ini adalah koordinat untuk Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

[-0.13569, 1.92657]

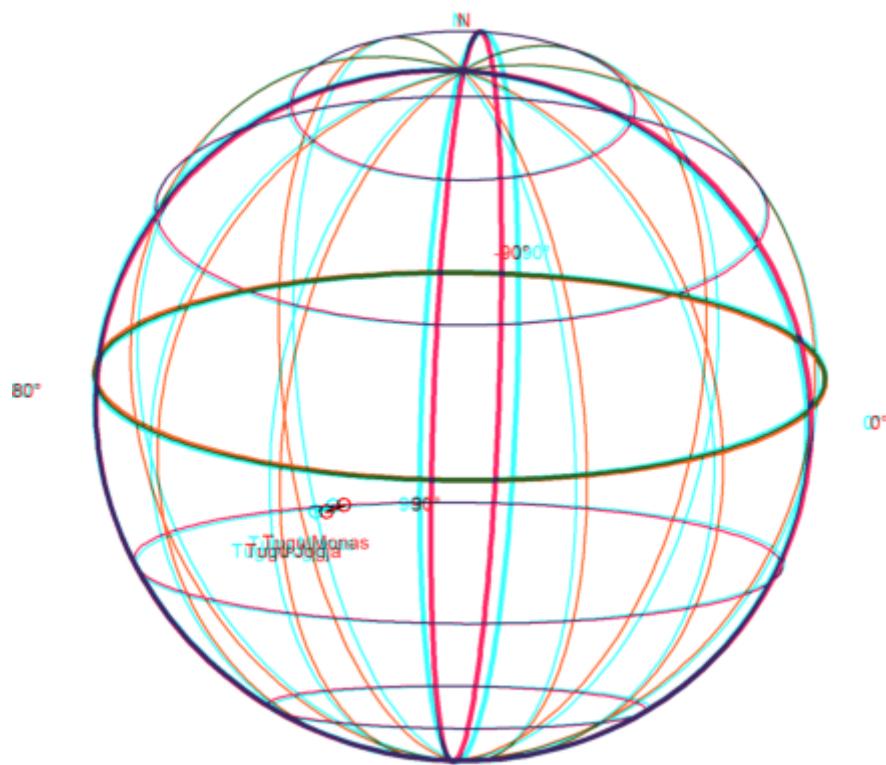
Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi bulat).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

S 7°46.467' E 110°23.050'

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```



Gambar 6.41 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-151.png

```
S 7°34.333' E 110°49.683'  
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama, kita hitung vektor dari satu ke yang lain pada bola ideal. Vektor ini adalah [arah, jarak] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7° .

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-Solo
```

```
65°20'26.60''  
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang bagus. Rutin berikut menggunakan perkiraan yang lebih baik lagi. Pada jarak yang pendek, hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!  
Found: // perkiraan jarak FMIPA-Semarang (character 32)  
You can disable this in the Options menu.  
Error in:  
esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semarang ...  
^
```

Ada fungsi untuk judul, yang memperhitungkan bentuk elips bumi. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

```
65.34°
```

Sudut suatu segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo);  
degprint(asum)
```

```
180°0'10.77''
```

Ini dapat digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2" // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!  
Found: // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang (character 32)  
You can disable this in the Options menu.  
Error in:  
(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2" // perkiraan luas segitiga FM ...  
^
```

Ada fungsi untuk ini, yang menggunakan lintang rata-rata segitiga untuk menghitung jari-jari bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", // perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

```
2123.64310526 km^2
```

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Vektor berisi arah dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan vektor, kita menggunakan svector. Untuk menambahkan vektor ke posisi, kita menggunakan saddvector.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'  
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bentuk bola yang ideal. Sama halnya di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'  
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita lihat contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];  
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'  
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya adalah 429,66 km. Kami memperoleh perkiraan yang baik.

```
>esdist(Tugu,Monas)->" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

Commands must be separated by semicolon or comma!

Found: // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta (character 32)
You can disable this in the Options menu.

Error in:

```
esdist(Tugu,Monas)-&gt;" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Mona ...  
^
```

Judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth.

```
>degsprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
294°17'2.85''
```

Akan tetapi, kita tidak lagi memperoleh posisi target yang tepat, jika kita menambahkan arah dan jarak ke posisi awal. Hal ini terjadi karena kita tidak menghitung fungsi invers secara tepat, tetapi mengambil perkiraan radius bumi di sepanjang lintasan.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Namun, kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentu saja, kita tidak dapat berlayar dengan arah yang sama dari satu tujuan ke tujuan lain, jika kita ingin mengambil jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang ke arah timur laut mulai dari titik mana pun di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan!

Perhitungan berikut menunjukkan bahwa kita jauh dari tujuan yang benar, jika kita menggunakan arah yang sama selama perjalanan kita.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambahkan 10 dikalikan sepersepuluh jaraknya, dengan memakai arah ke Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya sangat jauh.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

S 6°11.250' E 106°48.372'
1.529km

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada garis lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Lintasan terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran lintang 30°, tetapi lintasan yang lebih pendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

79.69°

Namun, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi kita harus menyesuaikan arah kita di sepanjang jalan. Untuk tujuan kasar, kita menyesuaikannya pada 1/10 dari total jarak.

```
>p=P1; dist=esdist(P1,P2); ...
```

```
> loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

79.69°
81.67°
83.71°
85.78°
87.89°
90.00°
92.12°
94.22°
96.29°
98.33°

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan, jika kita mengikuti arah yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

0.203km

Kita memperoleh perkiraan yang baik, jika kita menyesuaikan arah setelah setiap 1/100 jarak total dari Tugu ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
```

```
> loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
```

```
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

0.000km

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS sepanjang lingkaran besar menuju Monas dengan fungsi navigasi.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
> loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 7°37.422' E 110°0.573'
S 7°27.829' E 109°39.196'
S 7°18.219' E 109°17.834'
S 7°8.592' E 108°56.488'
S 6°58.948' E 108°35.157'
S 6°49.289' E 108°13.841'
S 6°39.614' E 107°52.539'
S 6°29.924' E 107°31.251'
S 6°20.219' E 107°9.977'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Kita menulis suatu fungsi yang memplot bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
```

```
useglobal;
plotearth;
plotpos(Tugu, "Tugu Jogja"); plotpos(Monas, "Tugu Monas");
plotposline(v);
endfunction
```

Sekarang rencanakan semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4);
```

Atau gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglifnya. Ini tampak sangat bagus dengan kaca mata merah/biru kehijauan.

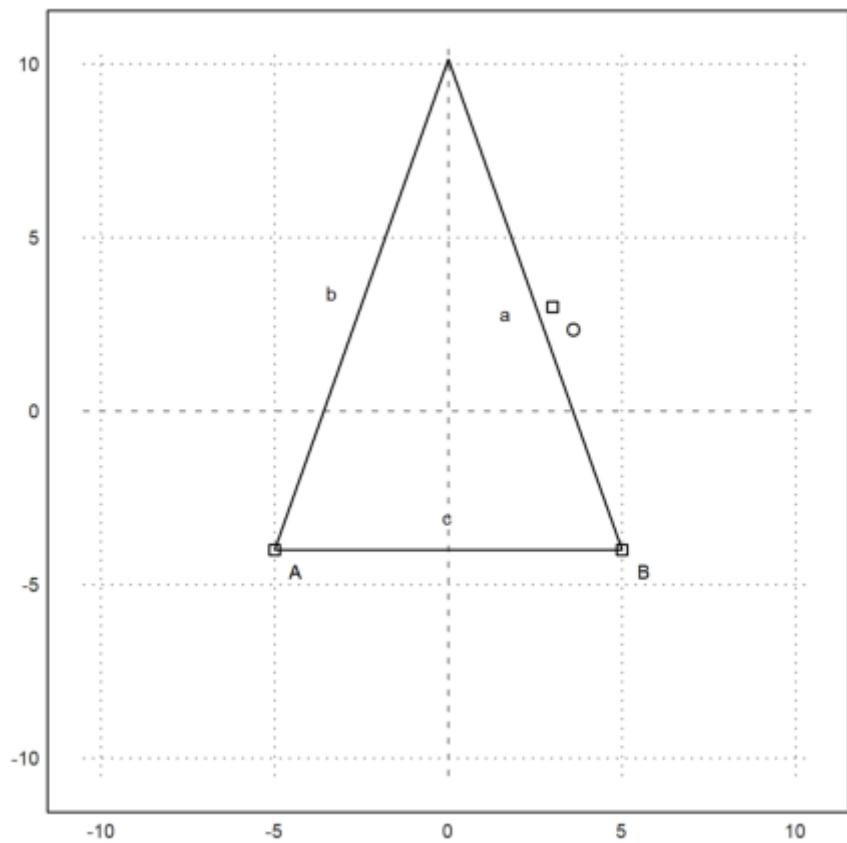
```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4);
>&remvalue();
```

6.21 Latihan

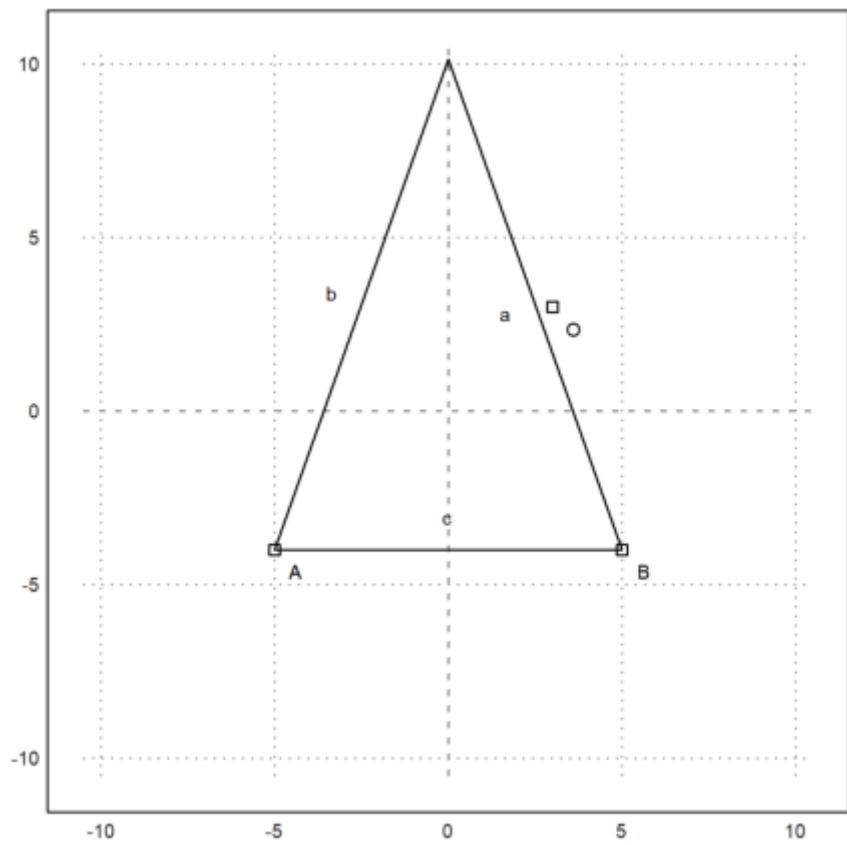
1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n), r.

Petunjuk:

- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah $(360/n)$.
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan $(360/n)$.
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.



Gambar 6.42 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-152.png



Gambar 6.43 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-153.png

2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:

- Misalkan persamaan parabolanya $y = ax^2 + bx + c$.
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a , b , c .

3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

- Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung (sisinya-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).
 - Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.
 - Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar lingkaran dalamnya.
 - Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.
4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).
5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

6.22 Nomor 1

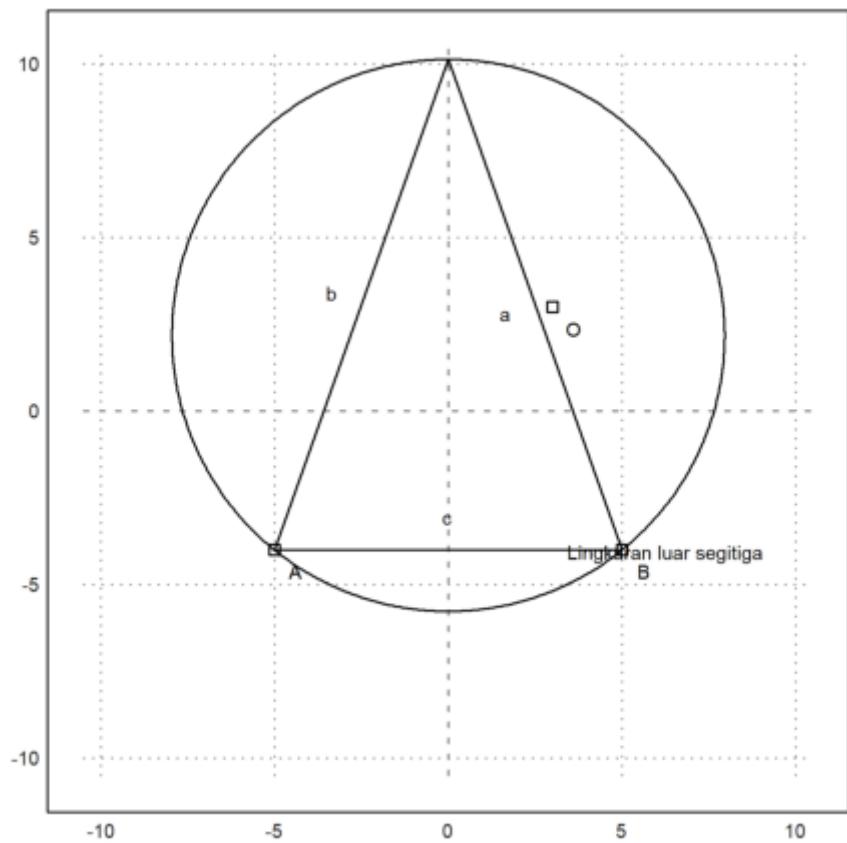
>load geometry

Numerical and symbolic geometry.

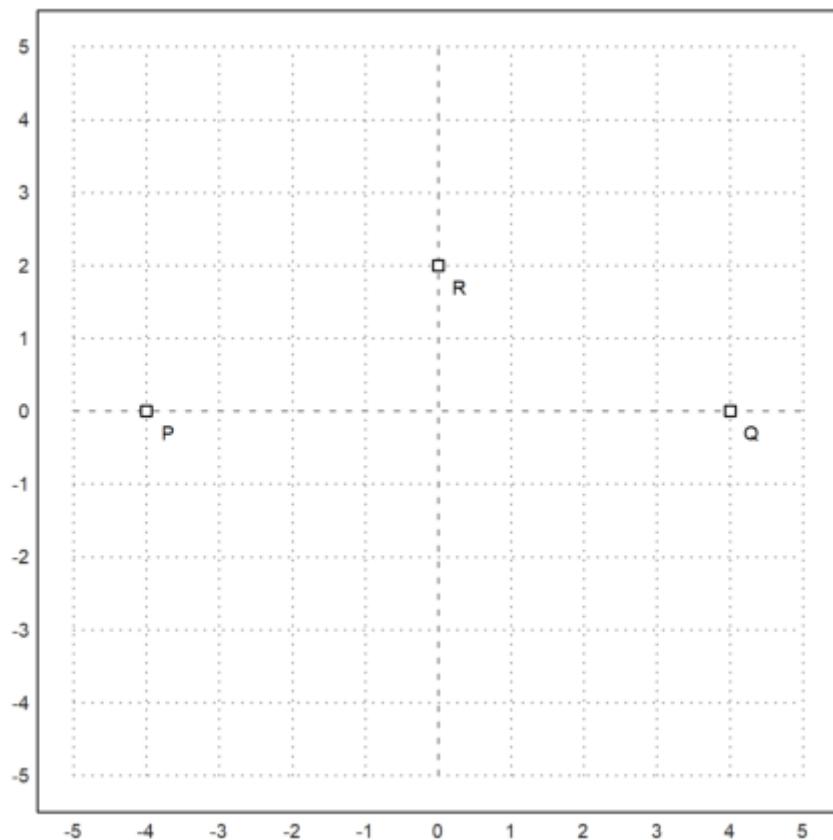
```
>setPlotRange(-10.5,10.5,-10.5,10.5);
>O=[3,3]; plotPoint(O,"O");
>A=[-5,-4]; plotPoint(A,"A");
>B=[5,-4]; plotPoint(B,"B");
>C=[0.5*8^0.5-4]; plotPoint(A,"A'");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(A,C,"b");
>aspect(1);
>c=circleThrough(A,B,C);
>R=getCircleRadius(c);
>O=getCircleCenter(c)
```

[0 , 2 . 18718]

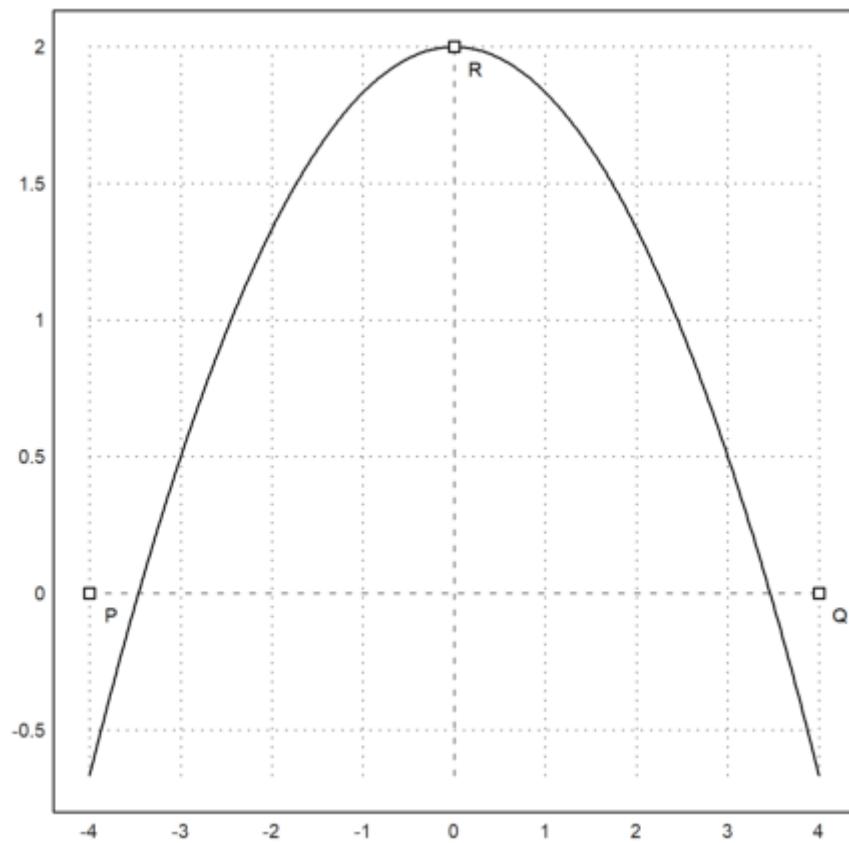
```
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga");
>&remvalue();
```



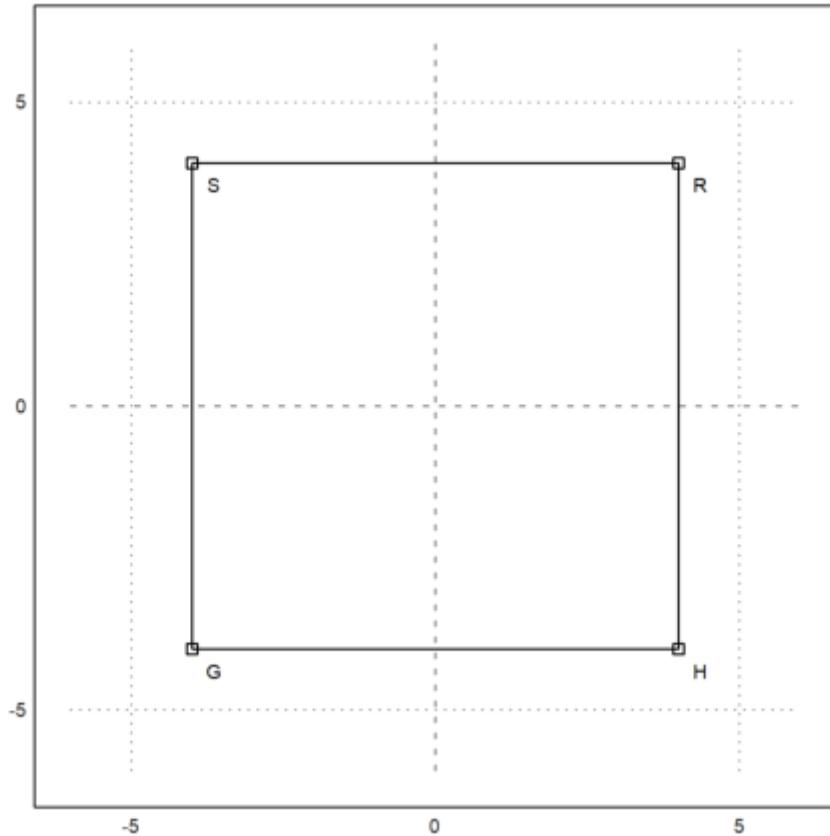
Gambar 6.44 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-154.png



Gambar 6.45 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-155.png



Gambar 6.46 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-156.png



Gambar 6.47 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-157.png

6.23 Nomor 2

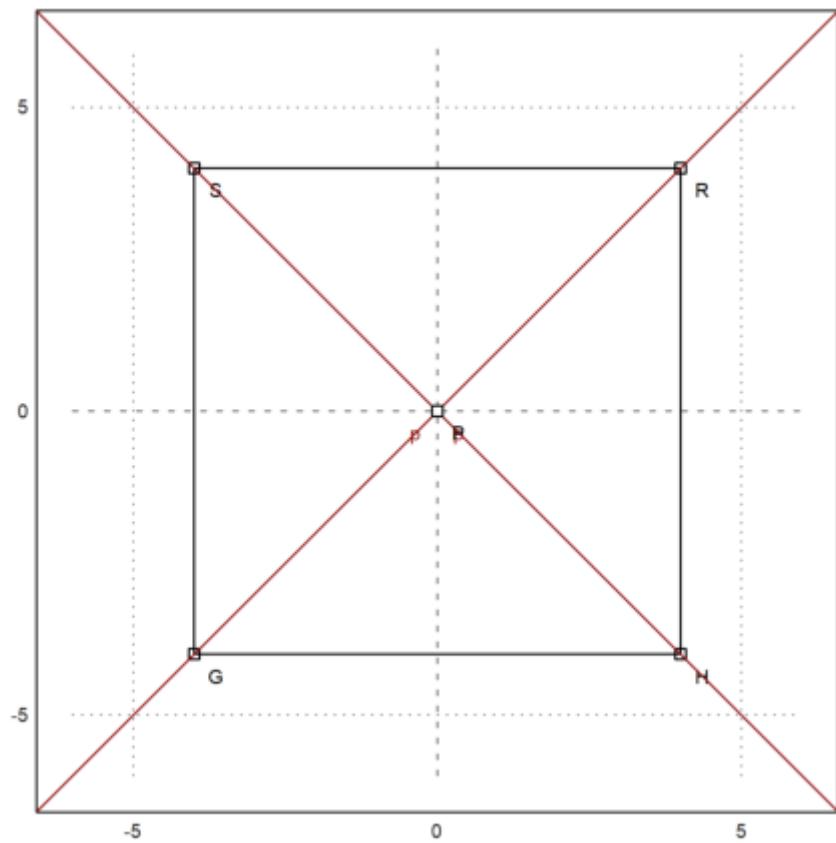
```
>setPlotRange(5);
>P=[-4,0]; Q=[4,0]; R=[0,2];
>plotPoint(P,"P");
>plotPoint(Q,"Q");
>plotPoint(R,"R");
>sol &= solve([24*a+6*b=-c, 24*a-6*b=-c,c=1],[a,b,c])
```

$$[[a = -\frac{1}{24}, b = 0, c = 1]]$$

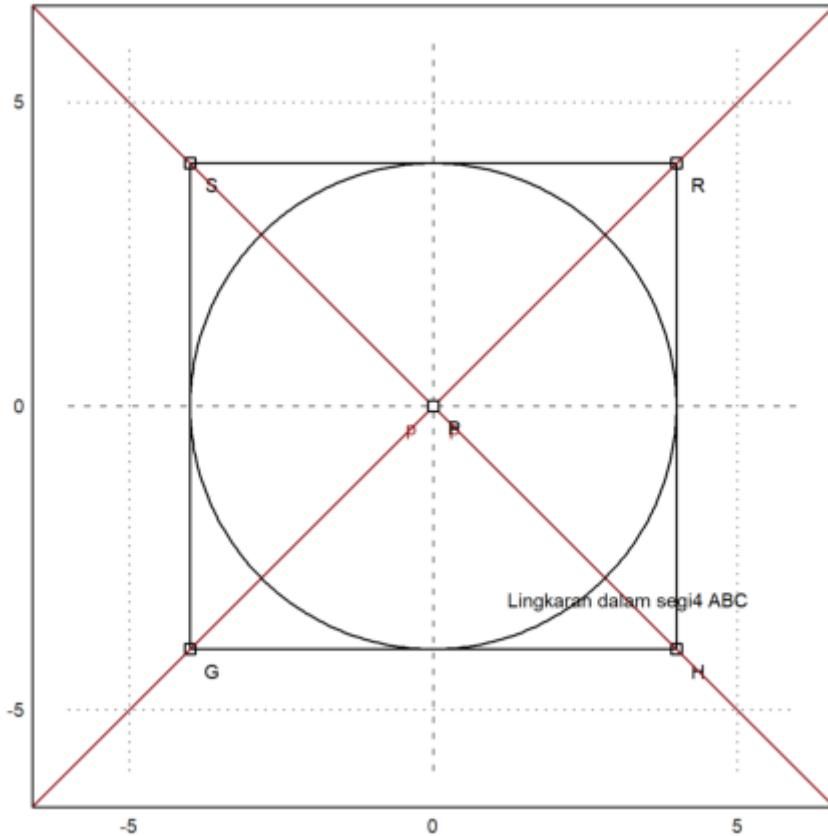
```
>function y&=-1/6*(x^2)-0*x+2
```

$$\frac{x^2}{6} - \frac{1}{2}$$

```
>plot2d("-1/6*(x^2)-0*x+2",-4,4);...
>plotPoint(P,"P"); plotPoint(Q,"Q"); plotPoint(R,"R");
>&remvalue();
```



