Distribuţii clasice de variabile aleatoare continue

15.11.2023

Cuprins

1 Repartiţia uniformă

Variabila aleatoare uniformă continuă este varianta continuă a variabilei aleatoare uniforme discrete (atunci când numărul cazurilor posibile tinde la infinit).

Definiţia 1.1. *Spunem că X este o variabilă aleatoare uniformă continuă pe intervalul $[a, b]$ (notăm $X \sim Unif([a, b])$ dacă are funcţia de densitate de repartiţie:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \textit{în rest} \end{cases}$$

Valoarea medie, respectiv dispersia unei astfel de variabile sunt date de relaţiile următoare:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \left. \frac{x^2}{2(b-a)} \right|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= M\left[(X - M(X))^2\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a} dx \\ &= \left. \frac{1}{3(b-a)} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \right|_a^b \\ &= \frac{1}{3(b-a)} \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3 - \frac{1}{3(b-a)} \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^3 \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

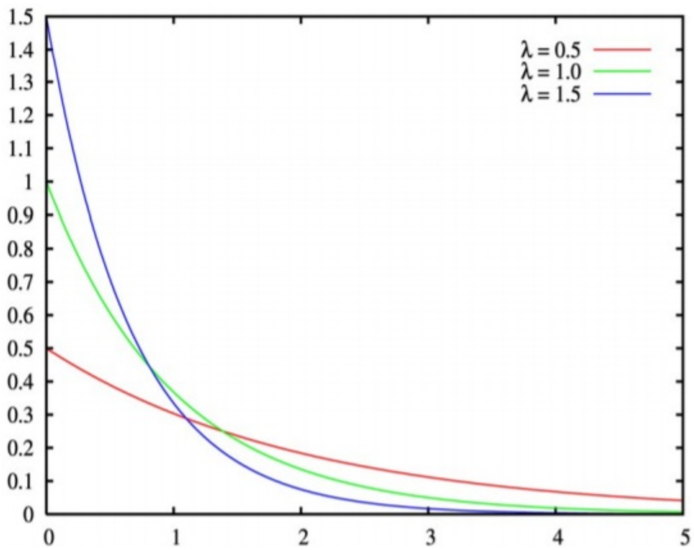
2 Repartiţia exponenţială

Variabila aleatoare ce urmează o repartiţie exponenţială este varianta continuă a variabilei aleatoare Poisson (atunci când numărul cazurilor posibile tinde la infinit).

Definiţia 2.1. *Spunem că X este o variabilă aleatoare continuă care urmează o repartiţie exponenţială de parametru $\lambda > 0$ (notăm $X \sim Exp(\lambda)$ dacă are funcţia de densitate de repartiţie:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

iar reprezentarea grafică a densităţii de probabilitate este:



În multe din problemele practice suntem interesaţi de timpul scurs până la apariţia unui eveniment, spre exemplu:

- timpul până la sosirea primului autobuz în staţie;
- timpul până la primul cutremur;
- timpul până la sosirea primului apel telefonic într-o centrală;
- timpul până la sosirea primului client într-un anumit magazin.

Valoarea medie, respectiv dispersia unei astfel de variabile sunt date de relaţiile următoare:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} x\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx \\ &= -x e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-\lambda x} dx \\ &= -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty = -\frac{e^{-\infty}}{\lambda} - \left(-\frac{e^0}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) = M\left[(X - M(X))^2\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \left(-\lambda e^{-\lambda x}\right) dx \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \left(e^{-\lambda x}\right)' dx &= \ldots = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Propoziţia 2.1. *Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Exp(\lambda)$ sunt variabile aleatoare exponenţiale cu parametru λ independente,atunci variabila aleatoare Y dată de formula:*

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \sim \Gamma\left(n, \frac{1}{\lambda}\right)$$

are o distribuţie Gamma cu parametrii n şi $\frac{1}{\lambda}$.

Funcţia de următoarea formă:

$$\Gamma(x) = \int_0^{-\infty} x^{k-1} \cdot e^{-x} dx$$

se numeşte **funcţie Gamma**.

