TUGAS PROYEK
APLIKASI KOMPUTER

Disusun oleh:
Amalia Intan Arvitasari
22305144026

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2023

Daftar Isi

BAB 1

EMT Untuk Aljabar

EMT untuk Perhitungan Aljabar

Pada notebook ini Anda belajar menggunakan EMT untuk melakukan berbagai perhitungan terkait dengan materi atau topik dalam Aljabar. Kegiatan yang harus Anda lakukan adalah sebagai berikut:
- Membaca secara cermat dan teliti notebook ini;
- Menerjemahkan teks bahasa Inggris ke bahasa Indonesia;
- Mencoba contoh-contoh perhitungan (perintah EMT) dengan cara meng-ENTER setiap perintah EMT yang ada (pindahkan kursor ke baris perintah)
- Jika perlu Anda dapat memodifikasi perintah yang ada dan memberikan keterangan/penjelasan tambahan terkait hasilnya.
- Menyisipkan baris-baris perintah baru untuk mengerjakan soal-soal Aljabar dari file PDF yang saya berikan;
- Memberi catatan hasilnya.
- Jika perlu tuliskan soalnya pada teks notebook (menggunakan format LaTeX).
- Gunakan tampilan hasil semua perhitungan yang eksak atau simbolik dengan format LaTeX. (Seperti contoh-contoh pada notebook ini.)

Contoh pertama

Menyederhanakan bentuk aljabar:

$$6x^{-3}y^5 \times -7x^2y^{-9}$$

```
>$&6*x^(-3)*y^5*-7*x^2*y^(-9)
```

$$-\frac{42}{x\,y^4}$$

Menjabarkan:

$$(6x^{-3}+y^5)(-7x^2-y^{-9})$$

```
>$&showev('expand((6*x^(-3)+y^5)*(-7*x^2-y^(-9))))
```

$$expand\left(\left(-\frac{1}{y^9}-7\,x^2\right)\,\left(y^5+\frac{6}{x^3}\right)\right)=-7\,x^2\,y^5-\frac{1}{y^4}-\frac{6}{x^3\,y^9}-\frac{42}{x}$$

Contoh Soal dan Penyelesaian latihan R2
1. Lakukan penyederhanaan operasi berikut

$$6xy^3\times 9x^4y^2$$

```
Penyelesaian:
```

```
>$&6*x*y^3*9*x^4*y^2
```

$$54\,x^5\,y^5$$

2. Lakukan penyerhanaan operasi berikut ini

$$\left(\frac{24a^{10}b^{-8}c^7}{12a^6b^{-3}c^5}\right)^{-5}$$

```
Penyelesaian:
```

```
>$&((24*a^10*b^(-8)*c^7)/(12*a^6*b^(-3)*c^5))^(-5)
```

$$\frac{b^{25}}{32\,a^{20}\,c^{10}}$$

3. Lakukan penyederhanaan operasi berikut ini

$$\left(\frac{125p^{12}q^{-14}r^{22}}{25p^8q^6r^{-15}}\right)^{-4}$$

```
Penyelesaian:
```

```
>$&((125*p^12*q^(-14)*r^22)/(25*p^8*q^6*r^(-15)))^(-4)
```

$$\frac{q^{80}}{625\,p^{16}\,r^{148}}$$

4. Lakukan penyederhanaan operasi berikut ini

$$(m^{x-b}n^{x+b})^x(m^bn^{-b})^x$$

```
Penyelesaian:
```

```
>$&((m^(x-b)*n(x+b))^x*(m^b*n^(-b))^x)
```

$$\left(\frac{m^b}{n^b}\right)^x\,\left(m^{x-b}\,n\,(x+b)\right)^x$$

Baris Perintah

Baris perintah Euler terdiri dari satu atau beberapa perintah Euler diikuti dengan titik koma ";" atau koma ",". Titik koma mencegah pencetakan hasilnya. Koma setelah perintah terakhir dapat dihilangkan.
Baris perintah berikut hanya akan mencetak hasil ekspresi, bukan tugas atau perintah format.

```
>r:=2; h:=4; pi*r^2*h/3
```

```
16.7551608191
```

Perintah harus dipisahkan dengan yang kosong. Baris perintah berikut mencetak dua hasilnya.

```
>pi*2*r*h, %+2*pi*r*h // Ingat tanda % menyatakan hasil perhitungan terakhi
```

```
50.2654824574
100.530964915
```

Baris perintah dijalankan sesuai urutan yang ditekan pengguna kembali. Jadi, Anda mendapatkan nilai baru setiap kali Anda menjalankan baris kedua.

```
>x := 1;
>x := cos(x) // nilai cosinus (x dalam radian)
```

```
0.540302305868
```

```
>x := cos(x)
```

```
0.857553215846
```

Jika dua jalur dihubungkan dengan "..." kedua jalur akan selalu dijalankan secara bersamaan.

```
>x := 1.5; ...
>x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2,
```

```
1.41666666667
1.41421568627
1.41421356237
```

Ini juga merupakan cara yang baik untuk menyebarkan perintah panjang ke dua baris atau lebih. Anda dapat menekan Ctrl+Return untuk membagi baris menjadi dua pada posisi kursor saat ini, atau Ctlr+Back untuk menggabungkan baris.
Untuk melipat semua multi-garis tekan Ctrl+L. Maka garis-garis berikutnya hanya akan terlihat, jika salah satunya mendapat fokus.Untuk melipat satu multi-baris, mulailah baris pertama dengan "%+"

```
>%+ x=4+5; ...
```

Garis yang dimulai dengan %% tidak akan terlihat sama sekali.

```
81
```

Euler mendukung loop di baris perintah, asalkan cocok ke dalam satu baris atau multi-baris. Tentu saja, pembatasan ini tidak berlaku dalam
program. Untuk informasi lebih lanjut lihat pendahuluan berikut.

```
>x=1; for i=1 to 5; x := (x+2/x)/2, end; // menghitung akar 2
```

```
1.5
1.41666666667
1.41421568627
1.41421356237
1.41421356237
```

Tidak masalah menggunakan multi-baris. Pastikan baris diakhiri dengan "...".

```
>x := 1.5; // comments go here before the ...
>repeat xnew:=(x+2/x)/2; until xnew~=x; ...
>   x := xnew; ...
>end; ...
>x,
```

```
1.41421356237
```

Struktur bersyarat juga berfungsi.

```
>if E^pi>pi^E; then "Thought so!", endif;
```

```
Thought so!
```

Saat Anda menjalankan perintah, kursor dapat berada di posisi mana pun di baris perintah. Anda dapat kembali ke perintah sebelumnya
atau melompat ke perintah berikutnya dengan tombol panah. Atau Anda dapat mengklik bagian komentar di atas perintah untuk membuka
perintah.
Saat Anda menggerakkan kursor di sepanjang garis, pasangan tanda kurung atau tanda kurung buka dan tutup akan disorot. Juga,
perhatikan baris status. Setelah tanda kurung buka dari fungsi sqrt(), baris status akan menampilkan teks bantuan untuk fungsi tersebut.
Jalankan perintah dengan kunci kembali.

```
>sqrt(sin(10°)/cos(20°))
```

```
0.429875017772
```

Untuk melihat bantuan untuk perintah terbaru, buka jendela bantuan dengan F1. Di sana, Anda dapat memasukkan teks untuk
dicari. Pada baris kosong, bantuan untuk jendela bantuan akan ditampilkan. Anda dapat menekan escape untuk menghapus garis,
atau untuk menutup jendela bantuan.
Anda dapat mengklik dua kali pada perintah apa pun untuk membuka bantuan untuk perintah ini. Coba klik dua kali pada exp command di bawah pada baris perintah.

```
>exp(log(2.5))
```

```
2.5
```

Anda juga dapat menyalin dan menempel di Euler. Gunakan Ctrl-C dan Ctrl-V untuk ini. Untuk menandai teks, seret mouse atau gunakan shift
bersamaan dengan tombol kursor apa pun. Selain itu, Anda dapat menyalin tanda kurung yang disorot.

Sintaks Dasar

Euler mengetahui fungsi matematika biasa. Seperti yang Anda lihat di atas, fungsi trigonometri bekerja dalam radian atau derajat. Untuk
mengonversi ke derajat, tambahkan simbol derajat (dengan tombol F7) ke nilainya, atau gunakan fungsi rad(x). Fungsi akar kuadrat disebut
sqrt di Euler. Tentu saja, x^(1/2) juga dimungkinkan.
Untuk mensetting variabel, gunakan "=" atau ":=". Demi kejelasan, pendahuluan ini menggunakan bentuk yang terakhir. Spasi tidak penting.
Tapi jarak antar perintah diharapkan.
Beberapa perintah dalam satu baris dipisahkan dengan "," atau ";". Titik koma menekan keluaran perintah. Di akhir baris perintah, ","
diasumsikan, jika ";" hilang.

```
>g:=9.81; t:=2.5; 1/2*g*t^2
```

```
30.65625
```

EMT menggunakan sintaks pemrograman untuk ekspresi. Memasuki

$$e^2 \cdot \left(\frac{1}{3+4\log(0.6)} + \frac{1}{7}\right)$$

Anda harus mengatur tanda kurung yang benar dan menggunakan / untuk pecahan. Perhatikan tanda kurung yang disorot untuk mendapatkan bantuan. Perhatikan bahwa konstanta Euler e diberi nama E dalam EMT.

```
>E^2*(1/(3+4*log(0.6))+1/7)
```

```
8.77908249441
```

Untuk menghitung ekspresi rumit seperti

$$\left(\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\right)^2 \pi$$

Anda harus memasukkannya dalam formulir baris.

```
>((1/7 + 1/8 + 2) / (1/3 + 1/2))^2 * pi
```

```
23.2671801626
```

Letakkan tanda kurung dengan hati-hati di sekitar sub-ekspresi yang perlu dihitung terlebih dahulu. EMT membantu Anda dengan
menyorot ekspresi yang mengakhiri tanda kurung tutup. Anda juga harus memasukkan nama "pi" untuk huruf Yunani pi.
Hasil perhitungan ini berupa bilangan floating point. Ini secara default dicetak dengan akurasi sekitar 12 digit. Di baris perintah berikut, kita juga mempelajari bagaimana kita bisa merujuk ke hasil sebelumnya dalam baris yang sama.

```
>1/3+1/7, fraction %
```

```
0.47619047619
10/21
```

Perintah Euler dapat berupa ekspresi atau perintah primitif. Ekspresi terbuat dari operator dan fungsi. Jika perlu, harus berisi tanda kurung untuk memaksakan urutan eksekusi yang benar. Jika ragu, memasang braket adalah ide yang bagus. Perhatikan bahwa EMT menampilkan tanda kurung buka dan tutup saat mengedit baris perintah.

```
>(cos(pi/4)+1)^3*(sin(pi/4)+1)^2
```

```
14.4978445072
```

Operator numerik Euler meliputi

```
+ unary atau operator plus
- unary atau operator minus
*, /
.hasil kali matriks
a^b pangkat untuk a positif atau bilangan bulat b(a**b juga
berfungsi)
n! operator faktorial
```

dan masih banyak lagi
Berikut beberapa fungsi yang mungkin Anda perlukan. Berikut beberapa fungsi yang mungkin Anda perlukan. Masih banyak lagi.
sin,cos,tan,atan,asin,acos,rad,deg log,exp,log10,sqrt,logbase
bin,logbin,logfac,mod,floor,ceil,round,abs,sign
conj,re,im,arg,conj , nyata, beta kompleks, betai, gamma, gamma kompleks, ellrf, ellf, ellrd, elle bitand, bitor, bitxor, bitnot.
Beberapa perintah mempunyai alias, misalnya ln untuk log.

```
>ln(E^2), arctan(tan(0.5))
```

```
2
0.5
```

```
>sin(30°)
```

```
0.5
```

Pastikan untuk menggunakan tanda kurung (tanda kurung bulat), setiap kali ada keraguan tentang urutan eksekusi! Berikut ini tidak sama dengan
(2^3)^4, yang merupakan default untuk 2^3^4 di EMT (beberapa sistem numerik melakukannya dengan cara lain).

```
>2^3^4, (2^3)^4, 2^(3^4)
```

```
2.41785163923e+24
4096
2.41785163923e+24
```

Contoh dan Penyelesaian
1. Tentukan hasil dari operasi bilangan dibawah ini

$$\left(\frac{4(8-6)^2-4*3+2*8}{3^1+19^0}\right)$$

```
Penyelesaian:
```

```
>$&(4*(8-6)^2-4*3+2*8)/(3^1+19^0)
```

$$5$$

```
Jadi hasil dari operasi bilangan diatas adalah 5
```

2. Tentukan hasil dari operasi bilangan berikut

$$\left(\frac{[4(8-6)^2+4](3-2*8)}{2^2(2^3+5)}\right)$$

```
Penyelesaian:
```

```
>$&((4*(8-6)^2+4)*(3-2*8))/(2^2*(2^3+5))
```

$$-5$$

```
Jadi hasil dari operasi diatas adalah -5
```

3. Tentukan nilai dari log 0,01 + log 1000

```
Penyelesaian:
```

```
>log(0.01)+log(1000)
```

```
2.30258509299
```

Jadi nilai penjumlahan logaritma diatas adalah 2.30
4.Tentukan nilai dari sin^(-1}(sin(7pi/6))

```
Penyelesaian:
```

```
>arcsin(sin(7*pi/6))
```

```
-0.523598775598
```

Bilangan Real

Tipe data primer pada Euler adalah bilangan real. Real direpresentasikan dalam format IEEE dengan akurasi sekitar 16 digit desimal.

```
>longest 1/3
```

```
     0.3333333333333333
```

Representasi ganda internal membutuhkan 8 byte.

```
>printdual(1/3)
```

```
1.0101010101010101010101010101010101010101010101010101*2^-2
```

```
>printhex(1/3)
```

```
5.5555555555554*16^-1
```

String

Sebuah string di Euler didefinisikan dengan "...".

```
>"A string can contain anything."
```

```
A string can contain anything.
```

String dapat digabungkan dengan | atau dengan +. Ini juga berfungsi dengan angka, yang dalam hal ini diubah menjadi string.

```
>"The area of the circle with radius " + 2 + " cm is " + pi*4 + " cm^2."
```

```
The area of the circle with radius 2 cm is 12.5663706144 cm^2.
```

Fungsi print juga mengubah angka menjadi string. Ini dapat memerlukan sejumlah digit dan sejumlah tempat (0 untuk keluaran padat), dan
optimalnya satuan.

```
>"Golden Ratio : " + print((1+sqrt(5))/2,5,0)
```

```
Golden Ratio : 1.61803
```

Ada string khusus none yang tidak dicetak. Itu dikembalikan oleh beberapa fungsi, ketika hasilnya tidak menjadi masalah. (Ini dikembalikan secara otomatis, jika fungsi tidak memiliki pernyataan return.)

```
>none
```

Untuk mengonversi string menjadi angka, cukup evaluasi saja. Ini juga berfungsi untuk ekspresi (lihat di bawah).

```
>"1234.5"()
```

```
1234.5
```

Untuk mendefinisikan vektor string, gunakan notasi vektor [...].

```
>v:=["affe","charlie","bravo"]
```

```
affe
charlie
bravo
```

Vektor string kosong dilambangkan dengan [none]. Vektor string dapat digabungkan.

```
>w:=[none]; w|v|v
```

```
affe
charlie
bravo
affe
charlie
bravo
```

String dapat berisi karakter Unicode. Secara internal, string ini berisi kode UTF-8. Untuk menghasilkan string seperti itu, gunakan u"..." dan salah satu entitas HTML
String Unicode dapat digabungkan seperti string lainnya.

```
>u"&alpha; = " + 45 + u"&deg;" // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara
```

```
 = 45°
```

I

Di komentar, entitas yang sama seperti , , dll, dapat digunakan. Ini mungkin merupakan alternatif cepat untuk Lateks(Keterangan lebih lanjut pada komentar di bawah)

Ada beberapa fungsi untuk membuat atau menganalisis string unicode. Fungsi strtochar() akan mengenali string Unicode dan menerjemahkannya dengan benar.

```
>v=strtochar(u"&Auml; is a German letter")
```

```
[196,  32,  105,  115,  32,  97,  32,  71,  101,  114,  109,  97,  110,
32,  108,  101,  116,  116,  101,  114]
```

Hasilnya adalah vektor angka Unicode. Fungsi kebalikannya adalah chartoutf().

```
>v[1]=strtochar(u"&Uuml;")[1]; chartoutf(v)
```

```
Ü is a German letter
```

Fungsi utf() dapat menerjemahkan string dengan entitas dalam variabel menjadi string Unicode.

```
>s="We have &alpha;=&beta;."; utf(s) // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan
```

```
We have =.
```

Dimungkinkan juga untuk menggunakan entitas numerik.

```
>u"&#196;hnliches"
```

```
Ähnliches
```

Nilai Boolean

Nilai Boolean diwakili dengan 1=true atau 0=false di Euler. String dapat dibandingkan, seperti halnya angka.

```
>2<1, "apel"<"banana"
```

```
0
1
```

"and" adalah operator "&&" dan "or" adalah operator "||", seperti dalam bahasa C. (Kata "and" dan "or" hanya dapat digunakan dalam
kondisi "if".)

```
>2<E && E<3
```

```
1
```

Operator Boolean mematuhi aturan bahasa matriks.

```
>(1:10)>5, nonzeros(%)
```

```
[0,  0,  0,  0,  0,  1,  1,  1,  1,  1]
[6,  7,  8,  9,  10]
```

Anda dapat menggunakan fungsi nonzeros() untuk mengekstrak elemen tertentu dari vektor. Dalam contoh ini, kita menggunakan kondisi isprime(n).

```
>N=2|3:2:99 // N berisi elemen 2 dan bilangan2 ganjil dari 3 s.d. 99
```

```
[2,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29,
31,  33,  35,  37,  39,  41,  43,  45,  47,  49,  51,  53,  55,  57,
59,  61,  63,  65,  67,  69,  71,  73,  75,  77,  79,  81,  83,  85,
87,  89,  91,  93,  95,  97,  99]
```

```
>N[nonzeros(isprime(N))] //pilih anggota2 N yang prima
```

```
[2,  3,  5,  7,  11,  13,  17,  19,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47,
53,  59,  61,  67,  71,  73,  79,  83,  89,  97]
```

Format Keluaran

Format keluaran default EMT mencetak 12 digit. Untuk memastikan bahwa kami melihat defaultnya, kami mengatur ulang formatnya.

```
>defformat; pi
```

```
3.14159265359
```

Secara internal, EMT menggunakan standar IEEE untuk bilangan ganda dengan sekitar 16 digit desimal. Untuk melihat jumlah digit secara lengkap gunakan perintah "longestformat", atau kita gunakan operator "longest" untuk menampilkan hasilnya dalam format terpanjang.

```
>longest pi
```

```
      3.141592653589793
```

Berikut adalah representasi heksadesimal internal dari bilangan ganda.

```
>printhex(pi)
```

```
3.243F6A8885A30*16^0
```

Format keluaran dapat diubah secara permanen dengan perintah format.

```
>format(12,5); 1/3, pi, sin(1)
```

```
      0.33333
      3.14159
      0.84147
```

Standarnya adalah format(12).

```
>format(12); 1/3
```

```
 0.333333333333
```

Fungsi seperti "shortestformat", "shortformat", "longformat" berfungsi untuk vektor dengan cara berikut.

```
>shortestformat; random(3,8)
```

```
   0.66     0.2    0.89    0.28    0.53    0.31    0.44     0.3
   0.28    0.88    0.27     0.7    0.22    0.45    0.31    0.91
   0.19    0.46   0.095     0.6    0.43    0.73    0.47    0.32
```

Format default untuk skalar adalah format(12). Tapi ini bisa diubah.

```
>setscalarformat(5); pi
```

```
 3.1416
```

Fungsi"longestformat" juga mengatur format skala.

```
>longestformat; pi
```

```
 3.141592653589793
```

Sebagai referensi, berikut adalah daftar format keluaran terpenting.

```
shortestformat shortformat longformat, longestformat
format(length,digits) goodformat(length)
fracformat(length)
defformat
```

Akurasi internal EMT adalah sekitar 16 tempat desimal, yang merupakan standar IEEE. Nomor disimpan dalam format internal ini.
Namun format keluaran EMT dapat diatur dengan cara yang fleksibel.

```
>longestformat; pi,
```

```
3.141592653589793
```

```
>format(10,5); pi
```

```
   3.14159
```

Defaultnya adalah defformat().

```
>defformat; // default
```

Ada operator pendek yang hanya mencetak satu nilai. Operator "longest(terpanjang)" akan mencetak semua digit nomor yang valid.

```
>longest pi^2/2
```

```
      4.934802200544679
```

Ada juga operator pendek untuk mencetak hasil dalam format pecahan. Kami sudah menggunakannya di atas.

```
>fraction 1+1/2+1/3+1/4
```

```
25/12
```

Karena format internal menggunakan cara biner untuk menyimpan angka, nilai 0,1 tidak akan direpresentasikan secara tepat. Kesalahannya bertambah sedikit, seperti yang Anda lihat pada perhitungan berikut.
Akurasi internal EMT adalah sekitar 16 tempat desimal, yang merupakan standar IEEE. Nomor disimpan dalam format internal ini.

```
>longest 0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

```
 -1.110223024625157e-16
```

Tetapi dengan "longformat" default Anda tidak akan menyadarinya. Untuk kenyamanan, keluaran angka yang sangat kecil adalah 0.

```
>0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

    0

Ekspresi

String atau nama dapat digunakan untuk menyimpan ekspresi matematika, yang dapat dievaluasi dengan EMT. Untuk ini, gunakan tanda kurung
setelah ekspresi. Jika Anda ingin menggunakan string sebagai ekspresi, gunakan konvensi untuk menamainya "fx" atau "fxy" dll. Ekspresi lebih
diutamakan daripada fungsi.
Variabel global dapat digunakan dalam evaluasi

```
>r:=2; fx:="pi*r^2"; longest fx()
```

          12.56637061435917

Parameter ditetapkan ke x, y, dan z dalam urutan itu. Parameter tambahan dapat ditambahkan menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>fx:="a*sin(x)^2"; fx(5,a=-1)
```

    -0.919535764538

Perhatikan bahwa ekspresi akan selalu menggunakan variabel global, meskipun ada variabel dalam fungsi dengan nama yang sama. (Jika
tidak, evaluasi ekspresi dalam fungsi dapat memberikan hasil yang sangat membingungkan bagi pengguna yang memanggil fungsi tersebut).

```
>at:=4; function f(expr,x,at) := expr(x); ...
>f("at*x^2",3,5) // computes 4*3^2 not 5*3^2
```

    36

Jika Anda ingin menggunakan nilai lain untuk "at" selain nilai global, Anda perlu menambahkan "at=value".

```
>at:=4; function f(expr,x,a) := expr(x,at=a); ...
>f("at*x^2",3,5)
```

    45

Sebagai referensi, kami mencatat bahwa koleksi panggilan (dibahas di tempat lain) dapat berisi ekspresi. Jadi kita bisa membuat contoh
di atas sebagai berikut.

```
>at:=4; function f(expr,x) := expr(x); ...
>f({{"at*x^2",at=5}},3)
```

```
45
```

Ekspresi dalam x sering digunakan seperti halnya fungsi.
Perhatikan bahwa mendefinisikan fungsi dengan nama yang sama seperti ekspresi simbolik global akan menghapus variabel ini untuk
menghindari kebingungan antara ekspresi simbolik dan fungsi.

```
>f &= 5*x;
>function f(x) := 6*x;
>f(2)
```

```
12
```

Berdasarkan konvensi, ekspresi simbolik atau numerik harus diberi nama fx, fxy dll. Skema penamaan ini tidak boleh digunakan untuk fungsi.

```
>fx &= diff(x^x,x); $&fx
```

$$x^x\,\left(\log x+1\right)$$

Bentuk ekspresi khusus memungkinkan variabel apa pun sebagai parameter yang tidak disebutkan namanya untuk mengevaluasi ekspresi, bukan hanya "x", "y", dll. Untuk ini, mulailah ekspresi dengan "@(variabel) ...".

```
>"@(a,b) a^2+b^2", %(4,5)
```

```
@(a,b) a^2+b^2
41
```

Hal ini memungkinkan untuk memanipulasi ekspresi dalam variabel lain untuk fungsi EMT yang memerlukan ekspresi dalam "x".
Cara paling dasar untuk mendefinisikan suatu fungsi sederhana adalah dengan menyimpan rumusnya dalam ekspresi simbolik atau numerik. Jika variabel utamanya adalah x, ekspresi dapat dievaluasi seperti halnya fungsi.
Seperti yang Anda lihat pada contoh berikut, variabel global terlihat selama evaluasi.

```
>fx &= x^3-a*x;  ...
>a=1.2; fx(0.5)
```

```
-0.475
```

Semua variabel lain dalam ekspresi dapat ditentukan dalam evaluasi menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>fx(0.5,a=1.1)
```

```
-0.425
```

Sebuah ekspresi tidak perlu bersifat simbolis. Hal ini diperlukan, jika ekspresi berisi fungsi, yang hanya diketahui di kernel numerik,
bukan di Maxima

Matematika Simbolik

EMT melakukan matematika simbolis dengan bantuan Maxima. Untuk detailnya, mulailah dengan tutorial berikut, atau telusuri referensi
untuk Maxima. Para ahli di Maxima harus memperhatikan bahwa ada perbedaan sintaksis antara sintaksis asli Maxima dan sintaksis
default ekspresi simbolik di EMT.
Matematika simbolik diintegrasikan ke dalam Euler dengan &. Ekspresi apa pun yang dimulai dengan & adalah ekspresi simbolis. Itu
dievaluasi dan dicetak oleh Maxima.
Pertama-tama, Maxima memiliki aritmatika "tak terbatas" yang dapat menangani bilangan yang sangat besar

```
>$&44!
```

$$2658271574788448768043625811014615890319638528000000000$$

Dengan cara ini, Anda dapat menghitung hasil yang besar dengan tepat. Mari kita menghitung.

$$C(44,10)=\frac{44!}{34!\cdot 10!}$$

```
>$& 44!/(34!*10!) // nilai C(44,10)
```

$$2481256778$$

Tentu saja, Maxima memiliki fungsi yang lebih efisien untuk ini(seperti halnya bagian numerik EMT).

```
>$binomial(44,10) //menghitung C(44,10) menggunakan fungsi binomial()
```

$$2481256778$$

Untuk mempelajari lebih lanjut tentang fungsi tertentu, klik dua kali. Misalnya, mencoba klik dua kali pada "&binomial" di baris
perintah sebelumnya. Ini membuka dokumentasi Maxima yang disediakan oleh penulis program tersebut.
Anda akan mengetahui bahwa cara berikut juga bisa dilakukan.

$$C(x,3)=\frac{x!}{(x-3)!3!}=\frac{(x-2)(x-1)x}{6}$$

```
>$binomial(x,3) // C(x,3)
```

$$\frac{(x-2)\,(x-1)\,x}{6}$$

Jika Anda ingin mengganti x dengan nilai tertentu, gunakan "with".

```
>$&binomial(x,3) with x=10 // substitusi x=10 ke C(x,3)
```

$$120$$

Dengan begitu Anda bisa menggunakan solusi suatu persamaan di persamaan lain.

Ekspresi simbolik dicetak oleh Maxima dalam bentuk 2D. Alasannya adalah adanya tanda simbolis khusus pada string tersebut.
Seperti yang telah Anda lihat pada contoh sebelumnya dan contoh berikut, jika Anda telah menginstal LaTeX, Anda dapat mencetak ekspresi
simbolik dengan Latex. Jika tidak, perintah berikut akan mengeluarkan pesan kesalahan.
Untuk mencetak ekspresi simbolik dengan LaTeX, gunakan $ di depan & (atau Anda dapat menghilangkan &) sebelum perintah. Jangan jalankan perintah Maxima dengan $, jika Anda belum menginstal LaTeX.

```
>$(3+x)/(x^2+1)
```

$$\frac{x+3}{x^2+1}$$

Ekspresi simbolik diurai oleh Euler. Jika Anda memerlukan sintaksis kompleks dalam satu ekspresi, Anda dapat mengapit ekspresi
tersebut di "...". Menggunakan lebih dari sekadar ekspresi sederhana bisa saja dilakukan, namun sangat tidak disarankan.

```
>&"v := 5; v^2"
```

```
25
```

Untuk kelengkapannya, kami mencatat bahwa ekspresi simbolik dapat digunakan dalam program, namun perlu diapit dalam tanda
kutip. Selain itu, akan jauh lebih efektif untuk memanggil Maxima pada waktu kompilasi jika memungkinkan.

```
>$&expand((1+x)^4), $&factor(diff(%,x)) // diff: turunan, factor: faktor
```

$$x^4+4\,x^3+6\,x^2+4\,x+1$$

$$4\,\left(x+1\right)^3$$

Sekali lagi, % mengacu pada hasil sebelumnya.
Untuk mempermudah kami menyimpan solusi ke variabel simbolik. Variabel simbolik didefinisikan dengan "&=".

```
>fx &= (x+1)/(x^4+1); $&fx
```

$$\frac{x+1}{x^4+1}$$

Ekspresi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&factor(diff(fx,x))
```

$$\frac{-3\,x^4-4\,x^3+1}{\left(x^4+1\right)^2}$$

Input langsung dari perintah Maxima juga tersedia. Mulai baris perintah dengan "::". Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT(disebut "mode kompatibilitas").