Gambar 6.48 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-158.png



Gambar 6.49 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-159.png

6.24 Nomor 3

```

>setPlotRange(6);
>G=[-4,-4]; H=[4,-4]; R=[4,4]; S=[-4,4];
>plotPoint(G,"G"); plotPoint(H,"H"); plotPoint(R,"R"); plotPoint(S,"S");
>plotSegment(G,H,""); plotSegment(H,R,""); plotSegment(R,S,""); plotSegment(S,G,"");
>l=angleBisector(G,H,R);
>g=angleBisector(H,R,S);
>P=lineIntersection(l,g)

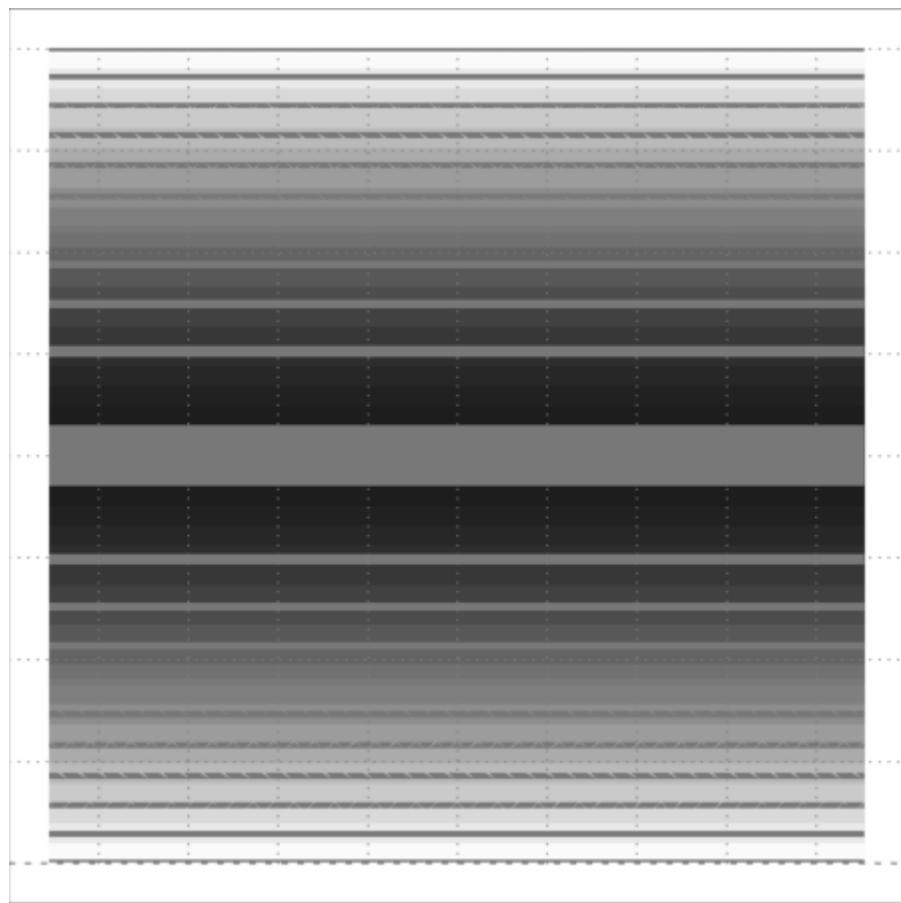
[ 0 , 0 ]

>color(2); plotLine(l); plotLine(g); color(1);
>plotPoint(P,"P");
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))

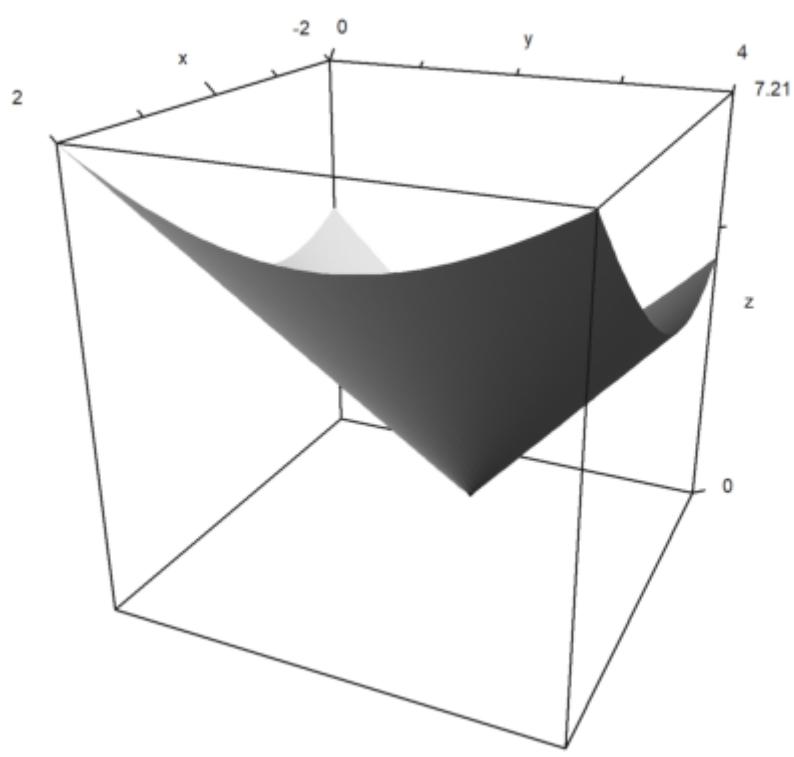
4

>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segi4 ABC");
Akan ditunjukkan bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama
>GH=norm(G-H)

```



Gambar 6.50 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-160.png



Gambar 6.51 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-161.png

```
>HR=norm(H-R)
```

8

```
>RS=norm(R-S)
```

8

```
>SG=norm(S-G)
```

8

```
>GH.RS
```

64

```
>SG.HR
```

64

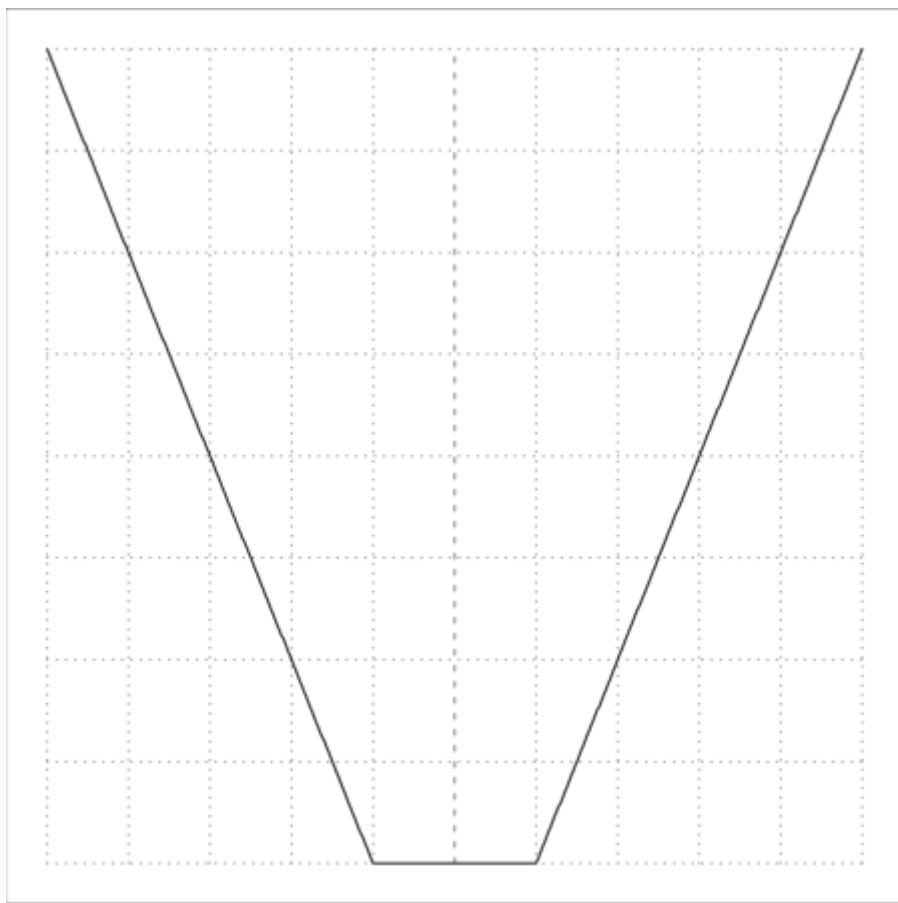
```
>&remvalue();
```

6.25 Nomor 4

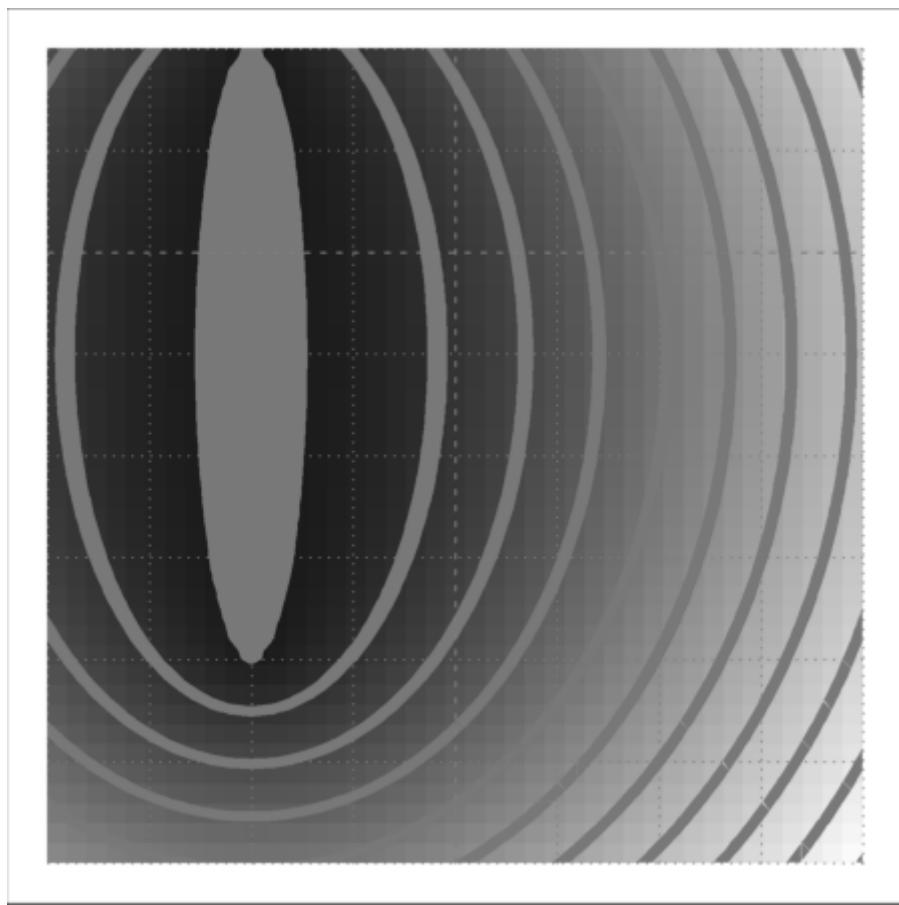
```
>P=[-1,2]; Q=[-1,2];
>function d1(x,y):=sqrt((x-P[1])2+(y-P[2])2)
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-Q[1])2+(y-Q[2])2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=-2,ymin=0,ymax=4,hue=1):
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=0,ymax=4,hue=1):
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-5,xmax=5):
>&remvalue();
```

6.26 Nomor 5

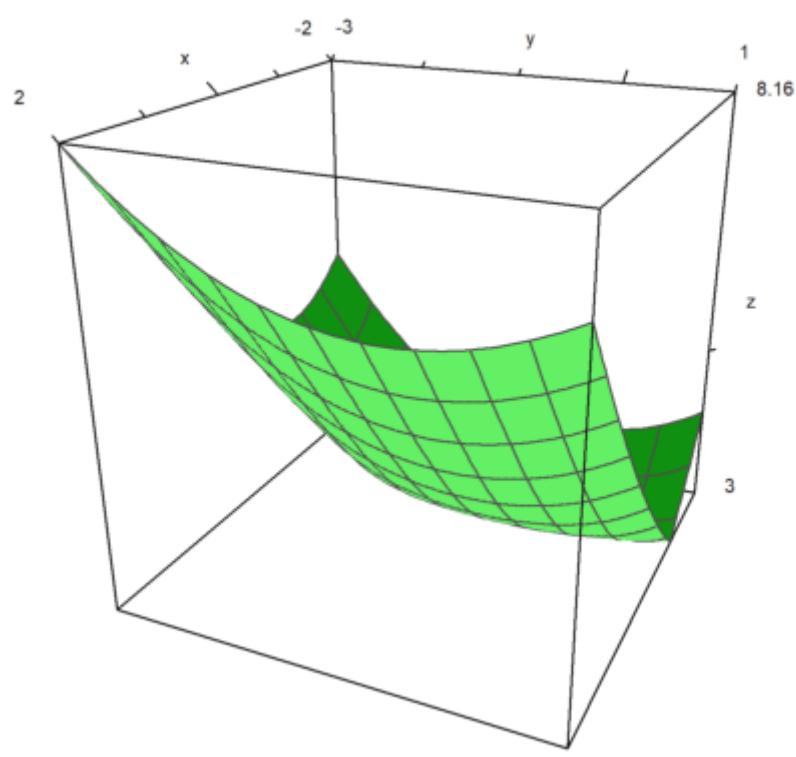
```
>P=[-1,-2]; Q=[1,-2];
>function d1(x,y):=sqrt((x-p[1])2+(y-p[2])2)
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])2+(y-P[2])2)+sqrt((x+Q[1])2+(y+Q[2])2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



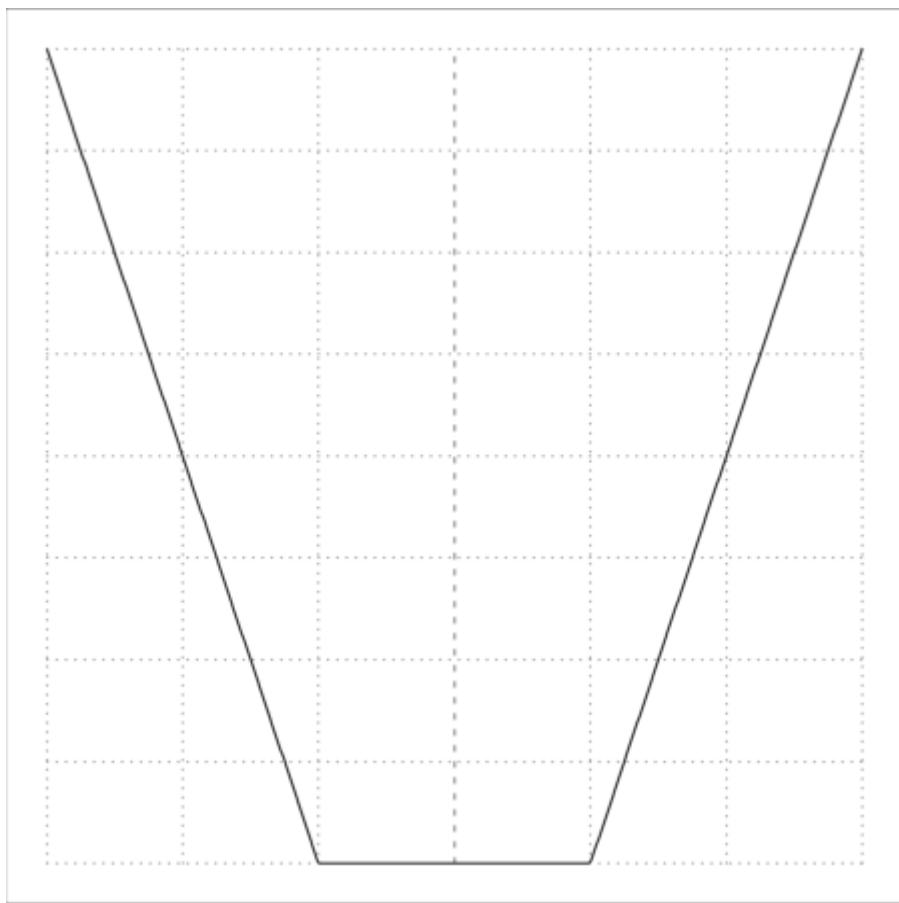
Gambar 6.52 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-162.png



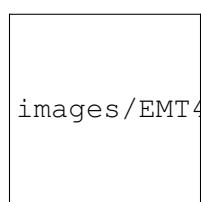
Gambar 6.53 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-163.png



Gambar 6.54 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-164.png

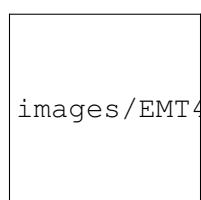


Gambar 6.55 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-165.png



images/EMT4Geometri_Amalia Rahmadhani_23030630084-166.png

Gambar 6.56 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-166.png



images/EMT4Geometri_Amalia Rahmadhani_23030630084-167.png

Gambar 6.57 images/EMT4Geometri_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-167.png

BAB VII

EMT4STATISTIKA_AMALIA RAHMADHANI_23030630084

7.1 EMT untuk Statistika

Di buku catatan ini, kami mendemonstrasikan plot statistik utama, pengujian, dan distribusi di Euler.

Mari kita mulai dengan beberapa statistik deskriptif. Ini bukan pengantar statistik. Jadi, Anda mungkin memerlukan latar belakang untuk memahami detailnya.

Asumsikan pengukuran berikut. Kami ingin menghitung nilai rata-rata dan deviasi standar yang diukur.

```
>M=[1000,1004,998,997,1002,1001,998,1004,998,997]; ...
> median(M), mean(M), dev(M),
```

```
999
999.9
2.72641400622
```

Kita dapat memplot plot kotak-dan-kumis untuk datanya. Dalam kasus kami, tidak ada outlier.

```
>aspect(1.75); boxplot(M);
```

aspect (1.75) digunakan untuk mengatur rasio aspek dari plot (perbandingan antara lebar dan tinggi).

boxplot(M) digunakan untuk membuat boxplot atau diagram kotak dari data di dalam variabel M. Boxplot adalah visualisasi statistik yang menunjukkan persebaran data, termasuk nilai minimum, median, dan nilai maksimum.

Contoh, kita asumsikan jumlah pria berikut dalam rentang ukuran tertentu.

```
>r=155.5:4:187.5; v=[22,71,136,169,139,71,32,8];
```

Berikut adalah alur pendistribusinya.

```
>plot2d(r,v,a=150,b=200,c=0,d=190,bar=1,style="\\\"/\\");
```

Kita bisa memasukkan data mentah tersebut ke dalam tabel.

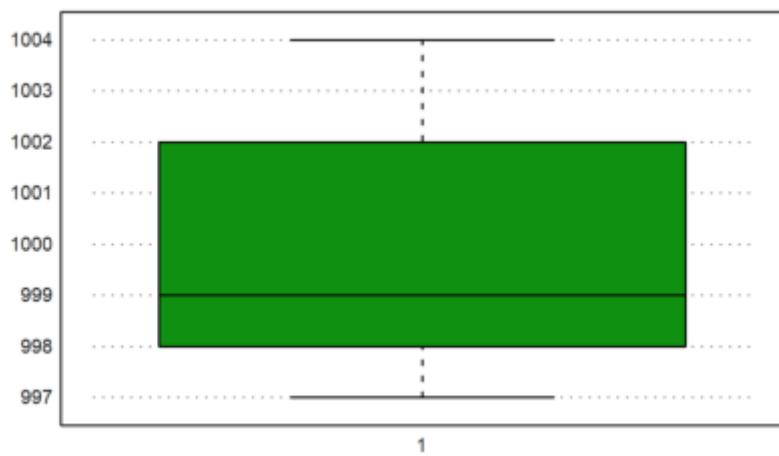
Tabel adalah metode untuk menyimpan data statistik. Tabel kita harus berisi tiga kolom: Awal jangkauan, akhir jangkauan, jumlah pria dalam jangkauan.

Tabel dapat dicetak dengan header. Kami menggunakan vektor string untuk mengatur header.

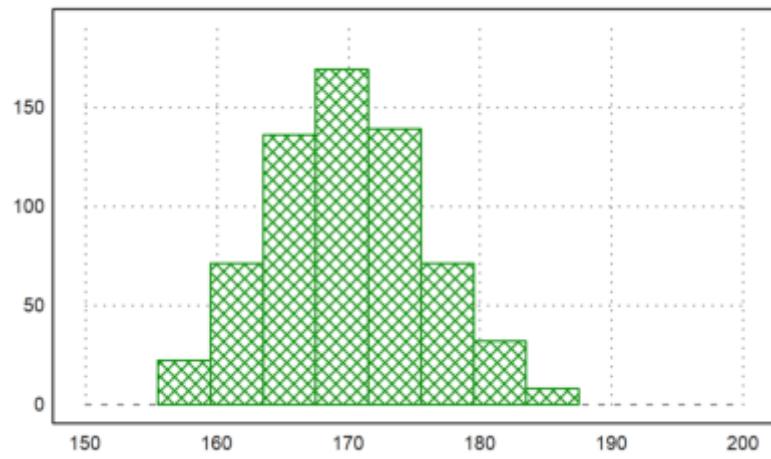
```
>T:=r[1:8]' | r[2:9]' | v'; writetable(T,labc=[“BB”, “BA”, “Frek”])
```

BB	BA	Frek
155.5	159.5	22
159.5	163.5	71
163.5	167.5	136
167.5	171.5	169
171.5	175.5	139
175.5	179.5	71
179.5	183.5	32
183.5	187.5	8

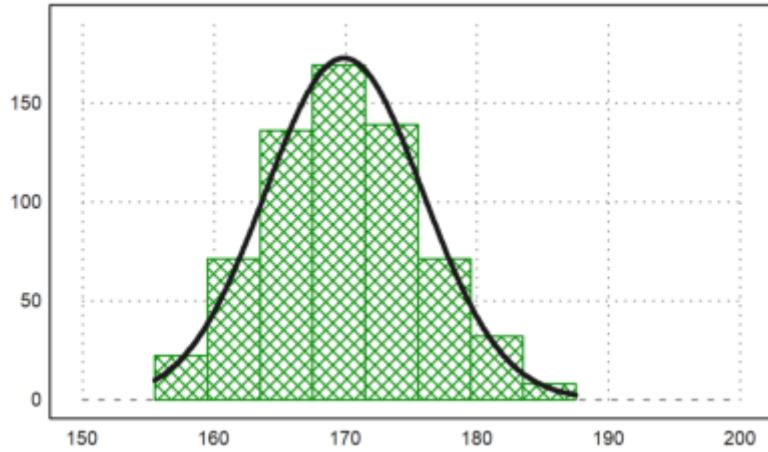
Jika kita memerlukan nilai rata-rata dan statistik ukuran lainnya, kita perlu menghitung titik tengah rentang tersebut. Kita bisa menggunakan dua kolom pertama tabel kita untuk ini.



Gambar 7.1 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-001.png



Gambar 7.2 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-002.png



Gambar 7.3 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-004.png

Simbol “|” digunakan untuk memisahkan kolom, fungsi “writetable” digunakan untuk menulis tabel, dengan opsi “labc” untuk menentukan header kolom.

```
>(T[,1]+T[,2])/2
```

```
157.5
161.5
165.5
169.5
173.5
177.5
181.5
185.5
```

```
>M=fold(r,[0.5,0.5])
```

```
[157.5, 161.5, 165.5, 169.5, 173.5, 177.5, 181.5, 185.5]
```

Sekarang kita dapat menghitung mean dan deviasi sampel dengan frekuensi tertentu.

```
>{m,d}=meandev(M,v); m, d,
```

```
169.901234568
5.98912964449
```

Mari kita tambahkan distribusi nilai normal ke diagram batang di atas. Rumus distribusi normal dengan mean m dan simpangan baku d adalah:

$$y = \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2d^2}}.$$

Karena nilainya antara 0 dan 1, maka untuk memplotnya pada bar plot harus dikalikan dengan 4 kali jumlah data.

```
>plot2d("qnormal(x,m,d)*sum(v)*4", ...
>xmin=min(r),xmax=max(r),thickness=3,add=1):
```

7.2 Tabel

Di direktori buku catatan ini Anda menemukan file dengan tabel. Data tersebut merupakan hasil survei. Berikut adalah empat baris pertama file tersebut. Datanya berasal dari buku online Jerman “Einführung in die Statistik mit R” oleh A. Handl.

```
>printfile("table.dat",4);
```

```
Person Sex Age Titanic Evaluation Tip Problem
1 m 30 n . 1.80 n
2 f 23 y g 1.80 n
3 f 26 y g 1.80 y
```

Tabel berisi 7 kolom angka atau token (string). Kami ingin membaca tabel dari file. Pertama, kami menggunakan terjemahan kami sendiri untuk tokennya.

Untuk ini, kami mendefinisikan kumpulan token. Fungsi `strtokens()` mendapatkan vektor string token dari string tertentu.

```
>mf:=[“m”,“f”]; yn:=[“y”,“n”]; ev:=strtokens(“g vg m b vb”);
```

Sekarang kita membaca tabel dengan terjemahan ini.

Argumen `tok2`, `tok4` dll. adalah terjemahan dari kolom tabel. Argumen ini tidak ada dalam daftar parameter `readtable()`, jadi Anda perlu menyediakannya dengan “`:=`”.