Definiţia 2.2. *Spunem că X este o variabilă aleatoare continuă care urmează o repartiţie Gamma de parametru $\lambda > 0$ (notăm $X \sim \Gamma(k, \lambda)$ dacă are funcţia de densitate de repartiţie:*

$$f(x) = \frac{\lambda^k\, x^{k-1}\, e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}$$

3 Repartiţia normală

'Intr-un proces tehnologic 'in medie 75% din articole apar'tin limitei permise de calitate $\pm 5\%$. Folosind inegalitatea lui Cebśev s'a se estimeze probabilitatea ca din 2000 articole s'a apar'tin'a limitei de $\pm 5\%$ 'intre 1450 'si 1550 articole inclusiv.

Definiţia 3.1. *Spunem că o variabilă X urmează o* ***repartiţie normală de parametri*** μ ***şi*** σ^2 *dacă are densitatea de repartiţie*

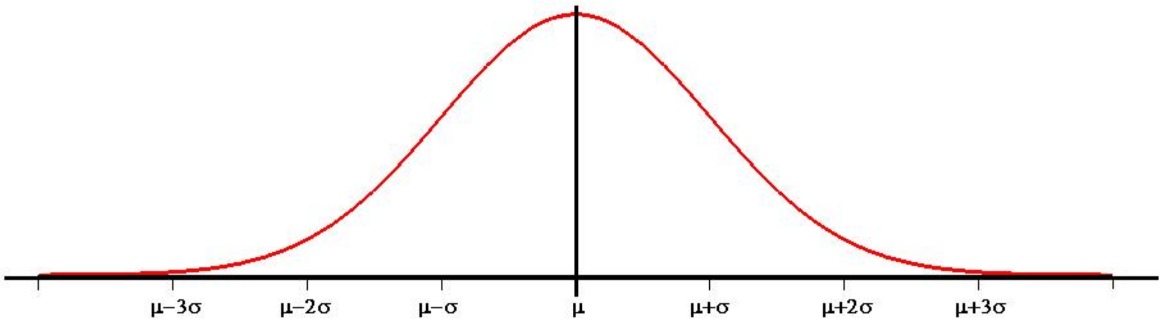
$$n(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right], \quad -\infty < x < \infty,$$

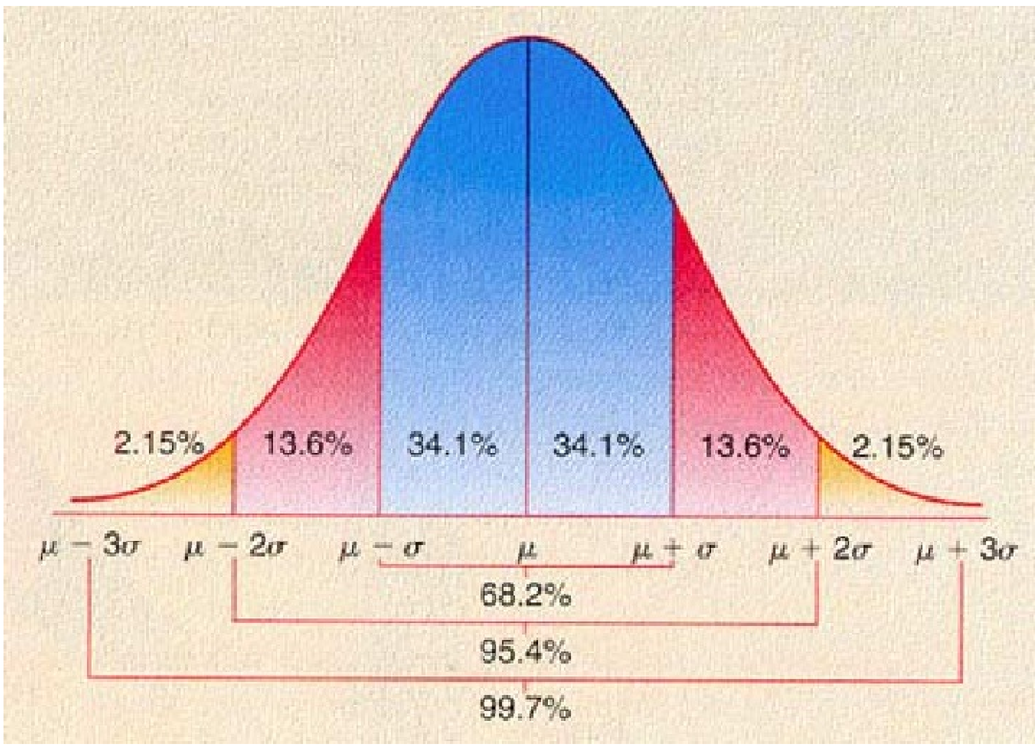
şi vom scrie $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Propoziţia 3.1. *Dacă $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, atunci*

$$M(X) = \mu \quad \text{şi} \quad D^2(X) = \sigma^2.$$

Funcţia $n(x; \mu, \sigma^2)$ este simetrică faţă de $x = \mu$, este maximă în $x = \mu$ şi are puncte de inflexiune în $x = \mu \pm \sigma$. Graficul funcţiei este dat în figură şi este cunoscut sub numele de "clopotul lui Gauss":