```
>&factor(20!)
```

```
2432902008176640000
```

```
>::: factor(10!)
```

```
 8   4   2
2   3   5   7
```

```
>:: factor(20!)
```

```
 18   8   4   2
2    3   5   7   11  13  17  19
```

Jika Anda ahli dalam Maxima, Anda mungkin ingin menggunakan sintaks asli Maxima. Anda dapat melakukan ini dengan ":::".

```
>::: av:g$ av^2;
```

```
 2
g
```

```
>fx &= x^3*exp(x), $fx
```

```
 3   x
x   E
```

$$x^3 \, e^x$$

Variabel tersebut dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya. Perhatikan, bahwa dalam perintah berikut sisi kanan &= dievaluasi
sebelum ditugaskan ke Fx.

```
>&(fx with x=5), $%, &float(%)
```

```
                                   5
                              125 E
```

$$125\,e^5$$

```
                          18551.64488782208
```

```
>fx(5)
```

```
18551.6448878
```

Untuk mengevaluasi ekspresi dengan nilai variabel tertentu, Anda dapat menggunakan operator "with".
Baris perintah berikut juga menunjukkan bahwa Maxima dapat mengevaluasi ekspresi secara numerik dengan float().

```
>&(fx with x=10)-(fx with x=5), &float(%)
```

```
                              10         5
                        1000 E   - 125 E
```

```
                         2.20079141499189e+7
```

```
>$factor(diff(fx,x,2))
```

$$x\,\left(x^2+6\,x+6\right)\,e^{x}$$

Untuk mendapatkan kode Lateks untuk sebuah ekspresi, Anda dapat menggunakan perintah tex.

```
>tex(fx)
```

```
x^3\,e^{x}
```

Ekspresi simbolik dapat dievaluasi seperti halnya ekspresi numerik.

```
>fx(0.5)
```

```
0.206090158838
```

Dalam ekspresi simbolis, ini tidak berhasil, karena Maxima tidak mendukungnya. Sebagai gantinya, gunakan sintaks "with" (bentuk
perintah at(...) yang lebih bagus dari Maxima).

```
>$&fx with x=1/2
```

$$\frac{\sqrt{e}}{8}$$

Penugasannya juga bisa bersifat simbolis

```
>$&fx with x=1+t
```

$$\left(t+1\right)^3\,e^{t+1}$$

Perintah solve menyelesaikan ekspresi simbolik untuk variabel di Maxima. Hasilnya adalah vektor solusi.

```
>$&solve(x^2+x=4,x)
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{17}-1}{2} , x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right]$$

Bandingkan dengan perintah numerik "solve" di Euler, yang memerlukan nilai awal, dan opsional nilai target.

```
>solve("x^2+x",1,y=4)
```

```
1.56155281281
```

Nilai numerik dari solusi simbolik dapat dihitung dengan evaluasi hasil simbolik. Euler akan membacakan tugas x= dst. Jika Anda tidak
memerlukan hasil numerik untuk perhitungan lebih lanjut, Anda juga dapat membiarkan Maxima menemukan nilai numeriknya.

```
>sol &= solve(x^2+2*x=4,x); $&sol, sol(), $&float(sol)
```

$$\left[x=-\sqrt{5}-1 , x=\sqrt{5}-1\right]$$

```
[-3.23607,  1.23607]
```

$$[x=-3.23606797749979 , x=1.23606797749979]$$

Untuk mendapatkan solusi simbolik tertentu, seseorang dapat menggunakan "with" dan index.

```
>$&solve(x^2+x=1,x), x2 &= x with %[2]; $&x2
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{5}-1}{2} , x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan, gunakan vektor persamaan. Hasilnya adalah vektor solusi.

```
>sol &= solve([x+y=3,x^2+y^2=5],[x,y]); $&sol, $&x*y with sol[1]
```

$$\left[\left[x=2 , y=1\right] , \left[x=1 , y=2\right]\right]$$

$$2$$

Ekspresi simbolis dapat memiliki bendera, yang menunjukkan perlakuan khusus di Maxima. Beberapa flag dapat digunakan sebagai perintah juga, yang lainnya tidak. Bendera ditambahkan dengan "|" (bentuk yang lebih bagus dari "ev(...,flags)"

```
>$& diff((x^3-1)/(x+1),x) //turunan bentuk pecahan
```

$$\frac{3\,x^2}{x+1}-\frac{x^3-1}{\left(x+1\right)^2}$$

```
>$& diff((x^3-1)/(x+1),x) | ratsimp //menyederhanakan pecahan
```

$$\frac{2\,x^3+3\,x^2+1}{x^2+2\,x+1}$$

```
>$&factor(%)
```

$$\frac{2\,x^3+3\,x^2+1}{\left(x+1\right)^2}$$

Fungsi

Dalam EMT, fungsi adalah program yang didefinisikan dengan perintah "fungsi". Ini bisa berupa fungsi satu baris atau fungsi multibaris.
ungsi satu baris dapat berupa numerik atau simbolik. Fungsi satu baris numerik didefinisikan oleh ":=".

```
>function f(x) := x*sqrt(x^2+1)
```

Untuk gambaran umum, kami menunjukkan semua kemungkinan definisi untuk fungsi satu baris. Suatu fungsi dapat dievaluasi sama
seperti fungsi Euler bawaan lainnya.

```
>f(2)
```

```
4.472135955
```

Fungsi ini juga dapat digunakan untuk vektor, mengikuti bahasa matriks Euler, karena ekspresi yang digunakan dalam fungsi tersebut divektorkan.

```
>f(0:0.1:1)
```

```
[0,  0.100499,  0.203961,  0.313209,  0.430813,  0.559017,  0.699714,
0.854459,  1.0245,  1.21083,  1.41421]
```

Fungsi dapat diplot. Daripada ekspresi, kita hanya perlu memberikan nama fungsinya.
erbeda dengan ekspresi simbolik atau numerik, nama fungsi harus diberikan dalam string.

```
>solve("f",1,y=1)
```

```
0.786151377757
```

Secara default, jika Anda perlu menimpa fungsi bawaan, Anda harus menambahkan kata kunci "timpa". Menimpa fungsi bawaan berbahaya dan
dapat menyebabkan masalah pada fungsi lain yang bergantung pada fungsi tersebut.
Anda masih dapat memanggil fungsi bawaan sebagai "_...", jika fungsi tersebut ada di inti Euler.

```
>function overwrite sin (x) := _sin(x°) // redine sine in degrees
>sin(45)
```

```
0.707106781187
```

Sebaiknya kita menghilangkan definisi ulang sin

```
>forget sin; sin(pi/4)
```

```
0.707106781187
```

Parameter Default

Fungsi numerik dapat memiliki parameter default

```
>function f(x,a=1) := a*x^2
```

Menghilangkan parameter ini akan menggunakan nilai default.

```
>f(4)
```

```
16
```

Mengaturnya akan menimpa nilai default

```
>f(4,5)
```

```
80
```

Parameter yang ditetapkan akan menimpanya juga. Ini digunakan oleh banyak fungsi Euler seperti plot2d, plot3d.

```
>f(4,a=1)
```

```
16
```

Jika suatu variabel bukan parameter, maka harus bersifat global. Fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

```
>function f(x) := a*x^2
>a=6; f(2)
```

```
24
```

Namun parameter yang ditetapkan mengesampingkan nilai global.
Jika argumen tidak ada dalam daftar parameter yang telah ditentukan sebelumnya, argumen tersebut harus dideklarasikan dengan ":="!

```
>f(2,a:=5)
```

```
20
```

Fungsi simbolik didefinisikan dengan "&=". Mereka didefinisikan di Euler dan Maxima, dan bekerja di kedua dunia.
Ekspresi yang menentukan dijalankan melalui Maxima sebelum definisi.

```
>function g(x) &= x^3-x*exp(-x); $&g(x)
```

$$x^3 - x\,e^{-x}$$

Fungsi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik.

```
>$&diff(g(x),x), $&% with x=4/3
```

$$x\,e^{-x} - e^{-x} + 3\,x^2$$

$$\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{3} + \frac{16}{3}$$

Mereka juga dapat digunakan dalam ekspresi numerik. Tentu saja, ini hanya akan berfungsi jika EMT dapat menafsirkan semua yang ada
di dalam fungsi tersebut.

```
>g(5+g(1))
```

```
178.635099908
```

Mereka dapat digunakan untuk mendefinisikan fungsi atau ekspresi simbolik lainnya.

```
>function G(x) &= factor(integrate(g(x),x)); $&G(c) // integrate: menginteg
```

$$\frac{e^{-c}\left(c^4\,e^c+4\,c+4\right)}{4}$$

```
>solve(&g(x),0.5)
```

```
0.703467422498
```

Berikut ini juga berfungsi, karena Euler menggunakan ekspresi simbolik dalam fungsi g, jika tidak menemukan variabel simbolik g, dan jika terdapat fungsi simbolik g.

```
>solve(&g,0.5)
```

```
0.703467422498
```

```
>function P(x,n) &= (2*x-1)^n; $&P(x,n)
```

$$(2\,x-1)^n$$

```
>function Q(x,n) &= (x+2)^n; $&Q(x,n)
```

$$(x+2)^n$$

```
>$&P(x,4), $&expand(%)
```

$$(2\,x-1)^4$$

$$16\,x^4-32\,x^3+24\,x^2-8\,x+1$$

```
>P(3,4)
```

```
625
```

```
>$&P(x,4)+ Q(x,3), $&expand(%)
```

$$(2\,x-1)^4+(x+2)^3$$

$$16\,x^4-31\,x^3+30\,x^2+4\,x+9$$

```
>$&P(x,4)-Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$(2\,x-1)^4-(x+2)^3$$

$$16\,x^4-33\,x^3+18\,x^2-20\,x-7$$

$$16\,x^4-33\,x^3+18\,x^2-20\,x-7$$

```
>$&P(x,4)*Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$(x+2)^3\,(2\,x-1)^4$$

$$16\,x^7+64\,x^6+24\,x^5-120\,x^4-15\,x^3+102\,x^2-52\,x+8$$

$$(x+2)^3\,(2\,x-1)^4$$

```
>$&P(x,4)/Q(x,1), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$\frac{(2\,x-1)^4}{x+2}$$

$$\frac{16\,x^4}{x+2}-\frac{32\,x^3}{x+2}+\frac{24\,x^2}{x+2}-\frac{8\,x}{x+2}+\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{(2\,x-1)^4}{x+2}$$

```
>function f(x) &= x^3-x; $&f(x)
```

$$x^3 - x$$

Dengan &= fungsinya bersifat simbolis, dan dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&integrate(f(x),x)
```

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

Dengan := fungsinya numerik. Contoh yang baik adalah integral tentu

$$f(x) = \int_1^x t^t \, dt,$$

yang tidak dapat dievaluasi secara simbolis.
Jika kita mendefinisikan ulang fungsi tersebut dengan kata kunci "map" maka dapat digunakan untuk vektor x. Secara internal,fungsi ini dipanggil untuk semua nilai x satu kali, dan hasilnya disimpan dalam vektor.

```
>function map f(x) := integrate("x^x",1,x)
>f(0:0.5:2)
```

```
[-0.783431,  -0.410816,  0,  0.676863,  2.05045]
```

Fungsi dapat memiliki nilai default untuk parameter.

```
>function mylog (x,base=10) := ln(x)/ln(base);
```

Sekarang fungsinya bisa dipanggil dengan atau tanpa parameter "base".

```
>mylog(100), mylog(2^6.7,2)
```

```
2
6.7
```

Selain itu, dimungkinkan untuk menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>mylog(E^2,base=E)
```

```
2
```

Seringkali, kita ingin menggunakan fungsi untuk vektor di satu tempat, dan untuk elemen individual di tempat lain. Hal ini dimungkinkan
dengan parameter vektor.

```
>function f([a,b]) &= a^2+b^2-a*b+b; $&f(a,b), $&f(x,y)
```

$$b^2 - a\,b + b + a^2$$

$$y^2 - x\,y + y + x^2$$

Fungsi simbolik seperti ini dapat digunakan untuk variabel simbolik.
Namun fungsinya juga dapat digunakan untuk vektor numerik.

```
>v=[3,4]; f(v)
```

```
17
```

Ada juga fungsi yang murni simbolik, yang tidak dapat digunakan secara numerik.

```
>function lapl(expr,x,y) &&= diff(expr,x,2)+diff(expr,y,2)//turunan parsial
```

```
diff(expr, y, 2) + diff(expr, x, 2)
```

```
>$&realpart((x+I*y)^4), $&lapl(%,x,y)
```

$$y^4 - 6\,x^2\,y^2 + x^4$$

$$0$$

Namun tentu saja, mereka dapat digunakan dalam ekspresi simbolik atau dalam definisi fungsi simbolik.

```
>function f(x,y) &= factor(lapl((x+y^2)^5,x,y)); $&f(x,y)
```

$$10\,\left(y^2+x\right)^3\,\left(9\,y^2+x+2\right)$$

Ringkasan
- &= Mendefinisikan fungsi simbolik,
- := Mendefinisikan fungsi numerik,
- &&= Mendefinisikan fungsi simbolik murni.

Pemecahan Ekspresi

Ekspresi dapat diselesaikan secara numerik dan simbolis.
Untuk menyelesaikan ekspresi sederhana dari satu variabel, kita dapat menggunakan fungsi solve(). Dibutuhkan nilai awal untuk memulai
pencarian. Secara internal, solve() menggunakan metode secant.

```
>solve("x^2-2",1)
```

```
1.41421356237
```

Ini juga berfungsi untuk ekspresi simbolik. Ambil fungsi berikut.

```
>$&solve(x^2=2,x)
```

$$\left[x=-\sqrt{2} , x=\sqrt{2} \right]$$

```
>$&solve(x^2-2,x)
```

$$\left[x=-\sqrt{2} , x=\sqrt{2} \right]$$

```
>$&solve(a*x^2+b*x+c=0,x)
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a} , x=\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a} \right]$$

```
>$&solve([a*x+b*y=c,d*x+e*y=f],[x,y])
```

$$\left[\left[x=-\frac{c\,e}{b\,(d-5)-a\,e},y=\frac{c\,(d-5)}{b\,(d-5)-a\,e}\right]\right]$$

```
>px &= 4*x^8+x^7-x^4-x; $&px
```

$$4\,x^8+x^7-x^4-x$$

Sekarang kita mencari titik yang polinomialnya adalah 2. Dalam solve(), nilai target default y=0 dapat diubah dengan variabel yang ditetapkan.
Kami menggunakan y=2 dan memeriksa dengan mengevaluasi polinomial pada hasil sebelumnya.

```
>solve(px,1,y=2), px(%)
```

```
0.966715594851
2
```

Memecahkan ekspresi simbolik dalam bentuk simbolik mengembalikan daftar solusi. Kami menggunakan pemecah simbolis solve()y ang disediakan oleh Maxima.

```
>sol &= solve(x^2-x-1,x); $&sol
```

$$\left[x=\frac{1-\sqrt{5}}{2},x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$$

Cara termudah untuk mendapatkan nilai numerik adalah dengan mengevaluasi solusi secara numerik seperti halnya ekspresi.

```
>longest sol()
```

```
    -0.6180339887498949       1.618033988749895
```

Untuk menggunakan solusi secara simbolis dalam ekspresi lain, cara termudah adalah "with".

```
>$&x^2 with sol[1], $&expand(x^2-x-1 with sol[2])
```

$$\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4}$$

$$0$$

Penyelesaian sistem persamaan secara simbolis dapat dilakukan dengan vektor persamaan dan solver simbolis solve(). Jawabannya adalah daftar
daftar persamaan.

```
>$&solve([x+y=2,x^3+2*y+x=4],[x,y])
```

$$[[x=-1,y=3]\,,[x=1,y=1]\,,[x=0,y=2]]$$

Fungsi f() dapat melihat variabel global. Namun seringkali kita ingin menggunakan parameter lokal.

$$a^x - x^a = 0.1$$

dengan a=3.

```
>function f(x,a) := x^a-a^x;
```

Salah satu cara untuk meneruskan parameter tambahan ke f() adalah dengan menggunakan daftar dengan nama fungsi dan parameternya (cara lainnya adalah parameter titik koma).

```
>solve({{"f",3}},2,y=0.1)
```

```
2.54116291558
```

Ini juga berfungsi dengan ekspresi. Namun kemudian, elemen daftar bernama harus digunakan. (Lebih lanjut tentang daftar di tutorial tentang sintaks EMT).

```
>solve({{"x^a-a^x",a=3}},2,y=0.1)
```

```
2.54116291558
```

Menyelesaikan Pertidaksamaan

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan, EMT tidak akan dapat melakukannya, melainkan dengan bantuan Maxima, artinya secara eksak (simbolik). Perintah Maxima yang digunakan adalah fourier_elim(), yang harus dipanggil dengan perintah "load(fourier_elim)" terlebih dahulu.

```
>&load(fourier_elim)
```

```
        C:/Program Files/Euler x64/maxima/share/maxima/5.35.1/share/f\
  ourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1>0],[x]) // x^2-1 > 0
```

$$[1 < x] \vee [x < -1]$$

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1<0],[x]) // x^2-1 < 0
```

$$[-1 < x, x < 1]$$

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1 # 0],[x]) // x^-1 <> 0
```

$$[-1 < x, x < 1] \vee [1 < x] \vee [x < -1]$$

```
>$&fourier_elim([x # 6],[x])
```

$$[x < 6] \vee [6 < x]$$

```
>$&fourier_elim([x < 1, x > 1],[x]) // tidak memiliki penyelesaian
```

$$emptyset$$

```
>$&fourier_elim([minf < x, x < inf],[x]) // solusinya R
```

$$universalset$$

```
>$&fourier_elim([x^3 - 1 > 0],[x])
```

$$\left[1<x,x^2+x+1>0\right]\vee\left[x<1,-x^2-x-1>0\right]$$

```
>$&fourier_elim([cos(x) < 1/2],[x]) // ??? gagal
```

$$[1-2\,\cos x>0]$$

```
>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[x,y]) // sistem pertidaksamaa
```

$$[y-5<x,x<y+7,10<y]$$

```
>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[y,x])
```

$$[max\,(10,x-7)<y,y<x+5,5<x]$$

```
>$&fourier_elim((x + y < 5) and (x - y >8),[x,y])
```

$$\left[y+8<x,x<5-y,y<-\frac{3}{2}\right]$$

```
>$&fourier_elim(((x + y < 5) and x < 1) or  (x - y >8),[x,y])
```

$$[y+8<x]\vee[x<min\,(1,5-y)]$$

```
>&fourier_elim([max(x,y) > 6, x # 8, abs(y-1) > 12],[x,y])
```

```
        [6 < x, x < 8, y < - 11] or [8 < x, y < - 11]
 or [x < 8, 13 < y] or [x = y, 13 < y] or [8 < x, x < y, 13 < y]
 or [y < x, 13 < y]
```

```
>$&fourier_elim([(x+6)/(x-9) <= 6],[x])
```

$$[x = 12] \vee [12 < x] \vee [x < 9]$$

Bahasa Matriks

Dokumentasi inti EMT berisi pembahasan rinci tentang bahasa matriks Euler.
Vektor dan matriks dimasukkan dengan tanda kurung siku, elemen dipisahkan dengan koma, baris dipisahkan dengan titik koma.
rated by semicolons.

```
>A=[1,2;3,4]
```

```
              1             2
              3             4
```

Hasil kali matriks dilambangkan dengan titik.

```
>b=[3;4]
```

```
              3
              4
```

```
>b' // transpose b
```

```
  [3,  4]
```

```
>inv(A) //inverse A
```

```
             -2             1
            1.5          -0.5
```

```
>A.b //perkalian matriks
```

```
             11
             25
```

```
>A.inv(A)
```

```
              1             0
              0             1
```

Poin utama dari bahasa matriks adalah semua fungsi dan operator bekerja elemen demi elemen.

```
>A.A
```

```
              7            10
             15            22
```

```
>A^2 //perpangkatan elemen2 A
```

```
              1             4
              9            16
```

```
>A.A.A
```

```
             37            54
             81           118
```

```
>power(A,3) //perpangkatan matriks
```

```
             37            54
             81           118
```

```
>A/A //pembagian elemen-elemen matriks yang seletak
```

```
              1             1
              1             1
```

```
>A/b //pembagian elemen2 A oleh elemen2 b kolom demi kolom (karena b vektor
```

```
       0.333333      0.666667
           0.75             1
```

```
>A\b // hasilkali invers A dan b, A^(-1)b
```

```
     -2
    2.5
```

```
>inv(A).b
```

```
     -2
    2.5
```

```
>A\A   //A^(-1)A
```

```
      1             0
      0             1
```

```
>inv(A).A
```

```
      1             0
      0             1
```

```
>A*A //perkalin elemen-elemen matriks seletak
```

```
      1             4
      9            16
```

Ini bukan hasil kali matriks, melainkan perkalian elemen demi elemen. Hal yang sama juga berlaku untuk vektor.

```
>b^2 // perpangkatan elemen-elemen matriks/vektor
```

```
      9
     16
```

Jika salah satu operan adalah vektor atau skalar, maka operan tersebut diperluas secara alami.

```
>2*A
```

```
                  2                   4
                  6                   8
```

Misalnya, jika operan adalah vektor kolom, elemennya diterapkan ke semua baris A.

```
>[1,2]*A
```

```
                  1                   4
                  3                   8
```

Jika ini adalah vektor baris, maka diterapkan ke semua kolom A.

```
>A*[2,3]
```

```
                  2                   6
                  6                  12
```

Kita dapat membayangkan perkalian ini seolah-olah vektor baris v telah diduplikasi untuk membentuk matriks yang sama berukuran A.

```
>dup([1,2],2) // dup: menduplikasi/menggandakan vektor [1,2] sebanyak 2 kal
```

```
                  1                   2
                  1                   2
```

```
>A*dup([1,2],2)
```

```
                  1                   4
                  3                   8
```

Hal ini juga berlaku untuk dua vektor dimana yang satu adalah vektor baris dan yang lainnya adalah vektor kolom. Kami menghitung i*j untuk i,j dari 1 sampai 5. Caranya adalah dengan mengalikan 1:5 dengan transposenya. Bahasa matriks Euler secara otomatis menghasilkan tabel nilai.

```
>(1:5)*(1:5)' // hasilkali elemen-elemen vektor baris dan vektor kolom
```

```
                  1                   2                   3                   4                   5
                  2                   4                   6                   8                  10
                  3                   6                   9                  12                  15
                  4                   8                  12                  16                  20
                  5                  10                  15                  20                  25
```

Sekali lagi, ingatlah bahwa ini bukan produk matriks!

```
>(1:5).(1:5)' // hasilkali vektor baris dan vektor kolom
```

```
55
```

```
>sum((1:5)*(1:5)) // sama hasilnya
```

```
55
```

Bahkan operator seperti < atau == bekerja dengan cara yang sama.

```
>(1:10)<6 // menguji elemen-elemen yang kurang dari 6
```

```
[1,  1,  1,  1,  1,  0,  0,  0,  0,  0]
```

Misalnya, kita dapat menghitung jumlah elemen yang memenuhi kondisi tertentu dengan fungsi sum().

```
>sum((1:10)<6) // banyak elemen yang kurang dari 6
```

```
5
```

Euler memiliki operator perbandingan, seperti "==", yang memeriksa kesetaraan.
Kita mendapatkan vektor 0 dan 1, dimana 1 berarti benar.

```
>t=(1:10)^2; t==25 //menguji elemen2 t yang sama dengan 25 (hanya ada 1)
```

```
[0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0]
```

Dari vektor tersebut, "bukan nol" memilih elemen bukan nol.
Dalam hal ini, kita mendapatkan indeks semua elemen lebih besar dari 50.

```
>nonzeros(t>50) //indeks elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

```
[8,  9,  10]
```

Tentu saja, kita dapat menggunakan vektor indeks ini untuk mendapatkan nilai yang sesuai dalam t.

```
>t[nonzeros(t>50)] //elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

```
[64,  81,  100]
```

Sebagai contoh, mari kita cari semua kuadrat bilangan 1 sampai 1000, yaitu 5 modulo 11 dan 3 modulo 13.

```
>t=1:1000; nonzeros(mod(t^2,11)==5 && mod(t^2,13)==3)
```

```
[4,  48,  95,  139,  147,  191,  238,  282,  290,  334,  381,  425,
433,  477,  524,  568,  576,  620,  667,  711,  719,  763,  810,  854,
862,  906,  953,  997]
```

EMT tidak sepenuhnya efektif untuk perhitungan bilangan bulat. Ia menggunakan floating point presisi ganda secara internal. Namun,seringkali hal ini sangat berguna.
Kita dapat memeriksa primalitasnya. Mari kita cari tahu, berapa banyak persegi ditambah 1 yang merupakan bilangan prima.

```
>t=1:1000; length(nonzeros(isprime(t^2+1)))
```

```
112
```

Fungsi nonzeros() hanya berfungsi untuk vektor. Untuk matriks, ada mnonzeros().

```
>seed(2); A=random(3,4)
```

```
     0.765761      0.401188      0.406347      0.267829
      0.13673      0.390567      0.495975      0.952814
     0.548138      0.006085      0.444255      0.539246
```

Ini mengembalikan indeks elemen, yang bukan nol.

```
>k=mnonzeros(A<0.4) //indeks elemen2 A yang kurang dari 0,4
```

```
            1             4
            2             1
            2             2
            3             2
```

Indeks ini dapat digunakan untuk mengatur elemen ke nilai tertentu.

```
>mset(A,k,0) //mengganti elemen2 suatu matriks pada indeks tertentu
```

```
    0.765761     0.401188     0.406347            0
           0            0     0.495975     0.952814
    0.548138            0     0.444255     0.539246
```

Fungsi mset() juga dapat mengatur elemen pada indeks ke entri beberapa matriks lainnya.

```
>mset(A,k,-random(size(A)))
```

```
    0.765761     0.401188     0.406347    -0.126917
   -0.122404    -0.691673     0.495975     0.952814
    0.548138    -0.483902     0.444255     0.539246
```

Dan dimungkinkan untuk mendapatkan elemen dalam vektor

```
>mget(A,k)
```

```
[0.267829,  0.13673,  0.390567,  0.006085]
```

Fungsi lain yang berguna adalah ekstrem, yang mengembalikan nilai minimal dan maksimal di setiap baris matriks
dan posisi mereka.

```
>ex=extrema(A)
```

```
    0.267829            4     0.765761            1
     0.13673            1     0.952814            4
    0.006085            2     0.548138            1
```

Kita dapat menggunakan ini untuk mengekstrak nilai maksimal di setiap baris.

```
>ex[,3]'
```

```
[0.765761,  0.952814,  0.548138]
```

Ini tentu saja sama dengan fungsi max().

```
>max(A)'
```

```
[0.765761,  0.952814,  0.548138]
```

Namun dengan mget(), kita dapat mengekstrak indeks dan menggunakan informasi ini untuk mengekstrak elemen pada posisi yang sama dari matriks lain.

```
>j=(1:rows(A))'|ex[,4], mget(-A,j)
```

```
              1             1
              2             4
              3             1
  [-0.765761,  -0.952814,  -0.548138]
```

Fungsi Matriks Lainnya (Matriks Pembangun)

Untuk membangun sebuah matriks, kita dapat menyusun satu matriks di atas matriks lainnya. Jika keduanya tidak mempunyai jumlah kolom yang sama,yang lebih pendek akan diisi dengan 0.

```
>v=1:3; v_v
```

```
              1             2             3
              1             2             3
```

Demikian pula, kita dapat melekatkan matriks ke matriks lain secara berdampingan, jika keduanya mempunyai jumlah baris yang sama.

```
>A=random(3,4); A|v'
```

```
       0.032444     0.0534171      0.595713      0.564454             1
        0.83916      0.175552      0.396988       0.83514             2
      0.0257573      0.658585      0.629832      0.770895             3
```

Jika jumlah barisnya tidak sama, matriks yang lebih pendek diisi dengan 0.
Ada pengecualian untuk aturan ini. Bilangan real yang melekat pada suatu matriks akan digunakan sebagai kolom yang diisi dengan bilangan tersebut bilangan real.