```
>{MT,hd}=readtable("table.dat",tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
```

```
>load over statistics;
```

```
>writetable(MT[1:10],labc=hd,wc=5,tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
```

```
Person Sex Age Titanic Evaluation Tip Problem
1 m 30 n . 1.8 n
2 f 23 y g 1.8 n
3 f 26 y g 1.8 y
4 m 33 n . 2.8 n
5 m 37 n . 1.8 n
6 m 28 y g 2.8 y
7 f 31 y vg 2.8 n
8 m 23 n . 0.8 n
9 f 24 y vg 1.8 y
10 m 26 n . 1.8 n
```

Titik “.” mewakili nilai-nilai, yang tidak tersedia.

Jika kita tidak ingin menentukan token yang akan diterjemahkan terlebih dahulu, kita hanya perlu menentukan, kolom mana yang berisi token dan bukan angka.

```
>ctok=[2,4,5,7]; {MT,hd,tok}=readtable("table.dat",ctok=ctok);
```

`ctok=[2,4,5,7]`: Ini adalah untuk menentukan kolom yang akan diambil yaitu kolom ke-2, ke-4, ke-5, dan ke-7.

```
>tok
```

```
m
n
f
Y
g
vg
```

Tabel berisi entri dari file dengan token yang diterjemahkan ke dalam angka.

String khusus NA = “.” diartikan sebagai “Tidak Tersedia”, dan mendapatkan NAN (bukan angka) di tabel. Terjemahan ini dapat diubah dengan parameter NA, dan NAval.

>MT[1]

```
[1, 1, 30, 2, NAN, 1.8, 2]
```

Berikut isi tabel dengan nomor yang belum diterjemahkan.

>writetable(MT,wc=5)

1	1	30	2	.	1.8	2
2	3	23	4	5	1.8	2
3	3	26	4	5	1.8	4
4	1	33	2	.	2.8	2
5	1	37	2	.	1.8	2
6	1	28	4	5	2.8	4
7	3	31	4	6	2.8	2
8	1	23	2	.	0.8	2
9	3	24	4	6	1.8	4
10	1	26	2	.	1.8	2
11	3	23	4	6	1.8	4
12	1	32	4	5	1.8	2
13	1	29	4	6	1.8	4
14	3	25	4	5	1.8	4
15	3	31	4	5	0.8	2
16	1	26	4	5	2.8	2
17	1	37	2	.	3.8	2
18	1	38	4	5	.	2
19	3	29	2	.	3.8	2
20	3	28	4	6	1.8	2
21	3	28	4	1	2.8	4
22	3	28	4	6	1.8	4
23	3	38	4	5	2.8	2
24	3	27	4	1	1.8	4
25	1	27	2	.	2.8	4

Untuk kenyamanan, Anda dapat memasukkan keluaran readtable() ke dalam daftar.

>Table={readtable("table.dat",ctok=ctok)};

Dengan menggunakan kolom token yang sama dan token yang dibaca dari file, kita dapat mencetak tabel. Kita dapat menentukan ctok, tok, dll. atau menggunakan tabel daftar.

>writetable(Table,ctok=ctok,wc=5);

Person	Sex	Age	Titanic	Evaluation	Tip	Problem
1	m	30	n	.	1.8	n
2	f	23	y	g	1.8	n
3	f	26	y	g	1.8	y
4	m	33	n	.	2.8	n
5	m	37	n	.	1.8	n
6	m	28	y	g	2.8	y
7	f	31	y	vg	2.8	n
8	m	23	n	.	0.8	n

9	f	24	y	vg	1.8	y
10	m	26	n	.	1.8	n
11	f	23	y	vg	1.8	y
12	m	32	y	g	1.8	n
13	m	29	y	vg	1.8	y
14	f	25	y	g	1.8	y
15	f	31	y	g	0.8	n
16	m	26	y	g	2.8	n
17	m	37	n	.	3.8	n
18	m	38	y	g	.	n
19	f	29	n	.	3.8	n
20	f	28	y	vg	1.8	n
21	f	28	y	m	2.8	y
22	f	28	y	vg	1.8	y
23	f	38	y	g	2.8	n
24	f	27	y	m	1.8	y
25	m	27	n	.	2.8	y

Fungsi tablecol() mengembalikan nilai kolom tabel, melewatkkan baris apa pun dengan nilai NAN (“.” dalam file), dan indeks kolom, yang berisi nilai-nilai ini.

```
>{c,i}=tablecol(MT,[5,6]);
```

Kita bisa menggunakan ini untuk mengekstrak kolom dari tabel untuk tabel baru.

```
>j=[1,5,6]; writetable(MT[i,j],labc=hd[j],ctok=[2],tok=tok)
```

Person	Evaluation	Tip
2	g	1.8
3	g	1.8
6	g	2.8
7	vg	2.8
9	vg	1.8
11	vg	1.8
12	g	1.8
13	vg	1.8
14	g	1.8
15	g	0.8
16	g	2.8
20	vg	1.8
21	m	2.8
22	vg	1.8
23	g	2.8
24	m	1.8

Tentu saja, kita perlu mengekstrak tabel itu sendiri dari daftar Tabel dalam kasus ini.

```
>MT=Table[1];
```

Tentu saja, kita juga dapat menggunakannya untuk menentukan nilai rata-rata suatu kolom atau nilai statistik lainnya.

```
>mean(tablecol(MT,6))
```

2.175

Fungsi getstatistics() mengembalikan elemen dalam vektor, dan jumlahnya. Kami menerapkannya pada nilai “m” dan “f” di kolom kedua tabel kami.

```
>{xu,count}=getstatistics(tablecol(MT,2)); xu, count,
[1, 3]
[12, 13]
```

Kita bisa mencetak hasilnya di tabel baru.

```
>writetable(count',labr=tok[xu])
```

m	12
f	13

Fungsi selecttable() mengembalikan tabel baru dengan nilai dalam satu kolom yang dipilih dari vektor indeks. Pertama kita mencari indeks dari dua nilai kita di tabel token.

```
>v:=indexof(tok,[“g”,“vg”])
```

```
[5, 6]
```

Sekarang kita dapat memilih baris tabel, yang memiliki salah satu nilai v pada baris ke-5.

```
>MT1:=MT[selectrows(MT,5,v)]; i:=sortedrows(MT1,5);
```

Sekarang kita dapat mencetak tabel, dengan nilai yang diekstraksi dan diurutkan di kolom ke-5.

```
>writetable(MT1[i],labc=hd,ctok=ctok,tok=tok,wc=7);
```

Person	Sex	Age	Titanic	Evaluation	Tip	Problem
2	f	23	y	g	1.8	n
3	f	26	y	g	1.8	y
6	m	28	y	g	2.8	y
18	m	38	y	g	.	n
16	m	26	y	g	2.8	n
15	f	31	y	g	0.8	n
12	m	32	y	g	1.8	n
23	f	38	y	g	2.8	n
14	f	25	y	g	1.8	y
9	f	24	y	vg	1.8	y
7	f	31	y	vg	2.8	n
20	f	28	y	vg	1.8	n
22	f	28	y	vg	1.8	y
13	m	29	y	vg	1.8	y
11	f	23	y	vg	1.8	y

Untuk statistik selanjutnya, kami ingin menghubungkan dua kolom tabel. Jadi kita ekstrak kolom 2 dan 4 dan urutkan tabelnya.

```
>i:=sortedrows(MT,[2,4]); ...
> writetable(tablecol(MT[i],[2,4])',ctok=[1,2],tok=tok)
```

m	n
m	n
m	n
m	n
m	n
m	n
m	n

m		Y
m		Y
m		Y
m		Y
m		Y
f		n
f		Y
f		Y
f		Y
f		Y
f		Y
f		Y
f		Y
f		Y
f		Y
f		Y
f		Y
f		Y
f		Y

Dengan getstatistics(), kita juga bisa menghubungkan jumlah dalam dua kolom tabel satu sama lain.

```
>MT24=tablecol(MT,[2,4]); ...
>{xu1,xu2,count}=getstatistics(MT24[1],MT24[2]); ...
>writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2])
```

	n	Y
m	7	5
f	1	12

Sebuah tabel dapat ditulis ke file.

```
>filename="test.dat"; ...
>writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2],file=filename);
Kemudian kita bisa membaca tabel dari file tersebut.
>{MT2,hd,tok2,hdr}=readtable(filename,>clabs,>rlabs); ...
>writetable(MT2,labr=hdr,labc=hd)
```

	n	Y
m	7	5
f	1	12

Dan hapus filenya.

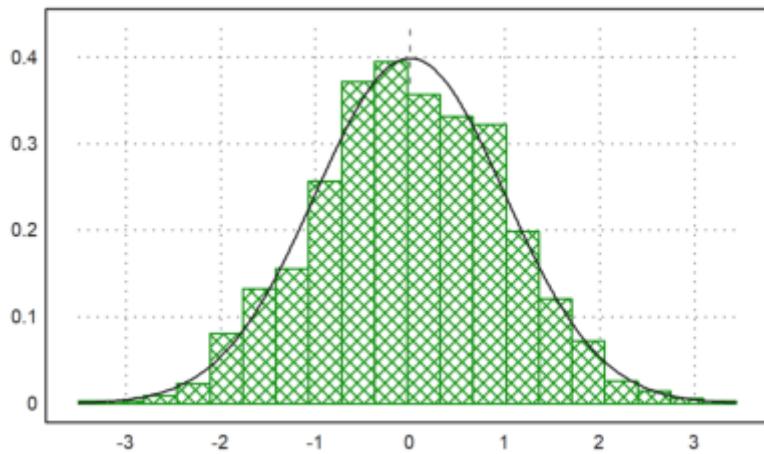
```
>fileremove(filename);
```

7.3 Distribusi

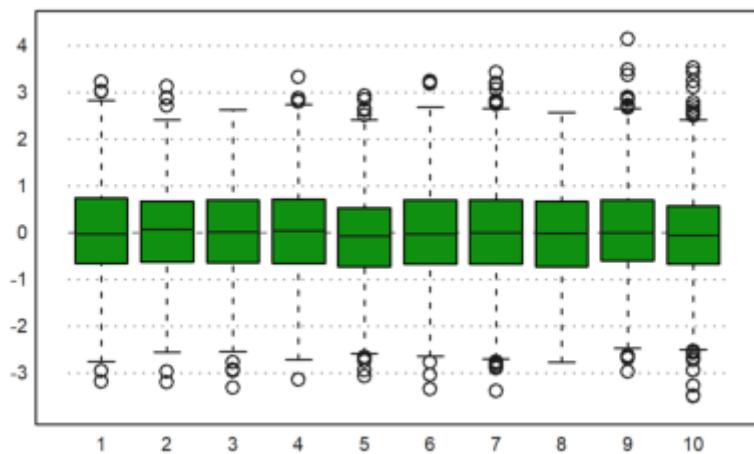
Dengan plot2d, ada metode yang sangat mudah untuk memplot sebaran data eksperimen.

```
>p=normal(1,1000);
>plot2d(p,distribution=20,style="\\/");
>plot2d("qnormal(x,0,1)",add=1):
```

p=normal(1,1000); digunakan untuk menciptakan 1000 sampel acak yang terdistribusi normal dengan mean (rata-rata) 1 dan standar deviasi 1000.



Gambar 7.4 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-005.png



Gambar 7.5 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-006.png

```
plot2d("qnormal(x,0,1)",add=1);
```

digunakan untuk menambahkan plot dari distribusi normal standar (dengan mean 0 dan standar deviasi 1) ke grafik yang sama. Fungsi qnormal(x,0,1) mengacu pada distribusi kumulatif dari variabel acak normal standar. add=1 menunjukkan bahwa grafik ini harus ditambahkan ke grafik yang sudah ada, bukan dibuat baru.

Perlu diperhatikan perbedaan antara bar plot (sampel) dan kurva normal (distribusi sebenarnya). Masukkan kembali ketiga perintah untuk melihat hasil pengambilan sampel lainnya.

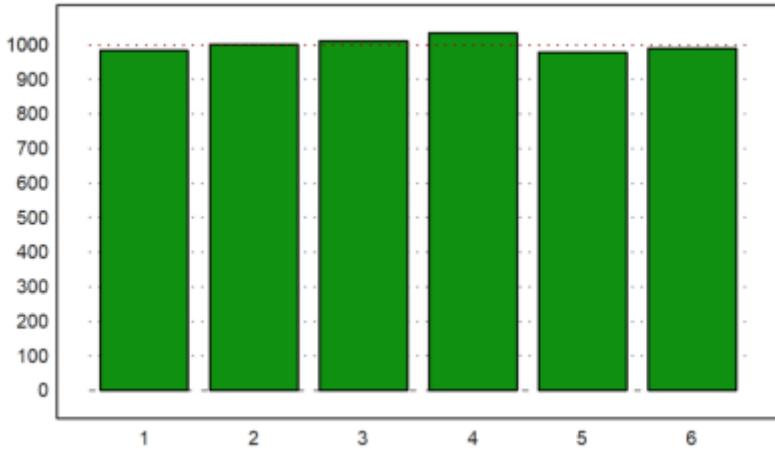
Berikut adalah perbandingan 10 simulasi dari 1000 nilai terdistribusi normal menggunakan apa yang disebut plot kotak. Plot ini menunjukkan median, kuartil 25% dan 75%, nilai minimal dan maksimal, serta outlier.

```
>p=normal(10,1000); boxplot(p);
```

Untuk menghasilkan bilangan bulat acak, Euler memiliki intrandom. Mari kita simulasikan lemparan dadu dan plot distribusinya.

Kita menggunakan fungsi getmultiplicities(v,x), yang menghitung seberapa sering elemen v muncul di x. Kemudian kita plot hasilnya menggunakan kolomplot().

```
>k=intrandom(1,6000,6); ...
```



Gambar 7.6 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-007.png

```
> columnsplot(getmultiplicities(1:6,k)); ...
> ygrid(1000,color=red):
```

Meskipun `inrandom(n,m,k)` mengembalikan bilangan bulat yang terdistribusi secara seragam dari 1 hingga k, distribusi bilangan bulat lainnya dapat digunakan dengan `randpint()`.

Dalam contoh berikut, probabilitas untuk 1,2,3 masing-masing adalah 0.4,0.1,0.5.

```
>randpint(1,1000,[0.4,0.1,0.5]); getmultiplicities(1:3,%)
```

```
[ 378, 102, 520 ]
```

Euler dapat menghasilkan nilai acak dari lebih banyak distribusi. Lihat referensinya.

Misalnya, kita mencoba distribusi eksponensial. Variabel acak kontinu X dikatakan berdistribusi eksponensial, jika PDF-nya diberikan oleh

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

with parameter

$$\lambda = \frac{1}{\mu}, \quad \mu \text{ is the mean, and denoted by } X \sim \text{Exponential}(\lambda).$$

```
>plot2d(randexponential(1,1000,2),>distribution):
```

Parameter pertama (1) adalah lambda, yang merupakan parameter distribusi eksponensial.

Parameter kedua (1000) menunjukkan jumlah angka acak yang dihasilkan.

Parameter ketiga (2) bisa menunjukkan dimensi atau bentuk output.

Untuk banyak distribusi, Euler dapat menghitung fungsi distribusi dan inversnya.

```
>plot2d("normaldis",-4,4):
```

Berikut ini adalah salah satu cara untuk memplot kuantil.

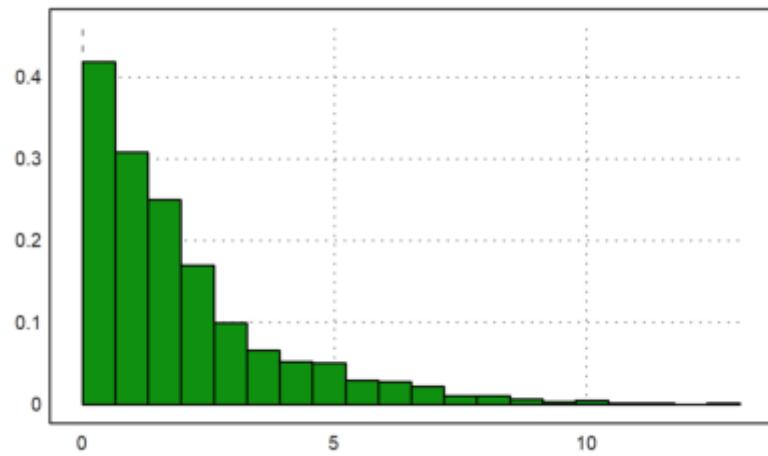
```
>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",-4,6); ...
```

```
> plot2d("qnormal(x,1,1.5)",a=2,b=5,>add,>filled):
```

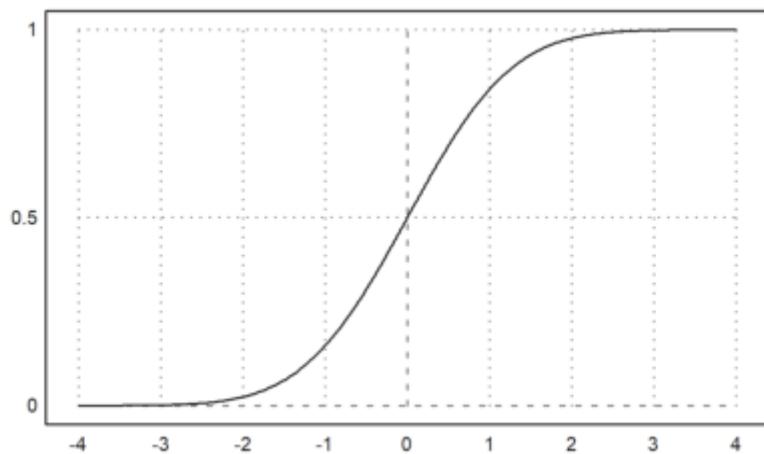
$$\text{normaldis}(x,m,d) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{d})^2} dt.$$

Peluang berada di kawasan hijau adalah sebagai berikut.

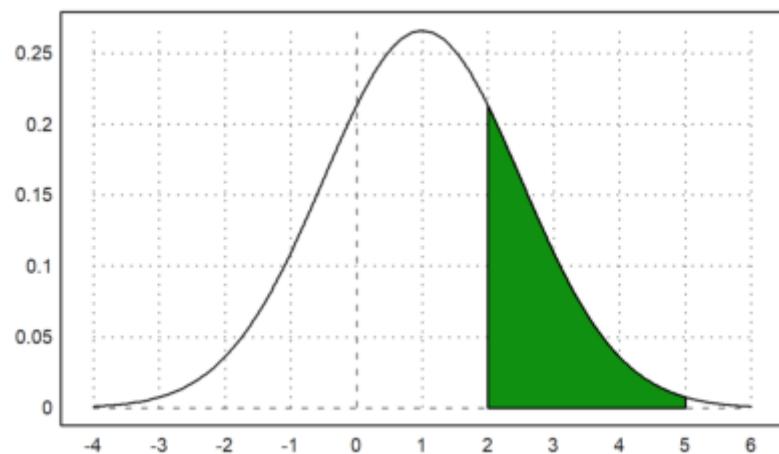
```
>normaldis(5,1,1.5)-normaldis(2,1,1.5)
```



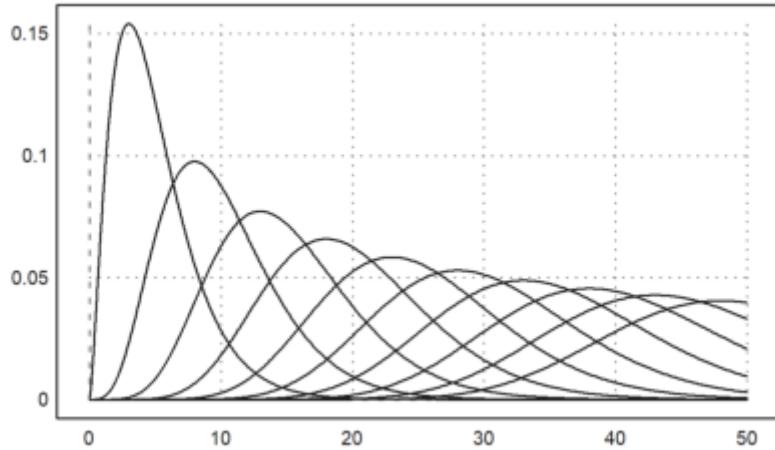
Gambar 7.7 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-010.png



Gambar 7.8 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-011.png



Gambar 7.9 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-012.png



Gambar 7.10 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-015.png

0.248662156979

Ini dapat dihitung secara numerik dengan integral berikut.

$$\int_2^5 \frac{1}{1.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-1}{1.5})^2} dx.$$

>gauss("qnormal(x,1,1.5)",2,5)

0.248662156979

Mari kita bandingkan distribusi binomial dengan distribusi normal yang mean dan deviasinya sama. Fungsi invbindis() menyelesaikan interpolasi linier antara nilai integer.

>invbindis(0.95,1000,0.5), invnormaldis(0.95,500,0.5*sqrt(1000))

525.516721219

526.007419394

Fungsi qdis() adalah kepadatan distribusi chi-kuadrat. Seperti biasa, Euler memetakan vektor ke fungsi ini. Dengan demikian kita mendapatkan plot semua distribusi chi-kuadrat dengan derajat 5 sampai 30 dengan mudah dengan cara berikut.

>plot2d("qchidis(x,(5:5:50))",0,50);

Euler memiliki fungsi akurat untuk mengevaluasi distribusi. Mari kita periksa chidis() dengan integral.

Penamaannya mencoba untuk konsisten. Misalnya.,

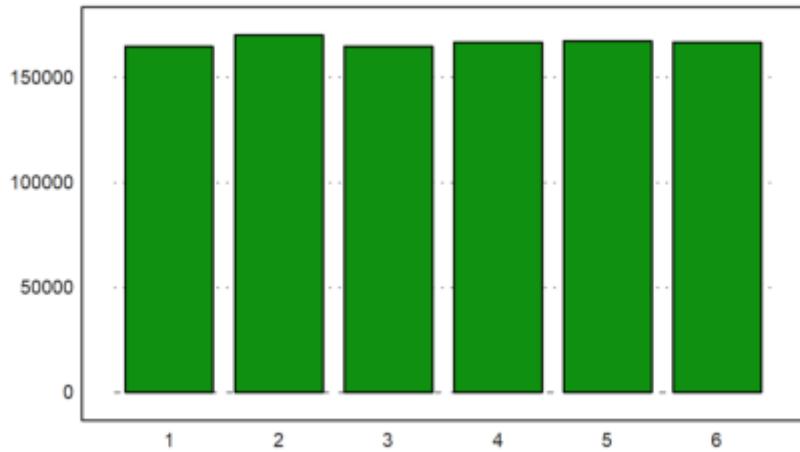
- distribusi chi-kuadratnya adalah chidis(),
- fungsi kebalikannya adalah invchidis(),
- kepadatannya adalah qchidis().

Pelengkap distribusi (ekor atas) adalah chicdis().

>chidis(1.5,2), integrate("qchidis(x,2)",0,1.5)

0.527633447259

0.527633447259



Gambar 7.11 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-018.png

7.4 Distribusi Diskrit

Distribusi diskret adalah jenis distribusi probabilitas yang digunakan untuk variabel acak diskret, yaitu variabel yang hanya dapat memiliki nilai tertentu, biasanya dalam bentuk bilangan bulat.

Untuk menentukan distribusi diskrit Anda sendiri, Anda dapat menggunakan metode berikut.

Pertama kita atur fungsi distribusinya.

>wd = 0|((1:6)+[-0.01,0.01,0,0,0,0])/6

[0, 0.165, 0.335, 0.5, 0.666667, 0.833333, 1]

Perintah ini menggunakan operator | dan + untuk membuat nilai dalam variabel wd.

1:6 Ini menghasilkan vektor [1, 2, 3, 4, 5, 6].

(1:6) + [-0.01, 0.01, 0, 0, 0, 0]: Operasi ini menambahkan kedua vektor elemen per elemen.

Hasilnya:

$$[1 - 0.01, 2 + 0.01, 3, 4, 5, 6] = [0.99, 2.01, 3, 4, 5, 6]$$

[1-0.01,2+0.01,3,4,5,6]=[0.99,2.01,3,4,5,6]/6 Membagi setiap elemen hasil penjumlahan tadi dengan 6.

Hasilnya:

$$\left[\frac{0.99}{6}, \frac{2.01}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6} \right] = [0.165, 0.335, 0.5, 0.6667, 0.8333, 1]$$

Artinya dengan probabilitas wd[i+1]-wd[i] kita menghasilkan nilai acak i.

Ini hampir merupakan distribusi yang seragam. Mari kita tentukan generator nomor acak untuk ini. Fungsi find(v,x) mencari nilai x pada vektor v. Fungsi ini juga berfungsi untuk vektor x.

>function wrongdice (n,m) := find(wd,random(n,m))

Kesalahannya sangat halus sehingga kita hanya melihatnya dengan banyak iterasi.

Fungsi wrongdice mengembalikan sebuah matriks berukuran n x m, di mana setiap elemen dari matriks ini adalah indeks posisi dari elemen wd yang paling sesuai (atau mendekati) nilai acak dari random(n, m).

>columsplot(getmultiplicities(1:6,wrongdice(1,1000000))):

Hasil columsplot akan menunjukkan frekuensi relatif dari setiap angka (1 hingga 6), yang memungkinkan Anda untuk melihat apakah distribusi itu merata atau tidak.

Berikut adalah fungsi sederhana untuk memeriksa keseragaman distribusi nilai 1...K dalam v. Kita menerima hasilnya, jika untuk semua frekuensi

$$\left| f_i - \frac{1}{K} \right| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

Metode tersebut merupakan metode statistik untuk menguji keseragaman distribusi. Distribusi dianggap seragam jika frekuensi setiap nilai dalam v mendekati frekuensi ideal 1/K, dengan deviasi yang tidak melebihi batas toleransi.

```
>function checkrandom (v, delta=1) ...
```

```
K=max(v); n=cols(v);
fr=getfrequencies(v,1:K);
return max(fr/n-1/K)<delta/sqrt(n);
endfunction
```

Memang fungsinya menolak distribusi seragam.