Definiţia 3.2. *Spunem că variabila X are* ***densitatea de repartiţie normală standard*** *dacă are densitatea de repartiţie*

$$n(x;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\ , \quad -\infty < x < +\infty, \quad , \mu = 0,\ \sigma = 1.$$

Definiţia 3.3. *Funcţia de repartiţie a variabilei normale standard,*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

se numeşte ***funcţia lui Laplace****.*

Din proprietatea lui $\Phi(x)$: $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, rezultă:

$$\Phi(-x) = P(X < -x) = P(X > x) = 1 - P(X < x) = 1 - \Phi(x)$$

Propoziţia 3.2. *Dacă $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ este o varabilă aleatoare ce urmează o repartiţie normală de medie μ şi dispersie σ^2, atunci*

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \in \mathcal{N}(0,1)$$

este o variabilă normală standard.

Propoziţia 3.3. *Dacă $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, atunci:*

i) $P(X < b) = \Phi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right)$;

ii) $P(a < X < b) = \Phi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$.

Propoziţia 3.4. ***(Inegalitatea lui Cebâşev)*** *Dacă X este o variabilă continuă care are media m şi dispersia σ^2, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ următoarea inegalitate este verificată:*

$$P\left(|X - m| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Inegalitate echivalentă cu:

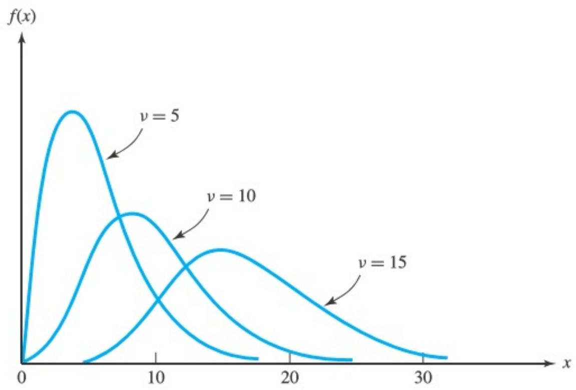
$$P\left(|X - m| \geq \varepsilon\right) < \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

4 Repartiţia χ^2

Dacă $X \sim N(0,1)$, atunci variabila $Y = X^2$, spunem că urmează **o repartiţie χ^2 cu un grad de libertate**.
Dacă $X_i \sim N(0,1)$, $i = \overline{1,n}$ este un şir de variabile aleatoare independente, atunci $Y = X_1^2 + X_2^2 \cdots + X_n^2$, atunci variabila Y urmează **o repartiţie χ^2 cu un n grad de libertate** şi se notează $Y \sim \chi_n^2$.
Funcţia de densitate de probabilitate pentru variabila $X \sim \chi_\nu^2$ este o funcţie Gamma de parametrii $\lambda = \frac{1}{2}$, respectiv $k = \frac{n}{2}$:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)}\, x^{\nu/2-1}\, e^{-x/2}$$

Figura următoare ilustrează densitatea de probabilitate pentru repartiţiile Chi-pătrat pentru diferite valori ale numărului de grade de libertate:



5 Repartiţia Student (sau t)

Dacă $X_i \sim N_i(0,1)$, $i = \overline{0,n}$ este un şir de variabile aleatoare independente,atunci variabila

$$T = \frac{X_0 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{\sum_{n}^{i=1} X_i^2}}$$

urmează **o repartiţie** *Student* **sau** t **cu un** n **grad de libertate**.
Funcţia de densitate de probabilitate pentru variabila ce urmează o reparti ctie Student se scrie cu ajutorul funcţiilor Gamma astfel:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Figura următoare ilustrează densitatea de probabilitate pentru repartiţiile Student pentru diferite valori ale numărului de grade de libertate ($n = 1, 5, 12$):