```
>A|1
```

```
       0.032444     0.0534171      0.595713      0.564454             1
        0.83916      0.175552      0.396988       0.83514             1
      0.0257573      0.658585      0.629832      0.770895             1
```

Dimungkinkan untuk membuat matriks vektor baris dan kolom.

```
>[v;v]
```

```
         1         2         3
         1         2         3
```

```
>[v',v']
```

```
         1         1
         2         2
         3         3
```

Tujuan utamanya adalah untuk menafsirkan ekspresi vektor untuk vektor kolom.

```
>"[x,x^2]"(v')
```

```
         1         1
         2         4
         3         9
```

Untuk mendapatkan ukuran A, kita bisa menggunakan fungsi berikut.

```
>C=zeros(2,4); rows(C), cols(C), size(C), length(C)
```

```
2
4
[2,  4]
4
```

Untuk vektor, ada panjang().

```
>length(2:10)
```

```
9
```

Masih banyak fungsi lain yang menghasilkan matriks.

```
>ones(2,2)
```

```
         1         1
         1         1
```

Ini juga dapat digunakan dengan satu parameter. Untuk mendapatkan vektor dengan bilangan selain 1, gunakan yang berikut ini.

```
>ones(5)*6
```

```
[6,  6,  6,  6,  6]
```

Juga matriks bilangan acak dapat dihasilkan dengan acak (uniform distribution) atau normal (Gauß distribution).

```
>random(2,2)
```

```
     0.66566     0.831835
       0.977     0.544258
```

Berikut adalah fungsi lain yang berguna, yang merestrukturisasi elemen matriks menjadi matriks lain.

```
>redim(1:9,3,3) // menyusun elemen2 1, 2, 3, ..., 9 ke bentuk matriks 3x3
```

```
              1             2             3
              4             5             6
              7             8             9
```

Dengan fungsi berikut, kita dapat menggunakan fungsi ini dan fungsi dup untuk menulis fungsi rep(), yang mengulangi a vektor n kali.

```
>function rep(v,n) := redim(dup(v,n),1,n*cols(v))
```

Mari kita uji.

```
>rep(1:3,5)
```

```
[1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3]
```

Fungsi multdup() menduplikasi elemen vektor.

```
>multdup(1:3,5), multdup(1:3,[2,3,2])
```

```
[1,  1,  1,  1,  1,  2,  2,  2,  2,  2,  3,  3,  3,  3,  3]
[1,  1,  2,  2,  2,  3,  3]
```

Fungsi flipx() dan flipy() mengembalikan urutan baris atau kolom matriks. Fungsi flipx() membalik secara horizontal.

```
>flipx(1:5) //membalik elemen2 vektor baris
```

```
[5,  4,  3,  2,  1]
```

Untuk rotasi, Euler memiliki rotleft() dan rotright().

```
>rotleft(1:5) // memutar elemen2 vektor baris
```

```
[2,  3,  4,  5,  1]
```

Fungsi khusus adalah drop(v,i), yang menghilangkan elemen dengan indeks di i dari vektor v

```
>drop(10:20,3)
```

```
[10,  11,  13,  14,  15,  16,  17,  18,  19,  20]
```

Perhatikan bahwa vektor i di drop(v,i) mengacu pada indeks elemen di v, bukan nilai elemen. Jika Anda ingin menghapus elemen, Anda perlu mencari elemennya terlebih dahulu. Fungsi indexof(v,x) dapat digunakan untuk mencari elemen x dalam vektor yang diurutkan v.

```
>v=primes(50), i=indexof(v,10:20), drop(v,i)
```

```
[2,  3,  5,  7,  11,  13,  17,  19,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47]
[0,  5,  0,  6,  0,  0,  0,  7,  0,  8,  0]
[2,  3,  5,  7,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47]
```

Seperti yang Anda lihat, tidak ada salahnya memasukkan indeks di luar rentang (seperti 0), indeks ganda, atau indeks yang tidak diurutkan.

```
>drop(1:10,shuffle([0,0,5,5,7,12,12]))
```

```
[1,  2,  3,  4,  6,  8,  9,  10]
```

Ada beberapa fungsi khusus untuk mengatur diagonal atau menghasilkan matriks diagonal.
Kita mulai dengan matriks identitas.

```
>A=id(5) // matriks identitas 5x5
```

```
              1              0              0              0              0
              0              1              0              0              0
              0              0              1              0              0
              0              0              0              1              0
              0              0              0              0              1
```

Kemudian kita atur diagonal bawah (-1) menjadi 1:4.

```
>setdiag(A,-1,1:4) //mengganti diagonal di bawah diagonal utama
```

```
            1           0           0           0           0
            1           1           0           0           0
            0           2           1           0           0
            0           0           3           1           0
            0           0           0           4           1
```

Perhatikan bahwa kami tidak mengubah matriks A. Kami mendapatkan matriks baru sebagai hasil dari setdiag().

Berikut adalah fungsi yang mengembalikan matriks tri-diagonal.

```
>function tridiag (n,a,b,c) := setdiag(setdiag(b*id(n),1,c),-1,a); ...
>tridiag(5,1,2,3)
```

```
            2           3           0           0           0
            1           2           3           0           0
            0           1           2           3           0
            0           0           1           2           3
            0           0           0           1           2
```

Diagonal suatu matriks juga dapat diekstraksi dari matriks tersebut. Untuk mendemonstrasikannya, kami merestrukturisasi vektor 1:9 menjadi matriks 3x3.

```
>A=redim(1:9,3,3)
```

```
            1           2           3
            4           5           6
            7           8           9
```

Sekarang kita dapat mengekstrak diagonalnya.

```
>d=getdiag(A,0)
```

```
[1,   5,   9]
```

Misalnya kita membagi matriks dengan diagonalnya. Bahasa matriks memperhatikan bahwa vektor kolom d diterapkan pada matriks baris demi baris.

```
>fraction A/d'
```

```
           1           2           3
         4/5           1         6/5
         7/9         8/9           1
```

Vektorisasi

Hampir semua fungsi di Euler juga berfungsi untuk input matriks dan vektor, jika hal ini masuk akal.
Misalnya, fungsi sqrt() menghitung akar kuadrat dari semua elemen vektor atau matriks.

```
>sqrt(1:3)
```

```
  [1,  1.41421,  1.73205]
```

Jadi Anda dapat dengan mudah membuat tabel nilai. Ini adalah salah satu cara untuk memplot suatu fungsi (alternatifnya menggunakan ekspresi).

```
>x=1:0.01:5; y=log(x)/x^2; // terlalu panjang untuk ditampikan
```

Dengan ini dan operator titik dua a:delta:b, vektor nilai fungsi dapat dihasilkan dengan mudah.
alam contoh berikut, kita menghasilkan vektor nilai t[i] dengan jarak 0,1 dari -1 hingga 1.
Kemudian kita menghasilkan a vektor nilai fungsi

$$s = t^3 - t$$

```
>t=-1:0.1:1; s=t^3-t
```

```
  [0,  0.171,  0.288,  0.357,  0.384,  0.375,  0.336,  0.273,  0.192,
  0.099,  0,  -0.099,  -0.192,  -0.273,  -0.336,  -0.375,  -0.384,
  -0.357,  -0.288,  -0.171,  0]
```

EMT memperluas operator untuk skalar, vektor, dan matriks dengan cara yang jelas.
Misalnya vektor kolom dikali vektor baris diperluas ke matriks, jika operator diterapkan.
Berikut ini, v' adalah vektor yang dialihkan
(vektor kolom).

```
>shortest (1:5)*(1:5)'
```

```
        1         2         3         4         5
        2         4         6         8        10
        3         6         9        12        15
        4         8        12        16        20
        5        10        15        20        25
```

Perhatikan, ini sangat berbeda dengan perkalian matriks. Hasil kali matriks dilambangkan dengan titik "." di EMT.

```
>(1:5).(1:5)'
```

```
  55
```

Secara default, vektor baris dicetak dalam format ringkas.

```
>[1,2,3,4]
```

```
  [1,  2,  3,  4]
```

Untuk matriks operator khusus . menunjukkan perkalian matriks, dan A' menunjukkan transposisi. Matriks 1x1 dapat digunakan seperti bilangan real.

```
>v:=[1,2]; v.v', %^2
```

```
  5
  25
```

Untuk mengubah urutan matriks kita menggunakan apostrophe.

```
>v=1:4; v'
```

```
              1
              2
              3
              4
```

Jadi kita dapat menghitung matriks A dikalikan vektor b.

```
>A=[1,2,3,4;5,6,7,8]; A.v'
```

```
             30
             70
```

Perhatikan bahwa v masih merupakan vektor baris. Jadi v'.v berbeda dengan v.v'.

```
>v'.v
```

```
             1             2             3             4
             2             4             6             8
             3             6             9            12
             4             8            12            16
```

v.v' menghitung norm v kuadrat untuk vektor baris v. Hasilnya adalah vektor 1x1, yang bekerja seperti vektor nyata nomor.

```
>v.v'
```

```
30
```

Ada juga fungsi norm (bersama dengan banyak fungsi Aljabar Linier lainnya).

```
>norm(v)^2
```

```
30
```

Operator dan fungsi mematuhi bahasa matriks Euler.
Berikut ringkasan peraturannya.
-Suatu fungsi yang diterapkan pada vektor atau matriks diterapkan pada setiap elemen.
-Operator yang mengoperasikan dua matriks dengan ukuran yang sama diterapkan secara berpasangan pada elemen-elemen matriks.
- Jika kedua matriks mempunyai dimensi yang berbeda, keduanya diekspansi secara wajar sehingga mempunyai ukuran yang sama.
Misalnya, nilai skalar dikalikan vektor dengan mengalikan nilai dengan setiap elemen vektor. Atau matriks dikalikan vektor (dengan *,
bukan .) memperluas vektor ke ukuran matriks dengan menduplikasinya.
Berikut ini adalah kasus sederhana dengan operator ^.

```
>[1,2,3]^2
```

```
[1,  4,  9]
```

Ini kasus yang lebih rumit. Vektor baris dikalikan vektor kolom memperluas keduanya dengan cara menduplikasi.

```
>v:=[1,2,3]; v*v'
```

```
             1             2             3
             2             4             6
             3             6             9
```

Perhatikan bahwa perkalian skalar menggunakan perkalian matriks, bukan *!

```
>v.v'
```

```
14
```

Ada banyak fungsi matriks. Kami memberikan daftar singkat. Anda harus membaca dokumentasi untuk informasi lebih lanjut tentang perintah ini.

```
sum,prod menghitung jumlah dan hasil kali baris
cumsum,cumprod melakukan hal yang sama secara kumulatif
menghitung nilai ekstrem setiap baris
extrema mengembalikan vektor dengan informasi ekstrem


diag(A,i) mengembalikan himpunan diagonal ke-i
setdiag(A,i,v)mengatur diagonal ke-i
id(n) matriks identitasnya
det(A) determinannya
charpoly(A) polinomial karakteristik
eigenvalues(A) nilai eigennya
```

```
>v*v, sum(v*v), cumsum(v*v)
```

```
[1,   4,   9]
14
[1,   5,   14]
```

Operator : menghasilkan vektor baris dengan spasi yang sama, opsional dengan ukuran langkah.

```
>1:4, 1:2:10
```

```
[1,   2,   3,   4]
[1,   3,   5,   7,   9]
```

Untuk menggabungkan matriks dan vektor terdapat operator "|" Dan "_".

```
>[1,2,3]|[4,5], [1,2,3]_1
```

```
[1,   2,   3,   4,   5]
            1             2             3
            1             1             1
```

Elemen-elemen matriks disebut dengan "A[i,j]".

```
>A:=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; A[2,3]
```

```
6
```

Untuk vektor baris atau kolom, v[i] adalah elemen ke-i dari vektor tersebut. Untuk matriks, ini mengembalikan baris ke-i yang lengkap
dari matriks tersebut.

```
>v:=[2,4,6,8]; v[3], A[3]
```

```
6
[7,  8,  9]
```

Indeks juga dapat berupa vektor baris dari indeks. : menunjukkan semua indeks.

```
>v[1:2], A[:,2]
```

```
[2,  4]
             2
             5
             8
```

Bentuk singkat untuk menghilangkan indeks sepenuhnya.

```
>A[,2:3]
```

```
             2             3
             5             6
             8             9
```

Untuk tujuan vektorisasi, elemen matriks dapat diakses seolah-olah elemen tersebut adalah vektor.

```
>A{4}
```

```
4
```

Matriks juga dapat diratakan menggunakan fungsi redim(). Ini diimplementasikan dalam fungsi flatten().

```
>redim(A,1,prod(size(A))), flatten(A)
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9]
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9]
```

Untuk menggunakan matriks pada tabel, mari kita atur ulang ke format default, dan hitung tabel nilai sinus dan kosinus.
Perhatikan bahwa sudut dinyatakan dalam radian secara default.

```
>defformat; w=0°:45°:360°; w=w'; deg(w)
```

```
          0
         45
         90
        135
        180
        225
        270
        315
        360
```

Sekarang kita menambahkan kolom ke matriks.

```
>M = deg(w)|w|cos(w)|sin(w)
```

```
          0             0             1             0
         45      0.785398      0.707107      0.707107
         90        1.5708             0             1
        135       2.35619     -0.707107      0.707107
        180       3.14159            -1             0
        225       3.92699     -0.707107     -0.707107
        270       4.71239             0            -1
        315       5.49779      0.707107     -0.707107
        360       6.28319             1             0
```

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat menghasilkan beberapa tabel dari beberapa fungsi sekaligus.
Dalam contoh berikut, kita menghitung t[j]^i untuk i dari 1 hingga n. Kita mendapatkan sebuah matriks, dimana setiap barisnya adalah tabel dari t^i untuk satu i. Artinya matriks memiliki elemen

$$a_{i,j} = t_j^i, \quad 1 \leq j \leq 101, \quad 1 \leq i \leq n$$

Fungsi yang tidak berfungsi untuk masukan vektor harus "divektorkan".
Hal ini dapat dicapai dengan "map" kata kunci dalam definisi fungsi. Kemudian fungsi tersebut akan dievaluasi untuk setiap elemen parameter vektor. Integrasi numerik integrate() hanya berfungsi untuk batas interval skalar. Jadi kita perlu membuat vektorisasinya

```
>function map f(x) := integrate("x^x",1,x)
```

Kata kunci "map" membuat vektorisasi fungsi tersebut. Fungsinya sekarang akan berfungsi untuk vektor bilangan

```
>f([1:5])
```

```
[0,  2.05045,  13.7251,  113.336,  1241.03]
```

Sub Matriks dan Elemen Matriks

Untuk mengakses elemen matriks, gunakan notasi braket.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9], A[2,2]
```

```
            1             2             3
            4             5             6
            7             8             9
5
```

Kita dapat mengakses baris matriks secara lengkap.

```
>A[2]
```

```
[4,  5,  6]
```

Dalam kasus vektor baris atau kolom, ini mengembalikan elemen vektor.

```
>v=1:3; v[2]
```

```
2
```

Untuk memastikan, Anda mendapatkan baris pertama untuk matriks 1xn dan mxn, tentukan semua kolom menggunakan kolom kedua yang kosong indeks.

```
>A[2,]
```

```
[4,  5,  6]
```

Jika indeks adalah vektor dari indeks, Euler akan mengembalikan baris matriks yang sesuai. Di sini kita menginginkan baris pertama dan kedua A.

```
>A[[1,2]]
```

1	2	3
4	5	6

Kita bahkan dapat menyusun ulang A menggunakan vektor indeks. Tepatnya, kita tidak mengubah A di sini, tetapi menghitung a versi A yang dipesan ulang.

```
>A[[3,2,1]]
```

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Trick indeks juga bekerja dengan kolom.
Contoh ini memilih semua baris A dan kolom kedua dan ketiga.

```
>A[1:3,2:3]
```

2	3
5	6
8	9

Untuk singkatan ":" menunjukkan semua indeks baris atau kolom.

```
>A[:,3]
```

3
6
9

Alternatifnya, biarkan indeks pertama kosong.

```
>A[,2:3]
```

2	3
5	6
8	9

Kita juga bisa mendapatkan baris terakhir A.

```
>A[-1]
```

```
[7,  8,  9]
```

Sekarang mari kita ubah elemen A dengan menetapkan submatriks A ke beberapa nilai. Hal ini sebenarnya mengubah matriks tersimpan A.

```
>A[1,1]=4
```

```
             4             2             3
             4             5             6
             7             8             9
```

Kita juga dapat memberikan nilai pada baris A.

```
>A[1]=[-1,-1,-1]
```

```
            -1            -1            -1
             4             5             6
             7             8             9
```

Kita bahkan dapat menetapkan sub-matriks jika ukurannya sesuai.

```
>A[1:2,1:2]=[5,6;7,8]
```

```
             5             6            -1
             7             8             6
             7             8             9
```

Selain itu, beberapa jalan pintas diperbolehkan.

```
>A[1:2,1:2]=0
```

```
             0             0            -1
             0             0             6
             7             8             9
```

Peringatan: Indeks di luar batas mengembalikan matriks kosong, atau pesan kesalahan, bergantung pada pengaturan sistem. Standarnya adalah pesan kesalahan. Namun perlu diingat bahwa indeks negatif dapat digunakan untuk mengakses elemen matriks yang dihitung dari akhir.

```
>A[4]
```

```
Row index 4 out of bounds!
Error in:
A[4] ...
    ^
```

Menyortir dan mengacak

Fungsi sort() mengurutkan vektor baris.

```
>sort([5,6,4,8,1,9])
```

```
[1,  4,  5,  6,  8,  9]
```

Seringkali perlu mengetahui indeks vektor yang diurutkan dalam vektor aslinya. Ini dapat digunakan untuk menyusun ulang vektor lain
dengan cara yang sama.
Mari kita mengacak sebuah vektor.

```
>v=shuffle(1:10)
```

```
[4,  5,  10,  6,  8,  9,  1,  7,  2,  3]
```

Indeks berisi urutan v.

```
>{vs,ind}=sort(v); v[ind]
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

Ini juga berfungsi untuk vektor string.

```
>s=["a","d","e","a","aa","e"]
```

```
a
d
e
a
aa
e
```

```
>{ss,ind}=sort(s); ss
```

```
a
a
aa
d
e
e
```

Seperti yang Anda lihat, posisi entri ganda agak acak.

```
>ind
```

```
[4,  1,  5,  2,  6,  3]
```

Fungsi unik mengembalikan daftar elemen unik vektor yang diurutkan.

```
>intrandom(1,10,10), unique(%)
```

```
[4,  4,  9,  2,  6,  5,  10,  6,  5,  1]
[1,  2,  4,  5,  6,  9,  10]
```

Ini juga berfungsi untuk vektor string.

```
>unique(s)
```

```
a
aa
d
e
```

Aljabar Linear

EMT memiliki banyak sekali fungsi untuk menyelesaikan masalah sistem linier, sistem sparse, atau regresi.
Untuk sistem linier Ax=b, Anda dapat menggunakan algoritma Gauss, matriks invers, atau linear fit. Operator A\b menggunakan versi
algoritma Gauss.

```
>A=[1,2;3,4]; b=[5;6]; A\b
```

```
         -4
        4.5
```

Contoh lain, kita membuat matriks berukuran 200x200 dan jumlah baris-barisnya. Kemudian kita selesaikan Ax=b menggunakan matriks invers. Kami mengukur kesalahan sebagai deviasi maksimal semua elemen dari 1, yang tentu saja merupakan solusi yang tepat.

```
>A=normal(200,200); b=sum(A); longest totalmax(abs(inv(A).b-1))
```

```
8.790745908981989e-13
```

Jika sistem tidak mempunyai solusi, kecocokan linier meminimalkan norma kesalahan Ax-b

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
1            2            3
4            5            6
7            8            9
```

Determinan matriks ini adalah 0

```
>det(A)
```

```
0
```

Matriks Simbolik

Maxima memiliki matriks simbolik. Tentu saja Maxima dapat digunakan untuk permasalahan aljabar linier sederhana seperti itu. Kita
dapat mendefinisikan matriks untuk Euler dan Maxima dengan &:=, lalu menggunakannya dalam ekspresi simbolik. Bentuk [...] yang
biasa untuk mendefinisikan matriks dapat digunakan di Euler untuk mendefinisikan matriks simbolik.

```
>A &= [a,1,1;1,a,1;1,1,a]; $A
```

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

```
>$&det(A), $&factor(%)
```

$$a\,\left(a^2-1\right)-2\,a+2$$

$$\left(a-1\right)^2\,\left(a+2\right)$$

```
>$&invert(A) with a=0
```

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

```
>A &= [1,a;b,2]; $A
```

$$\begin{pmatrix}1 & a \\ b & 2\end{pmatrix}$$

Seperti semua variabel simbolik, matriks ini dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&det(A-x*ident(2)), $&solve(%,x)
```

$$\left(1-x\right)\,\left(2-x\right)-a\,b$$

$$\left[x=\frac{3-\sqrt{4\,a\,b+1}}{2} , x=\frac{\sqrt{4\,a\,b+1}+3}{2}\right]$$

Nilai eigen juga dapat dihitung secara otomatis. Hasilnya adalah sebuah vektor dengan dua vektor nilai eigen dan multiplisitas.

```
>$&eigenvalues([a,1;1,a])
```

$$\left[\left[a-1 , a+1\right] , \left[1 , 1\right]\right]$$

Untuk mengekstrak vektor eigen tertentu memerlukan pengindeksan yang cermat.

```
>$&eigenvectors([a,1;1,a]), &%[2][1][1]
```

$$\left[\left[\left[a-1 , a+1\right] , \left[1 , 1\right]\right] , \left[\left[\left[1 , -1\right]\right] , \left[\left[1 , 1\right]\right]\right]\right]$$

```
[1, - 1]
```

Matriks simbolik dapat dievaluasi dalam Euler secara numerik sama seperti ekspresi simbolik lainnya

```
>A(a=4,b=5)
```

```
             1              4
             5              2
```

Dalam ekspresi simbolik, gunakan with.

```
>$&A with [a=4,b=5]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Akses ke deretan matriks simbolik berfungsi sama seperti matriks numerik.

```
>$&A[1]
```

$$[1, a]$$

Ekspresi simbolis dapat berisi tugas. Dan itu mengubah matriks A.

```
>&A[1,1]:=t+1; $&A
```

$$\begin{pmatrix} t+1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

Ada fungsi simbolik di Maxima untuk membuat vektor dan matriks. Untuk ini, lihat dokumentasi Maxima atau tutorial tentang Maxima di EMT.

```
>v &= makelist(1/(i+j),i,1,3); $v
```

$$\left[\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j+2}, \frac{1}{j+3}\right]$$

```
>B &:= [1,2;3,4]; $B, $&invert(B)
```

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Hasilnya dapat dievaluasi secara numerik dalam Euler. Untuk informasi lebih lanjut tentang Maxima, lihat pengenalan Maxima.

```
>$&invert(B)()
```

```
             -2                 1
            1.5              -0.5
```

Euler juga memiliki fungsi kuat xinv(), yang melakukan upaya lebih besar dan mendapatkan hasil yang lebih tepat.

Perhatikan, bahwa dengan &:= matriks B telah didefinisikan sebagai simbolik dalam ekspresi simbolik dan numerik dalam
ekspresi numerik. Jadi kita bisa menggunakannya di sini.

```
>longest B.xinv(B)
```

```
                        1                        0
                        0                        1
```

Misalnya nilai eigen dari A dapat dihitung secara numerik.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; real(eigenvalues(A))
```

```
  [16.1168,  -1.11684,  0]
```

Atau secara simbolis. Lihat tutorial tentang Maxima untuk detailnya.

```
>$&eigenvalues(@A)
```

$$\left[\left[\frac{15-3\sqrt{33}}{2}, \frac{3\sqrt{33}+15}{2}, 0\right], [1,1,1]\right]$$

Nilai Numerik dalam Ekspresi simbolis

Ekspresi simbolis hanyalah string yang berisi ekspresi. Jika kita ingin mendefinisikan nilai untuk ekspresi simbolik dan ekspresi
numerik, kita harus menggunakan "&:=".

```
>A &:= [1,pi;4,5]
```

```
              1         3.14159
              4               5
```

Masih terdapat perbedaan antara bentuk numerik dan simbolik. Saat mentransfer matriks ke bentuk simbolik, pendekatan pecahan
untuk real akan digunakan.

```
>$&A
```

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1146408}{364913} \\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

Untuk menghindari hal ini, ada fungsi "mxmset(variabel)".

```
>mxmset(A); $&A
```

$$\begin{pmatrix}1 & 3.141592653589793 \\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

Maxima juga dapat menghitung dengan bilangan floating point, bahkan dengan bilangan mengambang besar dengan 32 digit.Namun evaluasinya jauh lebih lambat.

```
>$&bfloat(sqrt(2)), $&float(sqrt(2))
```

$$1.4142135623730950488016887242097_B \times 10^0$$

$$1.414213562373095$$

Ketepatan angka floating point besar dapat diubah.

```
>&fpprec:=100; &bfloat(pi)
```

```
        3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494\
  459230781640628620899862803482534211706 8b0
```

Variabel numerik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik apa pun menggunakan "@var". erhatikan bahwa ini hanya diperlukan, jika variabel telah didefinisikan dengan ":=" atau "=" sebagai variabel numerik.

```
>B:=[1,pi;3,4]; $&det(@B)
```

$$-5.424777960769379$$

Demo - Suku Bunga

Di bawah ini, kami menggunakan Euler Math Toolbox (EMT) untuk menghitung suku bunga. Kami melakukannya secara numerik dan simbolis untuk menunjukkan kepada Anda bagaimana Euler dapat digunakan untuk memecahkan masalah kehidupan nyata.

Asumsikan Anda memiliki modal awal sebesar 5.000 (katakanlah dalam dolar).

```
>K=5000
```

```
5000
```

Sekarang kami mengasumsikan tingkat bunga 3% per tahun. Mari kita tambahkan satu tarif sederhana dan hitung hasilnya.

```
>K*1.03
```

```
5150
```

Euler juga akan memahami sintaks berikut.

```
>K+K*3%
```

```
5150
```

Namun lebih mudah menggunakan faktor tersebut

```
>q=1+3%, K*q
```

```
1.03
5150
```

Selama 10 tahun, kita cukup mengalikan faktor-faktornya dan mendapatkan nilai akhir dengan tingkat bunga majemuk.

```
>K*q^10
```

```
6719.58189672
```

Untuk keperluan kita, kita dapat mengatur formatnya menjadi 2 digit setelah titik desimal.

```
>format(12,2); K*q^10
```

```
    6719.58
```

Mari kita cetak yang dibulatkan menjadi 2 digit dalam satu kalimat lengkap.

```
>"Starting from " + K + "$ you get " + round(K*q^10,2) + "$."
```

```
Starting from 5000$ you get 6719.58$.
```

Bagaimana jika kita ingin mengetahui hasil antara dari tahun 1 sampai tahun ke 9? Untuk ini, bahasa matriks Euler sangat membantu. Anda tidak perlu menulis satu perulangan, tetapi cukup masuk

```
>K*q^(0:10)
```

```
Real 1 x 11 matrix

    5000.00     5150.00     5304.50     5463.64     ...
```

Bagaimana keajaiban ini terjadi? Pertama, ekspresi 0:10 mengembalikan vektor bilangan bulat.

```
>short 0:10
```

```
[0,  1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

Kemudian semua operator dan fungsi di Euler dapat diterapkan pada vektor elemen demi elemen. Jadi

```
>short q^(0:10)
```

```
[1,  1.03,  1.0609,  1.0927,  1.1255,  1.1593,  1.1941,  1.2299,
1.2668,  1.3048,  1.3439]
```

Adalah vektor faktor q^0 sampai q^10. Ini dikalikan dengan K, dan kita mendapatkan vektor nilainya.

```
>VK=K*q^(0:10);
```

Tentu saja, cara realistis untuk menghitung suku bunga ini adalah dengan membulatkannya ke sen terdekat tahun. Mari kita tambahkan fungsi untuk ini.

```
>function oneyear (K) := round(K*q,2)
```

Mari kita bandingkan kedua hasil tersebut, dengan dan tanpa pembulatan.

```
>longest oneyear(1234.57), longest 1234.57*q
```

```
                     1271.61
                   1271.6071
```

Sekarang tidak ada rumus sederhana untuk tahun ke-n, dan kita harus mengulanginya selama bertahun-tahun. Euler menyediakan banyak hal solusi untuk ini.
Cara termudah adalah fungsi iterate, yang mengulangi fungsi tertentu beberapa kali.

```
>VKr=iterate("oneyear",5000,10)
```

```
  Real 1 x 11 matrix

      5000.00      5150.00      5304.50      5463.64      ...
```

Kami dapat mencetaknya dengan cara yang ramah, menggunakan format kami dengan tempat desimal tetap.

```
>VKr'
```

```
      5000.00
      5150.00
      5304.50
      5463.64
      5627.55
      5796.38
      5970.27
      6149.38
      6333.86
      6523.88
      6719.60
```

Untuk mendapatkan elemen vektor tertentu, kami menggunakan indeks dalam tanda kurung siku.

```
>VKr[2], VKr[1:3]
```

```
      5150.00
      5000.00      5150.00      5304.50
```

Anehnya, kita juga bisa menggunakan vektor indeks. Ingatlah bahwa 1:3 menghasilkan vektor [1,2,3].
Mari kita bandingkan elemen terakhir dari nilai yang dibulatkan dengan nilai penuh.

```
>VKr[-1], VK[-1]
```

```
      6719.60
      6719.58
```

Perbedaannya sangat kecil.