```
>checkrandom(wrongdice(1,1000000))
```

0

Dan ia menerima generator acak bawaan.

Manual:

- Asumsi dadu, maka peluang setiap sisi = 1/6

Dalam 1 juta lemparan maka

$$1000000 \times \frac{1}{6} \approx 166667$$

* Frekuensi setiap sisi fr. Proporsi tiap sisi = fr/n + Misalkan frekuensi munculnya angka adalah + [160000, 170000, 180000, 150000, 170000, 170000]

[160000, 170000, 180000, 150000, 170000, 170000]

Maka proporsi setiap angka:

$$\begin{aligned} &\frac{[160000, 170000, 180000, 150000, 170000, 170000]}{1000000} \\ &[0.16, 0.17, 0.18, 0.15, 0.17, 0.17] \end{aligned}$$

* Deviasi maksimum $\frac{fn}{n} - \frac{1}{K} + 1$ $\frac{1}{K} = \frac{1}{6} = 0.1667$

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{6} = 0.1667$$

$$([0.16, 0.17, 0.18, 0.15, 0.17, 0.17] - 0.1667)$$

$$\max(-0.0067, 0.0033, 0.0133, -0.0167, 0.0033, 0.0033) = 0.0133$$

* Bandingkan dengan batas toleransi. + Batas= $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1000000}} = \frac{1}{1000} = 0.001$

$$\begin{aligned} \text{Batas} &= \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1000000}} = \frac{1}{1000} = 0.001 \\ &0.0133 > 0.001 \end{aligned}$$

Hasil 0 di sini mengindikasikan bahwa fungsi checkrandom telah menentukan bahwa distribusi tidak seragam.

>checkrandom(intrandom(1,1000000,6))

1

checkrandom mengembalikan 1 atau true yang berarti bahwa distribusi dari 1 juta bilangan acak rentang 1 sampai 6 dianggap cukup seragam dalam batas toleransi yang ditetapkan.

Kita dapat menghitung distribusi binomial. Pertama ada binomials() , yang mengembalikan probabilitas i atau kurang hit dari n percobaan.

Misal kita akan menghitung probabilitas dari distribusi binomial di mana terdapat 1000 percobaan (misalnya, 1000 kali pelemparan koin), dengan probabilitas sukses pada setiap percobaan sebesar 0.4, dan kita ingin mengetahui probabilitas mendapatkan tepat 410 sukses.

Secara matematis, ini dihitung dengan rumus:

$$P(X \leq 410) = \binom{1000}{410} \cdot (0.4)^{410} \cdot (0.6)^{1000-410}$$

>bindis(410,1000,0.4)

0.751401349654

>bindis(4,10,0.6)

0.1662386176

Manual:

Secara matematis, ini dihitung dengan rumus:

$$P(X \leq 4) = \binom{10}{4} \cdot (0.6)^4 \cdot (0.4)^{10-4}$$

* Untuk k = 0 + P(X=0)= 10 $\binom{10}{0 \cdot (0.6)\{0\} \cdot (0.4)\{10\}} \approx 0.00010$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot (0.6)^0 \cdot (0.4)^{10} \approx 0.00010$$

* Untuk k = 1 + P(X = 1)= 10 $\binom{10}{1 \cdot (0.6)\{1\} \cdot (0.4)\{9\}} \approx 0.00157$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} \cdot (0.6)^1 \cdot (0.4)^9 \approx 0.00157$$

* Untuk k = 2 + P(X = 2)= 10 $\binom{10}{2 \cdot (0.6)\{2\} \cdot (0.4)\{8\}} \approx 0.01061$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot (0.6)^2 \cdot (0.4)^8 \approx 0.01061$$

* Untuk k = 3 + P(X = 3)= 10 $\binom{10}{3 \cdot (0.6)\{3\} \cdot (0.4)\{7\}} \approx 0.04246$

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot (0.6)^3 \cdot (0.4)^7 \approx 0.04246$$

Untuk k = 4 + P(X = 4)= 10 $\binom{10}{4 \cdot (0.6)\{4\} \cdot (0.4)\{6\}} \approx 0.11147$

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot (0.6)^4 \cdot (0.4)^6 \approx 0.11147$$

Maka,

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$P(X \leq 4) = 0.00010 + 0.00157 + 0.01061 + 0.04246 + 0.11147$$

$$P(X \leq 4) \approx 0.1662$$

Fungsi Beta terbalik digunakan untuk menghitung interval kepercayaan Clopper-Pearson untuk parameter p. Tingkat defaultnya adalah alfa.

Arti dari interval ini adalah jika p berada di luar interval, hasil pengamatan 410 dalam 1000 jarang terjadi.

```
>clopperpearson(410,1000)
```

```
[0.37932, 0.441212]
```

Perintah berikut adalah cara langsung untuk mendapatkan hasil di atas. Namun untuk n yang besar, penjumlahan langsungnya tidak akurat dan lambat.

```
>p=0.4; i=0:410; n=1000; sum(bin(n,i)*p^i*(1-p)^(n-i))
```

```
0.751401349655
```

Omong-omong, invbinsum() menghitung kebalikan dari binomialsum().

```
>invbindis(0.75,1000,0.4)
```

```
409.932733047
```

Di Bridge, kami mengasumsikan 5 kartu beredara (dari 52) di dua tangan (26 kartu). Mari kita hitung probabilitas distribusi yang lebih buruk dari 3:2 (misalnya 0:5, 1:4, 4:1, atau 5:0).

```
>2*hypergeomsum(1,5,13,26)
```

```
0.321739130435
```

Ada juga simulasi distribusi multinomial.

```
>randmultinomial(10,1000,[0.4,0.1,0.5])
```

381	100	519
376	91	533
417	80	503
440	94	466
406	112	482
408	94	498
395	107	498
399	96	505
428	87	485
400	99	501

7.5 Merencanakan Data/ Plot Data

Untuk memetakan data, kami mencoba hasil pemilu Jerman sejak tahun 1990, diukur dalam jumlah kursi.

```

>BW := [ ...
> 1990,662,319,239,79,8,17; ...
> 1994,672,294,252,47,49,30; ...
> 1998,669,245,298,43,47,36; ...
> 2002,603,248,251,47,55,2; ...
> 2005,614,226,222,61,51,54; ...
> 2009,622,239,146,93,68,76; ...
> 2013,631,311,193,0,63,64];

```

Untuk beberapa bagian, kami menggunakan rangkaian nama.

```
>P:=[“CDU/CSU”,“SPD”,“FDP”,“Gr”,“Li”];
```

Mari kita cetak persentasenya dengan baik.

Pertama kita mengekstrak kolom yang diperlukan. Kolom 3 sampai 7 adalah kursi masing-masing partai, dan kolom 2 adalah jumlah kursi seluruhnya. Kolom 1 adalah tahun pemilihan.

```
>BT:=BW[,3:7]; BT:=BT/sum(BT); YT:=BW[,1]’;
```

Kemudian statistiknya kita cetak dalam bentuk tabel. Kami menggunakan nama sebagai header kolom, dan tahun sebagai header untuk baris. Lebar default untuk kolom adalah wc=10, tetapi kami lebih memilih keluaran yang lebih padat. Kolom akan diperluas untuk label kolom, jika perlu.

```
>writetable(BT*100,wc=6,dc=0,>fixed,labc=P,labr=YT)
```

	CDU/CSU	SPD	FDP	Gr	Li
1990	48	36	12	1	3
1994	44	38	7	7	4
1998	37	45	6	7	5
2002	41	42	8	9	0
2005	37	36	10	8	9
2009	38	23	15	11	12
2013	49	31	0	10	10

Perkalian matriks berikut ini menjumlahkan persentase dua partai besar yang menunjukkan bahwa partai-partai kecil berhasil memperoleh suara di parlemen hingga tahun 2009.

```
>BT1:=(BT.[1;1;0;0;0])’*100
```

```
[84.29, 81.25, 81.1659, 82.7529, 72.9642, 61.8971, 79.8732]
```

Ada juga plot statistik sederhana. Kami menggunakananya untuk menampilkan garis dan titik secara bersamaan. Alternatifnya adalah memanggil plot2d dua kali dengan >add.

```
>statplot(YT,BT1,’b’):
```

Tentukan beberapa warna untuk setiap pesta.

```
>CP:=[rgb(0.5,0.5,0.5),red,yellow,green,rgb(0.8,0,0)];
```

Sekarang kita bisa memplot hasil pemilu 2009 dan perubahannya menjadi satu plot dengan menggunakan gambar. Kita dapat menambahkan vektor kolom ke setiap plot.

```
>figure(2,1); ...
```

```
> figure(1); columnsplot(BW[6,3:7],P,color=CP); ...
```

```
> figure(2); columnsplot(BW[6,3:7]-BW[5,3:7],P,color=CP); ...
```

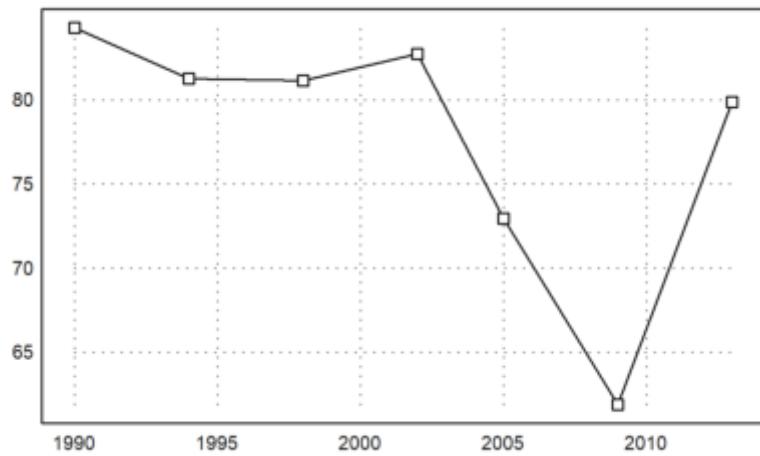
```
> figure(0):
```

Plot data menggabungkan deretan data statistik dalam satu plot.

```
>J:=BW[,1]’; DP:=BW[,3:7]’; ...
```

```
> dataplot(YT,BT’,color=CP); ...
```

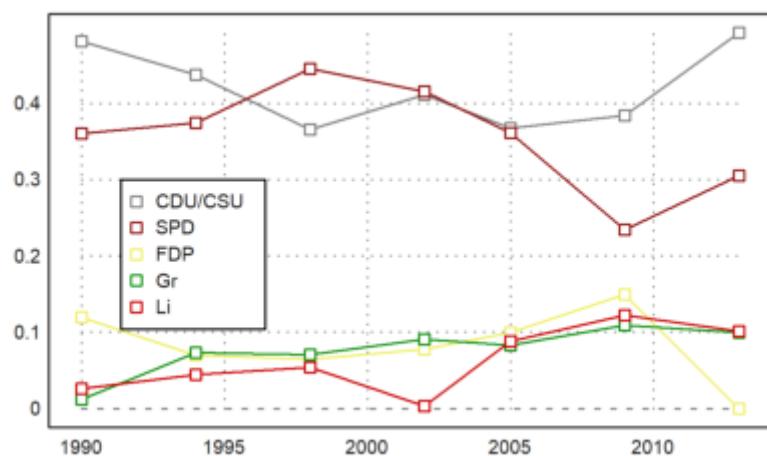
```
> labelbox(P,colors=CP,styles=“[]”,>points,w=0.2,x=0.3,y=0.4):
```



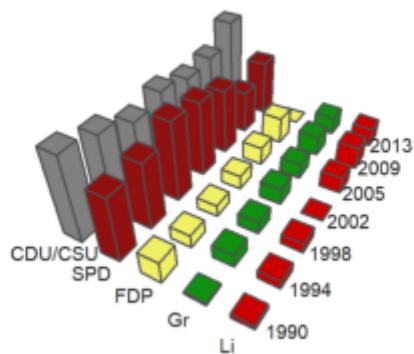
Gambar 7.12 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-039.png



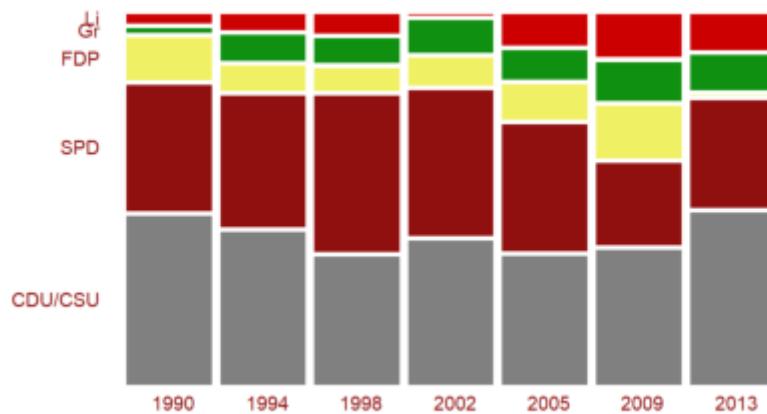
Gambar 7.13 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-040.png



Gambar 7.14 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-041.png



Gambar 7.15 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-042.png



Gambar 7.16 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-043.png

Plot kolom 3D memperlihatkan baris data statistik dalam bentuk kolom. Kami memberikan label untuk baris dan kolom. sudut adalah sudut pandang.

```
>columnsplot3d(BT,scols=P,srows=YT, ...
> angle=30°,ccols=CP):
```

Representasi lainnya adalah plot mosaik. Perhatikan bahwa kolom plot mewakili kolom matriks di sini. Karena panjang label CDU/CSU, kami mengambil jendela yang lebih kecil dari biasanya.

```
>shrinkwindow(>smaller); ...
> mosaicplot(BT',srows=YT,scols=P,color=CP,style="#"); ...
> shrinkwindow():
```

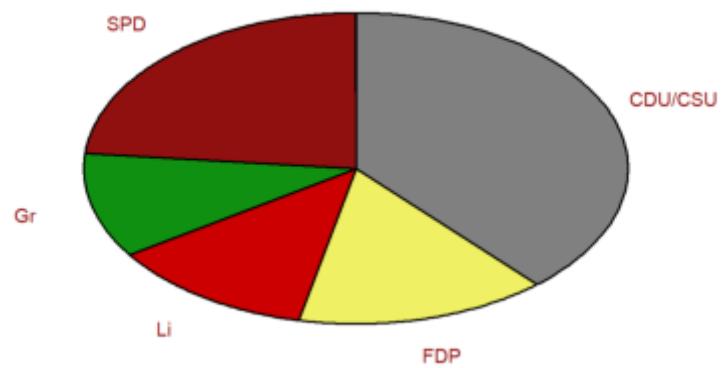
Kita juga bisa membuat diagram lingkaran. Karena hitam dan kuning membentuk koalisi, kami menyusun ulang elemen-elemennya.

```
>i=[1,3,5,4,2]; piechart(BW[6,3:7][i],color=CP[i],lab=P[i]):
```

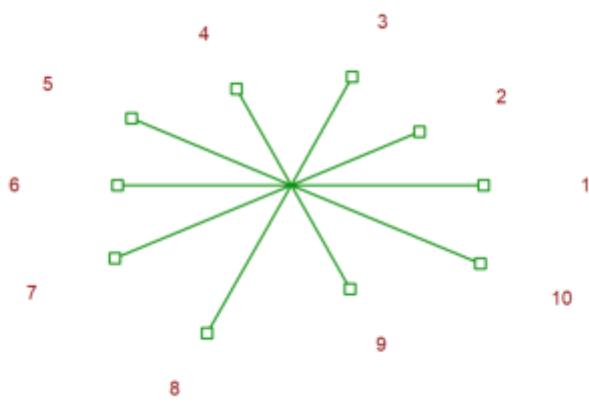
Ini adalah jenis plot lainnya.

```
>starplot(normal(1,10)+4,lab=1:10,>rays):
```

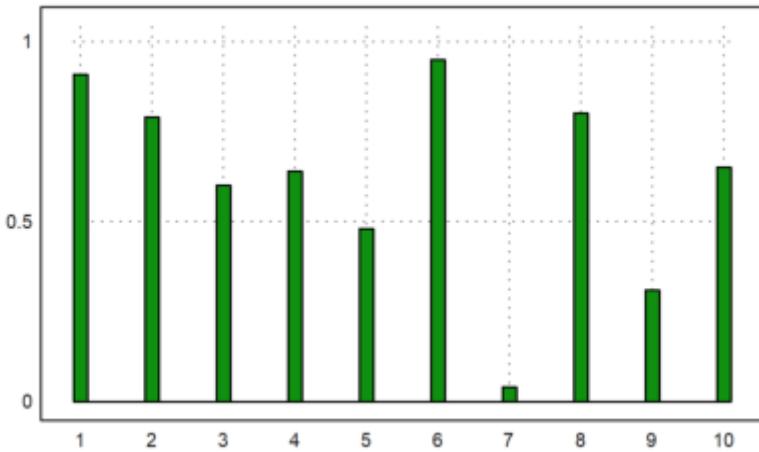
Beberapa plot di plot2d bagus untuk statika. Berikut adalah plot impuls dari data acak, terdistribusi secara seragam di [0,1].



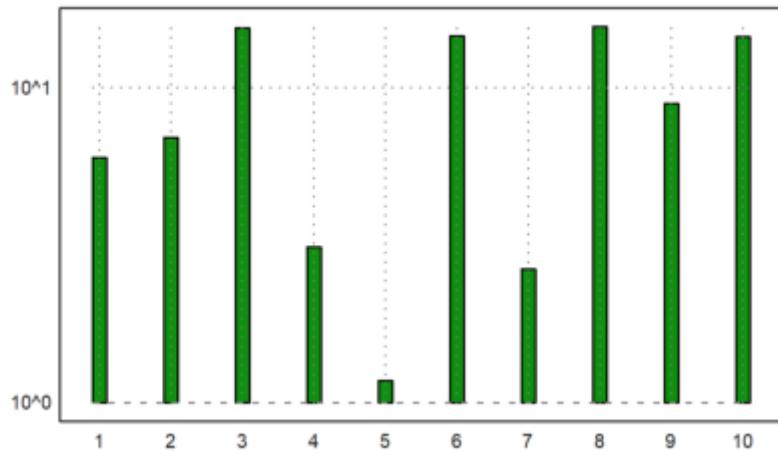
Gambar 7.17 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-044.png



Gambar 7.18 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-045.png



Gambar 7.19 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-046.png



Gambar 7.20 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-047.png

```
>plot2d(makeimpulse(1:10,random(1,10)),>bar):
```

Namun untuk data yang terdistribusi secara eksponensial, kita mungkin memerlukan plot logaritmik.

```
>logimpulseplot(1:10,-log(random(1,10))*10):
```

Fungsi Columnplot() lebih mudah digunakan, karena hanya memerlukan vektor nilai. Selain itu, ia dapat mengatur labelnya ke apa pun yang kita inginkan, kami telah mendemonstrasikannya di tutorial ini.

Ini adalah aplikasi lain, di mana kita menghitung karakter dalam sebuah kalimat dan membuat statistik.

```
>v=strtochar("the quick brown fox jumps over the lazy dog"); ...
```

```
>w=ascii("a"):ascii("z"); x=getmultiplicities(w,v); ...
```

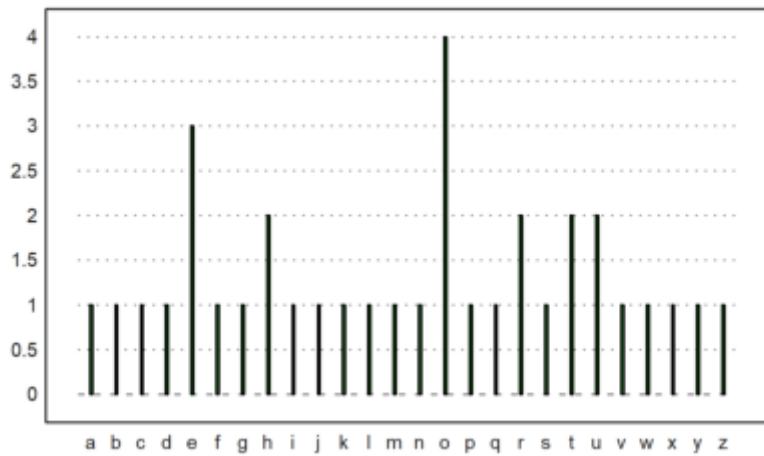
```
>cw=[]; for k=w; cw=cw|char(k); end; ...
```

```
>columnsplot(x,lab=cw,width=0.05):
```

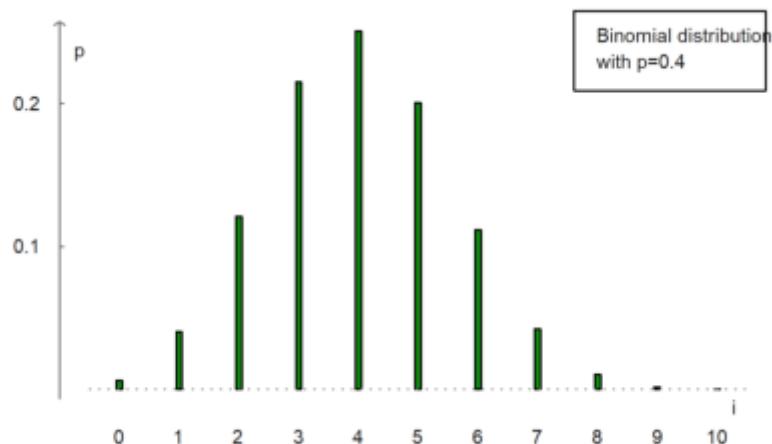
Dimungkinkan juga untuk mengatur sumbu secara manual.

```
>n=10; p=0.4; i=0:n; x=bin(n,i)*p^(i)(n-i); ...
```

```
>columnsplot(x,lab=i,width=0.05,<frame,<grid); ...
```



Gambar 7.21 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-048.png



Gambar 7.22 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-049.png

```
> yaxis(0,0:0.1:1,style="->",>left); xaxis(0,style="."); ...
> label("p",0,0.25), label("i",11,0); ...
> textbox(["Binomial distribution","with p=0.4"]):
```

Berikut ini cara memplot frekuensi bilangan dalam suatu vektor.

Kami membuat vektor bilangan acak bilangan bulat 1 hingga 6.

```
>v:=intrandom(1,10,10)
```

```
[8, 5, 8, 8, 6, 8, 8, 3, 5, 5]
```

Kemudian ekstrak nomor unik di v.

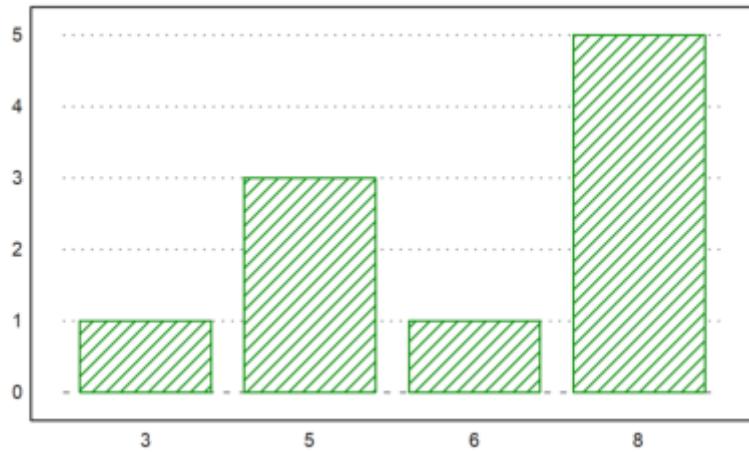
```
>vu:=unique(v)
```

```
[3, 5, 6, 8]
```

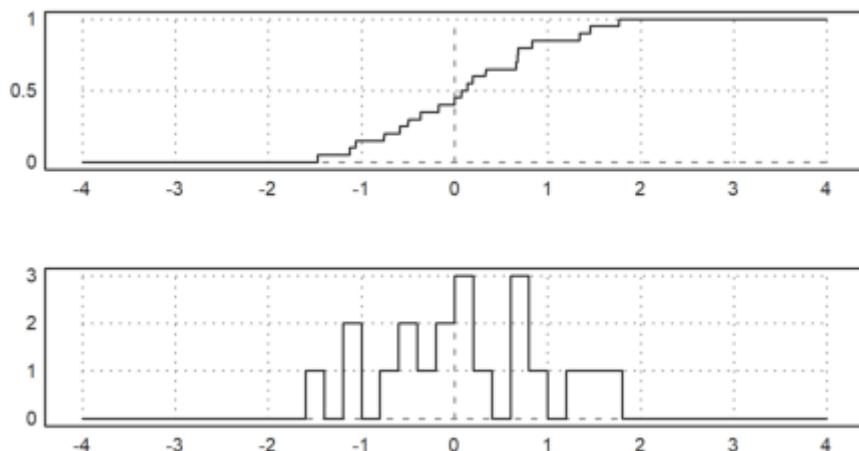
Dan plot frekuensi dalam plot kolom.

```
>columnsplot(getmultiplicities(vu,v),lab=vu,style="/"):
```

Kami ingin mendemonstrasikan fungsi distribusi nilai empiris.



Gambar 7.23 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-050.png



Gambar 7.24 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-051.png

```
>x=normal(1,20);
```

Fungsi empdist(x,vs) memerlukan array nilai yang diurutkan. Jadi kita harus mengurutkan x sebelum kita dapat menggunakaninya.

```
>xs=sort(x);
```

Kemudian kita plot distribusi empiris dan beberapa batang kepadatan ke dalam satu plot. Alih-alih plot batang untuk distribusi kali ini kami menggunakan plot gigi gergaji.