Menyelesaikan Persamaan

Sekarang kita mengambil fungsi yang lebih maju, yang menambahkan tingkat uang tertentu setiap tahunnya.

```
>function onepay (K) := K*q+R
```

Kita tidak perlu menentukan q atau R untuk definisi fungsi. Hanya jika kita menjalankan perintah, kita harus melakukannya
mendefinisikan nilai-nilai ini. Kami memilih R=200.

```
>R=200; iterate("onepay",5000,10)
```

```
  Real 1 x 11 matrix

      5000.00      5350.00      5710.50      6081.82      ...
```

Bagaimana jika kita menghapus jumlah yang sama setiap tahun?

```
>R=-200; iterate("onepay",5000,10)
```

```
  Real 1 x 11 matrix

      5000.00      4950.00      4898.50      4845.45      ...
```

Kami melihat uangnya berkurang. Jelasnya, jika kita hanya mendapat bunga sebesar 150 pada tahun pertama, namun menghapus 200, kita kehilangan uang setiap tahunnya.

Bagaimana kita dapat menentukan berapa tahun uang tersebut akan bertahan? Kita harus menulis satu lingkaran untuk ini. Cara termudah
adalah dengan melakukan iterasi cukup lama.

```
>VKR=iterate("onepay",5000,50)
```

```
 Real 1 x 51 matrix

     5000.00      4950.00      4898.50      4845.45      ...
```

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat menentukan nilai negatif pertama dengan cara berikut.

```
>min(nonzeros(VKR<0))
```

```
       48.00
```

Alasannya adalah bukan nol (VKR<0) mengembalikan vektor indeks i, dengan VKR[i]<0, dan min menghitung indeks minimal.

karena vektor selalu dimulai dengan indeks 1, maka jawabannya adalah 47 tahun.

Fungsi iterate() memiliki satu trik lagi. Ini dapat mengambil kondisi akhir sebagai argumen. Kemudian akan mengembalikan nilai dan
jumlah iterasi.

```
>{x,n}=iterate("onepay",5000,till="x<0"); x, n,
```

```
      -19.83
       47.00
```

Mari kita coba menjawab pertanyaan yang lebih ambigu. Asumsikan kita mengetahui bahwa nilainya adalah 0 setelah 50 tahun. Berapa
tingkat bunganya?

Ini adalah pertanyaan yang hanya bisa dijawab secara numerik. Di bawah ini, kita akan mendapatkan rumus yang diperlukan.

Kemudian Anda akan melihat bahwa tidak ada rumus yang mudah untuk menentukan tingkat suku bunga. Namun untuk saat ini, kami menargetkan
solusi numerik.

Langkah pertama adalah mendefinisikan fungsi yang melakukan iterasi sebanyak n kali. Kami menambahkan semua parameter ke fungsi ini.

```
>function f(K,R,P,n) := iterate("x*(1+P/100)+R",K,n;P,R)[-1]
```

Iterasinya sama seperti di atas

$$x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right) + R$$

Namun kami tidak lagi menggunakan nilai global R dalam ekspresi kami. Fungsi seperti iterate() memiliki trik khusus di Euler. Anda dapat
meneruskan nilai variabel dalam ekspresi sebagai parameter titik koma. Dalam hal ini P dan R.
Apalagi kami hanya tertarik pada nilai terakhir. Jadi kita ambil indeks [-1].
Mari kita coba tes.

```
>f(5000,-200,3,47)
```

```
-19.83
```

Sekarang kita bisa menyelesaikan masalah kita.

```
>solve("f(5000,-200,x,50)",3)
```

```
3.15
```

Rutinitas penyelesaian menyelesaikan ekspresi=0 untuk variabel x. Jawabannya adalah 3,15% per tahun. Kami mengambil nilai awal 3%
untuk algoritma. Fungsi solve() selalu membutuhkan nilai awal.
Kita dapat menggunakan fungsi yang sama untuk menyelesaikan pertanyaan berikut: Berapa banyak yang dapat kita keluarkan per tahun
sehingga modal awal habis setelah 20 tahun dengan asumsi tingkat bunga 3% per tahun.

```
>solve("f(5000,x,3,20)",-200)
```

```
-336.08
```

Perhatikan bahwa Anda tidak dapat menyelesaikan jumlah tahun, karena fungsi kami mengasumsikan n sebagai nilai bilangan bulat.

Solusi Simbolis Masalah Suku Bunga

Kita dapat menggunakan bagian simbolis dari Euler untuk mempelajari masalahnya. Pertama kita mendefinisikan fungsi onepay() kita secara simbolis.

```
>function op(K) &= K*q+R; $&op(K)
```

$$R+q\,K$$

Sekarang kita dapat mengulanginya.

```
>$&op(op(op(op(K)))), $&expand(%)
```

$$q\,\left(q\,\left(q\,\left(R+q\,K\right)+R\right)+R\right)+R$$

$$q^3\,R+q^2\,R+q\,R+R+q^4\,K$$

Kami melihat sebuah pola. Setelah n periode yang kita miliki

$$K_n = q^n K + R(1+q+\ldots+q^{n-1}) = q^n K + \frac{q^n-1}{q-1}R$$

Rumusnya adalah rumus jumlah geometri yang diketahui Maxima.

```
>&sum(q^k,k,0,n-1); $& % = ev(%,simpsum)
```

$$\sum_{k=0}^{n-1}{q^{k}}=\frac{q^{n}-1}{q-1}$$

Ini agak rumit. Jumlahnya dievaluasi dengan tanda "simpsum" untuk menguranginya menjadi hasil bagi.
Mari kita membuat fungsi untuk ini.

```
>function fs(K,R,P,n) &= (1+P/100)^n*K + ((1+P/100)^n-1)/(P/100)*R; $&fs(K,
```

$$\frac{100\,\left(\left(\frac{P}{100}+1\right)^{n}-1\right)\,R}{P}+K\,\left(\frac{P}{100}+1\right)^{n}$$

Fungsinya sama dengan fungsi f kita sebelumnya. Tapi ini lebih efektif.

```
>longest f(5000,-200,3,47), longest fs(5000,-200,3,47)
```

```
    -19.82504734650985
    -19.82504734652684
```

Sekarang kita dapat menggunakannya untuk menanyakan waktu n. Kapan modal kita habis? Perkiraan awal kami adalah 30 tahun.

```
>solve("fs(5000,-330,3,x)",30)
```

```
20.51
```

Jawaban ini mengatakan akan menjadi negatif setelah 21 tahun.
Kita juga dapat menggunakan sisi simbolis Euler untuk menghitung rumus pembayaran.
Asumsikan kita mendapatkan pinjaman sebesar K, dan membayar n pembayaran sebesar R (dimulai setelah tahun pertama) meninggalkan sisa hutang sebesar Kn (pada saat pembayaran terakhir. Rumusnya jelas

```
>equ &= fs(K,R,P,n)=Kn; $&equ
```

$$\frac{100\,\left(\left(\frac{P}{100}+1\right)^{n}-1\right)\,R}{P}+K\,\left(\frac{P}{100}+1\right)^{n}=Kn$$

Biasanya rumus ini diberikan dalam bentuk

$$i=\frac{P}{100}$$

```
>equ &= (equ with P=100*i); $&equ
```

$$\frac{\left((i+1)^{n}-1\right)\,R}{i}+(i+1)^{n}\,K=Kn$$

Kita dapat menyelesaikan nilai R secara simbolis.

$$i=\frac{P}{100}$$

```
>$&solve(equ,R)
```

$$\left[R=\frac{i\,Kn-i\,(i+1)^{n}\,K}{(i+1)^{n}-1}\right]$$

Seperti yang Anda lihat dari rumusnya, fungsi ini mengembalikan kesalahan floating point untuk i=0. Euler tetap merencanakannya.
Tentu saja, kami memiliki batasan berikut.

```
>$&limit(R(5000,0,x,10),x,0)
```

$$\lim_{x\to 0} R\left(5000, 0, x, 10\right)$$

Yang jelas tanpa bunga kita harus membayar kembali 10 tarif 500.
Persamaan tersebut juga dapat diselesaikan untuk n. Akan terlihat lebih bagus jika kita menerapkan beberapa penyederhanaan padanya.

```
>fn &= solve(equ,n) | ratsimp; $&fn
```

$$\left[n=\frac{\log\left(\frac{R+i\,K\,n}{R+i\,K}\right)}{\log\left(i+1\right)}\right]$$

Latihan R2

1. Lakukan penyederhanaan pada operasi berikut

$$\left(\frac{24a^{10}b^{-8}c^{7}}{12a^{6}b^{-3}c^{5}}\right)^{-5}$$

Penyelesaian:

```
>$&((24*a^10*b^(-8)*c^7)/(12*a^6*b^(-3)*c^5))^(-5)
```

$$\frac{b^{25}}{32\,a^{20}\,c^{10}}$$

2. Lakukan penyederhanaan operasi berikut ini

$$\left(\frac{125p^{12}q^{-14}r^{22}}{25p^{8}q^{6}r^{-15}}\right)^{-4}$$

Penyelesaian:

```
>$&((125*p^12*q^(-14)*r^22)/(25*p^8*q^6*r^(-15)))^(-4)
```

$$\frac{q^{80}}{625\,p^{16}\,r^{148}}$$

3. Lakukan penyederhanaan operasi berikut ini

$$(m^{x-b}n^{x+b})^x(m^bn^{-b})^x$$

Penyelesaian:

```
>$&((m^(x-b)*n(x+b))^x*(m^b*n^(-b))^x)
```

$$\left(\frac{m^b}{n^b}\right)^x \left(m^{x-b}\,n\,(x+b)\right)^x$$

4. Lakukan penyederhanaan operasi berikut ini

$$\left(\frac{3x^ay^b}{-3x^ay^b}\right)^2$$

Penyelesaian:

```
>$&((3*x^a*y^b)/(-3*x^a*y^b))^2
```

$$1$$

5. Tentukan hasil dari operasi bilangan dibawah ini

$$\left(\frac{4(8-6)^2-4*3+2*8}{3^1+19^0}\right)$$

Penyelesaian:

```
>$&(4*(8-6)^2-4*3+2*8)/(3^1+19^0)
```

$$5$$

6. Tentukan hasil dari operasi bilangan berikut

$$\left(\frac{[4(8-6)^2+4](3-2*8)}{2^2(2^3+5)}\right)$$

Penyelesaian:

```
>$&((4*(8-6)^2+4)*(3-2*8))/(2^2*(2^3+5))
```

$$-5$$

Ke-enam soal-soal diatas merupakan penyederhanaan suatu perhitungan simbolik atau operasi-operasi dalam aljabar.

Latihan R3

Perform the indicated operations

1.

$$(3x-2)^2$$

Penyelesaian:

```
>function P(x,n) &= (3*x-2)^n; $&P(x,n)
```

$$(3\,x-2)^n$$

```
>$&P(x,2), $&expand(%)
```

$$(3\,x-2)^2$$

$$9\,x^2-12\,x+4$$

2.

$$(3b+1)(b-2)$$

```
Penyelesaian:
```

```
>function P(b) &= (3*b+1); $&P(b)
```

$$3\,b+1$$

```
>function q(b) &= (b-2); $&q(b)
```

$$b - 2$$

```
>$&P(b)*q(b), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$(b-2)\,(3\,b+1)$$

$$3\,b^2-5\,b-2$$

$$(b-2)\,(3\,b+1)$$

3.

$$(3x^2-2x-x^3+2)-(5x^2-8x-x^3+4)$$

Penyelesaian:

```
>$&(3*x^2-2*x-x^3+2)-(5*x^2-8*x-x^3+4)
```

$$-2\,x^2+6\,x-2$$

4.

$$(2x^4-3x^2+7x)-(5x^3+2x^2-3x+5)$$

Penyelesaian:

```
>$&(2*x^4-3*x^2+7*x)-(5*x^3+2*x^2-3*x+5)
```

$$2\,x^4-5\,x^3-5\,x^2+10\,x-5$$

5.

$$(2x+3y+z-7)+(4x-2y-z+8)+(-3x+y-2z-4)$$

Penyelesaian:

```
>$&(2*x+3*y+z-7)+(4*x-2*y-z+8)+(-3*x+y-2*z-4)
```

$$-2\,z+2\,y+3\,x-3$$

6.

$$(t^a+4)(t^a-7)$$

Penyelesaian:

```
>function P(t,n) &= (t^a+4)^n; $&P(t,n)
```

$$\left(t^{a}+4\right)^{n}$$

```
>function q(t,n) &= (t^a-7)^n; $&q(t,n)
```

$$\left(t^{a}-7\right)^{n}$$

```
>$&P(t,1)*q(t,1), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$\left(t^{a}-7\right)\,\left(t^{a}+4\right)$$

$$t^{2\,a}-3\,t^{a}-28$$

$$\left(t^{a}-7\right)\,\left(t^{a}+4\right)$$

Latihan R4

Tentukan faktor dari persamaan berikut
1.

$$t^2+8t+15$$

Penyelesaian:

```
>gt &= (t^2+8*t+15); $&gt
```

$$t^2+8\,t+15$$

```
>$&factor((gt))
```

$$\left(t+3\right)\,\left(t+5\right)$$

2.

$$a^3+24a^2+144a$$

Penyelesaian:

```
>ga &= (a^3+24*a^2+144*a); $&ga
```

$$a^3+24\,a^2+144\,a$$

```
>$&factor((ga))
```

$$a\,\left(a+12\right)^2$$

3.

$$x^4+11x^2-80$$

Penyelesaian:

```
>fx &= (x^4+11*x^2-80); $&fx
```

$$x^4+11\,x^2-80$$

```
>$&factor((fx))
```

$$\left(x^2-5\right)\,\left(x^2+16\right)$$

4.

$$m^6+8m^3-20$$

Penyelesaian:

```
>fm &= (m^6+8*m^3-20); $&fm
```

$$m^6+8\,m^3-20$$

```
>$&factor((fm))
```

$$\left(m^3-2\right)\,\left(m^3+10\right)$$

5.

$$x^6-2x^5+x^4-x^2+2x-1$$

```
Penyelesaian:
```

```
>fx &= (x^6-2*x^5+x^4-x^2+2*x-1); $&fx
```

$$x^6-2\,x^5+x^4-x^2+2\,x-1$$

```
>$&factor((fx))
```

$$\left(x-1\right)^3\,\left(x+1\right)\,\left(x^2+1\right)$$

Latihan R5

Tentukan penyelesaian atau solusi dari persamaan dibawah
1.

$$x^2 + 3x - 28$$

```
Penyelesaian:
```

```
>$&solve(x^2+3*x-28,x)
```

$$[x = 4, x = -7]$$

Hasil di atas diperoleh dengan memfaktorkan ekspresi atau persamaan sehingga didapat solusi(nilai x) yaitu 4 dan -7
2.

$$x^2 + 100 = 20x$$

```
Penyelesaian:
```

```
>$&solve(x^2-20*x+100,x)
```

$$[x = 10]$$

3.

$$5x^2 - 75 = 0$$

```
Penyelesaian:
```

```
>$&solve(5*x^2-75=0,x)
```

$$\left[x = -\sqrt{15}, x = \sqrt{15}\right]$$

4.

$$21n^2 - 10 = n$$

Penyelesaian:

```
>sol &= solve(21*n^2-n-10,n); $&sol
```

$$\left[n=\frac{5}{7} , n=-\frac{2}{3} \right]$$

5.

$$12a^2-28=5a$$

Penyelesaian:

```
>sol &= solve(12*a^2-5*a-28,a); $&sol
```

$$\left[a=-\frac{4}{3} , a=\frac{7}{4} \right]$$

6.

$$6z^2-18=0$$

Penyelesaian:

```
>$&solve(6*z^2-18,z)
```

$$\left[z=-\sqrt{3} , z=\sqrt{3} \right]$$

Latihan R6

Sederhanakan persamaan dibawah ini
1).

$$\left(\frac{6-x}{x^2-36}\right)$$

2).

$$\left(\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}\right)$$

3).

$$\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-9}\right)$$

4).

$$\left(\frac{4-x}{x^2+4x-32}\right)$$

5).

$$\left(\frac{x^3-6x^2+9x}{x^3-3x^2}\right)$$

Penyelesaian:
Nomor 1

```
>$&((6-x)/x^2-36); $&factor(%)
```

$$\frac{-36\,x^2-x+6}{x^2}$$

Nomor 2

```
>$&((x^2-4)/(x^2-4*x+4)); $&factor(%)
```

$$\frac{x+2}{x-2}$$

Nomor 3

```
>$&((x^2+2*x-3)/(x^2-9)); $&factor(%)
```

$$\frac{x-1}{x-3}$$

Nomor 4

```
>$&((4-x)/(x^2+4*x-32)); $&factor(%)
```

$$-\frac{1}{x+8}$$

Nomor 5

```
>$&((x^3-6*x^2+9*x)/(x^3-3*x^2)); $&factor(%)
```

$$\frac{x-3}{x}$$

Latihan 2.3

Tentukan masing-masing nilai berikut ini
1).

$$(f \circ g)(-1)$$

2)

$$(h \circ f)(1)$$

3)

$$(f \circ h)(-3)$$

4)

$$(f \circ f)(-4)$$

5)

$$(h \circ g)(3)$$

6)

$$(g \circ f)(5)$$

Penyelesaian:

```
>function f(x):= 3*x+1;
>function g(x):= x^2-2*x-6;
>function h(x):= x^3
```

Nomor 1

```
>f(g(-1))
```

```
-8.00
```

Nomor 2

```
>h(f(1))
```

```
64.00
```

Nomor 3

```
>f(h(-3))
```

```
-80.00
```

Nomor 4

```
>f(f(-4))
```

```
-32.00
```

Nomor 5

```
>h(g(3))
```

```
-27.00
```

Nomor 6

```
>g(f(5))
```

```
218.00
```

Latihan 3.1

Tentukan penyederhanaan dalam bentuk a+bi dimana a dan b adalah bilangan real
1).

$$(-5+3i)+(7+8i)$$

2).

$$(12+3i)+(-8+5i)$$

3)

$$7i(2-5i)$$

4)

$$-2i(-8+3i)$$

5)

$$(13+9i)-(8+2i)$$

Penyelesaian:
Nomor 1

```
>$((-5+3*i)+(7+8*i))
```

$$11\,i+2$$

Nomor 2

```
>$((12+3*i)+(-8+5*i))
```

$$8\,i+4$$

Nomor 3

```
>$&expand((7*i)*(2-5*i))
```

$$14\,i-35\,i^2$$

Nomor 4

```
>$&expand((-2*i)*(-8+3*i))
```

$$16\,i-6\,i^2$$

Nomor 5

```
>$((13+9*i)-(8+2*i))
```

$$7\,i+5$$

Latihan 3.5

Tentukan penyelesaian dan notasi interval untuk himpunan solusi berikut
Nomor 1

```
>&load(fourier_elim)
```

```
        C:/Program Files/Euler x64/maxima/share/maxima/5.35.1/share/f\
  ourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
>$&fourier_elim(abs(4*x)>20,[x])
```

$$[5<x]\vee[x<-5]$$

Nomor 2

```
>$&fourier_elim(abs(x+8)<9,[x])
```

$$[-17<x,x<1]$$

Nomor 3

```
>$&fourier_elim(abs(x-5)>0.1,[x])
```

$$[x<4.9]\vee[5.1<x]$$

Nomor 4

```
>$&fourier_elim(abs(3*x+5)<0,[x])
```

$$emptyset$$

Nomor 5

```
>$&fourier_elim(abs(2*x-4)<-5,[x])
```

$$emptyset$$

[[[[[[[

BAB 2

EMT plot 2D

Menggambar Grafik 2D dengan EMT

Notebook ini menjelaskan tentang cara menggambar berbagaikurva dan grafik 2D dengan software EMT. EMT menyediakan fungsi plot2d() untuk menggambar berbagai kurva dan grafik dua dimensi (2D).

Plot Dasar

Ada fungsi plot yang sangat mendasar. Terdapat koordinat layar yang selalu berkisar antara 0 hingga 1024 di setiap sumbu, tidak peduli apakah layarnya berbentuk persegi atau tidak. Semut terdapat koordinat plot, yang dapat diatur dengan setplot(). Pemetaan antar koordinat bergantung pada jendela plot saat ini. Misalnya, shrinkwindow() default menyisakan ruang untuk label sumbu dan judul plot.

Dalam contoh ini, kita hanya menggambar beberapa garis acak dengan berbagai warna. Untuk rincian tentang fungsi-fungsi ini,
pelajari fungsi inti EMT.

```
>clg; // clear screen
>window(0,0,1024,1024); // use all of the window
>setplot(0,1,0,1); // set plot coordinates
>hold on; // start overwrite mode
>n=100; X=random(n,2); Y=random(n,2);  // get random points
>colors=rgb(random(n),random(n),random(n)); // get random colors
>loop 1 to n; color(colors[#]); plot(X[#],Y[#]); end; // plot
>hold off; // end overwrite mode
>insimg; // insert to notebook
```

```
>reset;
```

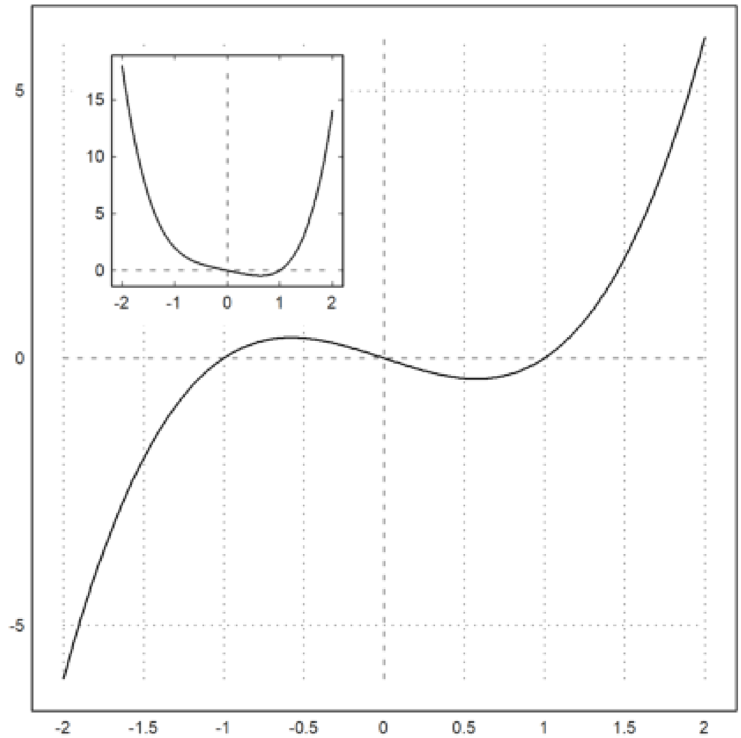
Grafik perlu ditahan, karena perintah plot() akan menghapus jendela plot.

Untuk menghapus semua yang kami lakukan, kami menggunakan reset().

Untuk menampilkan gambar hasil plot di layar notebook, perintah plot2d() dapat diakhiri dengan titik dua (:). Cara lain adalah perintah plot2d() diakhiri dengan titik koma (;), kemudian menggunakan perintah insimg() untuk menampilkan gambar hasil plot.

Contoh lain, kita menggambar plot sebagai sisipan di plot lain. Hal ini dilakukan dengan mendefinisikan jendela plot yang lebih kecil.Perhatikan bahwa jendela ini tidak memberikan ruang untuk label sumbu di luar jendela plot. Kita harus menambahkan beberapa margin untuk ini sesuai kebutuhan. Perhatikan bahwa kita menyimpan dan memulihkan jendela penuh, dan menahan plot saat ini sementara kita memplot inset.

```
>plot2d("x^3-x");
>xw=200; yw=100; ww=300; hw=300;
>ow=window();
>window(xw,yw,xw+ww,yw+hw);
>hold on;
>barclear(xw-50,yw-10,ww+60,ww+60);
>plot2d("x^4-x",grid=6):
```




```
>hold off;
>window(ow);
```

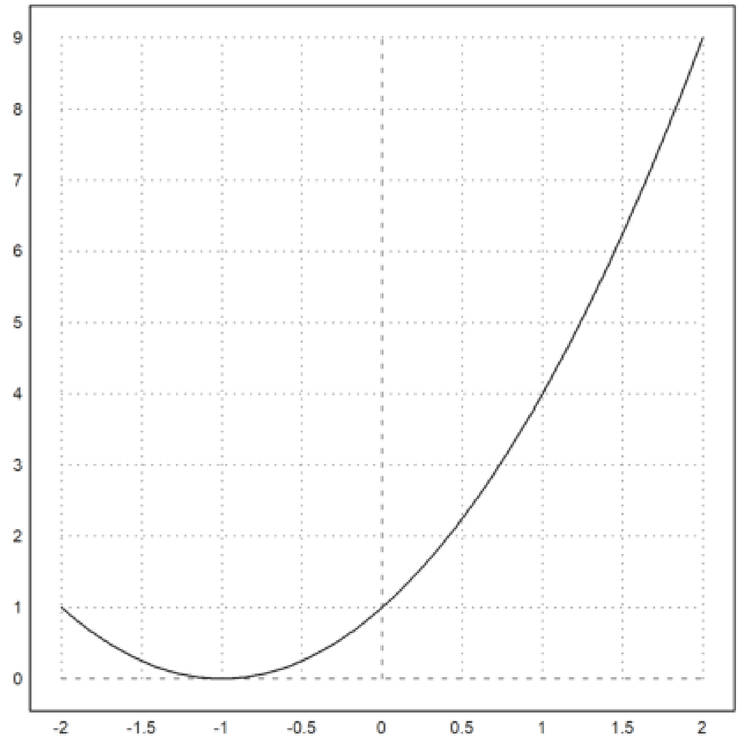
Plot dengan banyak gambar dicapai dengan cara yang sama. Ada fungsi utilitas figure() untuk ini.

Contoh soal:
Tentukan plot dari fungsi berikut:

$$x^2 + 2x + 1$$

Penyelesaian:

```
> plot2d("x^2+2x+1",grid=2):
```

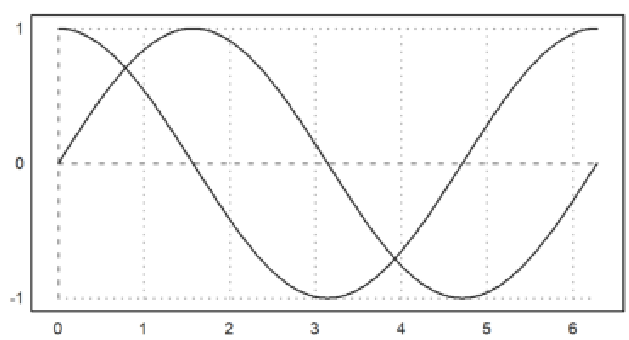


Aspek Plot

Plot default menggunakan jendela plot persegi. Anda dapat mengubahnya dengan fungsi aspek(). Jangan lupa untuk mengatur ulang aspeknya nanti. Anda juga dapat mengubah default ini di menu dengan "Set Aspect" ke rasio aspek tertentu atau ke ukuran jendela grafik saat ini.

Tapi Anda juga bisa mengubahnya untuk satu plot. Untuk ini, ukuran area plot saat ini diubah, dan jendela diatur sehingga label memiliki cukup ruang.

```
>aspect(2); // rasio panjang dan lebar 2:1
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi):
```



```
>aspect();
>reset;
```

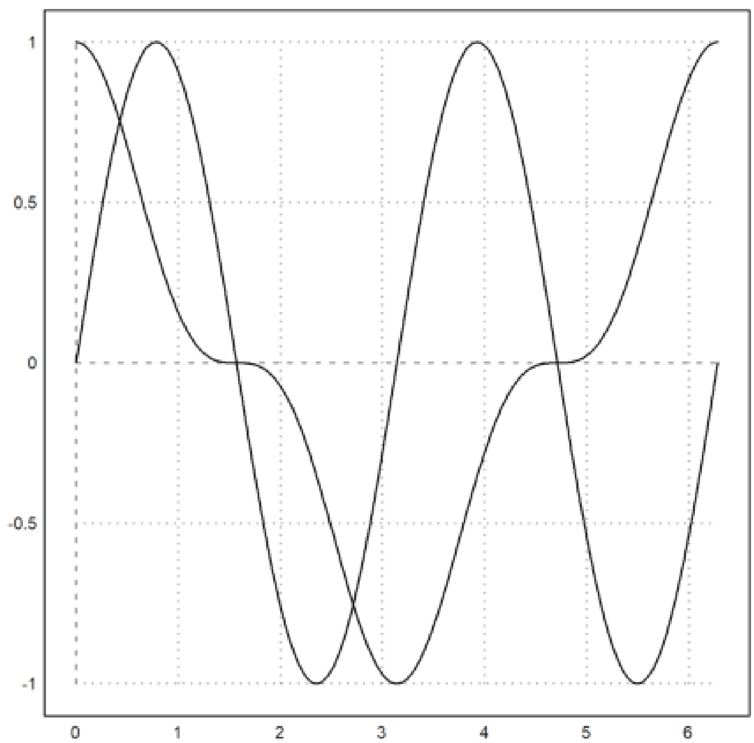
Fungsi reset() mengembalikan default plot termasuk rasio aspek.
Contoh soal:
Tentukan plot dari fungsi berikut:

$$sin2x$$

$$cos(x)^3$$

Penyelesaian:

```
>aspect(1); // rasio panjang dan lebar 1:1
>plot2d(["sin(2x)","cos(x)^3"],0,2pi):
```



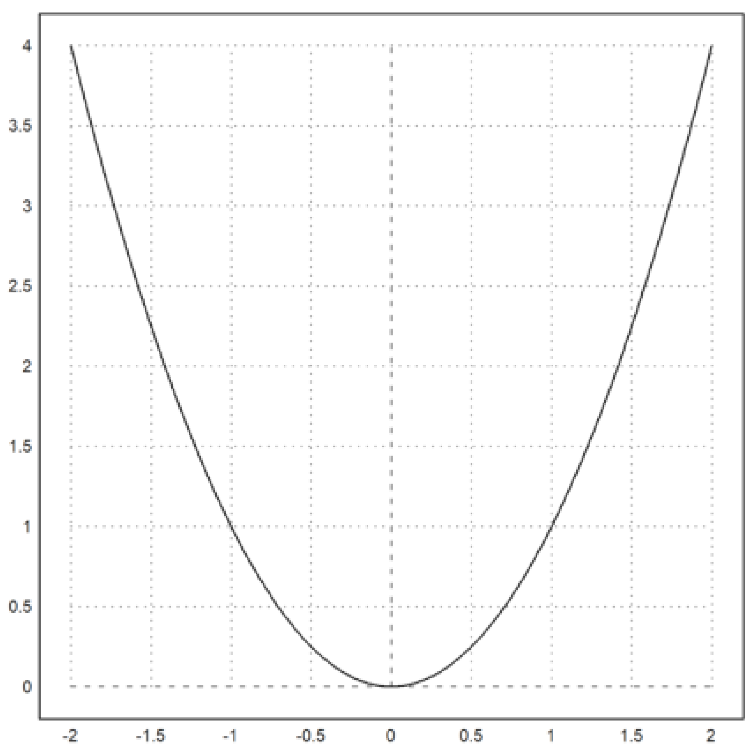
Plot 2D di Euler

EMT Math Toolbox memiliki plot dalam 2D, baik untuk data maupun fungsi. EMT menggunakan fungsi plot2d. Fungsi ini dapat memplot fungsi dan data.
Dimungkinkan untuk membuat plot di Maxima menggunakan Gnuplot atau dengan Python menggunakan Math Plot Lib.
Euler dapat membuat plot 2D
- ekspresi
- fungsi, variabel, atau kurva berparameter,
- vektor nilai x-y,
- awan titik di pesawat,
- kurva implisit dengan level atau wilayah level.
- Fungsi kompleks
Gaya plot mencakup berbagai gaya untuk garis dan titik, plot batang, dan plot berbayang.

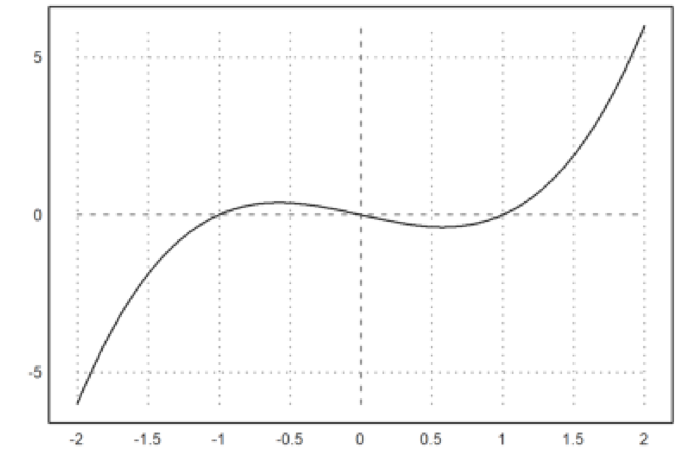
Plot Ekspresi atau Variabel

Ekspresi tunggal dalam "x" (misalnya "4*x^2") atau nama suatu fungsi
(misalnya "f") menghasilkan grafik fungsi tersebut.
Berikut adalah contoh paling dasar, yang menggunakan rentang default dan menetapkan rentang y yang tepat agar sesuai dengan plot fungsinya.
Catatan: Jika Anda mengakhiri baris perintah dengan titik dua ":", plot akan dimasukkan ke dalam jendela teks. Jika tidak, tekan TAB untuk melihat plot jika jendela plot tertutup.

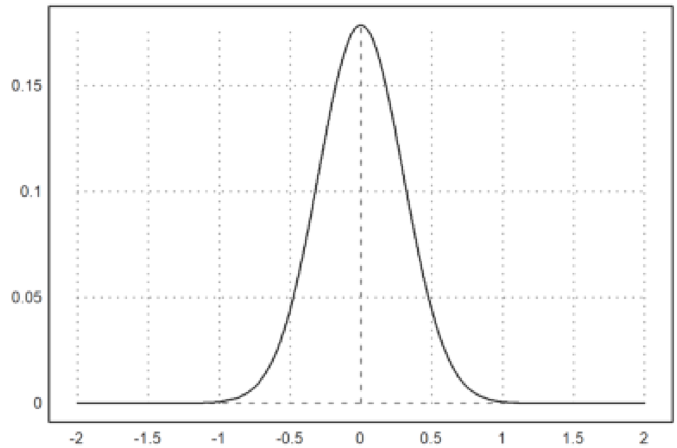
```
>plot2d("x^2"):
```



```
>aspect(1.5); plot2d("x^3-x"):
```

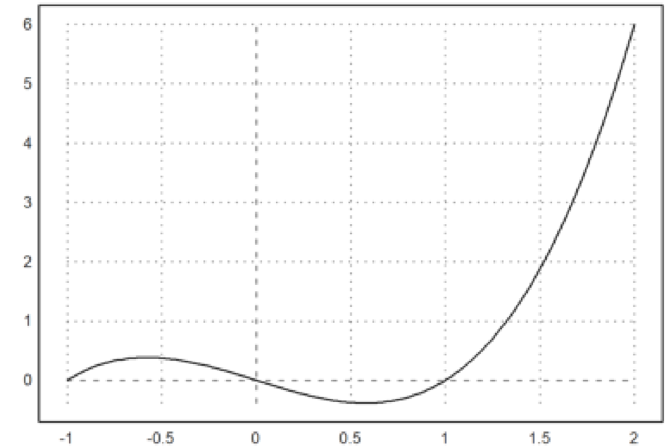



```
>a:=5.6; plot2d("exp(-a*x^2)/a"); insimg(30); // menampilkan gambar hasil p
```

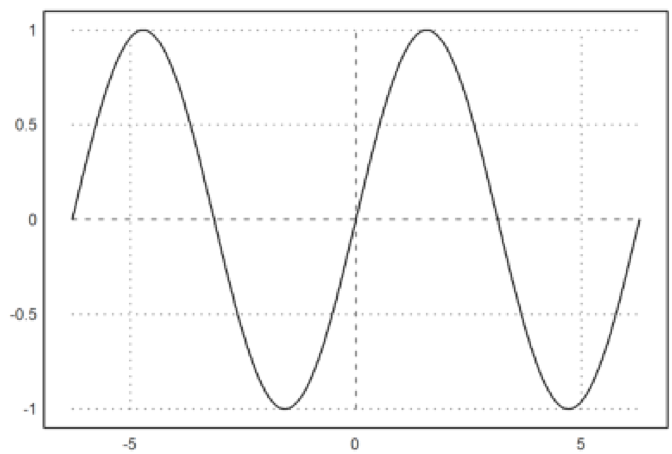


Dari beberapa contoh sebelumnya Anda dapat melihat bahwa aslinya gambar plot menggunakan sumbu X dengan rentang nilai dari -2 sampai dengan 2. Untuk mengubah rentang nilai X dan Y, Anda dapat menambahkan nilai-nilai batas X (dan Y) di belakang ekspresi yang digambar.
The plot range is set with the following assigned parameters
- a,b: rentang x (default -2,2)
- c,d: rentang y (default: skala dengan nilai)
- r: alternatifnya radius di sekitar pusat plot
- cx,cy: koordinat pusat plot(default 0,0)

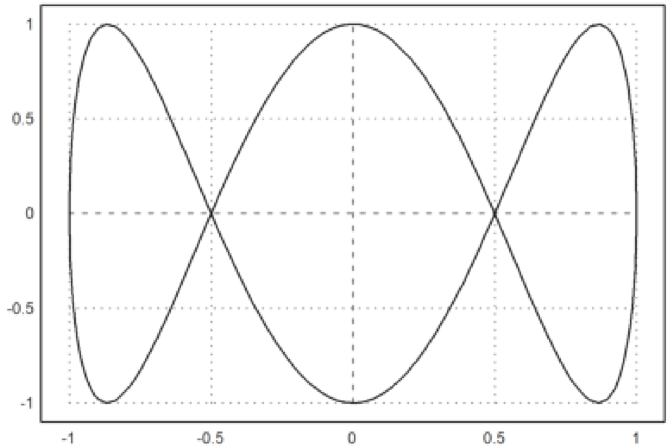
```
>plot2d("x^3-x",-1,2):
```




```
>plot2d("sin(x)",-2*pi,2*pi): // plot sin(x) pada interval [-2pi, 2pi]
```




```
>plot2d("cos(x)","sin(3*x)",xmin=0,xmax=2pi):
```



Alternatif untuk titik dua adalah perintah insimg(baris), yang menyisipkan plot yang menempati sejumlah baris teks tertentu.

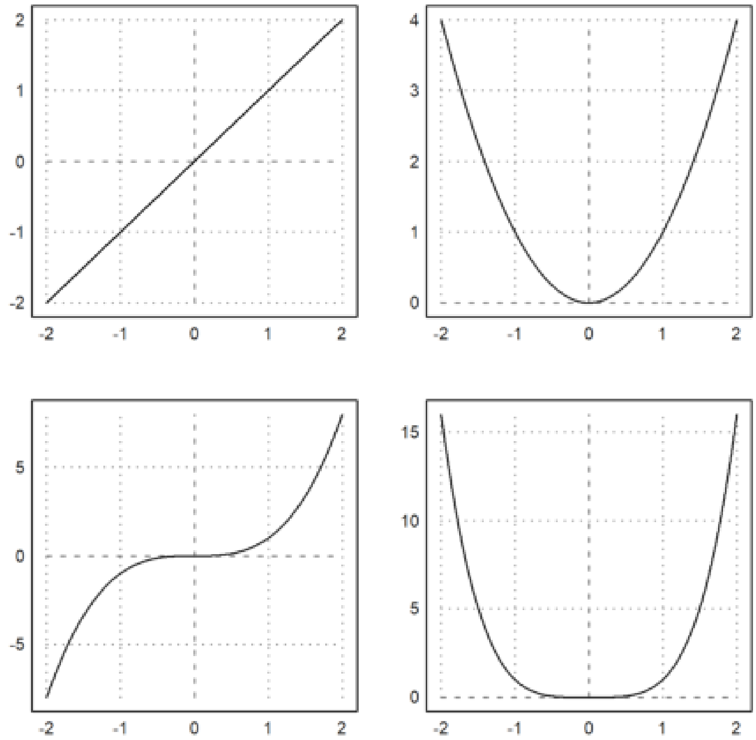
Dalam opsi, plot dapat diatur agar muncul

- di jendela terpisah yang dapat diubah ukurannya,
- di jendela buku catatan.

Lebih banyak gaya dapat dicapai dengan perintah plot tertentu.

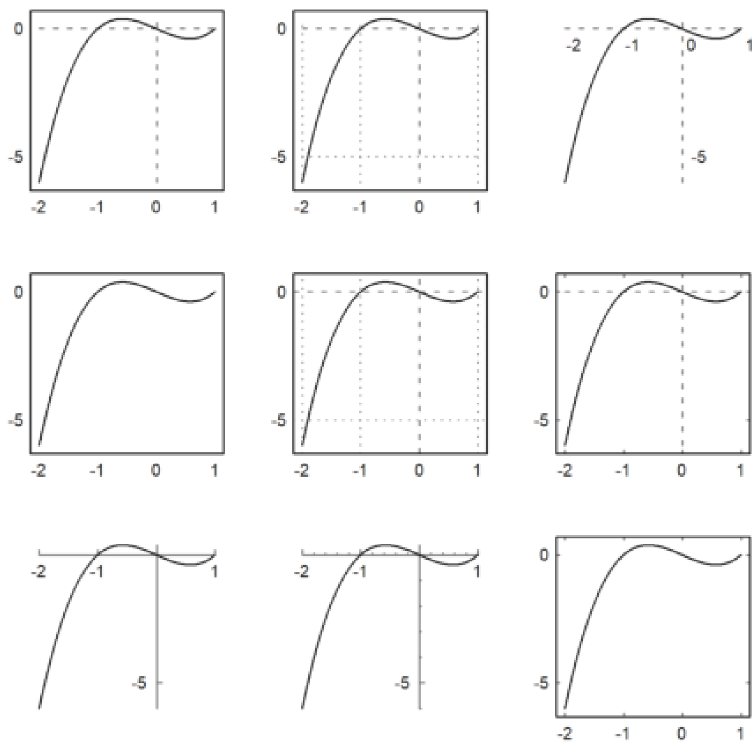
Bagaimanapun, tekan tombol tabulator untuk melihat plotnya, jika tersembunyi.
Untuk membagi jendela menjadi beberapa plot, gunakan perintah figure(). Dalam contoh, kita memplot x^1 hingga x^4 menjadi 4 bagian jendela. gambar(0) mengatur ulang jendela default.

```
>reset;
>figure(2,2); ...
>for n=1 to 4; figure(n); plot2d("x^"+n); end; ...
>figure(0):
```



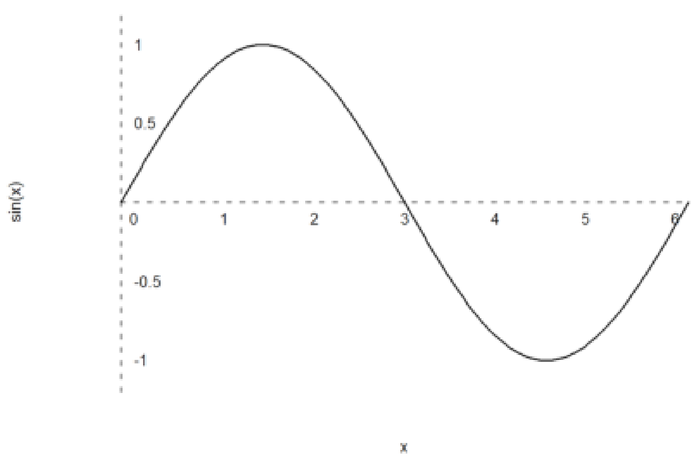
Di plot2d(), ada gaya alternatif yang tersedia dengan grid=x. Untuk gambaran umum, kami menampilkan berbagai gaya kisi dalam satu gambar (lihat di bawah untuk perintah figure()). Gaya grid=0 tidak disertakan. Ini tidak menunjukkan kisi dan bingkai.

```
>figure(3,3); ...
>for k=1:9; figure(k); plot2d("x^3-x",-2,1,grid=k); end; ...
>figure(0):
```

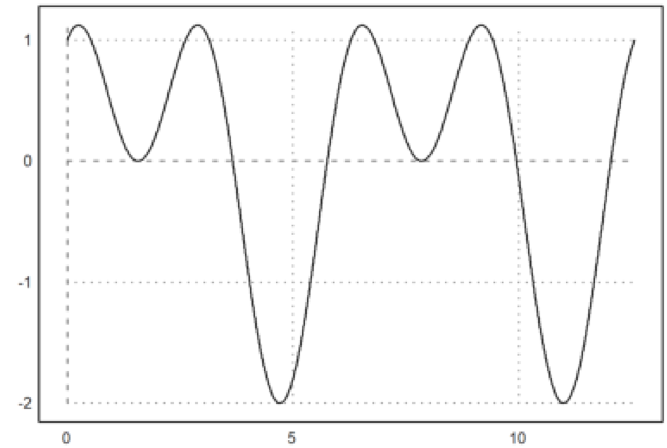


Jika argumen pada plot2d() adalah ekspresi yang diikuti oleh empat angka, angka-angka tersebut adalah rentang x dan y untuk plot tersebut.
Alternatifnya, a, b, c, d dapat ditentukan sebagai parameter yang ditetapkan sebagai a=... dll.
Pada contoh berikut, kita mengubah gaya kisi, menambahkan label, dan menggunakan label vertikal untuk sumbu y.

```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi,-1.2,1.2,grid=3,xl="x",yl="sin(x)"):
```



```
>plot2d("sin(x)+cos(2*x)",0,4pi):
```

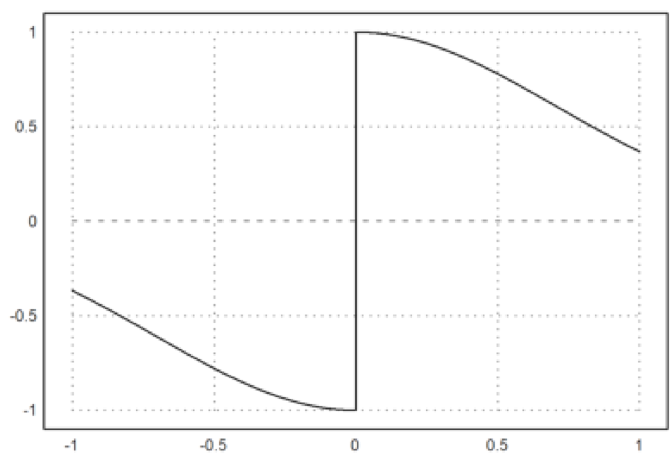


Gambar yang dihasilkan dengan memasukkan plot ke dalam jendela teks disimpan di direktori yang sama dengan buku catatan, secara default di subdirektori bernama "gambar". Mereka juga digunakan oleh ekspor HTML.

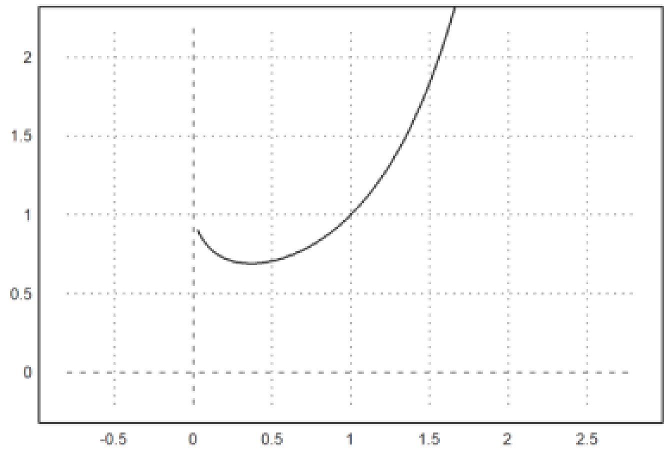
Anda cukup menandai gambar apa saja dan menyalinnya ke clipboard dengan Ctrl-C. Tentu saja, Anda juga dapat mengekspor grafik saat ini dengan fungsi di menu File.

Fungsi atau ekspresi di plot2d dievaluasi secara adaptif. Agar lebih cepat, nonaktifkan plot adaptif dengan <adaptive dan tentukan jumlah subinterval dengan n=... Hal ini hanya diperlukan dalam kasus yang jarang terjadi.

```
>plot2d("sign(x)*exp(-x^2)",-1,1,<adaptive,n=10000):
```

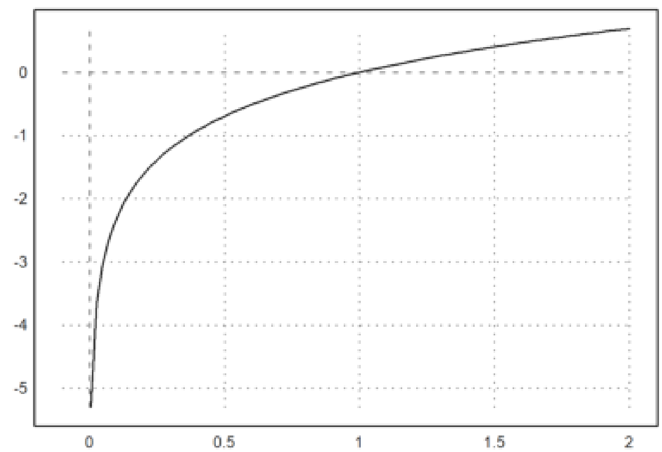


```
>plot2d("x^x",r=1.2,cx=1,cy=1):
```



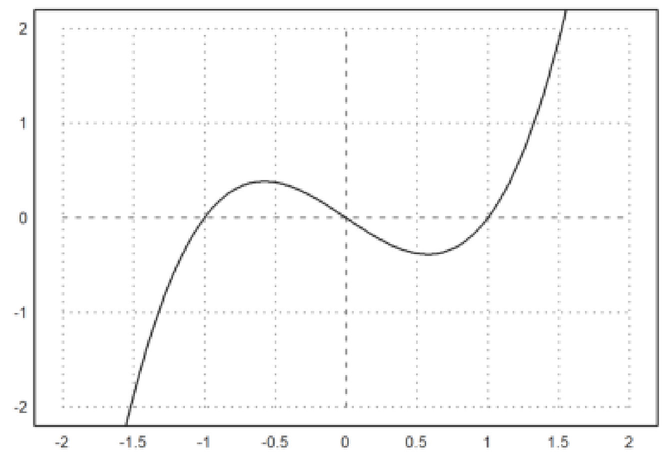
Perhatikan bahwa x^x tidak ditentukan untuk x<=0. Fungsi plot2d menangkap kesalahan ini, dan mulai membuat plot segera setelah fungsinya ditentukan. Ini berfungsi untuk semua fungsi yang mengembalikan NAN di luar jangkauan definisinya.

```
>plot2d("log(x)",-0.1,2):
```

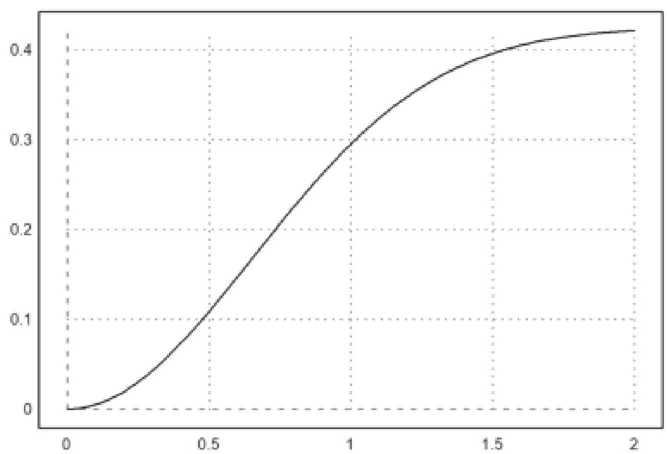


Parameter square=true (atau >square) memilih rentang y secara otomatis sehingga hasilnya adalah jendela plot persegi. Perhatikan bahwa secara default, Euler menggunakan spasi persegi di dalam jendela plot.

```
>plot2d("x^3-x",>square):
```

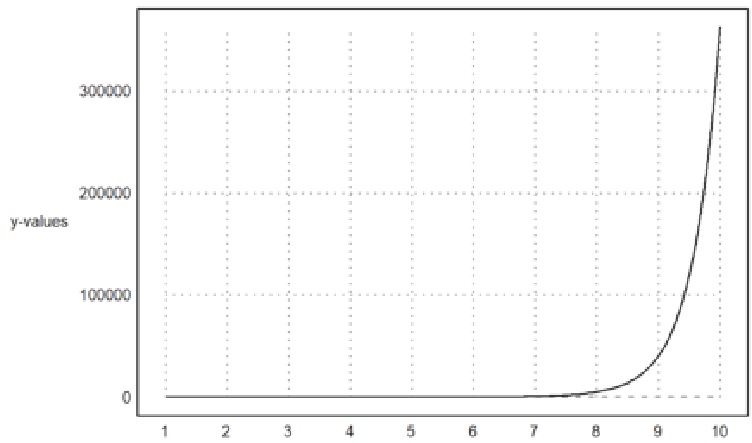



```
>plot2d(''integrate("sin(x)*exp(-x^2)",0,x)'',0,2): // plot integral
```



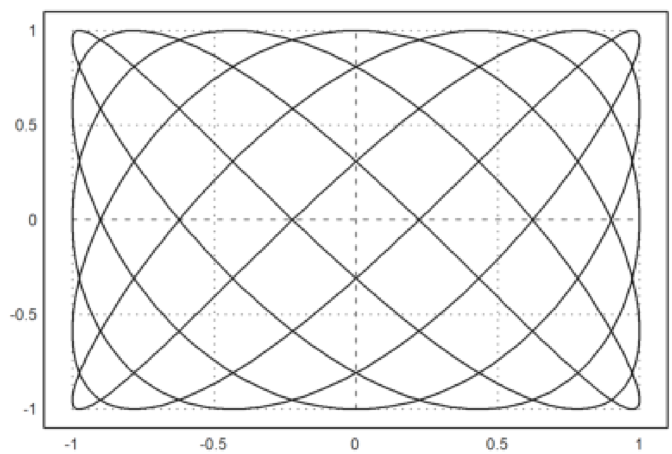
Jika Anda memerlukan lebih banyak ruang untuk label y, panggil shrinkwindow() dengan parameter lebih kecil, atau tetapkan nilai positif untuk "lebih kecil" di plot2d().

```
>plot2d("gamma(x)",1,10,yl="y-values",smaller=6,<vertical):
```

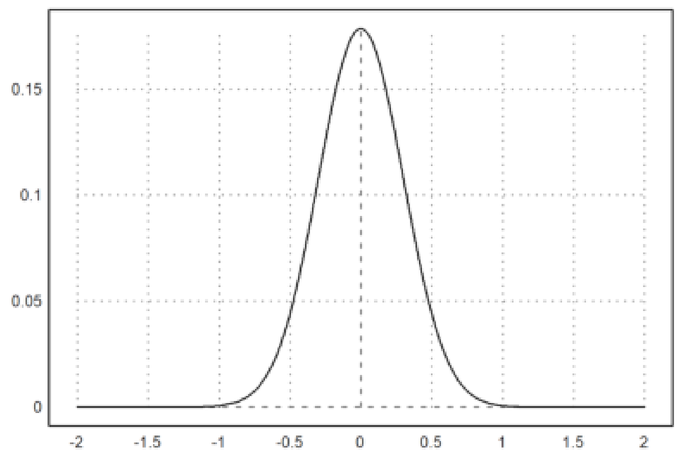


Ekspresi simbolik juga dapat digunakan karena disimpan sebagai ekspresi string sederhana.