```
>figure(2,1); ...
```

```
> figure(1); plot2d("empdist",-4,4;xs); ...
```

```
> figure(2); plot2d(histo(x,v=-4:0.2:4,<bar)); ...
```

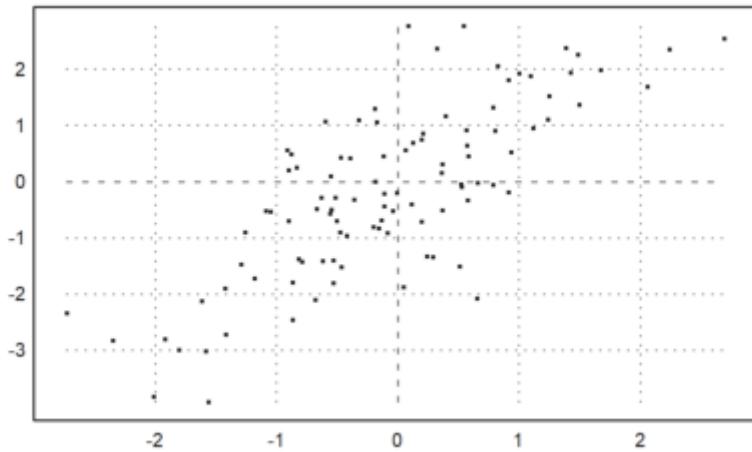
```
> figure(0);
```

Plot sebar mudah dilakukan di Euler dengan plot titik biasa. Grafik berikut menunjukkan bahwa X dan X+Y jelas berkorelasi positif.

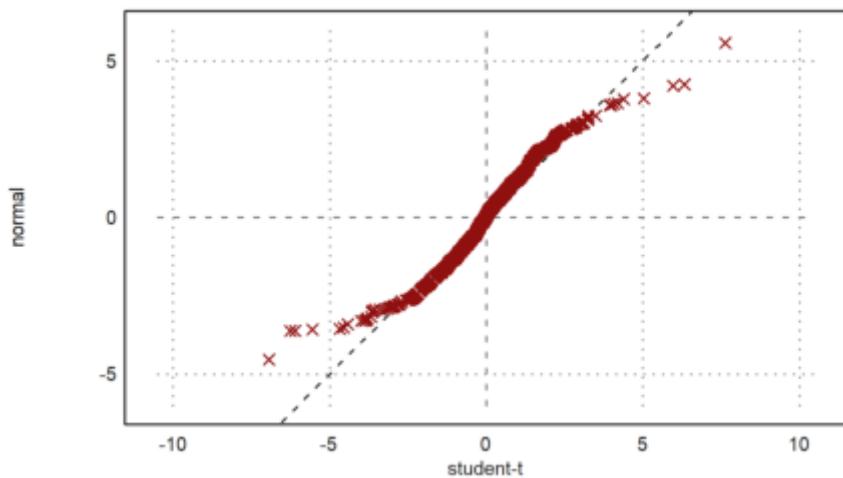
```
>x=normal(1,100); plot2d(x,x+rotright(x),>points,style="..");
```

Seringkali kita ingin membandingkan dua sampel dengan distribusi yang berbeda. Hal ini dapat dilakukan dengan plot kuantil-kuantil.

Untuk pengujinya, kami mencoba distribusi student-t dan distribusi eksponensial.



Gambar 7.25 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-052.png



Gambar 7.26 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-053.png

```
>x=randt(1,1000,5); y=randnormal(1,1000,mean(x),dev(x)); ...
>plot2d("x",r=6,style="-",yl="normal",xl="student-t",>vertical); ...
>plot2d(sort(x),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```

Plot tersebut dengan jelas menunjukkan bahwa nilai terdistribusi normal cenderung lebih kecil di ujung ekstrim.

Jika kita mempunyai dua distribusi yang ukurannya berbeda, kita dapat memperluas distribusi yang lebih kecil atau mengecilkan distribusi yang lebih besar. Fungsi berikut ini baik untuk keduanya. Dibutuhkan nilai median dengan persentase antara 0 dan 1.

```
>function medianexpand (x,n) := median(x,p=linspace(0,1,n-1));
```

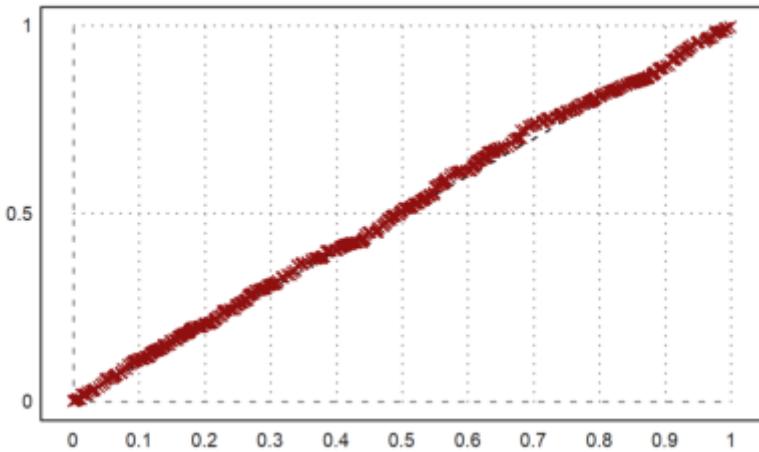
Mari kita bandingkan dua distribusi yang sama.

```
>x=random(1000); y=random(400); ...
```

```
>plot2d("x",0,1,style="-"); ...
>plot2d(sort(medianexpand(x,400)),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```

7.6 Regresi dan Korelasi

Regresi linier dapat dilakukan dengan fungsi polyfit() atau berbagai fungsi fit.



Gambar 7.27 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-054.png

Sebagai permulaan kita menemukan garis regresi untuk data univariat dengan polyfit(x,y,1).

```
>x=1:10; y=[2,3,1,5,6,3,7,8,9,8]; writetable(x'|y',labc=['x','y'])
```

x	y
1	2
2	3
3	1
4	5
5	6
6	3
7	7
8	8
9	9
10	8

Kami ingin membandingkan kecocokan yang tidak berbobot dan berbobot. Pertama koefisien kecocokan linier.

```
>p=polyfit(x,y,1)
```

```
[ 0.733333,  0.812121]
```

Regresi linear dapat ditulis dalam bentuk:

$$y = mx + b$$

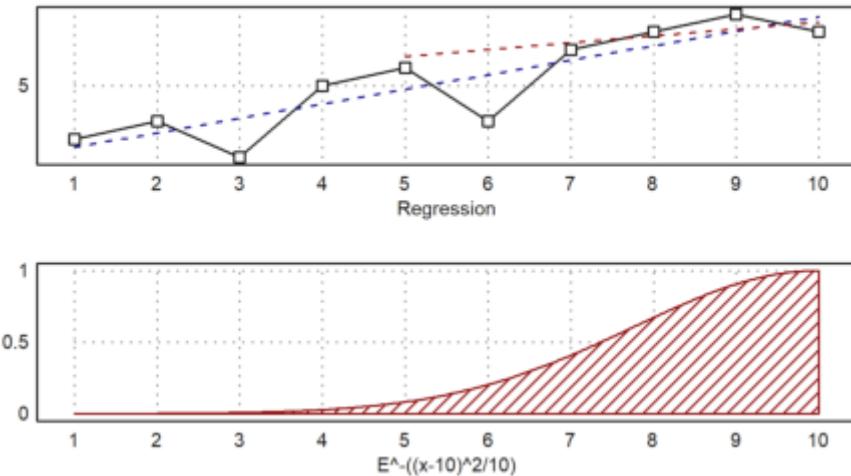
dengan

$$m = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b = \frac{\sum y - m(\sum x)}{n}$$

Kita hitung:

$$n = 10, x = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10], y = [2, 3, 1, 5, 6, 3, 7, 8, 9, 8]$$



Gambar 7.28 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-065.png

$$\sum x = 55$$

$$\sum y = 52$$

$$\sum xy = 353$$

$$\sum x^2 = 385$$

Maka:

$$m = \frac{10(353) - (55)(52)}{10(385) - (55)^2} = \frac{3530 - 2860}{3850 - 3025} = 0.812121$$

$$b = \frac{52 - 0.812121(55)}{10} = 0.733333$$

Jadi, $b, m = 0.733333, 0.812121$

Sekarang koefisien dengan bobot yang menekankan nilai terakhir.

`>w &= "exp(-(x-10)^2/10)"; pw=polyfit(x,y,1,w=w(x))`

[4.71566, 0.38319]

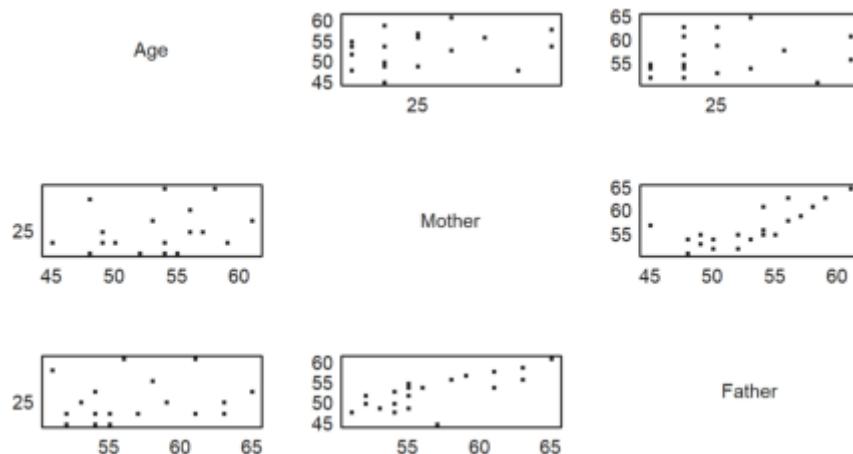
Kami memasukkan semuanya ke dalam satu plot untuk titik dan garis regresi, dan untuk bobot yang digunakan.

```
>figure(2,1); ...
> figure(1); statplot(x,y,"b",xl="Regression"); ...
> plot2d("evalpoly(x,p)",>add,color=blue,style="-"); ...
> plot2d("evalpoly(x,pw)",5,10,>add,color=red,style="-"); ...
> figure(2); plot2d(w,1,10,>filled,style="/",fillcolor=red,xl=w); ...
> figure(0):
```

Contoh lain kita membaca survei siswa, usia mereka, usia orang tua mereka dan jumlah saudara kandung dari sebuah file.

Tabel ini berisi “m” dan “f” di kolom kedua. Kami menggunakan variabel tok2 untuk mengatur terjemahan yang tepat alih-alih membiarkan readtable() mengumpulkan terjemahannya.

```
>{MS,hd}:=readtable("table1.dat",tok2:=[“m”,“f”]); ...
> writetable(MS,labc=hd,tok2:=[“m”,“f”]);
```



Gambar 7.29 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-066.png

Person	Sex	Age	Mother	Father	Siblings
1	m	29	58	61	1
2	f	26	53	54	2
3	m	24	49	55	1
4	f	25	56	63	3
5	f	25	49	53	0
6	f	23	55	55	2
7	m	23	48	54	2
8	m	27	56	58	1
9	m	25	57	59	1
10	m	24	50	54	1
11	f	26	61	65	1
12	m	24	50	52	1
13	m	29	54	56	1
14	m	28	48	51	2
15	f	23	52	52	1
16	m	24	45	57	1
17	f	24	59	63	0
18	f	23	52	55	1
19	m	24	54	61	2
20	f	23	54	55	1

Bagaimana usia bergantung satu sama lain? Kesan pertama muncul dari plot sebar berpasangan.

>scatterplots(tablecol(MS,3:5),hd[3:5]):

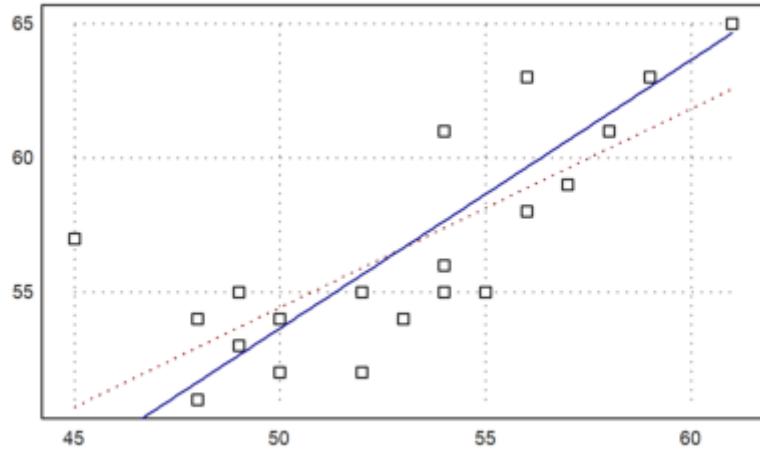
Jelas terlihat bahwa usia ayah dan ibu saling bergantung satu sama lain. Mari kita tentukan dan plot garis regresinya.

>cs:=MS[,4:5]'; ps:=polyfit(cs[1],cs[2],1)

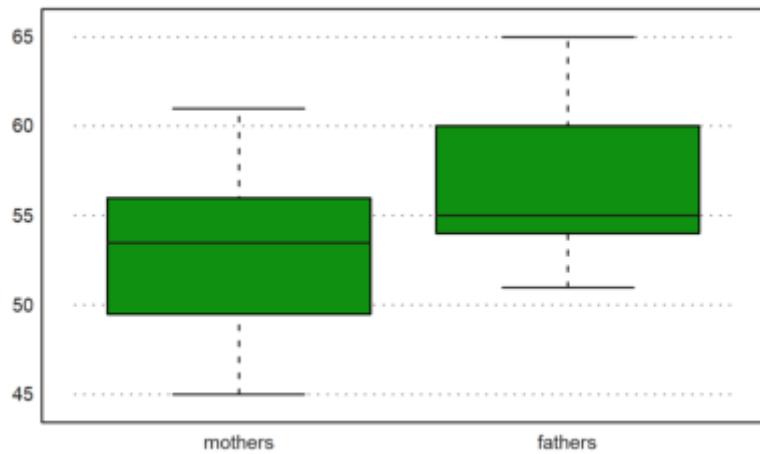
[17.3789, 0.740964]

Ini jelas merupakan model yang salah. Garis regresinya adalah $s=17+0,74t$, dengan t adalah umur ibu dan s adalah umur ayah. Perbedaan usia mungkin sedikit bergantung pada usia, tapi tidak terlalu banyak.

Sebaliknya, kami mencurigai fungsi seperti $s=a+t$. Maka a adalah mean dari s-t. Ini adalah perbedaan usia rata-rata antara ayah dan ibu.



Gambar 7.30 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-067.png



Gambar 7.31 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-068.png

>da:=mean(cs[2]-cs[1])

3 . 65

Mari kita plot ini menjadi satu plot sebar.

>plot2d(cs[1],cs[2],>points); ...

> plot2d("evalpoly(x,ps)",color=red,style=".",>add); ...

> plot2d("x+da",color=blue,>add):

Berikut adalah plot kotak dari dua zaman tersebut. Ini hanya menunjukkan, bahwa usianya berbeda-beda.

>boxplot(cs,[“mothers”,“fathers”]):

Menariknya, perbedaan median tidak sebesar perbedaan mean.

>median(cs[2])-median(cs[1])

1 . 5

Koefisien korelasi menunjukkan korelasi positif.

```
>Koefisien korelasi menunjukkan korelasi positif.correl(cs[1],cs[2]);
```

```
Variable Koefisien not found!
```

```
Error in:
```

```
Koefisien korelasi menunjukkan korelasi positif.correl(cs[1],c ...  
^
```

Korelasi pangkat merupakan ukuran keteraturan yang sama pada kedua vektor. Hal ini juga cukup positif.

```
>rankcorrel(cs[1],cs[2])
```

```
0.758925292358
```

7.7 Membuat Fungsi baru

Tentu saja, bahasa EMT dapat digunakan untuk memprogram fungsi-fungsi baru. Misalnya, kita mendefinisikan fungsi skewness.

```
m adalah rata-rata dari x.
```

```
>function skew (x:vector) ...
```

```
m=mean (x);  
return sqrt (cols (x)) *sum((x-m)^3) / (sum( (x-m)^2 ))^(3/2);  
endfunction
```

Seperti yang Anda lihat, kita dapat dengan mudah menggunakan bahasa matriks untuk mendapatkan implementasi yang sangat singkat dan efisien. Mari kita coba fungsi ini.

```
>data=normal(20); skew(normal(10))
```

```
-0.198710316203
```

Berikut adalah fungsi lainnya, yang disebut koefisien skewness Pearson.

```
>function skew1 (x) := 3*(mean(x)-median(x))/dev(x)
```

```
>skew1(data)
```

```
-0.0801873249135
```

7.8 Simulasi Monte Carlo

Kita simulasikan variabel acak berdistribusi normal 1000-5 sebanyak sejuta kali. Untuk ini, kita gunakan fungsi normal(m,n), yang menghasilkan matriks nilai berdistribusi 0-1, atau normal(n) yang secara default bernilai m=1.

```
>n=1000000; x=normal(n)
```

```
[-1.9943,  1.1795,  1.18591, -0.441316, -0.488192, -0.675366,  
-1.58021,  0.962882, -1.66963, -0.819503, -0.929235,  0.539573,  
-0.606864, -0.56878, -0.087391, -0.404174,  0.0788819,  1.04282,  
0.876296, -0.877162,  0.689615,  1.66396,  1.10287,  1.81334,  
-0.679579, -0.739293, -0.0919214, -0.0516635,  1.68059, -0.8748,  
-0.661822,  1.14053, -0.0725198, -0.653134,  0.338853,  0.158539,  
-1.33566, -1.21098,  0.252185,  0.750436, -0.335005,  0.79995,  
0.237049,  0.10056, -0.909771, -0.896389,  0.807295,  0.420089,
```

```

-2.60022, -0.334883, 0.563393, -1.51976, -0.618486, -0.757591,
-1.5655, -1.14804, -1.62101, -0.767098, 1.41355, 0.28399,
1.31699, 0.325665, 0.123923, -0.301708, 0.224152, 1.61033,
-0.928959, 0.112323, 2.06755, -0.415012, 1.227, -0.392912,
-0.82682, -1.37726, 1.09679, -2.83431, 0.310441, 1.333,
-0.774371, 1.51449, 0.0260218, 0.244161, -1.25954, 0.833535,
-1.05672, -3.99147, -1.70256, 0.620494, -0.98936, -0.868208,
0.344441, 0.926404, 0.00735312, -1.07317, 0.26722, 0.469612,
-1.44652, -0.0850004, -1.22639, -0.120585, -0.498201, 0.793201,
-2.71956, -0.832553, -1.50601, -0.473103, -0.857245, -0.397193,
-0.368307, -1.08578, -1.60682, -0.525828, 0.00660302, -2.44655,
0.761081, -0.0405162, -0.440874, -0.733893, 0.275494, 1.14203,
...
]

```

>n=1000000; x=normal(n)*5+1000

```

[1002.99, 1003.08, 996.596, 990.94, 998.608, 1005.05, 997.111,
1006.2, 1003.62, 988.073, 999.093, 1001.26, 999.921, 994.418,
995.893, 1008.1, 1000.85, 997.523, 997.748, 1000.46, 988.609,
1003.88, 996.944, 994.016, 1008.61, 997.575, 992.025, 993.416,
1003.18, 1003.39, 1001.73, 1005.57, 995.544, 1004.48, 996.802,
1004.15, 1005.39, 997.653, 1002.83, 1005.25, 998.235, 994.648,
998.584, 1000.88, 998.811, 994.607, 995.101, 995.2, 1002.16,
1009.75, 1000.77, 999.994, 1011.51, 1006.36, 990.598, 1007.2,
1000.18, 999.05, 1002.22, 1000.08, 993.234, 1000.81, 1004.78,
1002.42, 993.949, 1002.01, 995.443, 994.59, 1008.39, 1000.62,
995.42, 1000.23, 998.282, 998.84, 992.97, 1000.81, 993.34,
1003.17, 1001.89, 999.305, 1000.63, 992.78, 989.389, 998.162,
1001.79, 1008.18, 1003.34, 1001.35, 1001.08, 998.659, 998.586,
1000.31, 994.955, 994.737, 988.751, 991.572, 995.534, 999.851,
1004.17, 997.659, 993.513, 996.48, 999.944, 996.108, 998.717,
1002.66, 1001.39, 1003.17, 992.563, 998.983, 994.664, 997.407,
1001.87, 999.54, 993.469, 999.279, 1000.47, 996.123, 1000.8,
1003.22, 993.011, 998.241, 1000.07, 1001.6, 1002.9, 1004.22,
1002.22, 1005.54, 999.447, 1002.94, 1003.54, 999.995, 996.819,
1001.89, 1003.54, 1005.62, 1002.17, 998.897, 1005.83, 1006.59,
...
]

```

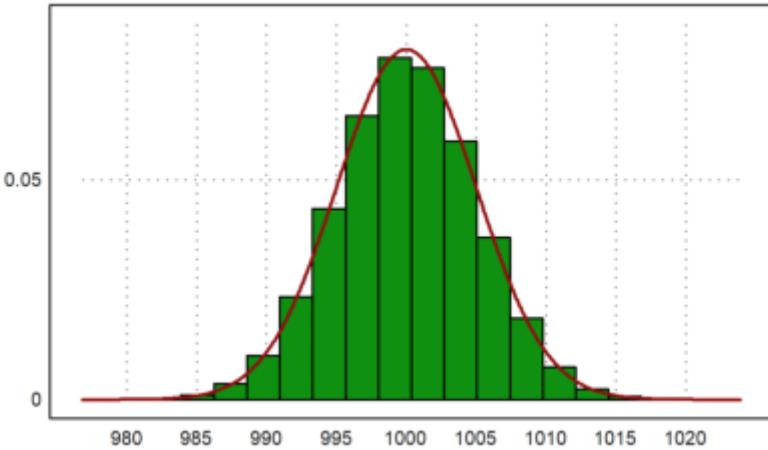
terdapat juga fungsi randnormal(n,m,mean,dev), yang dapat kita gunakan. Fungsi ini mematuhi skema penamaan “rand...” untuk generator acak.

>n=1000000; x=randnormal(1,n,1000,5)

```

[1001.46, 1002.83, 995.424, 1010.42, 993.922, 995.65, 1002.73,
996.528, 998.885, 999.782, 999.165, 996.189, 1007.19, 1002.5,
1000.04, 1001.11, 995.786, 1000.87, 1007.36, 997.776, 989.569,
1000.06, 999.158, 996.89, 1000.07, 1000.75, 1003.66, 995.875,
1003.36, 992.127, 1003.03, 1006.05, 999.733, 999.09, 1005.97,
1003.15, 998.16, 989.205, 1002.45, 996.641, 1008.69, 1006.67,
992.93, 1003.96, 1002.56, 997.29, 995.598, 995.616, 1000.14,
1002.68, 984.552, 1004.04, 1008.83, 994.196, 991.508, 1003.67,
1000.44, 1001.38, 996.971, 1001.32, 998.596, 995.479, 1002.12,
990.516, 997.716, 1008.15, 1000.37, 1001.07, 996.014, 1001.07,
...
]

```



Gambar 7.32 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-069.png

```

1003.76, 996.41, 992.867, 998.441, 993.741, 997.669, 1007.58,
1005.19, 997.211, 1000.75, 994.023, 994.398, 998.096, 994.683,
994.84, 1001.44, 1003.19, 987.72, 1003.07, 1008.01, 1009.52,
1007.39, 997.166, 1007.7, 987.807, 1002.73, 1003.18, 1002.86,
1002.75, 1001.91, 995.783, 998.36, 1002.57, 994.433, 1006.56,
1002.42, 997.431, 1005.47, 992.773, 1007.92, 1007.36, 999.482,
1003.88, 998.68, 1012.77, 1008.83, 1002.04, 1003.13, 1009.78,
997.305, 1003.33, 1001.45, 1004.12, 999.9, 1002.25, 996.054,
994.309, 1006.29, 999.89, 1003.39, 995.42, 990.872, 1000.26,
994.472, 997.125, 998.633, 994.745, 1001.02, 996.873, 1001.29,
...
]

```

10 nilai pertama x adalah

```
>x[1:10]
```

```
[1001.46, 1002.83, 995.424, 1010.42, 993.922, 995.65, 1002.73,
996.528, 998.885, 999.782]
```

Distribusi dapat kita plot dengan flag >distribution dari plot2d.

```
>plot2d(x,>distribution);...
```

```
>plot2d("qnormal(x,1000,5)",color=red,thickness=2,>add):
```

kita juga dapat mengatur jumlah interval untuk distribusi menjadi 100. Kemudian kita akan melihat seberapa dekat kecocokan distribusi yang diamati dan distribusi yang sebenarnya. Bagaimanapun, kita telah menghasilkan satu juta kejadian.

```
>plot2d(x,distribution=100);...
```

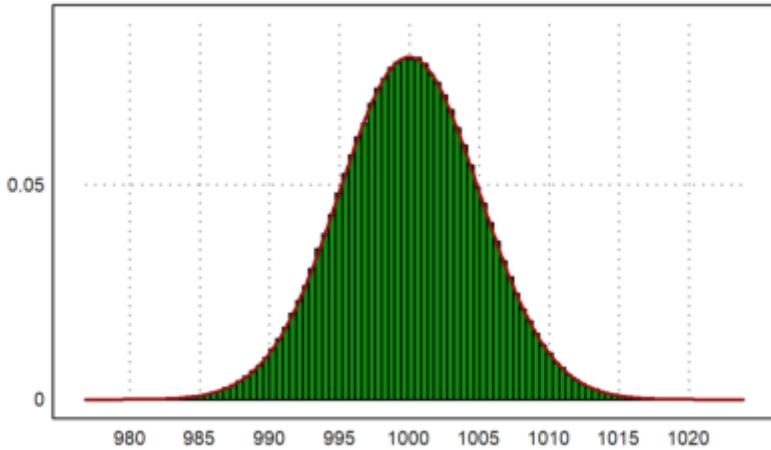
```
>plot2d("qnormal(x,1000,5)",color=red,thickness=2,>add):
```

kita dapat menghitung nilai rata-rata simulasi dan deviasinya harus sangat dekat dengan nilai yang diharapkan.

```
>mean(x), dev(x)
```

```
999.996936044
4.99872526095
```

rumus nilai rata rata



Gambar 7.33 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-070.png

$$mean = \frac{\sum x_i}{n}$$

>xm=sum(x)/n

999.996936044

Rumus simpangan percobaannya (deviasi)

$$deviasi = \sqrt{\frac{\sum(x - xm)^2}{n - 1}}$$

>sqrt(sum((x-xm)^2/(n-1)))

4.99872526095

Perhatikan bahwa $x - xm$ adalah vektor nilai yang dikoreksi, di mana xm dikurangi dari semua elemen vektor x .

Berikut adalah 10 nilai pertama $x - xm$.

>short (x-xm)[1:10]

```
[1.4664,  2.8367, -4.573, 10.419, -6.075, -4.3474, 2.7294,
-3.4693, -1.1123, -0.21472]
```

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat dengan mudah menjawab pertanyaan lainnya. Misalnya, kita ingin menghitung proporsi x yang melebihi 1015.

Ekspresi $x >= 1015$ menghasilkan vektor 1 dan 0. Menjumlahkan vektor ini menghasilkan jumlah kali $x[i] >= 1015$ terjadi.

>sum(x>=1015)/n

0.001339

Probabilitas yang diharapkan dari hal ini dapat dihitung dengan fungsi $normaldis(x)$. sehingga,

$$normaldis(c, m, s) = P(X \leq c)$$

Gambar 7.34 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-074.png

dimana X terdistribusi secara normal m-s.