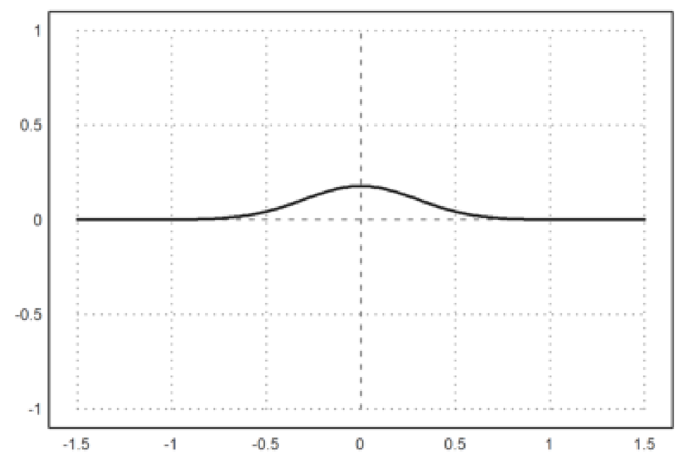
```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(5x),cos(7x)):
```



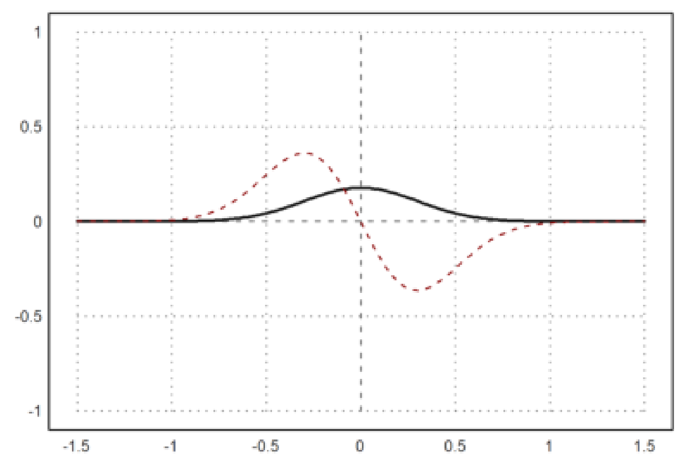

```
>a:=5.6; expr &= exp(-a*x^2)/a; // define expression
>plot2d(expr,-2,2): // plot from -2 to 2
```



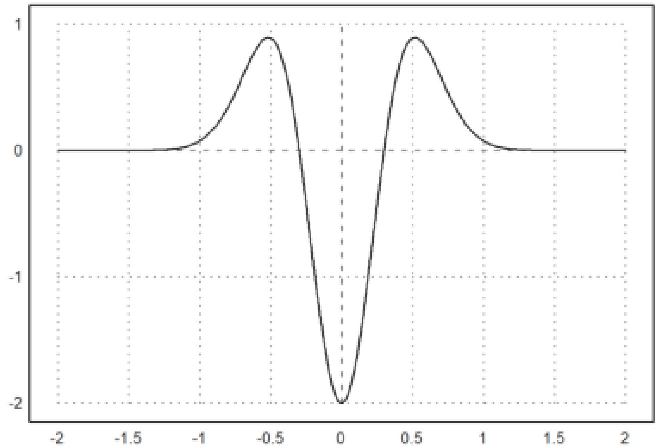

```
>plot2d(expr,r=1,thickness=2): // plot in a square around (0,0)
```



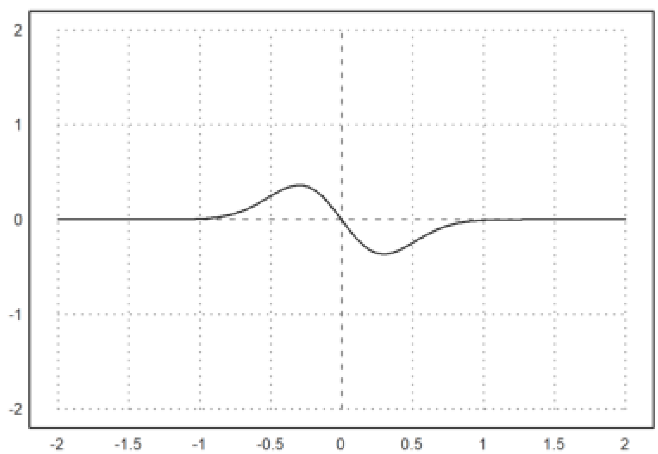

```
>plot2d(&diff(expr,x),>add,style="--",color=red): // add another plot
```



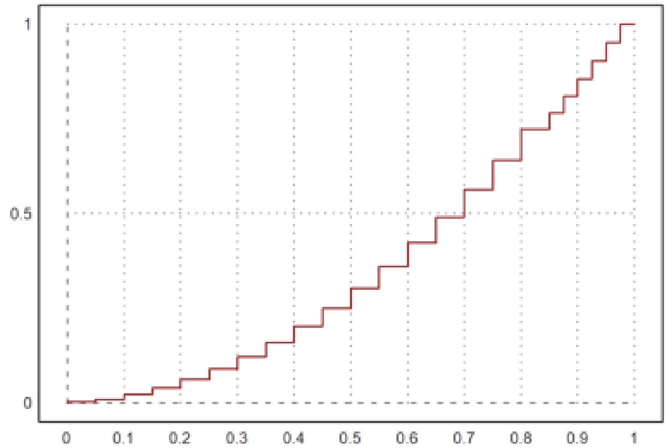
```
>plot2d(&diff(expr,x,2),a=-2,b=2,c=-2,d=1): // plot in rectangle
```



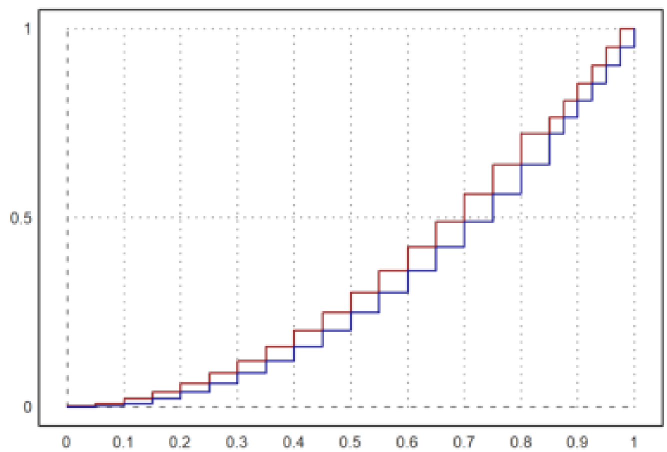

```
>plot2d(&diff(expr,x),a=-2,b=2,>square): // keep plot square
```




```
>plot2d("x^2",0,1,steps=1,color=red,n=10):
```



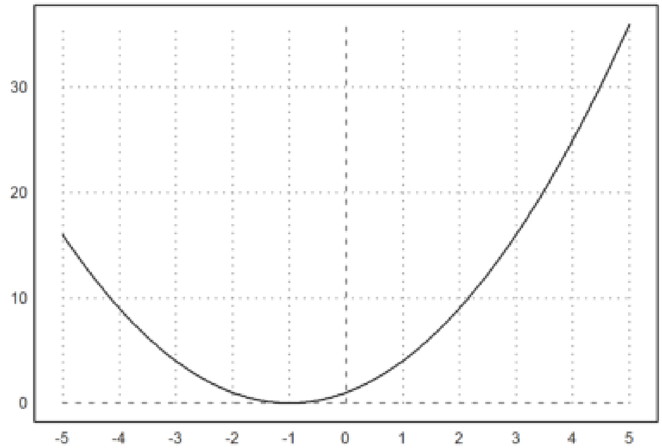

```
>plot2d("x^2",>add,steps=2,color=blue,n=10):
```



Contoh soal:
1. Tentukan plot dari fungsi berikut:

$$x^2 + 2x + 1, -5 < x < 5$$

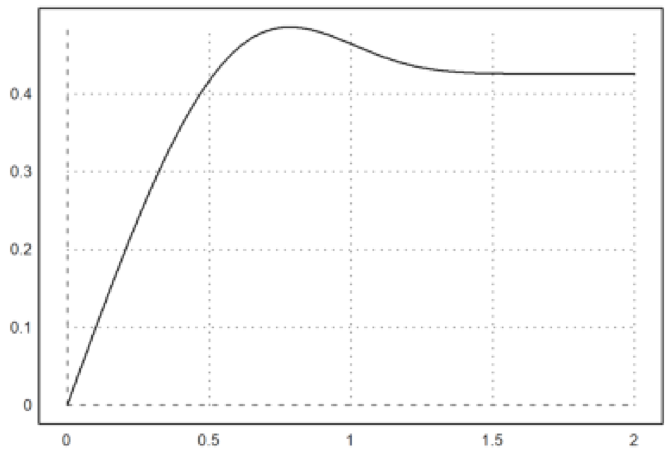
```
>plot2d("x^2+2x+1",-5,5): // plot x^2+2x+1 pada interval [-5, 5]
```



2. Tentukan plot dari integral fungsi berikut:

$$(cos2x)(-x^4)$$

```
>plot2d(''integrate("cos(2x)*exp(-x^4)",0,x)'',0,2): // plot integral
```

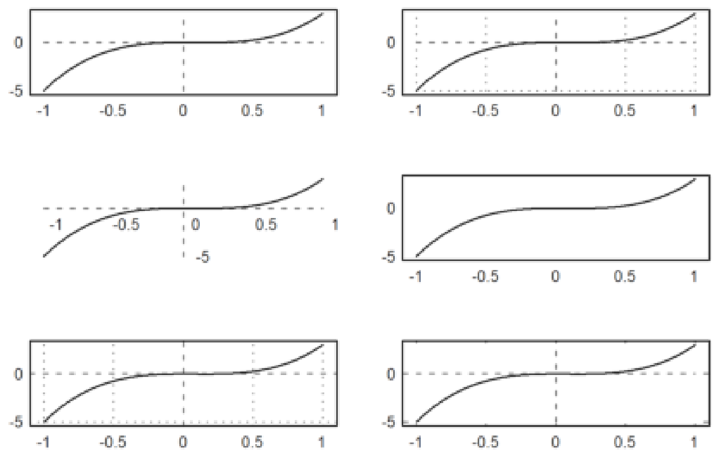


3. Tentukan plot dari fungsi berikut:

$$4x^3 - x^2, -1 < x < 1, x \in Z$$

Penyelesaian:

```
>figure(3,2); ...
>for k=1:6; figure(k); plot2d("4x^3-x^2",-1,1,grid=k); end; ...
>figure(0):
```

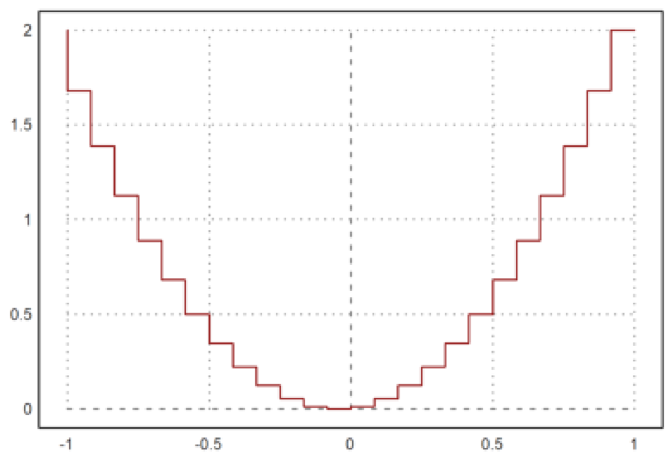


4. Tentukan plot fungsi berikut sebagai fungsi tangga

$$2(x)^2$$

Penyelesaian:

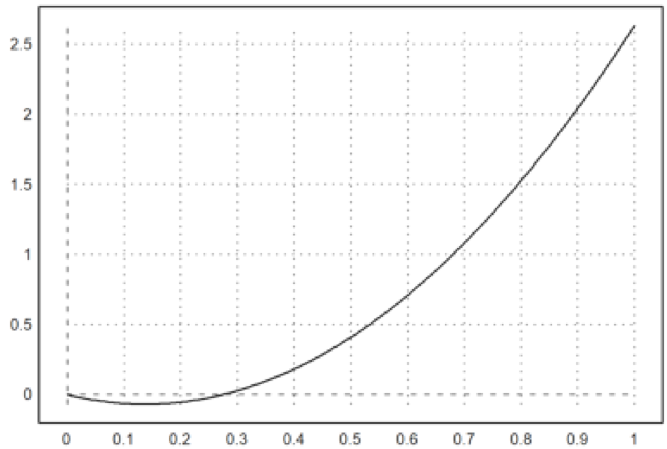
```
> plot2d("2*x^2",-1,1,steps=1,color=red,n=6):
```



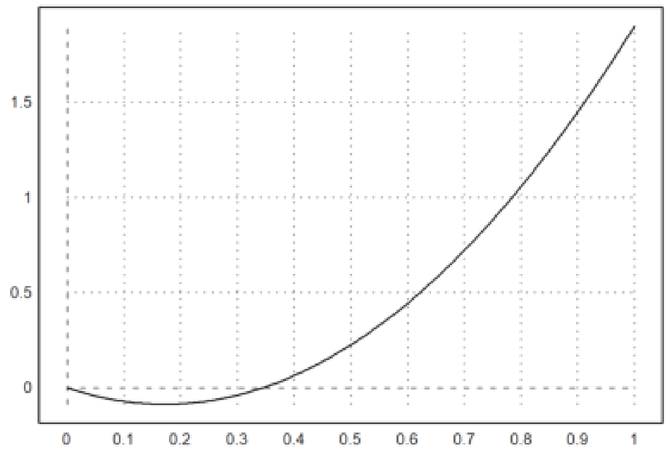
Fungsi dalam satu Parameter

Fungsi plot yang paling penting untuk plot planar adalah plot2d(). Fungsi ini diimplementasikan dalam bahasa Euler di file "plot.e", yang dimuat di awal program.
Berikut beberapa contoh penggunaan suatu fungsi. Seperti biasa di EMT, fungsi yang berfungsi untuk fungsi atau ekspresi lain, Anda bisa meneruskan parameter tambahan (selain x) yang bukan variabel global ke fungsi dengan parameter titik koma atau dengan kumpulan panggilan.

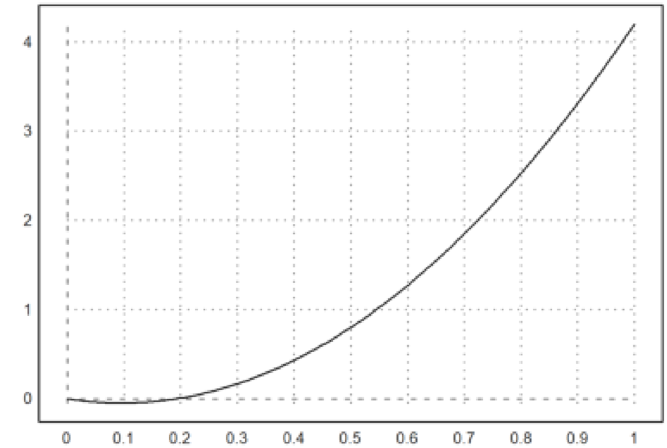
```
>function f(x,a) := x^2/a+a*x^2-x; // define a function
>a=0.3; plot2d("f",0,1;a): // plot with a=0.3
```



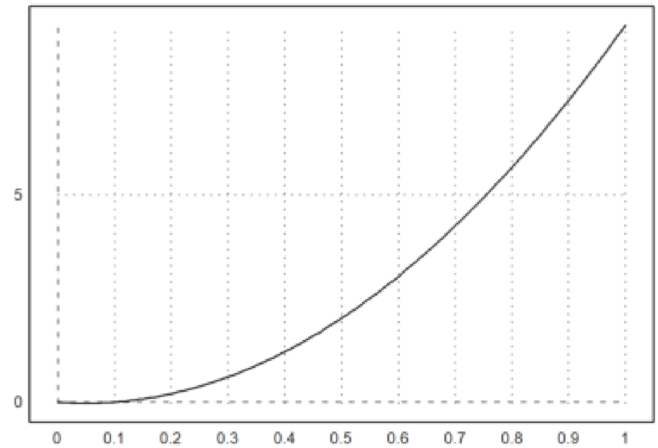

```
>plot2d("f",0,1;0.4): // plot with a=0.4
```



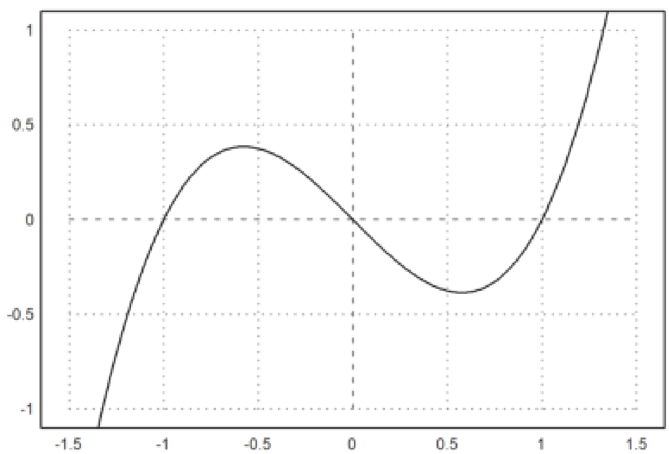

```
>plot2d({{"f",0.2}},0,1): // plot with a=0.2
```




```
>plot2d({{"f(x,b)",b=0.1}},0,1): // plot with 0.1
```




```
>function f(x) := x^3-x; ...
>plot2d("f",r=1):
```

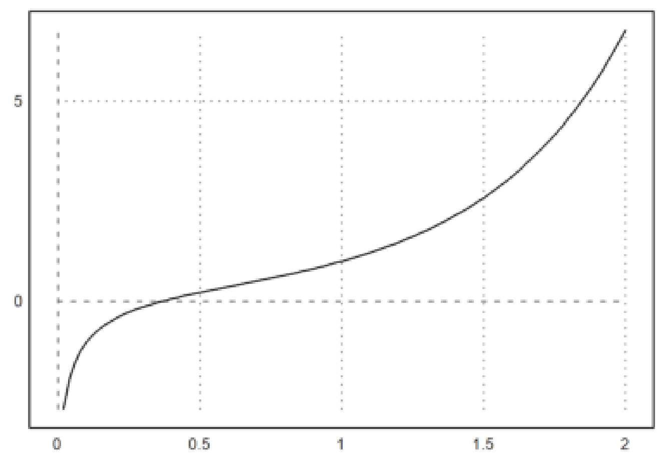


Berikut ini ringkasan fungsi yang diterima
- ekspresi atau ekspresi simbolik di x
- fungsi atau fungsi simbolik dengan nama "f"
- fungsi simbolik hanya dengan nama f
Fungsi plot2d() juga menerima fungsi simbolik. Untuk fungsi simbolik, namanya saja yang berfungsi.

```
>function f(x) &= diff(x^x,x)
```

```
                        x
                       x  (log(x) + 1)
```

```
>plot2d(f,0,2):
```

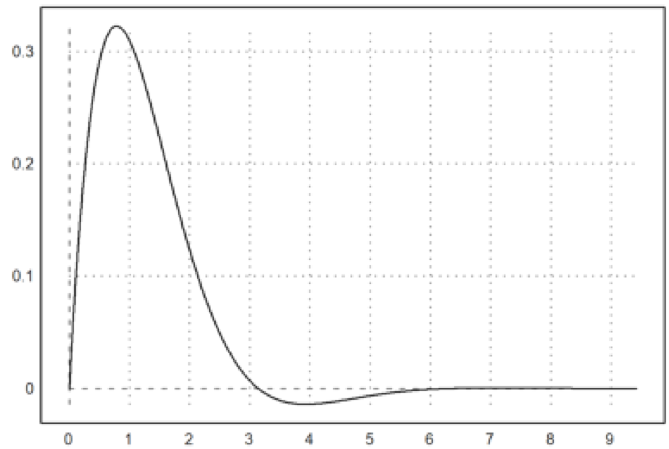


Tentu saja, untuk ekspresi atau ekspresi simbolik, nama variabel sudah cukup untuk memplotnya.

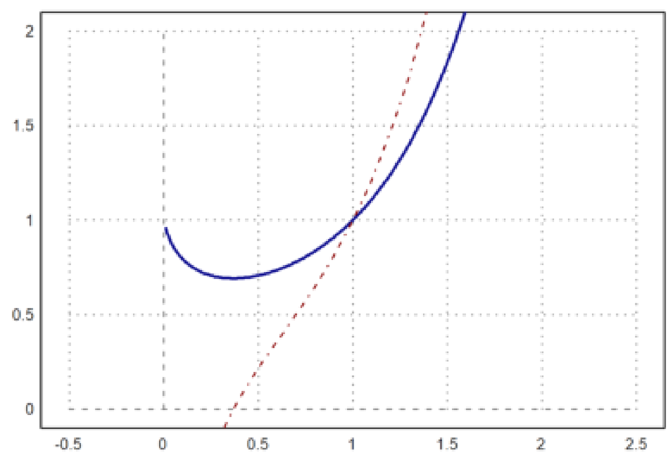
```
>expr &= sin(x)*exp(-x)
```

```
                         - x
                        E    sin(x)
```

```
>plot2d(expr,0,3pi):
```

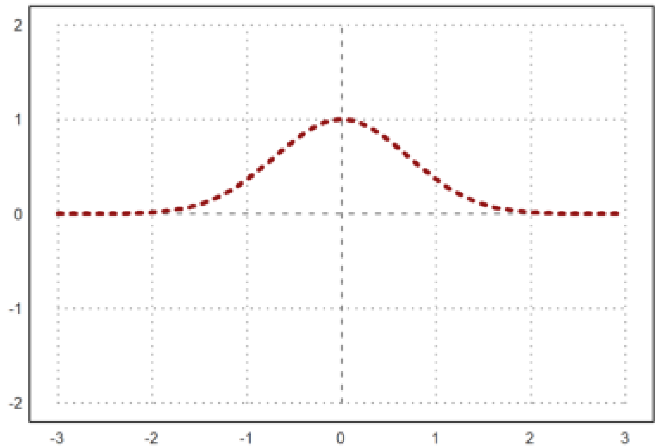



```
>function f(x) &= x^x;
>plot2d(f,r=1,cx=1,cy=1,color=blue,thickness=2);
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=red,style="-.-"):
```



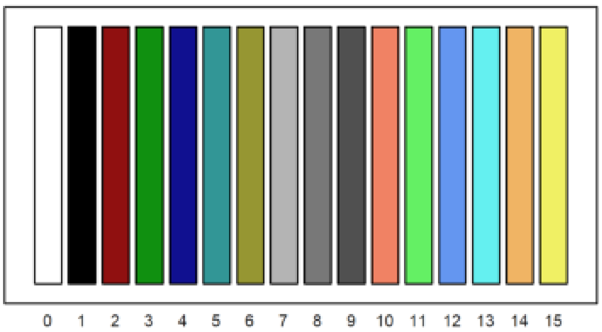
Untuk gaya garis ada berbagai pilihan.
- gaya="...". Pilih dari "-", "–", "-.", ".", ".-.", "-.-".
- color: Lihat di bawah untuk warna.
- ketebalan: Defaultnya adalah 1.
Warna dapat dipilih sebagai salah satu warna default, atau sebagai warna RGB.
- 0..15: indeks warna default.
- konstanta warna: putih, hitam, merah, hijau, biru, cyan, zaitun, abu-abu muda, abu-abu, abu-abu tua, oranye, hijau muda, pirus, biru muda, oranye muda, kuning
- rgb(merah,hijau,biru): parameternya real di [0,1].

```
>plot2d("exp(-x^2)",r=2,color=red,thickness=3,style="--"):
```



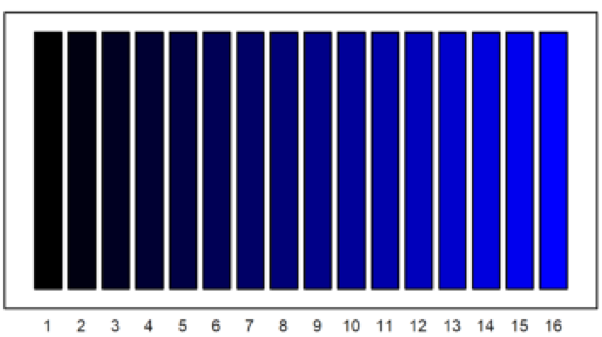
Berikut adalah tampilan warna EMT yang telah ditentukan sebelumnya.

```
>aspect(2); columnsplot(ones(1,16),lab=0:15,grid=0,color=0:15):
```



Tapi Anda bisa menggunakan warna apa saja.

```
>columnsplot(ones(1,16),grid=0,color=rgb(0,0,linspace(0,1,15))):
```

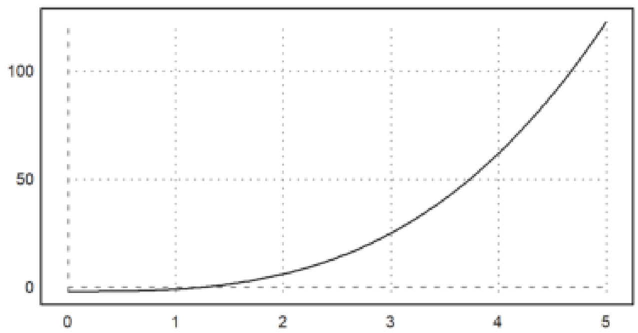


Contoh soal:
1. Tentukan plot dari fungsi berikut:

$$f(x) = x^3 - 2$$

Penyelesaian:

```
>function f(x)&=x^3-2;
>plot2d(f,0,5):
```

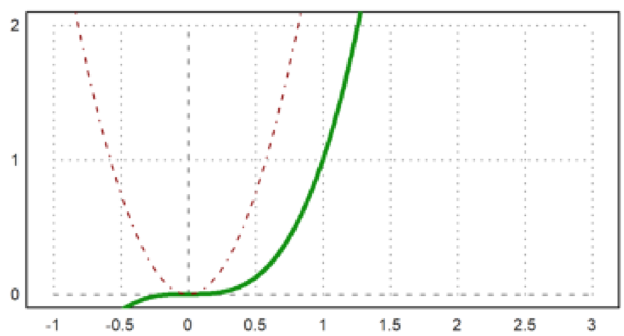


2. Tentukan plot dari fungsi berikut:

$$f(x) = x^3$$

Penyelesaian:

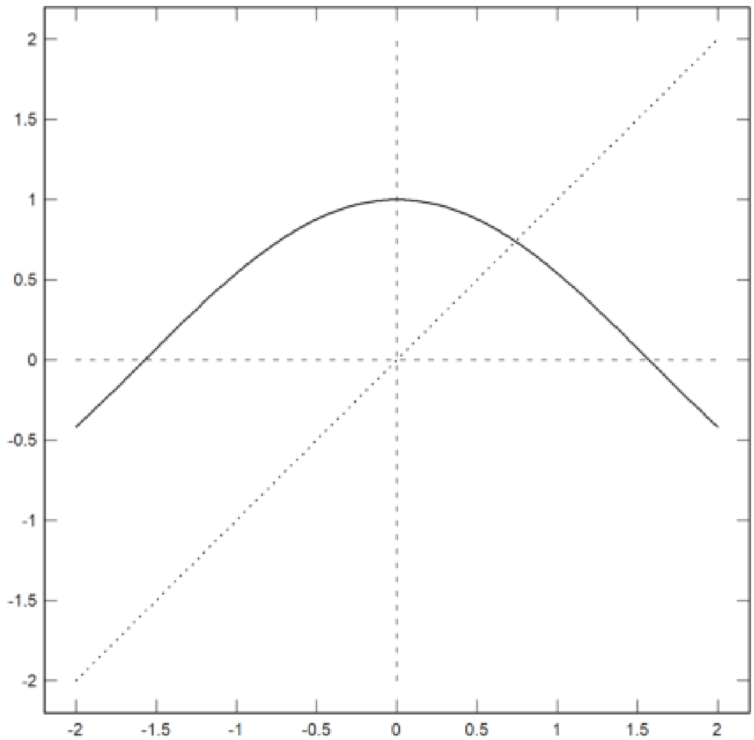
```
>function f(x) &= x^3;
>plot2d(f,r=1,cx=1,cy=1,color=green,thickness=3);
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=red,style="-.-"):
```



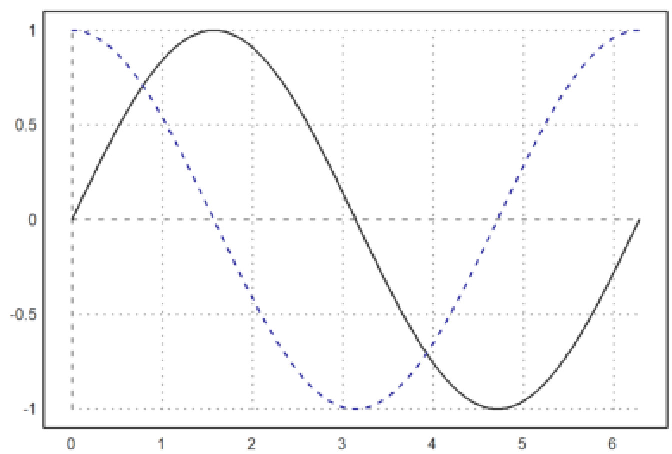
Menggambar Beberapa Kurva pada bidang koordinat yang sama

Plot lebih dari satu fungsi (multiple function) ke dalam satu jendela dapat dilakukan dengan berbagai cara. Salah satu metodenya adalah menggunakan >add untuk beberapa panggilan ke plot2d secara keseluruhan, kecuali panggilan pertama. Kami telah menggunakan fitur ini pada contoh di atas.

```
>aspect(); plot2d("cos(x)",r=2,grid=6); plot2d("x",style=".",>add):
```

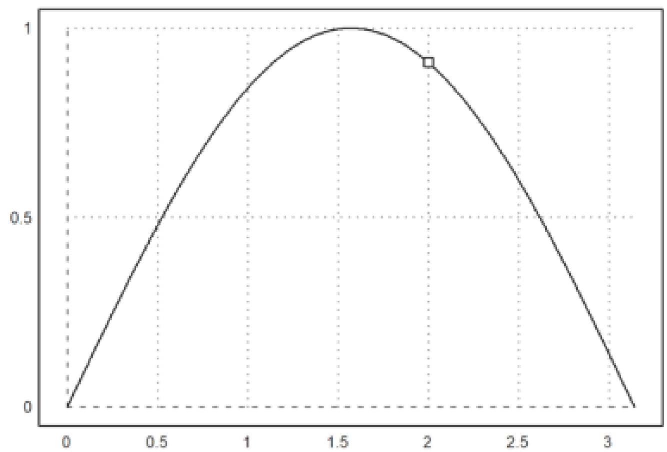



```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi); plot2d("cos(x)",color=blue,style="--"
```



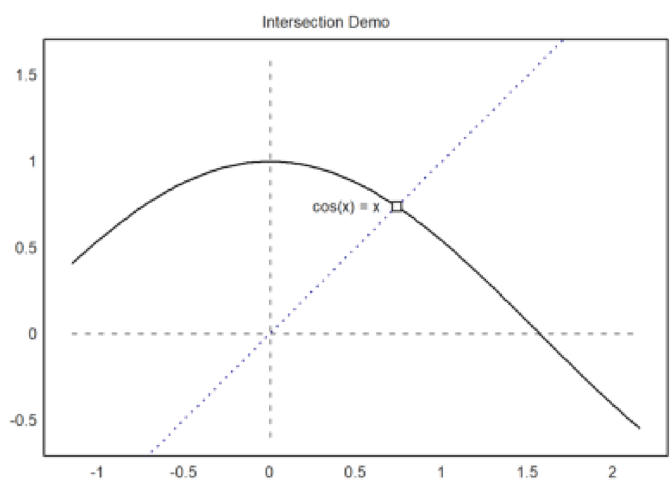
Salah satu kegunaan >add adalah untuk menambahkan titik pada kurva.

```
>plot2d("sin(x)",0,pi); plot2d(2,sin(2),>points,>add):
```



Kita tambahkan titik perpotongan dengan label (pada posisi "cl" untuk kiri tengah), dan masukkan hasilnya ke dalam buku catatan. Kami juga menambahkan judul pada plot.

```
>plot2d(["cos(x)","x"],r=1.1,cx=0.5,cy=0.5, ...
>  color=[black,blue],style=["-","."], ...
>  grid=1);
>x0=solve("cos(x)-x",1);  ...
>  plot2d(x0,x0,>points,>add,title="Intersection Demo");  ...
>  label("cos(x) = x",x0,x0,pos="cl",offset=20):
```

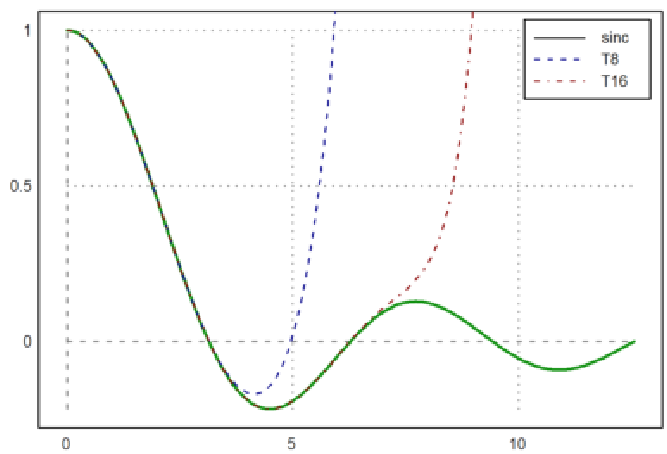


Dalam demo berikut, kita memplot fungsi sin(x)=sin(x)/x dan ekspansi Taylor ke-8 dan ke-16. Kami menghitung perluasan ini menggunakan Maxima melalui ekspresi simbolik.
Plot ini dilakukan dalam perintah multi-baris berikut dengan tiga panggilan ke plot2d(). Yang kedua dan ketiga memiliki kumpulan tanda >add, yang membuat plot menggunakan rentang sebelumnya.
Kami menambahkan kotak label yang menjelaskan fungsinya.

```
>$taylor(sin(x)/x,x,0,4)
```

$$\frac{x^4}{120} - \frac{x^2}{6} + 1$$

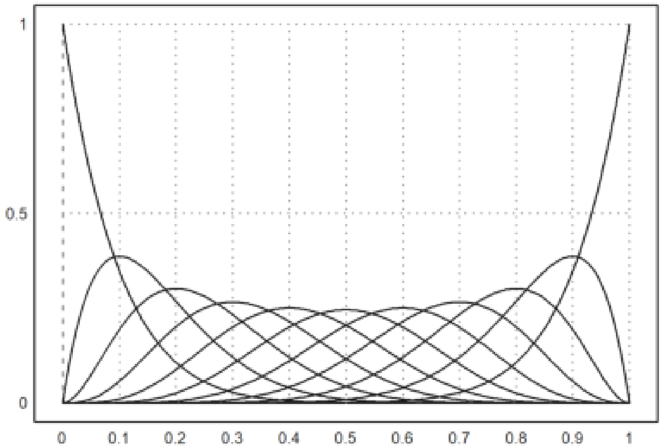
```
>plot2d("sinc(x)",0,4pi,color=green,thickness=2); ...
>  plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,8),>add,color=blue,style="--"); ...
>  plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,16),>add,color=red,style="-.-"); ...
>  labelbox(["sinc","T8","T16"],styles=["-","--","-.-"], ...
>    colors=[black,blue,red]):
```



Dalam contoh berikut, kami menghasilkan Polinomial Bernstein.

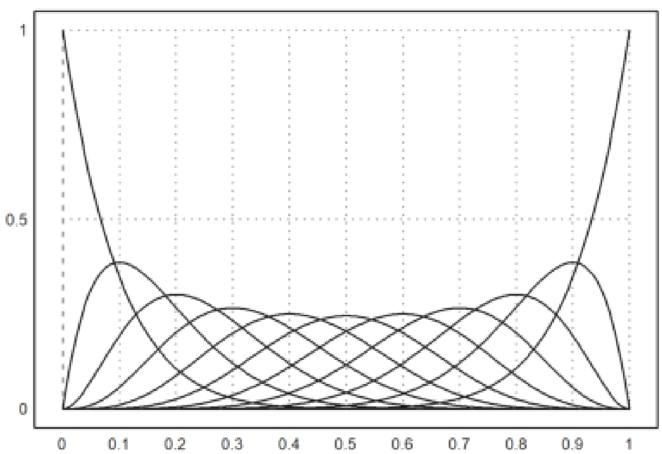
$$B_i(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

```
>plot2d("(1-x)^10",0,1); // plot first function
>for i=1 to 10; plot2d("bin(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i)",>add); end;
>insimg;
```



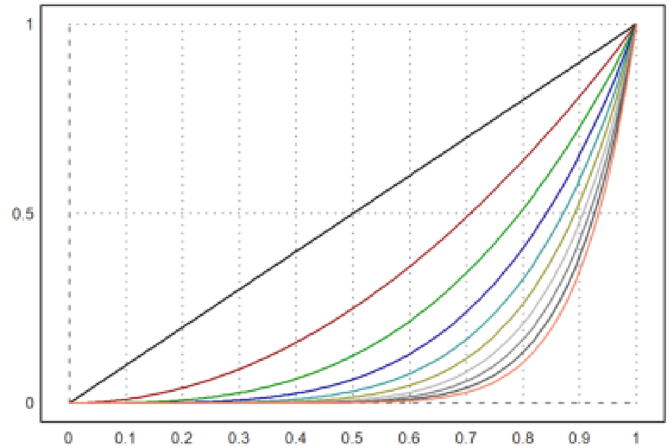
Cara kedua adalah dengan menggunakan pasangan matriks bernilai x dan matriks bernilai y yang berukuran sama.
Kami menghasilkan matriks nilai dengan satu Polinomial Bernstein di setiap baris. Untuk ini, kita cukup menggunakan vektor kolom i. Lihat pendahuluan tentang bahasa matriks untuk mempelajari lebih detail.

```
>x=linspace(0,1,500);
>n=10; k=(0:n)'; // n is row vector, k is column vector
>y=bin(n,k)*x^k*(1-x)^(n-k); // y is a matrix then
>plot2d(x,y):
```



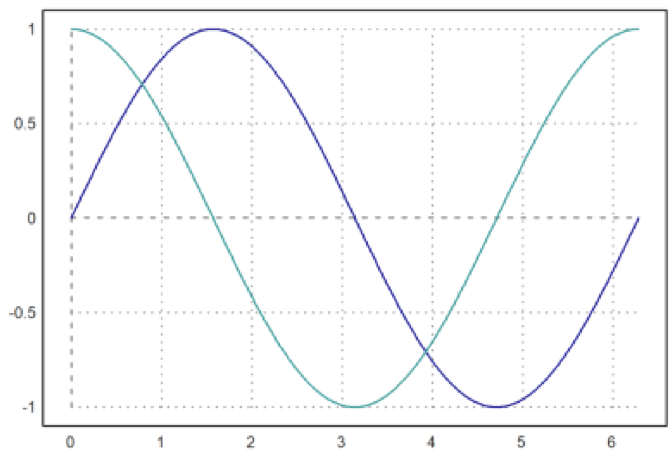
Perhatikan bahwa parameter warna dapat berupa vektor. Kemudian setiap warna digunakan untuk setiap baris matriks.

```
>x=linspace(0,1,200); y=x^(1:10)'; plot2d(x,y,color=1:10):
```

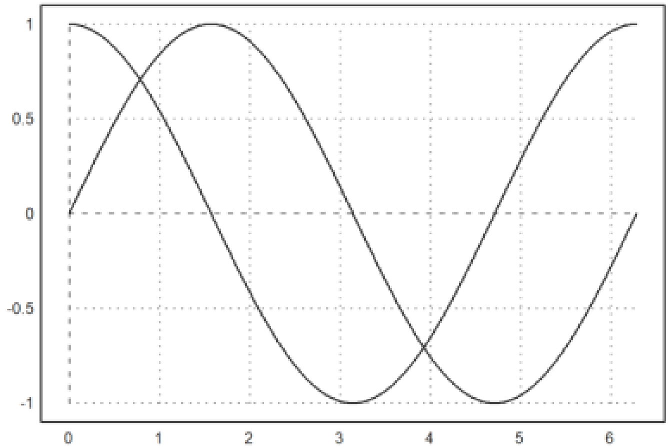


Metode lain adalah menggunakan vektor ekspresi (string). Anda kemudian dapat menggunakan susunan warna, susunan gaya, dan susunan ketebalan dengan panjang yang sama.

```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=4:5):
```




```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi): // plot vector of expressions
```



Kita bisa mendapatkan vektor seperti itu dari Maxima menggunakan makelist() dan mxm2str().

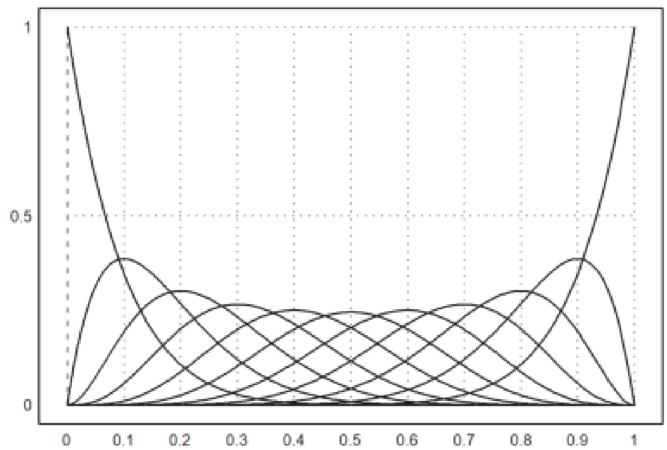
```
>v &= makelist(binomial(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i),i,0,10) // make list
```

```
                    10                9                  8  2                 7  3
          [(1 - x)  , 10 (1 - x)  x, 45 (1 - x)  x , 120 (1 - x)  x ,
                6   4                5   5                4   6                 3   7
 210 (1 - x)  x , 252 (1 - x)  x , 210 (1 - x)  x , 120 (1 - x)  x ,
               2   8                9    10
 45 (1 - x)  x , 10 (1 - x) x , x   ]
```

```
>mxm2str(v) // get a vector of strings from the symbolic vector
```

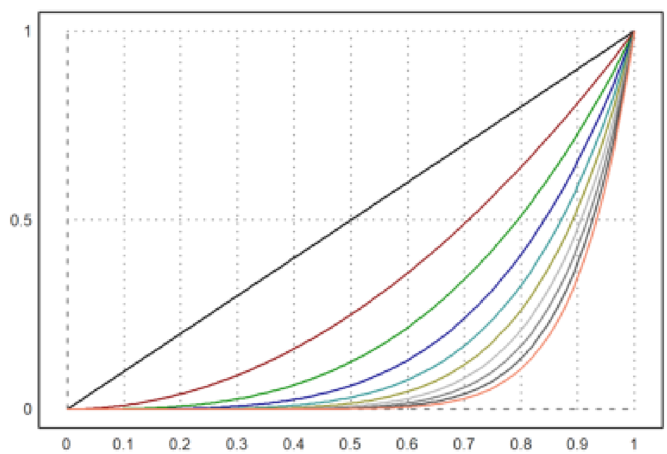
```
 (1-x)^10
 10*(1-x)^9*x
 45*(1-x)^8*x^2
 120*(1-x)^7*x^3
 210*(1-x)^6*x^4
 252*(1-x)^5*x^5
 210*(1-x)^4*x^6
 120*(1-x)^3*x^7
 45*(1-x)^2*x^8
 10*(1-x)*x^9
 x^10
```

```
>plot2d(mxm2str(v),0,1): // plot functions
```



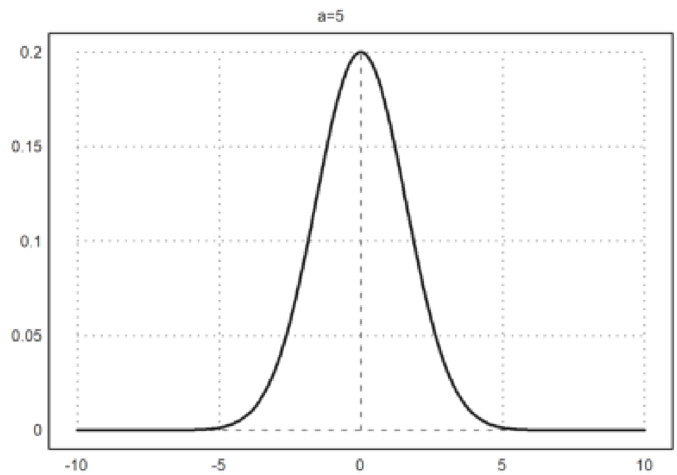
Alternatif lain adalah dengan menggunakan bahasa matriks Euler.
Jika suatu ekspresi menghasilkan matriks fungsi, dengan satu fungsi di setiap baris, semua fungsi tersebut akan diplot ke dalam satu plot.
Untuk ini, gunakan vektor parameter dalam bentuk vektor kolom. Jika array warna ditambahkan maka akan digunakan untuk setiap baris plot.

```
>n=(1:10)'; plot2d("x^n",0,1,color=1:10):
```



Ekspresi dan fungsi satu baris dapat melihat variabel global.
Jika Anda tidak dapat menggunakan variabel global, Anda perlu menggunakan fungsi dengan parameter tambahan, dan meneruskan parameter ini sebagai parameter titik koma.
Berhati-hatilah, untuk meletakkan semua parameter yang ditetapkan di akhir perintah plot2d.
Dalam contoh ini kita meneruskan a=5 ke fungsi f, yang kita plot dari -10 hingga 10.

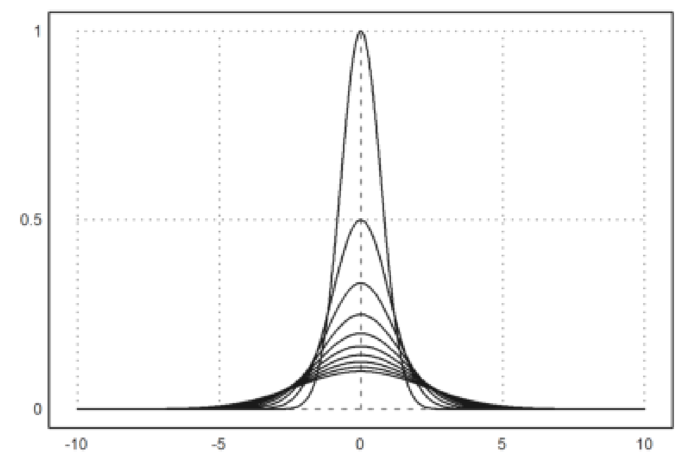
```
>function f(x,a) := 1/a*exp(-x^2/a); ...
>plot2d("f",-10,10;5,thickness=2,title="a=5"):
```



Alternatifnya, gunakan koleksi dengan nama fungsi dan semua parameter tambahan. Daftar khusus ini disebut kumpulan panggilan, dan ini adalah cara yang lebih disukai untuk meneruskan argumen ke suatu fungsi yang kemudian diteruskan sebagai argumen ke fungsi lain.

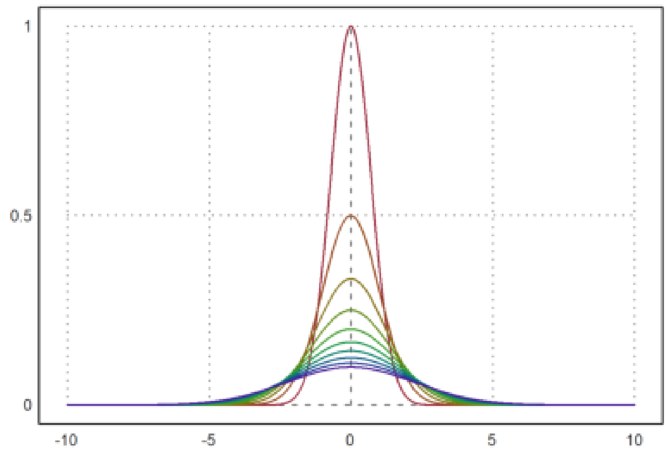
Pada contoh berikut, kita menggunakan loop untuk memplot beberapa fungsi (lihat tutorial tentang pemrograman loop).

```
>plot2d({{"f",1}},-10,10); ...
>for a=2:10; plot2d({{"f",a}},>add); end:
```



Kita dapat mencapai hasil yang sama dengan cara berikut menggunakan bahasa matriks EMT. Setiap baris matriks f(x,a) merupakan satu fungsi. Selain itu, kita dapat mengatur warna untuk setiap baris matriks. Klik dua kali pada fungsi getspectral() untuk penjelasannya.

```
>x=-10:0.01:10; a=(1:10)'; plot2d(x,f(x,a),color=getspectral(a/10)):
```

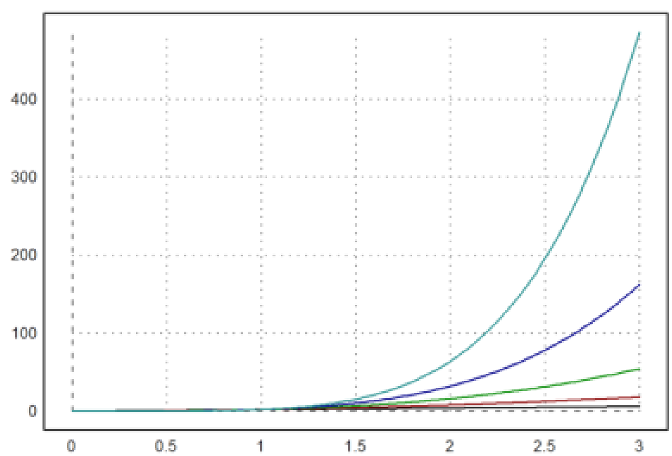


Contoh Soal:
1. Tentukan plot dari fungsi berikut:

$$2x^n$$

Penyelesaian:

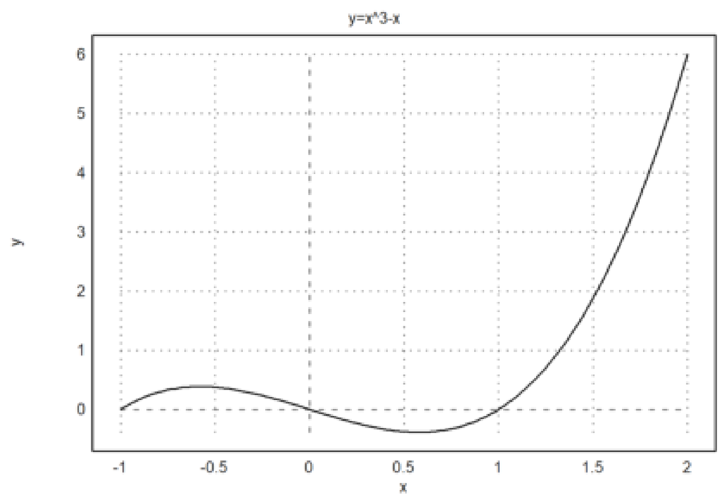
```
>n=(1:5)'; plot2d("2x^n",0,3,color=1:5):
```



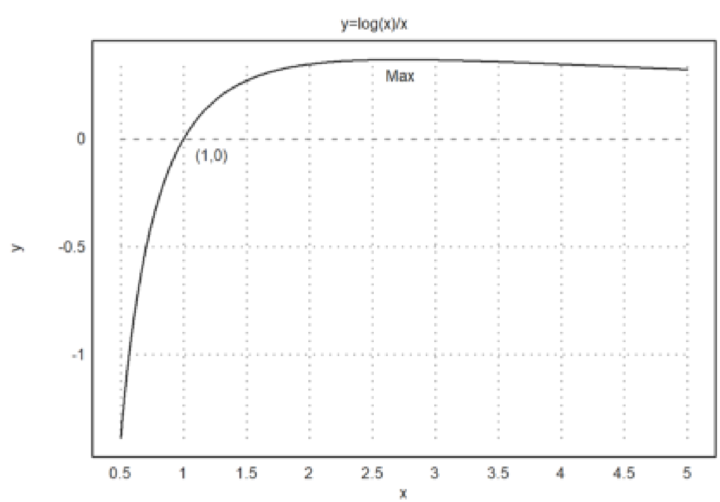
Label Teks

Dekorasi sederhana bisa berupa
- judul dengan judul="..."
- label x dan y dengan xl="...", yl="..."
- label teks lain dengan label("...",x,y)
Perintah label akan memplot ke plot saat ini pada koordinat plot (x,y). Hal ini memerlukan argumen posisional.

```
>plot2d("x^3-x",-1,2,title="y=x^3-x",yl="y",xl="x"):
```

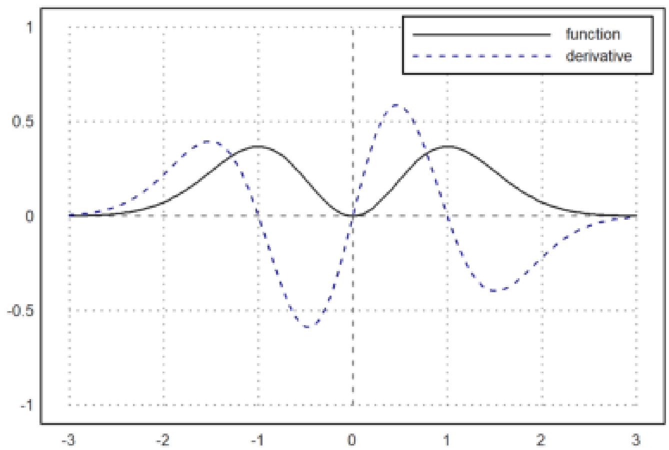



```
>expr := "log(x)/x"; ...
>  plot2d(expr,0.5,5,title="y="+expr,xl="x",yl="y"); ...
>  label("(1,0)",1,0); label("Max",E,expr(E),pos="lc"):
```



Ada juga fungsi labelbox(), yang dapat menampilkan fungsi dan teks. Dibutuhkan vektor string dan warna, satu item untuk setiap fungsi.

```
>function f(x) &= x^2*exp(-x^2);  ...
>plot2d(&f(x),a=-3,b=3,c=-1,d=1);  ...
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=blue,style="--"); ...
>labelbox(["function","derivative"],styles=["-","--"], ...
>   colors=[black,blue],w=0.4):
```

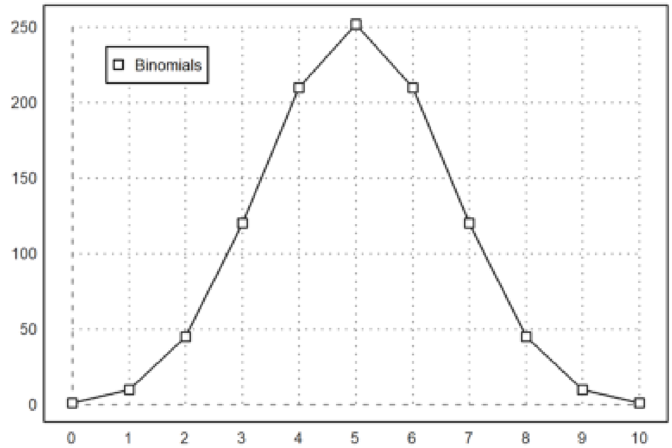


Kotak ini berlabuh di kanan atas secara default, tetapi >kiri berlabuh di kiri atas. Anda dapat memindahkannya ke tempat mana pun yang Anda suka. Posisi jangkar berada di pojok kanan atas kotak, dan angkanya merupakan pecahan dari ukuran jendela grafis. Lebarnya otomatis.

Untuk plot titik, kotak label juga berfungsi. Tambahkan parameter >points, atau vektor bendera, satu untuk setiap label.

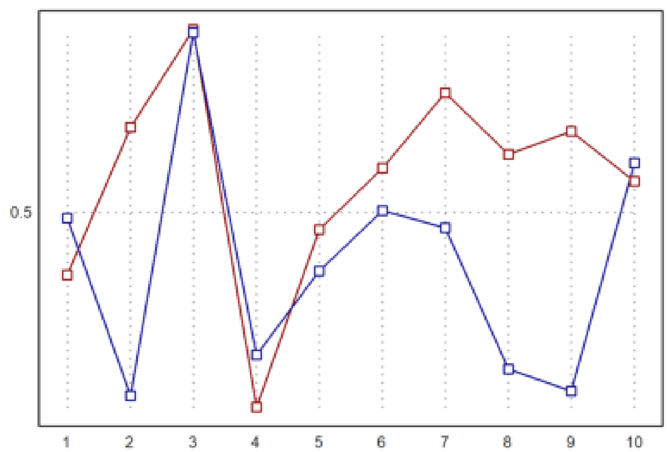
Pada contoh berikut, hanya ada satu fungsi. Jadi kita bisa menggunakan string sebagai pengganti vektor string. Kami mengatur warna teks menjadi hitam untuk contoh ini.

```
>n=10; plot2d(0:n,bin(n,0:n),>addpoints); ...
>labelbox("Binomials",styles="[]",>points,x=0.1,y=0.1, ...
>tcolor=black,>left):
```



Gaya plot ini juga tersedia di statplot(). Seperti di plot2d() warna dapat diatur untuk setiap baris plot. Masih banyak lagi plot khusus untuk keperluan statistik (lihat tutorial tentang statistik).