```
>1-normaldis(1015,1000,5)
```

```
0.00134989803163
```

cara kerja >distribution flag dari plot2d adalah menggunakan fungsi histo(x), yang menghasilkan histogram frekuensi nilai dalam x. Fungsi ini mengembalikan batas interval dan jumlah dalam interval ini. Kami menormalkan jumlah untuk mendapatkan frekuensi.

```
>{t,s}=histo(x,40); plot2d(t,s/n,>bar):
```

Fungsi histo() juga dapat menghitung frekuensi dalam interval yang diberikan.

```
>{t,s}=histo(x,v=[950,980,990,1010,1020,1050]); t, s,
```

```
[950, 980, 990, 1010, 1020, 1050]
[25, 22795, 954608, 22545, 27]
```

hasil tersebut merupakan semua nilai acak yang berada antara 950 dan 1050.

menghitung total jumlah nilai dalam s, yang sama dengan total jumlah elemen dalam x

```
>sum(s)
```

```
1000000
```

kita akan mensimulasikan 1000 kali lemparan 3 dadu, dan menanyakan pembagian jumlahnya.

```
>ds:=sum(intrandom(1000,3,6)); fs=getmultiplicities(3:18,ds)
```

```
[3, 18, 23, 45, 65, 106, 108, 137, 136, 133, 88, 65, 36,
20, 11, 6]
```

kita akan plot hasil tersebut

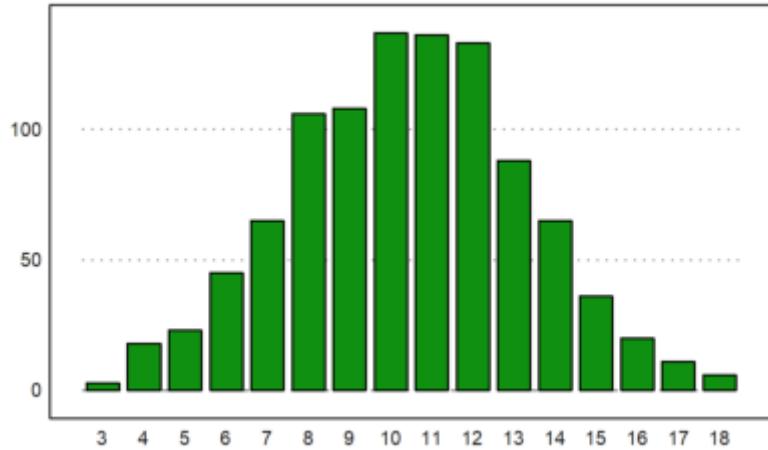
```
>columnsplot(fs,lab=3:18):
```

kita akan menggunakan rekursi tingkat lanjut.

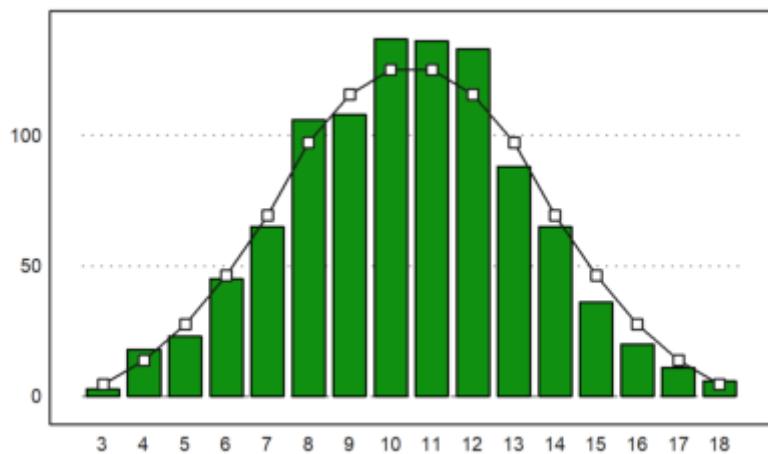
Fungsi berikut menghitung banyaknya cara bilangan k dapat direpresentasikan sebagai jumlah dari n bilangan dalam rentang 1 sampai m.

```
>function map countways (k; n, m) ...
```

```
if n==1 then return k>=1 && k<=m
else
  sum=0;
  loop 1 to m; sum=sum+countways (k-#,n-1,m); end;
  return sum;
end;
endfunction
```



Gambar 7.35 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-075.png



Gambar 7.36 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-076.png

Berikut hasil pelemparan dadu sebanyak lima kali.

>countways(5:25,5,5)

```
[1, 5, 15, 35, 70, 121, 185, 255, 320, 365, 381, 365, 320,
255, 185, 121, 70, 35, 15, 5, 1]
```

>cw=countways(3:18,3,6)

```
[1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3,
1]
```

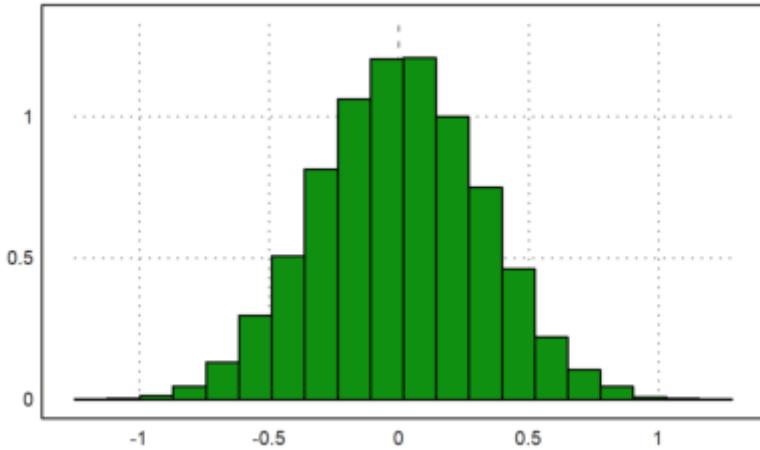
Kita akan menambahkan nilai yang diharapkan ke plot.

>plot2d(cw/6^3*1000,>add); plot2d(cw/6^3*1000,>points,>add);

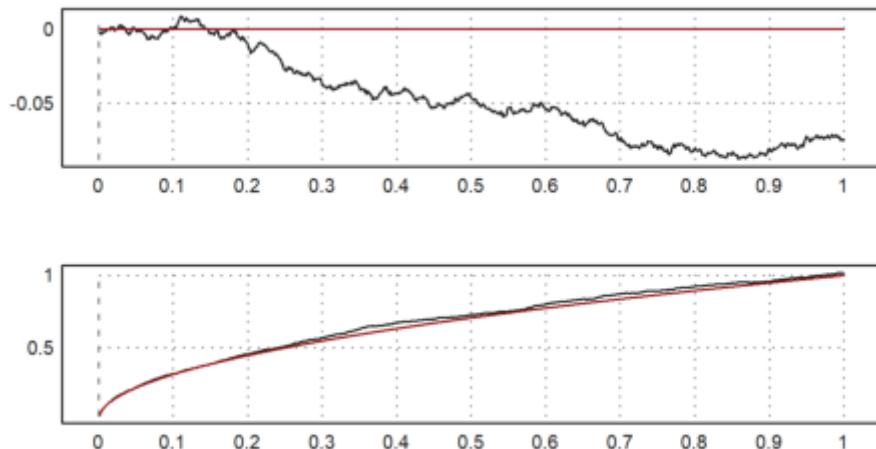
Untuk simulasi lain, deviasi nilai rata-rata n 0-1-variabel acak terdistribusi normal adalah $1/\sqrt{n}$.

>longformat; 1/sqrt(10)

0.316227766017



Gambar 7.37 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-077.png



Gambar 7.38 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-078.png

Mari kita periksa ini dengan simulasi. Kami menghasilkan 10.000 kali 10 vektor acak.

>M=normal(10000,10); dev(mean(M)')

0.317942172219

>plot2d(mean(M)',>distribution):

Median dari 10 bilangan acak berdistribusi normal 0-1 mempunyai deviasi yang lebih besar.

Karena kita dapat dengan mudah menghasilkan jalan acak, kita dapat mensimulasikan proses Wiener. Kami mengambil 1000 langkah dari 1000 proses. Kami kemudian memplot deviasi standar dan rata-rata langkah ke-n dari proses ini bersama dengan nilai yang diharapkan berwarna merah.

```
>n=1000; m=1000; M=cumsum(normal(n,m)/sqrt(m)); ...
>t=(1:n)/n; figure(2,1); ...
>figure(1); plot2d(t,mean(M)'); plot2d(t,0,color=red,>add); ...
>figure(2); plot2d(t,dev(M)'); plot2d(t,sqrt(t),color=red,>add); ...
>figure(0):
```

7.9 uji chi-kuadrat

uji chi-kuadrat adalah alat penting dalam statistik. Di Euler, banyak tes yang diterapkan. Semua pengujian ini mengembalikan kesalahan yang kita terima jika kita menolak hipotesis nol.

Misalnya, kami menguji lemparan dadu untuk distribusi yang seragam. Pada 600 kali lemparan, kami mendapatkan nilai berikut, yang kami masukkan ke dalam uji chi-kuadrat.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(100,6)')
```

0.498830517952

Ini adalah nilai p-value dari uji chi-kuadrat

Uji chi-kuadrat juga memiliki mode yang menggunakan simulasi Monte Carlo untuk menguji statistiknya, menggunakan Parameter $>p$ menafsirkan vektor y sebagai vektor probabilitas.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(1/6,6)',>p,>montecarlo)
```

0.505

Ini adalah p-value dari uji chi-kuadrat menggunakan pendekatan Monte Carlo. Dengan simulasi Monte Carlo, kita memperoleh p-value yang mirip dengan uji chi-kuadrat standar (0,4988 di uji pertama)

Selanjutnya kita menghasilkan 1000 lemparan dadu menggunakan generator angka acak, dan melakukan tes yang sama.

```
>n=1000; t=random([1,n*6]); chitest(count(t*6,6),dup(n,6)')
```

0.558957010759

Mari kita uji nilai rata-rata 100 dengan uji-t.

```
>s=200+normal([1,100])*10; ...
```

```
>ttest(mean(s),dev(s),100,200)
```

0.25577040307

Fungsi `ttest()` memerlukan nilai mean, deviasi, jumlah data, dan nilai mean yang akan diuji.

Sekarang mari kita periksa dua pengukuran untuk mean yang sama. Kami menolak hipotesis bahwa keduanya mempunyai mean yang sama, jika hasilnya $<0,05$.

```
>tcomparedata(normal(1,10),normal(1,10))
```

0.4848094938

Jika kita menambahkan bias pada satu distribusi, kita akan mendapatkan lebih banyak penolakan. Ulangi simulasi ini beberapa kali untuk melihat efeknya.

```
>tcomparedata(normal(1,10),normal(1,10)+2)
```

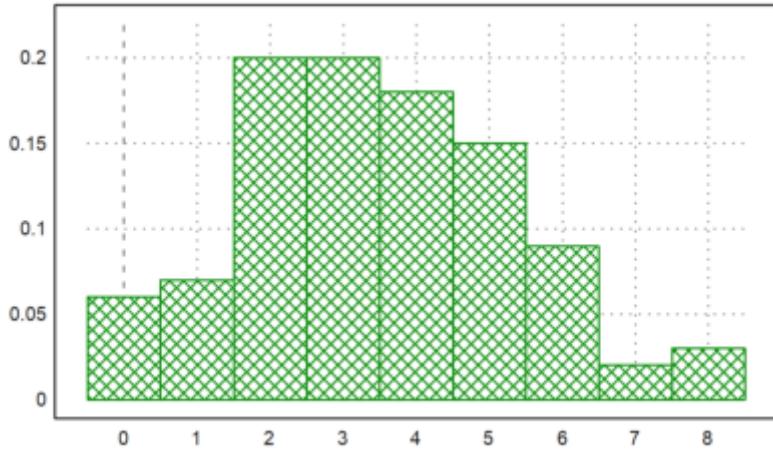
0.000205842407976

Menambah nilai 2 ke salah satu distribusi menyebabkan p-value menjadi sangat kecil.

Pada contoh berikutnya, kita membuat 20 lemparan dadu acak sebanyak 100 kali dan menghitung yang ada di dalamnya. Rata-rata harus ada $20/6=3,3$.

```
>R=random(100,20); R=sum(R*6<=1)'; mean(R)
```

3.46



Gambar 7.39 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-079.png

Sekarang kita bandingkan jumlah satuan dengan distribusi binomial. Pertama kita plot distribusinya.

```
>plot2d(R,distribution=max(R)+1,even=1,style="\\'"):
```

kita akan Menghitung frekuensi kemunculan setiap jumlah angka “1” dalam 20 lemparan dadu acak yang telah dilakukan 100 kali

```
>t=count(R,21);
```

Kemudian kami menghitung nilai yang diharapkan.

```
>n=0:20; b=bin(20,n)*(1/6)^n^(5/6)(20-n)*100;
```

Kita harus mengumpulkan beberapa angka untuk mendapatkan kategori yang cukup besar.

```
>t1=sum(t[1:2])|t[3:7]|sum(t[8:21]); ...
```

```
>b1=sum(b[1:2])|b[3:7]|sum(b[8:21]);
```

Uji chi-square menolak hipotesis bahwa distribusi kita merupakan distribusi binomial, jika hasilnya <0,05.

```
>chitest(t1,b1)
```

0.855843823605

Contoh berikut berisi hasil dua kelompok orang (misalnya laki-laki dan perempuan) yang memilih satu dari enam partai.

```
>A=[23,37,43,52,64,74;27,39,41,49,63,76]; ...
```

```
>writetable(A,wc=6,labr=[“m”,“f”],labc=1:6)
```

	1	2	3	4	5	6
m	23	37	43	52	64	74
f	27	39	41	49	63	76

Kita akan menguji independensi suara dari jenis kelamin.

```
>tablettest(A)
```

0.990701632326

Berikut ini adalah tabel yang diharapkan, jika kita mengasumsikan frekuensi pemungutan suara yang diamati.

```
>writetable(expectedtable(A),wc=6,dc=1,labr=[“m”,“f”],labc=1:6)
```

	1	2	3	4	5	6
m	24.9	37.9	41.9	50.3	63.3	74.7
f	25.1	38.1	42.1	50.7	63.7	75.3

Kita dapat menghitung koefisien kontingensi yang dikoreksi. Karena sangat mendekati 0, kami menyimpulkan bahwa pemungutan suara tidak bergantung pada jenis kelamin.

>contingency(A)

0.0427225484717

7.10 uji F

Selanjutnya kita menggunakan analisis varians (uji F) untuk menguji tiga sampel data yang berdistribusi normal untuk nilai mean yang sama. Metode tersebut disebut ANOVA (analisis varians). Di Euler, fungsi varanalysis() digunakan.

>x1=[109,111,98,119,91,118,109,99,115,109,94]; mean(x1),

106.545454545

>x2=[120,124,115,139,114,110,113,120,117]; mean(x2),

119.111111111

>x3=[120,112,115,110,105,134,105,130,121,111]; mean(x3)

116.3

>varanalysis(x1,x2,x3)

0.0138048221371

Dengan p-value sebesar 0.0138 (1,38%), kita bisa menolak hipotesis bahwa ketiga sampel memiliki mean yang sama pada tingkat signifikansi 5% (0.05) dan bahkan pada tingkat signifikansi 1% (0.01). Artinya, terdapat perbedaan yang signifikan antara mean dari setidaknya satu sampel.

Ada juga uji median, yang menolak sampel data dengan distribusi rata-rata yang berbeda, menguji median dari sampel yang disatukan.

>a=[56,66,68,49,61,53,45,58,54]

[56, 66, 68, 49, 61, 53, 45, 58, 54]

>b=[72,81,51,73,69,78,59,67,65,71,68,71]

[72, 81, 51, 73, 69, 78, 59, 67, 65, 71, 68, 71]

>mediantest(a,b)

0.0241724220052

Tes kesetaraan lainnya adalah tes peringkat. Ini jauh lebih tajam daripada tes median.

>ranktest(a,b)

0.00199969612469

Pada contoh berikut, kedua distribusi mempunyai mean yang sama.

```
>ranktest(random(1,100),random(1,50)*3-1)
```

0.162380065554

ini menunjukkan bahwa perbedaan tidak cukup signifikan pada tingkat signifikansi 5%, sehingga hipotesis bahwa kedua distribusi memiliki median yang sama tidak dapat ditolak.

Sekarang mari kita coba mensimulasikan dua perlakuan a dan b yang diterapkan pada orang yang berbeda.

```
>a=[8.0,7.4,5.9,9.4,8.6,8.2,7.6,8.1,6.2,8.9];
```

```
>b=[6.8,7.1,6.8,8.3,7.9,7.2,7.4,6.8,6.8,8.1];
```

Tes signum memutuskan, apakah a lebih baik dari b.

```
>signtest(a,b)
```

0.0546875

Ini kesalahan yang terlalu besar untuk menolak hipotesis. Kita tidak dapat menolak bahwa a sama baiknya dengan b, Karena $p > 0.05$.

Uji Wilcoxon lebih tajam dibandingkan uji ini, namun mengandalkan nilai kuantitatif perbedaannya.

```
>wilcoxon(a,b)
```

0.0296680599405

Mari kita coba dua tes lagi menggunakan rangkaian yang dihasilkan.

```
>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20)-1)
```

9.45060349657e-05

ini menunjukkan bahwa ada perbedaan signifikan antara kedua sampel pada tingkat signifikansi 5%.

```
>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20))
```

0.559353645673

hasil ini jauh di atas 0.05, sehingga kita tidak bisa menolak hipotesis bahwa kedua sampel berasal dari distribusi yang sama.

7.11 Angka Acak

Berikut ini adalah pengujian pembangkit bilangan acak. Euler menggunakan generator yang sangat bagus, jadi kita tidak perlu mengharapkan adanya masalah.

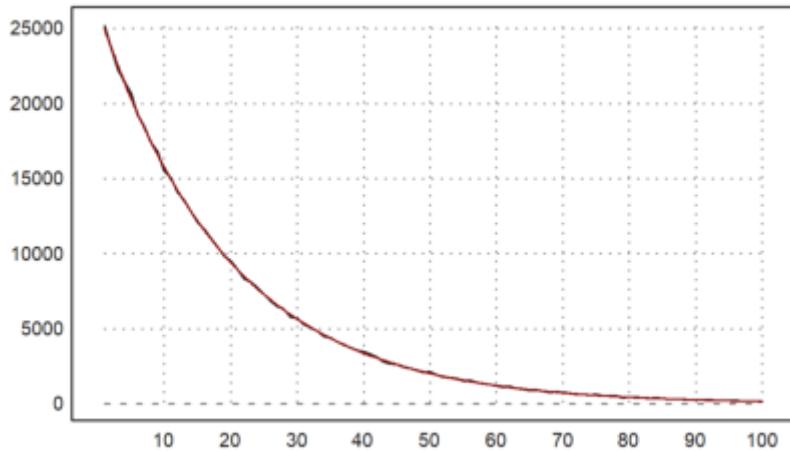
Pertama kita menghasilkan sepuluh juta angka acak di [0,1].

```
>n:=10000000; r:=random(1,n);
```

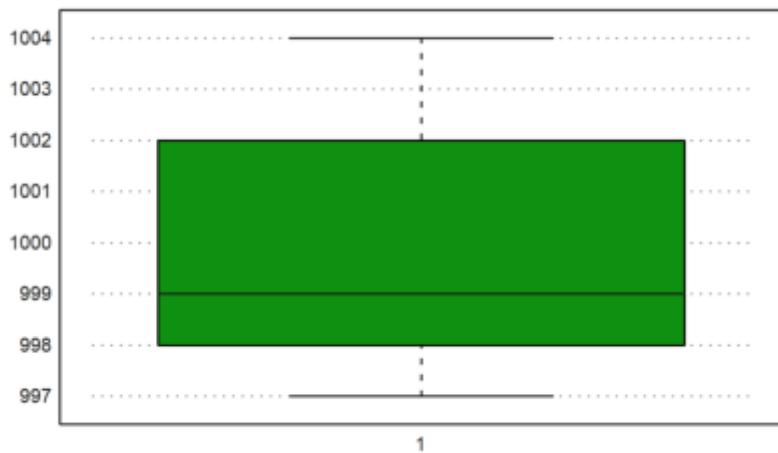
Selanjutnya kita hitung jarak antara dua angka yang kurang dari 0,05.

```
>a:=0.05; d:=differences(nonzeros(r<a));
```

Terakhir, kami memplot berapa kali, setiap jarak terjadi, dan membandingkannya dengan nilai yang diharapkan.



Gambar 7.40 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-080.png



Gambar 7.41 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-081.png

```
>m=getmultiplicities(1:100,d); plot2d(m); ...
>plot2d("n*(1-a)^(x-1)*a^2",color=red,>add):
```

Hapus datanya.

>remvalue n;

Kami ingin menghitung nilai rata-rata dan simpangan baku yang diukur.

>M=[1000,1004,998,997,1002,1001,998,1004,998,997]; ...

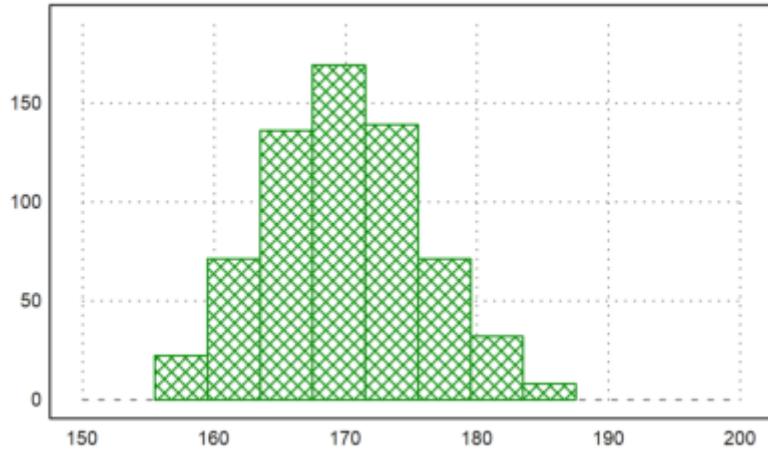
> mean(M), dev(M),

```
999.9
2.72641400622
```

Kita dapat membuat diagram kotak dan kumis untuk data tersebut. Dalam kasus kita, tidak ada outlier.

>boxplot(M):

Kami menghitung probabilitas bahwa suatu nilai lebih besar dari 1005, dengan asumsi nilai terukur dan distribusi normal.



Gambar 7.42 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-082.png

Semua fungsi untuk distribusi dalam Euler diakhiri dengan ...dis dan menghitung distribusi probabilitas kumulatif (CPF).

Kami mencetak hasilnya dalam % dengan akurasi 2 digit menggunakan fungsi cetak.

```
>print((1-normaldis(1005,mean(M),dev(M)))*100,2,unit=" %")
```

3.07 %

Untuk contoh berikutnya, kami mengasumsikan jumlah pria berikut dalam rentang ukuran tertentu.

```
>r=155.5:4:187.5; v=[22,71,136,169,139,71,32,8];
```

Berikut adalah plot distribusinya.

```
>plot2d(r,v,a=150,b=200,c=0,d=190,bar=1,style=" \"/"):
```

Kita dapat memasukkan data mentah tersebut ke dalam tabel.

Tabel adalah metode untuk menyimpan data statistik. Tabel kita harus berisi tiga kolom: Awal rentang, akhir rentang, jumlah orang dalam rentang.

Tabel dapat dicetak dengan tajuk. Kita menggunakan vektor string untuk mengatur tajuk.

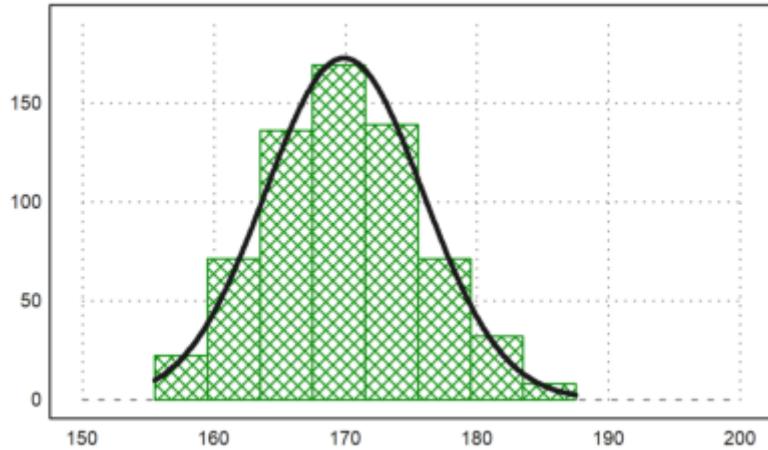
```
>T:=r[1:8]' | r[2:9]' | v'; writetable(T,labc=["from","to","count"])
```

from	to	count
155.5	159.5	22
159.5	163.5	71
163.5	167.5	136
167.5	171.5	169
171.5	175.5	139
175.5	179.5	71
179.5	183.5	32
183.5	187.5	8

Jika kita memerlukan nilai rata-rata dan statistik ukuran lainnya, kita perlu menghitung titik tengah rentang. Kita dapat menggunakan dua kolom pertama tabel kita untuk ini.

```
>(T[,1]+T[,2])/2
```

157.5
161.5



Gambar 7.43 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-083.png

165.5
169.5
173.5
177.5
181.5
185.5

Namun lebih mudah untuk melipat rentang dengan vektor [1/2,1/2].

>l=fold(r,[0.5,0.5])

[157.5, 161.5, 165.5, 169.5, 173.5, 177.5, 181.5, 185.5]

Sekarang kita dapat menghitung rata-rata dan deviasi sampel dengan frekuensi yang diberikan.

>{m,d}=meandev(l,v); m, d,

169.901234568

5.98912964449

Mari kita tambahkan distribusi normal nilai-nilai tersebut ke plot.

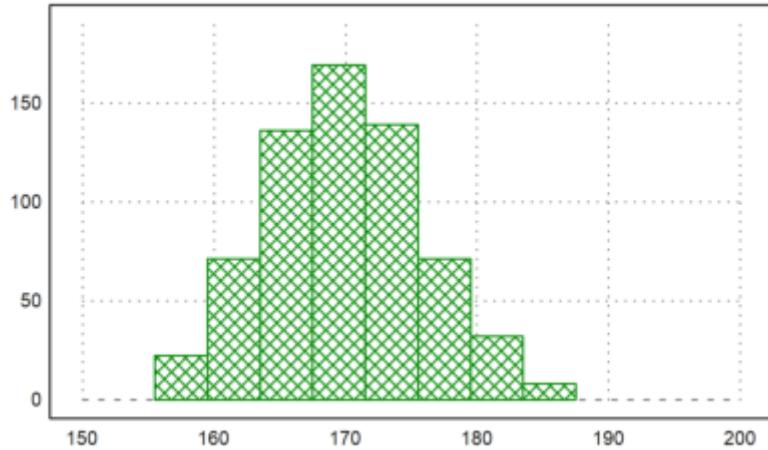
>plot2d("qnormal(x,m,d)*sum(v)*4", ...

>xmin=min(r),xmax=max(r),thickness=3,add=1):

7.12 LATIHAN

1. Diberikan data pengukuran tinggi badan pada kelas matematika B adalah sebagai berikut:

Rentang Tinggi (cm)	Jumlah Orang
155.5 – 159.5	22
159.5 – 163.5	71
163.5 – 167.5	136
167.5 – 171.5	169
171.5 – 175.5	139
175.5 – 179.5	71
179.5 – 183.5	32
183.5 – 187.5	8



Gambar 7.44 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-084.png

- a.) Hitung rata-rata dan deviasi standar dari distribusi tinggi badan ini.
- b.) Plot distribusi frekuensi data (diagram batang).
- c.) Tambahkan kurva distribusi normal untuk dibandingkan dengan data.

>r = 155.5:4:187.5 //Rentang ukuran tinggi badan

[155.5, 159.5, 163.5, 167.5, 171.5, 175.5, 179.5, 183.5, 187.5]

>v = [22, 71, 136, 169, 139, 71, 32, 8] //Jumlah orang dalam tiap rentang

[22, 71, 136, 169, 139, 71, 32, 8]

>l=fold(r,[0.5,0.5]) //Menghitung titik tengah dari setiap rentang tinggi badan

[157.5, 161.5, 165.5, 169.5, 173.5, 177.5, 181.5, 185.5]

>{m,d}=meandev(l,v); m, d, //Hitung rata-rata dan deviasi standar

169.901234568

5.98912964449

>plot2d(r, v, a=150, b=200, c=0, d=190, bar=1, style="\\");

>plot2d("qnormal(x, m, d) * sum(v) * 4", ...

>xmin=min(r), xmax=max(r), thickness=3, add=1):

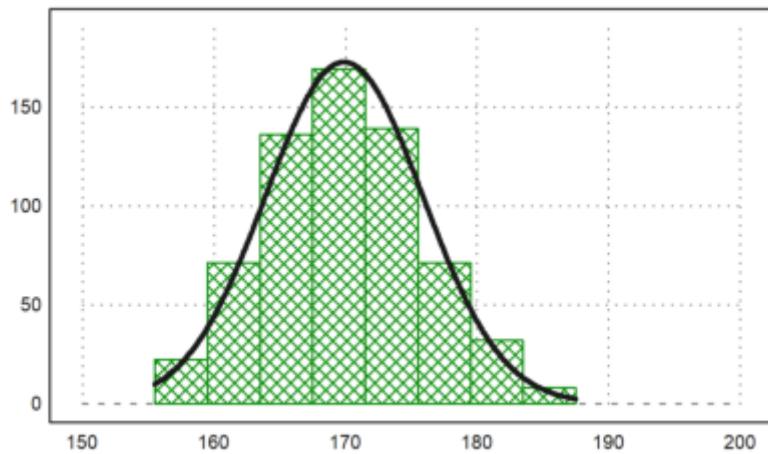
>&remvalue();

2. Sebuah survei dilakukan untuk mengetahui jumlah jam belajar siswa SMA dalam satu minggu. Berikut data jam belajar dari 10 siswa: 8, 10, 7, 6, 9, 10, 11, 9, 8, 12.

- a) Hitung nilai rata-rata dari data di atas
- b) Tentukan median dari data tersebut.

>M=[8,10,7,6,9,10,11,9,8,12];

>mean(M)



Gambar 7.45 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-085.png

9

>median(M)

9

3. Anda diberikan data yang menunjukkan jumlah penjualan barang selama 12 bulan dalam satu tahun berturut-turut 120, 135, 150, 160, 170, 180, 190, 210, 200, 220, 230, 240.

- Buatlah plot garis dari data penjualan barang tersebut.
- Hitung rata-rata penjualan perbulan.

>X=[120,135,150,160,170,180,190,210,200,220,230,240]

[120, 135, 150, 160, 170, 180, 190, 210, 200, 220, 230, 240]

>Y=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]

[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]

>statplot(Y,X,"l"):

>mean(X)

183.75

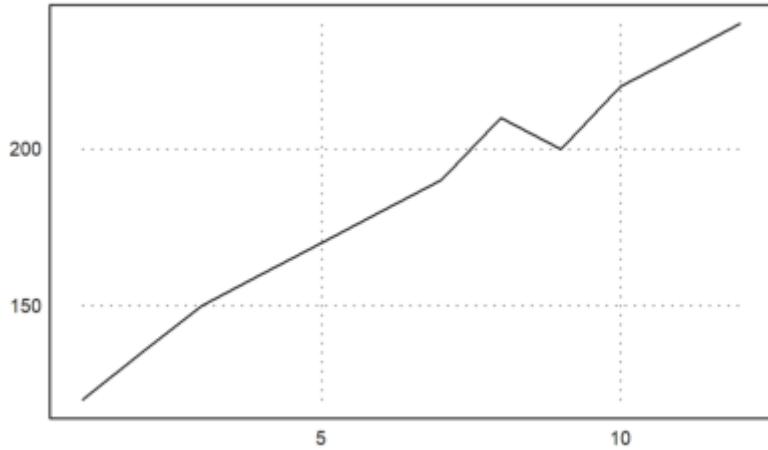
7.13 Pengantar untuk Pengguna Proyek R

Jelasnya, EMT tidak bersaing dengan R sebagai paket statistik. Namun, ada banyak prosedur dan fungsi statistik yang tersedia di EMT juga. Jadi EMT dapat memenuhi kebutuhan dasar. Bagaimanapun, EMT hadir dengan paket numerik dan sistem aljabar komputer.

Notebook ini cocok untuk Anda yang sudah familiar dengan R, namun perlu mengetahui perbedaan sintaksis EMT dan R. Kami mencoba memberikan gambaran umum tentang hal-hal yang sudah jelas dan kurang jelas yang perlu Anda ketahui.

Selain itu, kami mencari cara untuk bertukar data antara kedua sistem.

Note that this is a work in progress.



Gambar 7.46 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-086.png

7.14 Sintaks Dasar

Hal pertama yang Anda pelajari di R adalah membuat vektor. Dalam EMT, perbedaan utamanya adalah operator : dapat mengambil ukuran langkah. Selain itu, ia mempunyai daya ikat yang rendah.

```
>n:=10; 0:n/20:n-1
```

```
[0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 5.5, 6, 6.5,
7, 7.5, 8, 8.5, 9]
```

```
>x:=[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]; [x,0,x]
```

```
[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7, 0, 10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]
```

Operator titik dua dengan ukuran langkah EMT digantikan oleh fungsi seq() di R. Kita dapat menulis fungsi ini di EMT.

```
>function seq(a,b,c) := a:b:c; ...
>seq(0,-0.1,-1)
```

```
[0, -0.1, -0.2, -0.3, -0.4, -0.5, -0.6, -0.7, -0.8, -0.9, -1]
```

```
>function seq(a,b,c) := a:b:c; ...
>seq(0,-0.5,-5)
```

```
[0, -0.5, -1, -1.5, -2, -2.5, -3, -3.5, -4, -4.5, -5]
```

```
>function rep(x:vector,n:index) := flatten(dup(x,n)); ...
>rep(x,2)
```

```
[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7, 10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]
```

Fungsi rep() dari R tidak ada di EMT. Untuk masukan vektor dapat dituliskan sebagai berikut.

Perhatikan bahwa “=” atau “:=” digunakan untuk tugas. Operator “->” digunakan untuk satuan dalam EMT.

```
>125km -> "miles"
```

```
77.6713990297 miles
```

Operator “`<-`” untuk penugasan memang bukan ide yang baik untuk R.
tetapi di EMT operator “`<-`” itu bukan penugasan melainkan perbandingan
Berikut ini akan membandingkan a dan -4 di EMT.

```
>a:=2; a<-4
```

```
0
```

EMT dan R memiliki vektor bertipe boolean. Namun dalam EMT, angka 0 dan 1 digunakan untuk mewakili salah dan benar. Di R, nilai benar dan salah tetap bisa digunakan dalam aritmatika biasa seperti di EMT.

```
>x<5, %*x
```

```
[0, 0, 1, 0, 0]  
[0, 0, 3.1, 0, 0]
```

EMT memunculkan kesalahan atau menghasilkan NAN tergantung pada tanda “kesalahan”.

```
>errors off; 0/0, isNaN(sqrt(-1)), errors on;
```

```
NAN
```

```
1
```

Stringnya sama di R dan EMT. Keduanya berada di lokal saat ini, bukan di Unicode.

Di R ada paket untuk Unicode. Di EMT, string dapat berupa string Unicode. String unicode dapat diterjemahkan ke pengkodean lokal dan sebaliknya. Selain itu, u”...” dapat berisi entitas HTML.

```
>u”© René Grothmann”
```

```
© René Grothmann
```

karakter khusus (hak cipta © dan karakter aksen é),

```
>chartoutf([480])
```

Berikut ini mungkin tidak ditampilkan dengan benar pada sistem sebagai A dengan titik dan garis di atasnya. Itu tergantung pada font yang Anda gunakan.

Penggabungan string dilakukan dengan “`+`” atau “`|`”. Penggabungan ini akan menghasilkan string tunggal, dan angka yang digabungkan akan dikonversi otomatis ke format string. Ini dapat mencakup angka, yang akan dicetak dalam format saat ini.

```
>“pi =”+pi
```

```
pi = 3.14159265359
```

7.15 Pengindeksan

Seringkali, ini akan berfungsi seperti di R.

Namun EMT akan menafsirkan indeks negatif dari belakang vektor, sementara R menafsirkan `x[n]` sebagai x tanpa elemen ke-n.

```
>x, x[1:3], x[-2]
```

```
[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]
[10.4, 5.6, 3.1]
6.4
```

```
>x, x[1:5], x[-3]
```

```
[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]
[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]
3.1
```

Untuk meniru perilaku R di EMT, kita dapat menggunakan fungsi drop(x,n)
>drop(x,2)

```
[10.4, 3.1, 6.4, 21.7]
```

Vektor logika tidak diperlakukan berbeda sebagai indeks di EMT, berbeda dengan R. Anda perlu mengekstrak elemen bukan nol terlebih dahulu di EMT.

```
>x, x>5, x[nonzeros(x>5)]
```

```
[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]
[1, 1, 0, 1, 1]
[10.4, 5.6, 6.4, 21.7]
```

Sama seperti di R, vektor indeks dapat berisi pengulangan.

```
[10.4, 5.6, 5.6, 10.4]
```

7.16 Tipe Data

EMT memiliki lebih banyak tipe data tetap daripada R. Jelasnya, di R terdapat vektor yang berkembang. Anda dapat mengatur vektor numerik kosong v dan memberikan nilai ke elemen v[17]. Hal ini tidak mungkin dilakukan di EMT.

Berikut ini agak tidak efisien.

```
>v=[]; for i=1 to 10000; v=v|i; end;
```

kenapa cara ini kurang efisien? karna setiap elemen baru di tambahkan EMT harus menyalin seluruh isi v kembali ke variabel v.

Semakin efisien vektor telah ditentukan sebelumnya.

```
>v=zeros(10000); for i=1 to 10000; v[i]=i; end;
```

Untuk mengubah tipe data di EMT, Anda dapat menggunakan fungsi seperti kompleks().

```
>complex(1:4)
```

```
[ 1+0i , 2+0i , 3+0i , 4+0i ]
```

Konversi ke string hanya dimungkinkan untuk tipe data dasar. Format saat ini digunakan untuk penggabungan string sederhana. Tapi ada fungsi seperti print() atau frac().

Untuk vektor, Anda dapat dengan mudah menulis fungsi Anda sendiri.

```
>function tostr (v) ...
```

```
s="[";  
loop 1 to length(v);
```

```

s=s+print(v[#,2,0];
if #<length(v) then s=s+", "; endif;
end;
return s+"]";
endfunction

```

- Variabel s diinisialisasi sebagai string “[” untuk menyimpan hasil
- akhir. Awalnya, tanda kurung buka [ditambahkan ke variabel s sebagai pembuka.
- loop 1 to length(v); menjalankan perulangan dari elemen pertama hingga elemen terakhir dalam v. Fungsi length(v) mengembalikan panjang atau jumlah elemen dalam vektor v.
- print(v[#, 2, 0]; adalah fungsi format yang mengonversi elemen vektor v pada posisi saat ini (v[#]) menjadi string.
- parameter 2 menunjukkan bahwa dua digit setelah titik desimal akan ditampilkan, sementara 0 memastikan bahwa angka ditampilkan tanpa tambahan simbol atau format lainnya.
- Bagian if #<length(v) memeriksa apakah elemen saat ini bukan elemen terakhir. Jika benar, maka koma , akan ditambahkan ke variabel s untuk memisahkan elemen.
- Setelah loop selesai, tanda kurung tutup] ditambahkan ke string s, dan string ini kemudian dikembalikan sebagai output.

>tostr(linspace(0,1,10));

Untuk komunikasi dengan Maxima, terdapat fungsi convertmxml(), yang juga dapat digunakan untuk memformat vektor untuk keluaran.

>convertmxml(1:10);

Untuk Latex perintah tex dapat digunakan untuk mendapatkan perintah Latex.

>tex(&[1,2,3]);

[1, 2, 3]

Faktor dan Tabel

Dalam pengantar R ada contoh yang disebut faktor.

Berikut ini adalah daftar wilayah 30 negara bagian.

```

>austates = ["tas", "sa", "qld", "nsw", "nsw", "nt", "wa", "wa", ...
>"qld", "vic", "nsw", "vic", "qld", "qld", "sa", "tas", ...
>"sa", "nt", "wa", "vic", "qld", "nsw", "nsw", "wa", ...
>"sa", "act", "nsw", "vic", "vic", "act"];

```

Perintah diatas digunakan untuk mendefinisikan sebuah array (array sendiri adalah sekumpulan variabel yang memiliki tipe data yang sama) karena pada data tersebut ada beberapa nama negara bagian yang terulang. Array ini berisi singkatan untuk negara bagian dan teritori di Australia.

Asumsikan, kita memiliki pendapatan yang sesuai di setiap negara bagian.

```
>incomes = [60, 49, 40, 61, 64, 60, 59, 54, 62, 69, 70, 42, 56, ...
> 61, 61, 61, 58, 51, 48, 65, 49, 49, 41, 48, 52, 46, ...
> 59, 46, 58, 43];
```

Sekarang mari kita coba mencari nilai mean dan median dari data pendapatan tersebut menggunakan perintah mean(incomes) dan median(incomes)

```
>mean(incomes)
```

```
54.7333333333
```

```
>median(incomes)
```

```
57
```

Sekarang, kami ingin menghitung rata-rata pendapatan di suatu wilayah. Menjadi program statistik, R memiliki faktor() dan tappy() untuk ini.

EMT dapat melakukan hal ini dengan menemukan indeks wilayah dalam daftar wilayah unik.

```
>auterr=sort(unique(austates)); f=indexofsorted(auterr,austates)
```

```
[6, 5, 4, 2, 2, 3, 8, 8, 4, 7, 2, 7, 4, 4, 5, 6, 5, 3,
8, 7, 4, 2, 2, 8, 5, 1, 2, 7, 7, 1]
```

Pada titik itu, kita dapat menulis fungsi perulangan kita sendiri untuk melakukan sesuatu hanya untuk satu faktor.

Atau kita bisa meniru fungsi tapply() dengan cara berikut.

```
>function map tappl (i; f$:call, cat, x) ...
```

```
u=sort (unique (cat));
f=indexof(u,cat);
return f$(x[nonzeros(f==indexof(u,i))]);
endfunction
```

i: Parameter pertama biasanya adalah nilai yang digunakan untuk pencocokan atau pemetaan.

f: *call* :
Parameter kedua, yang kemungkinan besar adalah sebuah fungsi yang dipanggil dalam kodetersebut. f

di sini merujuk pada fungsi yang diterima sebagai input.

cat: Parameter ketiga adalah array atau vektor yang berisi kategori yang akan diproses.

x: Parameter keempat adalah array atau vektor yang akan diproses atau diubah berdasarkan pemetaan kategori yang dilakukan.

Ini agak tidak efisien, karena menghitung wilayah unik untuk setiap i, tetapi berhasil.

```
>tappl(auterr,"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5, 57.3333333333, 55.5, 53.6, 55, 60.5, 56, 52.25]
```

Perhatikan bahwa ini berfungsi untuk setiap vektor wilayah.

```
>tappl(["act","nsw"],"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5, 57.3333333333]
```

Sekarang, paket statistik EMT mendefinisikan tabel seperti di R. Fungsi readtable() dan writetable() dapat digunakan untuk input dan output.

Sehingga kita bisa mencetak rata-rata pendapatan negara di daerah secara bersahabat.

```
>writetable(tappl(auterr,"mean",austates,incomes),labc=auterr,wc=7)
```

act	nsw	nt	qld	sa	tas	vic	wa
44.5	57.33	55.5	53.6	55	60.5	56	52.25

Fungsi writetable digunakan untuk menampilkan data dalam bentuk tabel yang terstruktur dengan label kolom dan lebar kolom yang dapat disesuaikan.

Dengan labc=auterr, berarti menetapkan label kolom untuk tabel tersebut berdasarkan kategori yang ada di auterr(yang sudah diurutkan sesuai abjad).

wc(width of columns)=7 berarti setiap kolom dalam tabel akan memiliki lebar minimal 7 karakter. sebagai contoh 44.5 itu memiliki 4 karakter (termasuk titik desimal).

karena data dalam kolom lebih pendek dari 7 karakter, kolom tersebut diberi ruang ekstra untuk tampilan yang rapi.

Kita juga bisa mencoba meniru perilaku R sepenuhnya.

Faktor-faktor tersebut harus disimpan dengan jelas dalam kumpulan beserta jenis dan kategorinya (negara bagian dan teritori dalam contoh kita). Untuk EMT, kami menambahkan indeks yang telah dihitung sebelumnya.

```
>function makef(t) ...
```

```
## Factor data
## Returns a collection with data t, unique data, indices.
## See: tapply
u=sort(unique(t));
return {{t,u,indexofsorted(u,t)}};
endfunction
```

```
>statef=makef(austates);
```

Perintah statef = makef(austates); digunakan untuk mengolah data yang ada dalam variabel austates, dan mengidentifikasi elemen unik yang ada dalam data tersebut.

Sekarang elemen ketiga dari koleksi akan berisi indeks.

```
>statef[3]
```

```
[6, 5, 4, 2, 2, 3, 8, 8, 4, 7, 2, 7, 4, 4, 5, 6, 5, 3,
8, 7, 4, 2, 2, 8, 5, 1, 2, 7, 7, 1]
```

statef[3] adalah elemen ketiga dari koleksi yang dikembalikan oleh fungsi makef, yaitu indeks posisi dari elemen-elemen dalam austates yang sudah dipetakan ke urutan dalam u (data unik yang terurut).

statef[3] akan mengembalikan indeks posisi dari setiap elemen dalam austates berdasarkan urutan yang ada di u.

Sekarang kita bisa meniru tapply() dengan cara berikut. Ini akan mengembalikan tabel sebagai kumpulan data tabel dan judul kolom.

```
>function tapply (t:vector,tf,f$:call) ...
```

```
## Makes a table of data and factors
## tf : output of makef()
## See: makef
uf=tf[2]; f=tf[3]; x=zeros(length(uf));
for i=1 to length(uf);
    ind=nonzeros(f==i);
    if length(ind)==0 then x[i]=NAN;
    else x[i]=f$(t[ind]);
```

```

endif;
end;
return {{x,uf}};
endfunction

```

Kami tidak menambahkan banyak pengecekan tipe di sini. Satu-satunya tindakan pencegahan menyangkut kategori (faktor) yang tidak memiliki data. Tetapi kita harus memeriksa panjang t yang benar dan kebenaran pengumpulan tf.

Tabel ini dapat dicetak sebagai tabel dengan writetable().

```
>writetable(tapply(incomes,statef,"mean"),wc=7)
```

act	nsw	nt	qld	sa	tas	vic	wa
44.5	57.33	55.5	53.6	55	60.5	56	52.25

7.17 Array

EMT hanya memiliki dua dimensi untuk array. Tipe datanya disebut matriks. Namun, akan mudah untuk menulis fungsi untuk dimensi yang lebih tinggi atau perpustakaan C untuk ini.

R memiliki lebih dari dua dimensi. Di R array adalah vektor dengan bidang dimensi.

Dalam EMT, vektor adalah matriks dengan satu baris. Itu dapat dibuat menjadi matriks dengan redim().

```
>shortformat; X=redim(1:20,4,5)
```

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Fungsi shortformat digunakan untuk mengatur format tampilan angka agar lebih ringkas dan mudah dibaca.

Perintah diatas digunakan untuk membuat matrik X dari angka 1 sampai 20 dengan ketentuan matriks dengan 4 baris dan 5 kolom.

Ekstraksi baris dan kolom, atau sub-matriks, mirip dengan R.

```
>X[,2:3]
```

2	3
7	8
12	13
17	18

Perintah diatas digunakan untuk menampilkan matriks X kolom kedua sampai ketiga.

```
>X[,3:5]
```

3	4	5
8	9	10
13	14	15
18	19	20

Namun, di R dimungkinkan untuk menyetel daftar indeks vektor tertentu ke suatu nilai. Hal yang sama mungkin terjadi di EMT hanya dengan satu putaran.

```
>function setmatrixvalue (M, i, j, v) ...
```

```

loop 1 to max(length(i),length(j),length(v))
    M[i#{},j#{}] = v#;
end;
endfunction

```

Perintah setmatrixvalue(M, i, j, v) adalah fungsi yang digunakan untuk mengubah nilai elemen-elemen dalam matriks berdasarkan indeks tertentu.

M: Matriks yang akan dimodifikasi.

i: Indeks baris atau posisi baris dalam matriks M yang ingin diubah.

j: Indeks kolom atau posisi kolom dalam matriks M yang ingin diubah.

v: Nilai yang akan dimasukkan ke dalam elemen-elemen matriks M pada posisi yang ditentukan oleh indeks i dan j.

Kami mendemonstrasikan ini untuk menunjukkan bahwa matriks dilewatkan dengan referensi di EMT. Jika Anda tidak ingin mengubah matriks M asli, Anda perlu menyalinnya ke dalam fungsi.

>setmatrixvalue(X,1:3,3:-1:1,0); X,

1	2	0	4	5
6	0	8	9	10
0	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Perkalian luar dalam EMT hanya dapat dilakukan antar vektor. Ini otomatis karena bahasa matriks. Satu vektor harus berupa vektor kolom dan vektor lainnya harus berupa vektor baris.

>(1:5)*(1:5)'

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

1:5: Ini adalah vektor baris yang berisi angka-angka dari 1 hingga 5

(1:5)': Tanda' di sini menunjukkan transposisi dari vektor baris 1:5. Dengan kata lain, ini mengubah vektor baris menjadi vektor kolom.

Dalam PDF pendahuluan untuk R terdapat contoh yang menghitung distribusi ab-cd untuk a,b,c,d yang dipilih dari 0 hingga n secara acak. Solusi dalam R adalah membentuk matriks 4 dimensi dan menjalankan table() di atasnya.

Tentu saja, hal ini dapat dicapai dengan satu putaran. Tapi loop tidak efektif di EMT atau R. Di EMT, kita bisa menulis loop di C dan itu akan menjadi solusi tercepat.

Namun kita ingin meniru perilaku R. Untuk melakukannya, kita perlu meratakan perkalian ab dan membuat matriks ab-cd.

>a=0:6; b=a'; p=flatten(a*b); q=flatten(p-p'); ...

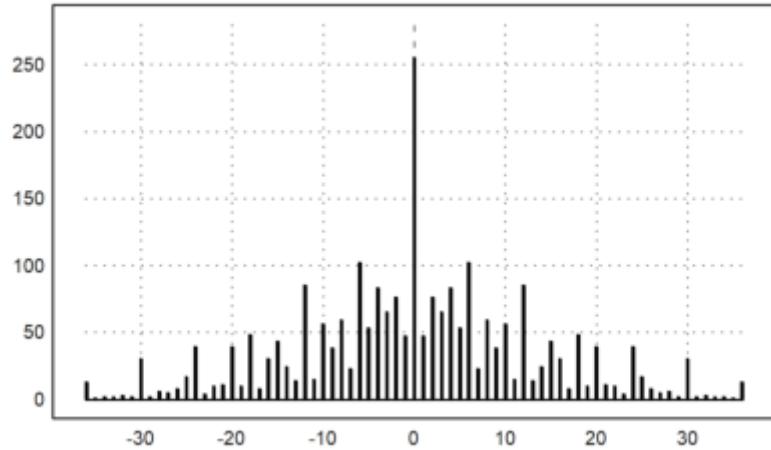
>u=sort(unique(q)); f=getmultiplicities(u,q); ...

>statplot(u,f,"h"):

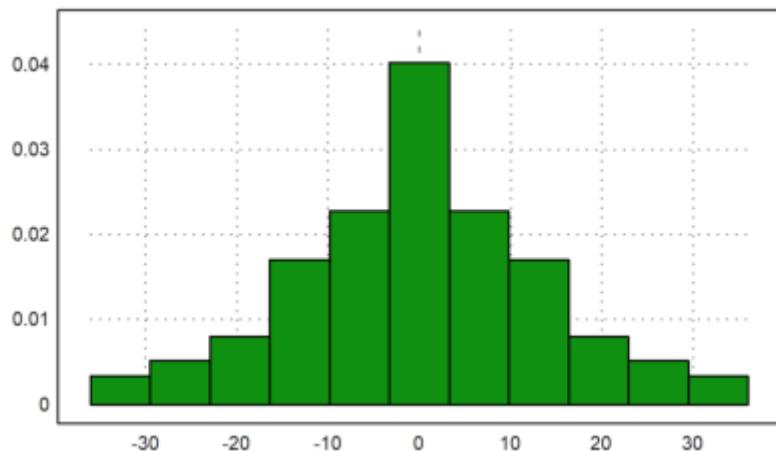
Selain multiplisitas eksak, EMT dapat menghitung frekuensi dalam vektor.

>getfrequencies(q,-50:10:50)

[0, 23, 132, 316, 602, 801, 333, 141, 53, 0]



Gambar 7.47 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-088.png



Gambar 7.48 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-089.png

Perintah diatas digunakan untuk menghitung distribusi frekuensi nilai-nilai dalam vektor q dalam rentang dari -50 hingga 50, dengan interval 10. Fungsi ini menghitung berapa banyak nilai dalam q yang jatuh dalam setiap interval: [-50, -40), [-40, -30), ..., [40, 50).

Cara paling mudah untuk memplotnya sebagai distribusi adalah sebagai berikut.

>plot2d(q,distribution=11):

Namun dimungkinkan juga untuk menghitung terlebih dahulu penghitungan dalam interval yang dipilih sebelumnya. Tentu saja, berikut ini menggunakan getfrequencies() secara internal.

Karena fungsi histo() mengembalikan frekuensi, kita perlu menskalakannya sehingga integral di bawah grafik batang adalah 1.

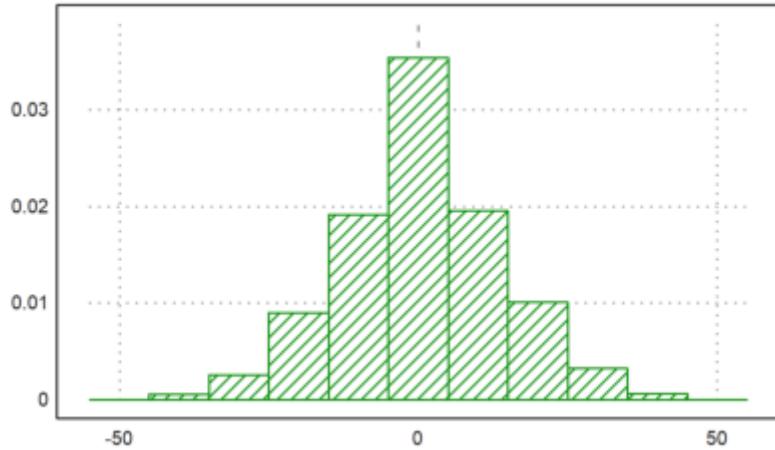
>{x,y}=histo(q,v=-55:10:55); y=y/sum(y)/differences(x); ...

> plot2d(x,y,>bar,style="/");

7.18 Daftar

EMT memiliki dua jenis daftar. Salah satunya adalah daftar global yang bisa berubah, dan yang lainnya adalah tipe daftar yang tidak bisa diubah. Kami tidak peduli dengan daftar global di sini.

Tipe daftar yang tidak dapat diubah disebut koleksi di EMT. Ini berperilaku seperti struktur di C,



Gambar 7.49 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-090.png

tetapi elemennya hanya diberi nomor dan tidak diberi nama.

1. Membuat list dan mengakses elemen dalam list

```
>L={{"Fred","Flintstone",40,[1990,1992]}}
```

```
Fred
Flintstone
40
[1990, 1992]
```

Perintah diatas digunakan untuk membuat list L dengan nama depan Fred, nama belakang Flintstone, usia 40, dan tahun 1990, 1992.

Namun untuk tahun tersebut tidak dapat dipastikan apa arti dari tahun-tahun tersebut, bisa saja tahun kelahiran dan kematian, tahun pendidikan, tahun pekerjaan, atau yang lainnya.

Saat ini unsur-unsur tersebut tidak memiliki nama, meskipun nama dapat ditetapkan untuk tujuan khusus. Mereka diakses dengan nomor.

```
>(L[4])[2]
```

```
1992
```

Perintah diatas digunakan untuk menampilkan list L keempat urutan kedua. Karena pada list L keempat berisi tahun yang dimana terdapat 2 tahun, tahun pertama adalah 1990 dan tahun kedua adalah 1992. Perintah tersebut ingin menampilkan tahun kedua, maka outputnya adalah 1992.

2. Menggabungkan dua list

```
>A := [1,2,3]
```

```
[1, 2, 3]
```

```
>B := [4,5,6]
```

```
[4, 5, 6]
```

```
>C := [A, B]
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6]
```

3. Mengubah elemen dalam list

```
>D := [7,8,9,10]
```

```
[7, 8, 9, 10]
```

```
>D[3] := 99
```

```
[7, 8, 99, 10]
```

4. menghitung panjang list

```
>E := [10,20,30,40,50,60,70]
```

```
[10, 20, 30, 40, 50, 60, 70]
```

```
>len := length(E)
```

7

7.19 File Input dan Output (Membaca dan Menulis Data)

Anda sering kali ingin mengimpor matriks data dari sumber lain ke EMT. Tutorial ini memberi tahu Anda tentang banyak cara untuk mencapai hal ini. Fungsi sederhananya adalah writematrix() dan readmatrix().

Mari kita tunjukkan cara membaca dan menulis vektor real ke file.

```
>a=random(1,100); mean(a), dev(a),
```

```
0.44779
```

```
0.29446
```

$$mean = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$dev = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Untuk menulis data ke file, kita menggunakan fungsi writematrix().

Karena pengenalan ini kemungkinan besar ada di direktori, di mana pengguna tidak memiliki akses tulis, kami menulis data ke direktori home pengguna. Untuk buku catatan sendiri, hal ini tidak diperlukan, karena file data akan ditulis ke dalam direktori yang sama.

```
>filename="test.dat";
```

Sekarang kita menulis vektor kolom a' ke file. Ini menghasilkan satu nomor di setiap baris file.

```
>writematrix(a',filename)
```

Untuk membaca data, kita menggunakan readmatrix()

```
>a=readmatrix(filename)'
```

```
[0.74157, 0.13184, 0.082656, 0.1975, 0.63019, 0.51127, 0.98091,
0.020501, 0.29063, 0.83916, 0.051539, 0.45459, 0.77198, 0.8754,
0.49257, 0.96765, 0.48685, 0.11645, 0.086971, 0.35536, 0.69515,
0.19161, 0.66654, 0.61295, 0.38779, 0.16748, 0.65044, 0.64784,
0.17712, 0.048322, 0.24795, 0.8682, 0.49634, 0.9125, 0.079817,
0.6544, 0.66279, 0.54949, 0.10807, 0.71727, 0.75473, 0.34844,
0.38634, 0.40978, 0.3234, 0.32117, 0.85977, 0.78211, 0.12933,
0.39591, 0.018822, 0.95697, 0.26985, 0.2409, 0.52222, 0.79655,
0.30484, 0.53489, 0.014971, 0.22246, 0.13021, 0.82292, 0.83054,
0.99006, 0.064585, 0.57221, 0.16539, 0.31818, 0.16037, 0.71343,
0.6188, 0.67365, 0.22367, 0.86965, 0.67439, 0.859, 0.85639,
0.07405, 0.65051, 0.79298, 0.039088, 0.4536, 0.24248, 0.10425,
0.36493, 0.084869, 0.37012, 0.045487, 0.66347, 0.69294, 0.46928,
0.27625, 0.20081, 0.069966, 0.2009, 0.52929, 0.97226, 0.52319,
0.11857, 0.075214]
```

Dan hapus file tersebut.

```
>fileremove(filename);
>mean(a), dev(a),
```

```
0.44779
0.29446
```

Fungsi writematrix() atau writetable() dapat dikonfigurasi untuk bahasa lain.

Misalnya, jika Anda memiliki sistem Indonesia (titik desimal dengan koma), Excel Anda memerlukan nilai dengan koma desimal yang dipisahkan dengan titik koma dalam file csv (defaultnya adalah nilai yang dipisahkan koma). File berikut “test.csv” akan muncul di folder saat ini Anda.

```
>filename=“test.csv”; ...
> writematrix(random(5,3),file=filename,separator=“,”)
```

Anda sekarang dapat membuka file ini dengan Excel bahasa Indonesia secara langsung.

```
>fileremove(filename);
```

Terkadang kita memiliki string dengan token seperti berikut.

```
>s1:=“f m m f m m m f f f m m f”; ...
>s2:=“f f f m m f f”;
```

Untuk melakukan tokenisasi ini, kami mendefinisikan vektor token.

```
>tok:=["f","m"]
```

f

m

Kemudian kita dapat menghitung berapa kali setiap token muncul dalam string, dan memasukkan hasilnya ke dalam tabel.

```
>M:=getmultiplicities(tok,strtokens(s1))...
> getmultiplicities(tok,strtokens(s2));
```

Tulis tabel dengan header token.

```
>writetable(M,labc=tok,labr=1:2,wc=8)
```

	f	m
1	6	7
2	5	2

Untuk statika, EMT dapat membaca dan menulis tabel.

```
>file="test.dat"; open(file,"w"); ...
>writeln("A,B,C"); writematrix(random(3,3)); ...
>close();
```

The file looks like this.

```
>printfile(file)
```

```
A, B, C
0.5894214399628446, 0.1500948494104958, 0.4911562128682984
0.2817236329179764, 0.3586251183800097, 0.1159031925964036
0.2135992153342503, 0.3457575959104093, 0.3271359940090028
```

Fungsi readtable() dalam bentuknya yang paling sederhana dapat membaca ini dan mengembalikan kumpulan nilai dan baris judul.

```
>L=readtable(file,>list);
```

Koleksi ini dapat dicetak dengan writetable() ke buku catatan, atau ke file.

```
>writetable(L,wc=10,dc=5)
```

A	B	C
0.58942	0.15009	0.49116
0.28172	0.35863	0.1159
0.2136	0.34576	0.32714

Matriks nilai adalah elemen pertama dari L. Perhatikan bahwa mean() di EMT menghitung nilai rata-rata baris matriks.

```
>mean(L[1])
```

```
0.41022
0.25208
0.2955
```

7.20 File CSV

Pertama, mari kita menulis matriks ke dalam file. Untuk outputnya, kami membuat file di direktori kerja saat ini.

```
>file="test.csv"; ...
>M=random(3,3); writematrix(M,file);
Here is the content of this file.
>printfile(file)
```

```
0.5537619367566726, 0.6738419762237779, 0.04291882768650555
0.2401989793483695, 0.0861139922960146, 0.3678722550483149
0.1343166294586442, 0.3616257867488041, 0.3383621511798272
```

CSV ini dapat dibuka pada sistem berbahasa Inggris ke Excel dengan klik dua kali. Jika Anda mendapatkan file seperti itu di sistem Jerman, Anda perlu mengimpor data ke Excel dengan memperhatikan titik desimal.

Namun titik desimal juga merupakan format default untuk EMT. Anda dapat membaca matriks dari file dengan readmatrix().

```
>readmatrix(file)
```

```

0.55376  0.67384  0.042919
0.2402   0.086114  0.36787
0.13432  0.36163  0.33836

```

Dimungkinkan untuk menulis beberapa matriks ke satu file. Perintah open() dapat membuka file untuk ditulis dengan parameter “w”. Standarnya adalah “r” untuk membaca.

```
>open(file,“w”); writematrix(M); writematrix(M’); close();
```

Matriks dipisahkan oleh garis kosong. Untuk membaca matriks, buka file dan panggil readmatrix() beberapa kali.

```
>open(file); A=readmatrix(); B=readmatrix(); A==B, close();
```

```

1          0          0
0          1          0
0          0          1

```

Di Excel atau spreadsheet serupa, Anda dapat mengekspor matriks sebagai CSV (nilai yang dipisahkan koma). Di Excel 2007, gunakan “save as” dan “other format”, lalu pilih “CSV”. Pastikan tabel saat ini hanya berisi data yang ingin Anda ekspor.

Ini sebuah contoh.

```
> printfile(“excel-data.csv”)
```

```

0;1000;1000
1;1051,271096;1072,508181
2;1105,170918;1150,273799
3;1161,834243;1233,67806
4;1221,402758;1323,129812
5;1284,025417;1419,067549
6;1349,858808;1521,961556
7;1419,067549;1632,31622
8;1491,824698;1750,6725
9;1568,312185;1877,610579
10;1648,721271;2013,752707

```

Seperti yang Anda lihat, sistem bahasa Jerman saya menggunakan titik koma sebagai pemisah dan koma desimal. Anda dapat mengubahnya di pengaturan sistem atau di Excel, tetapi hal ini tidak diperlukan untuk membaca matriks menjadi EMT.

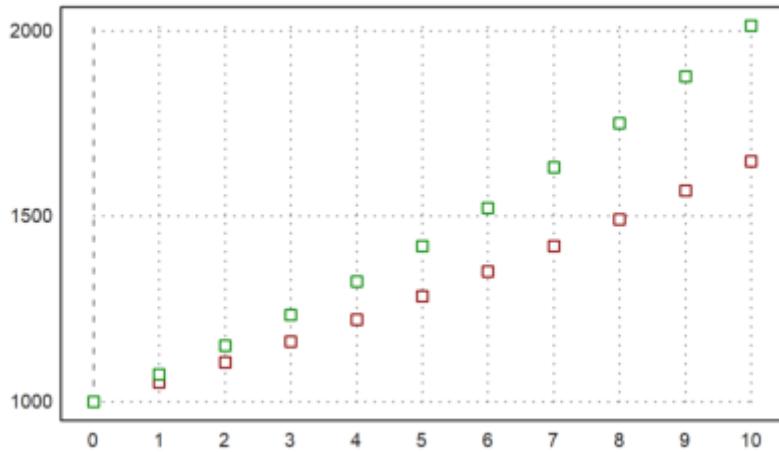
Cara termudah untuk membaca ini ke dalam Euler adalah readmatrix(). Semua koma diganti dengan titik dengan parameter >koma. Untuk CSV bahasa Inggris, hilangkan saja parameter ini.

```
>M=readmatrix(“excel-data.csv”,>comma)
```

```

0      1000      1000
1    1051.3    1072.5
2    1105.2    1150.3
3    1161.8    1233.7
4    1221.4    1323.1
5    1284      1419.1
6    1349.9    1522
7    1419.1    1632.3
8    1491.8    1750.7
9    1568.3    1877.6
10   1648.7    2013.8

```



Gambar 7.50 images/EMT4Statistika_Amalia%20Rahmadhani_23030630084-093.png

Let us plot this.

```
>plot2d(M'[1],M'[2:3],>points,color=[red,green]):
```

Ada cara yang lebih mendasar untuk membaca data dari suatu file. Anda dapat membuka file dan membaca angka baris demi baris. Fungsi getvectorline() akan membaca angka dari sebaris data. Secara default, ini mengharapkan titik desimal. Tapi bisa juga menggunakan koma desimal, jika Anda memanggil setdecimaldot(“,”) sebelum Anda menggunakan fungsi ini.

Fungsi berikut adalah contohnya. Itu akan berhenti di akhir file atau baris kosong.

```
>function myload (file) ...
```

```
open(file);
M=[];
repeat
    until eof();
    v=getvectorline(3);
    if length(v)>0 then M=M_v; else break; endif;
end;
return M;
close(file);
endfunction
```

```
>myload(file)
```

```
0.55376  0.67384  0.042919
0.2402   0.086114  0.36787
0.13432  0.36163  0.33836
```

Dimungkinkan juga untuk membaca semua angka dalam file itu dengan getvector().

```
>open(file); v=getvector(10000); close(); redim(v[1:9],3,3)
```

```
0.55376  0.67384  0.042919
0.2402   0.086114  0.36787
0.13432  0.36163  0.33836
```

Oleh karena itu sangat mudah untuk menyimpan suatu vektor nilai, satu nilai di setiap baris dan membaca kembali vektor ini.

```

>v=random(1000); mean(v)

0.493

>writematrix(v',file); mean(readmatrix(file)')

0.493

```

7.21 Menggunakan Tabel

Tabel dapat digunakan untuk membaca atau menulis data numerik. Misalnya, kita menulis tabel dengan header baris dan kolom ke sebuah file.

```

>file="test.tab"; M=random(3,3); ...
>open(file,"w"); ...
>writetable(M,separator=",",labc=[“one”,“two”,“three”]); ...
>close(); ...
>printfile(file)

```

one	two	three
0.56,	0.63,	0.59
0.45,	0.86,	0.44
0.72,	0.19,	0.91

Ini dapat diimpor ke Excel.

Untuk membaca file di EMT, kami menggunakan readtable().

```

>{M,headings}=readtable(file,>clabs); ...
>writetable(M,labc=headings)

```

one	two	three
0.56	0.63	0.59
0.45	0.86	0.44
0.72	0.19	0.91

7.22 Menganalisis Garis

Pada subbab ini sering digunakan untuk memproses atau mengekstrak data dari teks yang berformat khusus, seperti data tabel dalam HTML. Anda bahkan dapat mengevaluasi setiap baris dengan tangan. Misalkan, kita memiliki baris dengan format berikut.

```
>line="2020-11-03,Tue,1'114.05"
```

2020-11-03, Tue, 1' 114.05

Pertama, kita akan memisahkan string line menjadi bagian-bagian yang lebih kecil, yang dikenal sebagai “token”.

```
>vt=strtokens(line)
```

2020-11-03
Tue
1' 114.05

Kemudian kita dapat mengevaluasi setiap elemen garis menggunakan evaluasi yang sesuai.

```
>day(vt[1]); ...
>indexof(["mon","tue","wed","thu","fri","sat","sun"],tolower(vt[2])); ...
>strrep(vt[3],"","","");
```

Dengan menggunakan ekspresi reguler, dimungkinkan untuk mengekstrak hampir semua informasi dari sebaris data.

Selanjutnya, kita akan melihat bagaimana mengekstrak data string yang berisi markup HTML menggunakan ekspresi reguler.

```
>line=<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>;
```

Untuk mengekstraknya, kami menggunakan ekspresi reguler, yang mencari

- tanda kurung tutup >, untuk mengindikasikan bahwa kita akan mencari awal dari elemen yang ada di dalam tag.
- string apa pun yang tidak mengandung tanda kurung akan mencocokkan elemen di dalam tag <td>.
- braket pembuka dan penutup menggunakan solusi terpendek,dengan tag pembuka (<td>) dan penutup (</td>).
- sekali lagi string apa pun yang tidak mengandung tanda kurung,ini akan menjamin bahwa kita akan mengambil isi yang relevan di dalam tagnya.
- dan tanda kurung buka < menandai bahwa ini adalah akhir dari tag dan awal dari tag baru.

Mencari pola tertentu dalam string line yang menggunakan ekspresi reguler.

```
>{pos,s,vt}=strxfind(line,>([^\>]+)<.+?>([^\>]+)<");
```

Hasilnya adalah posisi kecocokan, string yang cocok, dan vektor string untuk sub-kecocokan.

Kita akan mengeksekusi elemen-elemen di dalam array atau list vt satu per satu dalam sebuah perulangan.

```
>for k=1:length(vt); vt(k), end;
```

```
1145.5
5.6
```

Berikut adalah fungsi yang membaca semua item numerik antara <td> dan </td>.

```
>function readtd (line) ...
```

```
v=[]; cp=0;
repeat
    {pos,s,vt}=strxfind(line,"<td.*?>(.+?)</td>",cp);
    until pos==0;
    if length(vt)>0 then v=v|vt[1]; endif;
    cp=po+strlen(s);
end;
return v;
endfunction
```

Kita akan mengekstrak dan menampilkan semua nilai yang berada di antara tag <td>...</td> dalam baris,dan mencari apakah nilai tersebut numerik atau bukan.

```
>readtd(line+<td>non-numerical</td>")
```

```
1145.45  
5.6  
-4.5  
non-numerical
```

7.23 Membaca dari Web

Situs web atau file dengan URL dapat dibuka di EMT dan dapat dibaca baris demi baris.

Dalam contoh, kita membaca versi terkini dari situs EMT. Kami menggunakan ekspresi reguler untuk memindai “Versi ...” dalam sebuah judul.

```
>function readversion () ...
```

```
urlopen("http://www.euler-math-toolbox.de/Programs/Changes.html");  
repeat  
    until urleof();  
    s=urlgetline();  
    k=strfind(s,"Version ",1);  
    if k>0 then substring(s,k,strfind(s,<,k)-1), break; endif;  
end;  
urlclose();  
endfunction  
  
>readversion
```

Version 2024-01-12

Contoh lain membaca URL dengan EMT

“<https://mywebsite.com/version.h>”

```
>function readversionmywebsite () ...
```

```
urlopen("https://mywebsite.com/version.h");  
repeat  
    until urleof();  
    s=urlgetline();  
    k=strfind(s,"Release",1);  
    if k>0 then substring(s,k,strfind(s,<,k)-1); break; endif;  
end;  
urlclose();  
endfunction  
  
>readversionmywebsite
```

Karena string “Release” tidak ada di dalam file version.h, maka strfind(s, “Release”, 1) akan mengembalikan nilai nol atau tidak menghasilkan indeks yang diperlukan untuk proses pencarian.

7.24 Input dan Output Variabel

Anda dapat menulis variabel dalam bentuk definisi Euler ke file atau ke baris perintah.

```
>writevar(pi,"mypi");
```

```
mypi = 3.141592653589793;
```

Untuk pengujian, kami membuat file Euler di direktori kerja EMT.

```
>file="tes.e"; ...
> writevar(random(2,2),"M",file); ...
> printfile(file,3)

M = [ ..
0.6554163483485531, 0.2009951854518572;
0.8936223876466522, 0.2818865431288053];
```

Sekarang kita dapat memuat file tersebut. Ini akan mendefinisikan matriks M.

```
>load(file); show M,
```

```
M =
0.655416      0.200995
0.893622      0.281887
```

Omong-omong, jika writevar() digunakan pada suatu variabel, definisi variabel dengan nama variabel tersebut akan dicetak.

```
>writevar(M); writevar(inch$)
```

```
M = [ ..
0.6554163483485531, 0.2009951854518572;
0.8936223876466522, 0.2818865431288053];
inch$ = 0.0254;
```

Kita juga bisa membuka file baru atau menambahkan file yang sudah ada. Dalam contoh kita menambahkan file yang dibuat sebelumnya.

```
>open(file,"a"); ...
> writevar(random(2,2),"M1"); ...
> writevar(random(3,1),"M2"); ...
> close();

>load(file); show M1; show M2;
```

```
M1 =
0.525      0.314127
0.444616    0.299474

M2 =
0.28269
0.883227
0.270906
```

Untuk menghapus file apa pun, gunakan fileremove().

```
>fileremove(file);
```

Vektor baris dalam suatu file tidak memerlukan koma, jika setiap angka berada pada baris baru. Mari kita buat file seperti itu, tulis setiap baris satu per satu dengan writeln().

```
>open(file,"w"); writeln("M = ["); ...
> for i=1 to 5; writeln(" "+random()); end; ...
> writeln("]"); close(); ...
> printfile(file)
```

```

M = [
0.704419015849
0.217693385437
0.445362756427
0.308411035321
0.914540908642
];
>load(file); M
[0.704419, 0.217693, 0.445363, 0.308411, 0.914541]

```

7.25 LATIHAN

1. Misalkan anda memiliki vektor $x=[2,4,6,8,10]$
 - a. buatkan vektor yang menggabungkan vektor x , angka 0 dan vektor x lagi
 - b. tentukan apakah setiap elemen vektor x lebih besar dari 5 (hasil logika 1 untuk benar dan 0 untuk salah)

```
>x:=[2,4,6,8,10]; [x,0,x]
```

```
[2, 4, 6, 8, 10, 0, 2, 4, 6, 8, 10]
```

```
>x>5, %*x
```

```
[0, 0, 1, 1, 1]
[0, 0, 6, 8, 10]
```

2. Tentukan matriks X dengan elemen-elemen yang berurutan dari 1 hingga 20 dan susunlah elemen tersebut menjadi matriks berukuran 5×4 .

```
>shortformat; X=redim(1:20,5,4)
```

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

3. Seorang analis memiliki data penjualan harian selama 5 hari (150, 200, 250, 300, 350) yang disimpan dalam bentuk vektor sebagai berikut:

- a. mean(rata-rata)
- b. deviasi standar

```
>penjualan=[150,200,250,300,350]
```

```
[150, 200, 250, 300, 350]
```

atau anda bisa memanggil data yang sudah dibuat
>filename="penjualan.dat";
>writematrix(penjualan',filename)
>penjualan=readmatrix(filename)'

[150, 200, 250, 300, 350]

>mean(penjualan)

250

>dev(penjualan)

79.057

4. Buat fungsi yang membuka URL

"https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_(software)"
dan mencari kata "Versi" di dalam URL tersebut, dan tampilkan hasilnya.
>function readversionwebsite () ...

```
urlopen("https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_(software)");
repeat
    until urleof();
    s=urlgetline();
    k=strfind(s,"version",1);
    if k>0 then substring(s,k,strfind(s,<,k)-1), break; endif;
end;
urlclose();
endfunction
```

>readversion

Version 2024-01-12