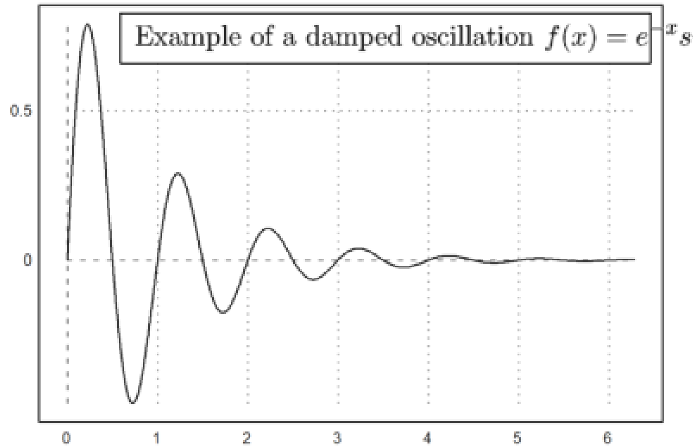
```
>statplot(1:10,random(2,10),color=[red,blue]):
```



Fitur serupa adalah fungsi textbox().

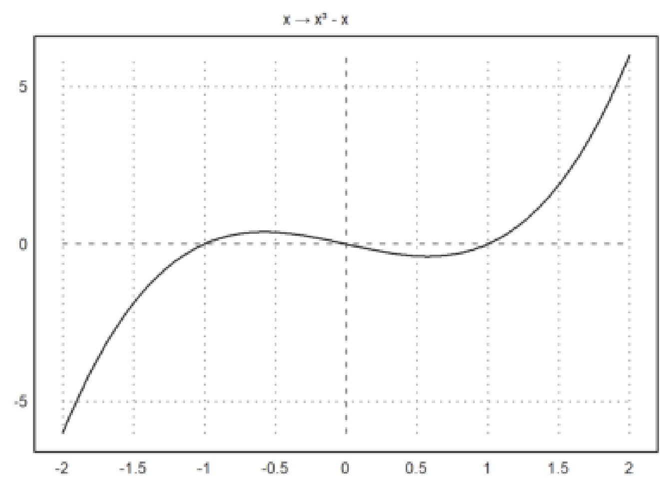
Lebarnya secara default adalah lebar maksimal baris teks. Tapi itu bisa diatur oleh pengguna juga.

```
>function f(x) &= exp(-x)*sin(2*pi*x); ...
>plot2d("f(x)",0,2pi); ...
>textbox(latex("\text{Example of a damped oscillation}\ f(x)=e^{-x}sin(2\pi
```



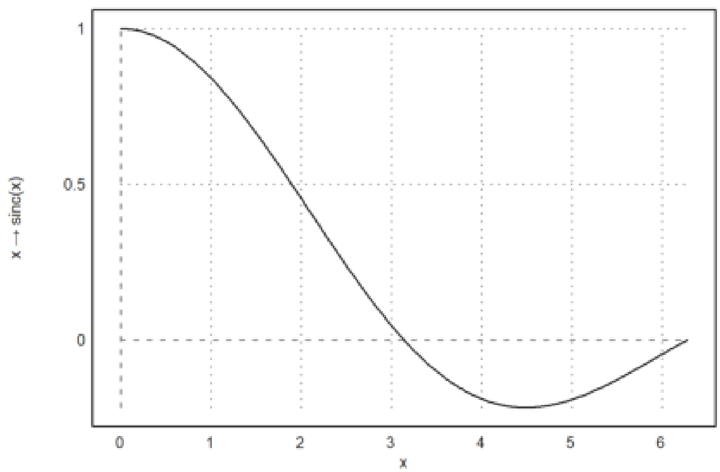
Label teks, judul, kotak label, dan teks lainnya dapat berisi string Unicode (lihat sintaks EMT untuk mengetahui lebih lanjut tentang string Unicode).

```
>plot2d("x^3-x",title=u"x &rarr; x&sup3; - x"):
```



Label pada sumbu x dan y bisa vertikal, begitu juga dengan sumbunya.

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,xl="x",yl=u"x &rarr; sinc(x)",>vertical):
```

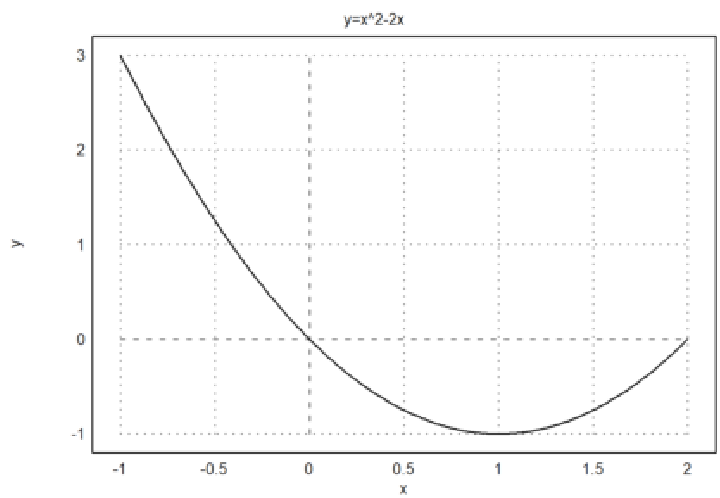


Contoh Soal:
1. Tentukan plot dari fungsi berikut

$$y = x^2 - 2x$$

Penyelesaian:

```
> plot2d("x^2-2x",-1,2,title="y=x^2-2x",yl="y",xl="x"):
```

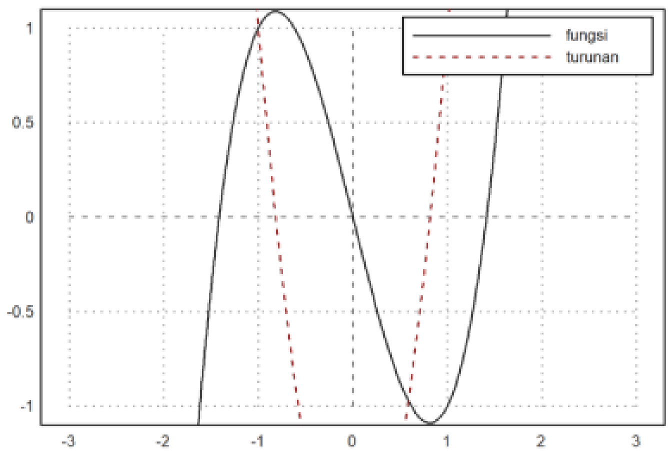


2. Tentukan plot dari fungsi berikut dan turunannya!

$$f(x) = x^3 - 2x$$

Penyelesaian:

```
>function f(x) &= x^3-2*x; ...
>plot2d(&f(x),a=-3,b=3,c=-1,d=1); ...
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=red,style="--"); ...
>labelbox(["fungsi","turunan"],styles=["-","--"], ...
>colors=[black,red],w=0.4):
```



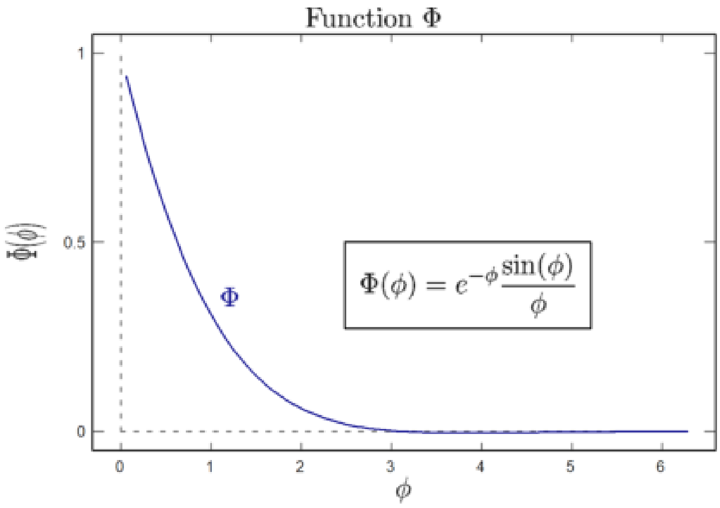
LaTeX

Anda juga dapat memplot rumus LaTeX jika Anda telah menginstal sistem LaTeX. Saya merekomendasikan MiKTeX. Jalur ke biner "lateks" dan "dvipng" harus berada di jalur sistem, atau Anda harus mengatur LaTeX di menu opsi.

Perhatikan, penguraian LaTeX lambat. Jika Anda ingin menggunakan LaTeX dalam plot animasi, Anda harus memanggil latex() sebelum loop satu kali dan menggunakan hasilnya (gambar dalam matriks RGB).

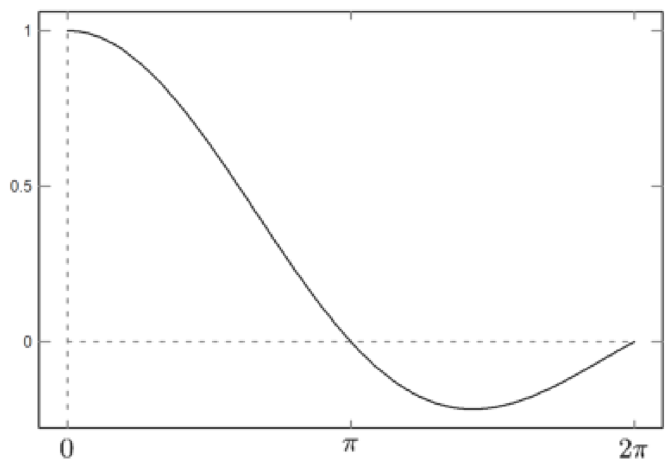
Pada plot berikut, kami menggunakan LaTeX untuk label x dan y, label, kotak label, dan judul plot.

```
>plot2d("exp(-x)*sin(x)/x",a=0,b=2pi,c=0,d=1,grid=6,color=blue, ...
>  title=latex("\text{Function $\Phi$}"), ...
>  xl=latex("\phi"),yl=latex("\Phi(\phi)")); ...
>textbox( ...
>  latex("\Phi(\phi) = e^{-\phi} \frac{\sin(\phi)}{\phi}"),x=0.8,y=0.5); ...
>label(latex("\Phi",color=blue),1,0.4):
```



Seringkali, kita menginginkan spasi dan label teks yang tidak konformal pada sumbu x. Kita bisa menggunakan xaxis() dan yaxis() seperti yang akan kita tunjukkan nanti.
Cara termudah adalah membuat plot kosong dengan bingkai menggunakan grid=4, lalu menambahkan grid dengan ygrid() dan xgrid(). Pada contoh berikut, kami menggunakan tiga string LaTeX untuk label pada sumbu x dengan xtick().

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,grid=4,<ticks); ...
>ygrid(-2:0.5:2,grid=6); ...
>xgrid([0:2]*pi,<ticks,grid=6);  ...
>xtick([0,pi,2pi],["0","\pi","2\pi"],>latex):
```



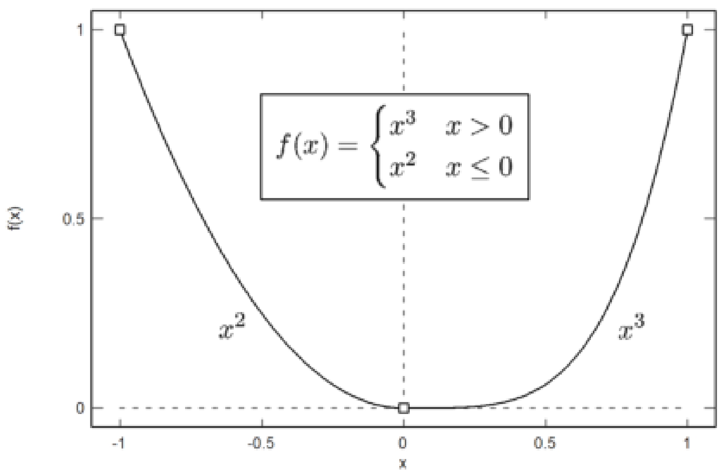
Tentu saja fungsinya juga bisa digunakan.

```
>function map f(x) ...
```

```
  if x>0 then return x^4
  else return x^2
  endif
  endfunction
```

Parameter "map" membantu menggunakan fungsi untuk vektor. Untuk
plot, itu tidak perlu. Tapi untuk menunjukkan vektorisasi itu
berguna, kita menambahkan beberapa poin penting ke plot di x=-1, x=0 dan x=1.
Pada plot berikut, kami juga memasukkan beberapa kode LaTeX. Kami menggunakannya untuk dua label dan kotak teks. Tentu saja, Anda hanya bisa menggunakannya LaTeX jika Anda telah menginstal LaTeX dengan benar.

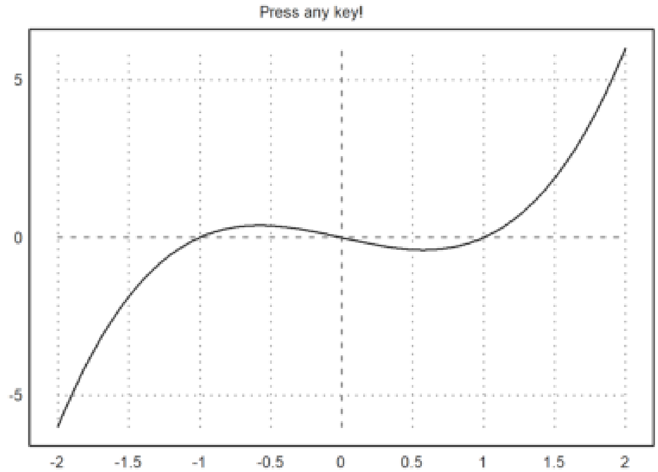
```
>plot2d("f",-1,1,xl="x",yl="f(x)",grid=6);  ...
>plot2d([-1,0,1],f([-1,0,1]),>points,>add); ...
>label(latex("x^3"),0.72,f(0.72)); ...
>label(latex("x^2"),-0.52,f(-0.52),pos="ll"); ...
>textbox( ...
>  latex("f(x)=\begin{cases} x^3 & x>0 \\ x^2 & x \le 0\end{cases}"), ...
>  x=0.7,y=0.2):
```



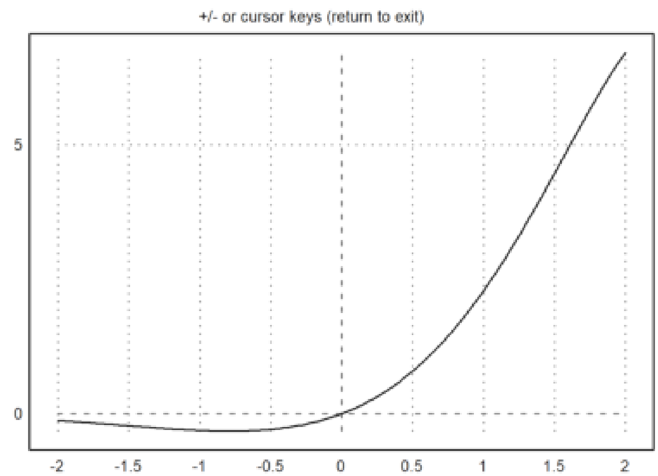
Interaksi pengguna

Saat memplot suatu fungsi atau ekspresi, parameter >pengguna memungkinkan pengguna untuk memperbesar dan menggeser plot dengan tombol kursor atau mouse. Pengguna bisa
- perbesar dengan + atau -
- pindahkan plot dengan tombol kursor
- pilih jendela plot dengan mouse
- atur ulang tampilan dengan spasi
- keluar dengan kembali
Tombol spasi akan mengatur ulang plot ke jendela plot aslinya.
Saat memplot data, flag >user hanya akan menunggu penekanan tombol.

```
>plot2d({{"x^3-a*x",a=1}},>user,title="Press any key!"):
```




```
>plot2d("exp(x)*sin(x)",user=true, ...
>  title="+/- or cursor keys (return to exit)"):
```



Berikut ini menunjukkan cara interaksi pengguna tingkat lanjut (lihat tutorial tentang pemrograman untuk detailnya).

Fungsi bawaan mousedrag() menunggu aktivitas mouse atau keyboard. Ini melaporkan mouse ke bawah, gerakan mouse atau mouse ke atas, dan penekanan tombol. Fungsi dragpoints() memanfaatkan ini, dan memungkinkan pengguna menyeret titik mana pun dalam plot.

Kita membutuhkan fungsi plot terlebih dahulu. Misalnya, kita melakukan interpolasi pada 5 titik dengan polinomial. Fungsi tersebut harus diplot ke dalam area plot yang tetap.

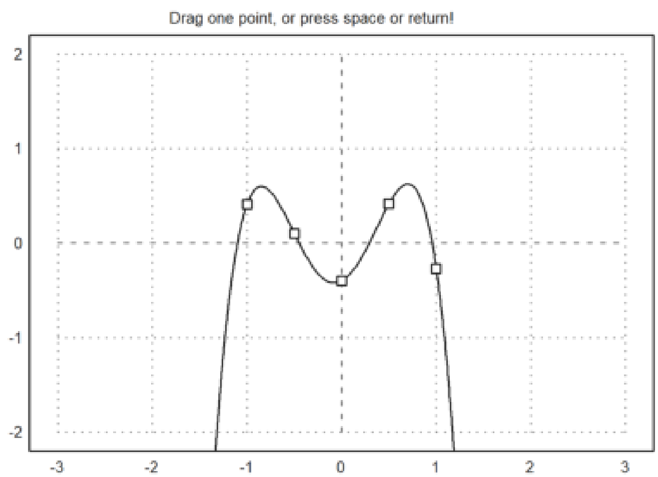
```
>function plotf(xp,yp,select) ...
```

```
    d=interp(xp,yp);
    plot2d("interpval(xp,d,x)";d,xp,r=2);
    plot2d(xp,yp,>points,>add);
    if select>0 then
      plot2d(xp[select],yp[select],color=red,>points,>add);
    endif;
    title("Drag one point, or press space or return!");
  endfunction
```

Perhatikan parameter titik koma di plot2d (d dan xp), yang diteruskan ke evaluasi fungsi interp(). Tanpa ini, kita harus menulis fungsi plotinterp() terlebih dahulu, mengakses nilainya secara global.

Sekarang kita menghasilkan beberapa nilai acak, dan membiarkan pengguna menyeret titiknya.

```
>t=-1:0.5:1; dragpoints("plotf",t,random(size(t))-0.5):
```



Ada juga fungsi yang memplot fungsi lain bergantung pada vektor parameter, dan memungkinkan pengguna menyesuaikan parameter ini.

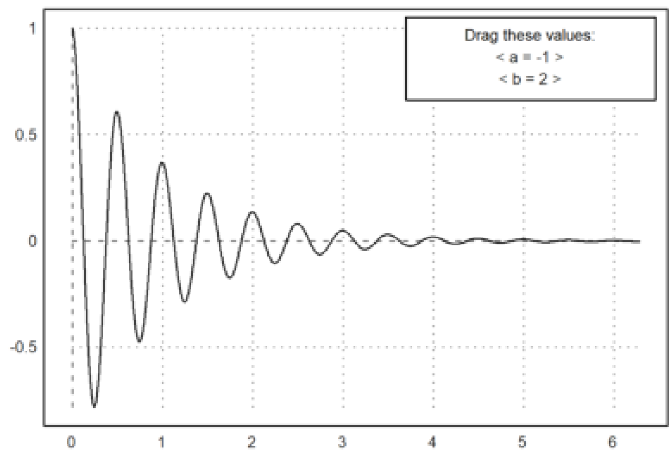
Pertama kita membutuhkan fungsi plot.

```
>function plotf([a,b]) := plot2d("exp(a*x)*cos(2pi*b*x)",0,2pi;a,b);
```

Kemudian kita memerlukan nama untuk parameter, nilai awal dan matriks rentang nx2, opsional garis judul.

Ada penggeser interaktif, yang dapat menetapkan nilai oleh pengguna. Fungsi dragvalues() menyediakan ini.

```
>dragvalues("plotf",["a","b"],[-1,2],[[-2,2];[1,10]], ...
>  heading="Drag these values:",hcolor=black):
```



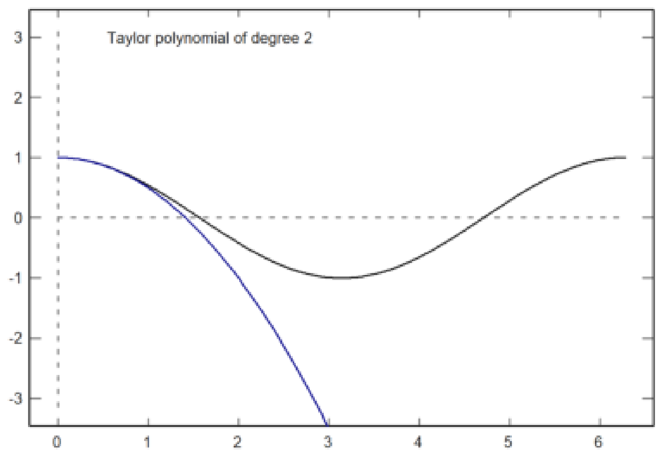
Dimungkinkan untuk membatasi nilai yang diseret menjadi bilangan bulat. Sebagai contoh, kita menulis fungsi plot, yang memplot polinomial Taylor berderajat n ke fungsi cosinus.

```
>function plotf(n) ...
```

```
  plot2d("cos(x)",0,2pi,>square,grid=6);
  plot2d(&"taylor(cos(x),x,0,@n)",color=blue,>add);
  textbox("Taylor polynomial of degree "+n,0.1,0.02,style="t",>left);
  endfunction
```

Sekarang kita memperbolehkan derajat n bervariasi dari 0 hingga 20 dalam 20 perhentian. Hasil dragvalues() digunakan untuk memplot sketsa dengan n ini, dan untuk memasukkan plot ke dalam buku catatan.

```
>nd=dragvalues("plotf","degree",2,[0,20],20,y=0.8, ...
>   heading="Drag the value:"); ...
>plotf(nd):
```



Berikut ini adalah demonstrasi sederhana dari fungsinya. Pengguna dapat menggambar jendela plot, meninggalkan jejak titik.

```
>function dragtest ...
```

```
    plot2d(none,r=1,title="Drag with the mouse, or press any key!");
    start=0;
    repeat
      {flag,m,time}=mousedrag();
      if flag==0 then return; endif;
      if flag==2 then
        hold on; mark(m[1],m[2]); hold off;
      endif;
    end
  endfunction
```

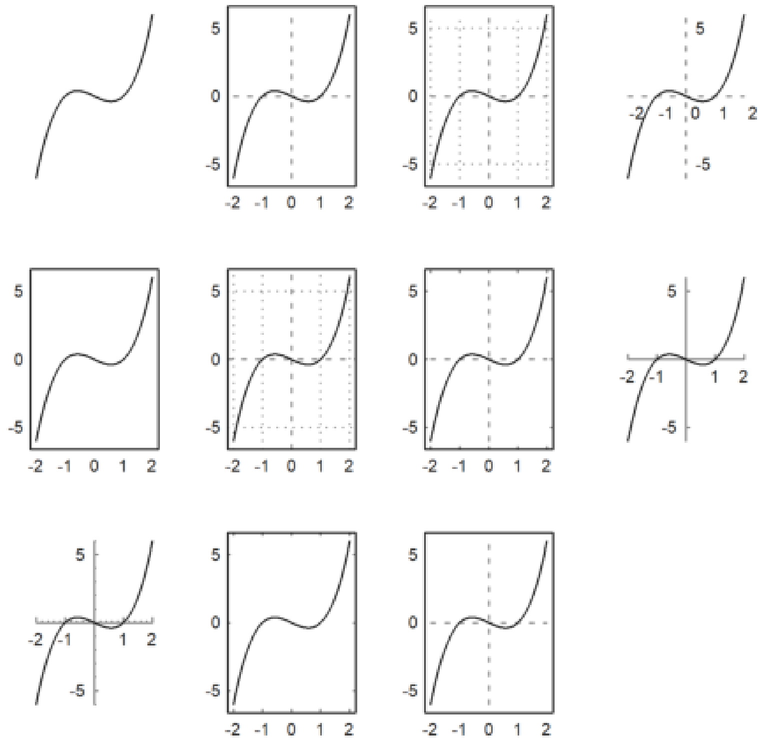
```
>dragtest // lihat hasilnya dan cobalah lakukan!
```

Style Plot 2D

Secara default, EMT menghitung tick sumbu otomatis dan menambahkan label ke setiap tick. Ini dapat diubah dengan parameter grid. Gaya default sumbu dan label dapat diubah. Selain itu, label dan judul dapat ditambahkan secara manual. Untuk menyetel ulang ke gaya default, gunakan reset().

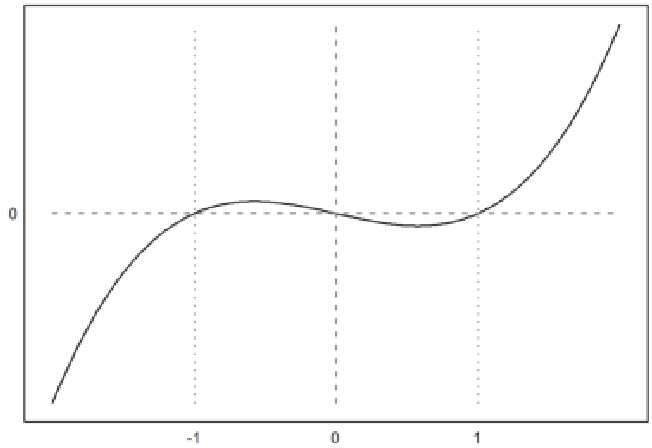
```
>aspect();
>figure(3,4); ...
> figure(1); plot2d("x^3-x",grid=0); ... // no grid, frame or axis
```

```
> figure(2); plot2d("x^3-x",grid=1); ... // x-y-axis
> figure(3); plot2d("x^3-x",grid=2); ... // default ticks
> figure(4); plot2d("x^3-x",grid=3); ... // x-y- axis with labels inside
> figure(5); plot2d("x^3-x",grid=4); ... // no ticks, only labels
> figure(6); plot2d("x^3-x",grid=5); ... // default, but no margin
> figure(7); plot2d("x^3-x",grid=6); ... // axes only
> figure(8); plot2d("x^3-x",grid=7); ... // axes only, ticks at axis
> figure(9); plot2d("x^3-x",grid=8); ... // axes only, finer ticks at axis
> figure(10); plot2d("x^3-x",grid=9); ... // default, small ticks inside
> figure(11); plot2d("x^3-x",grid=10); ...// no ticks, axes only
> figure(0):
```



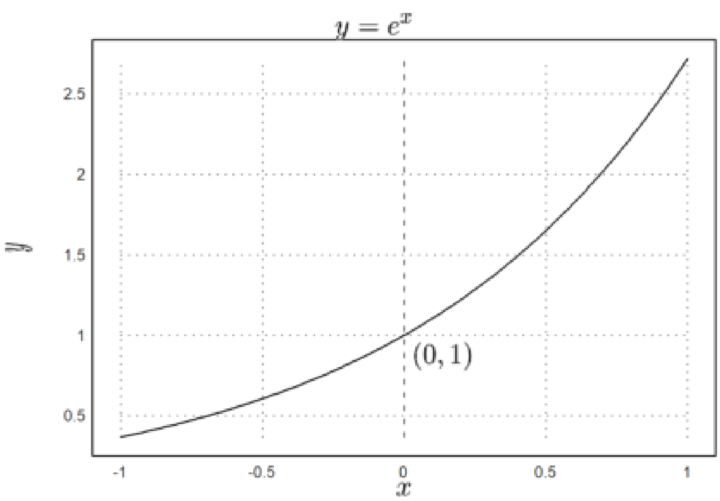
Parameter <frame mematikan frame, dan framecolor=blue mengatur frame menjadi warna biru.
Jika Anda menginginkan tanda centang Anda sendiri, Anda dapat menggunakan style=0, dan menambahkan semuanya nanti.

```
>aspect(1.5);
>plot2d("x^3-x",grid=0); // plot
>frame; xgrid([-1,0,1]); ygrid(0): // add frame and grid
```



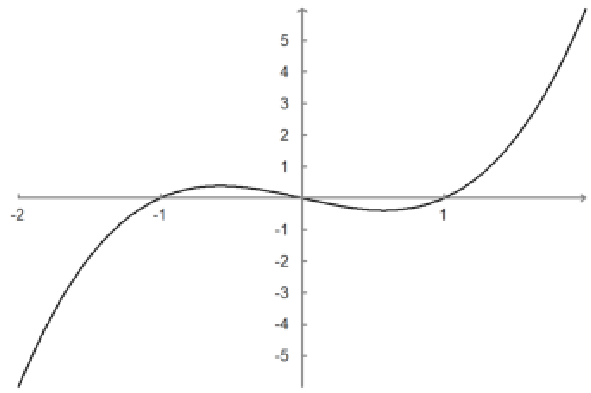
Untuk judul plot dan label sumbu, lihat contoh berikut.

```
>plot2d("exp(x)",-1,1);
>textcolor(black); // set the text color to black
>title(latex("y=e^x")); // title above the plot
>xlabel(latex("x")); // "x" for x-axis
>ylabel(latex("y"),>vertical); // vertical "y" for y-axis
>label(latex("(0,1)"),0,1,color=blue): // label a point
```



Sumbu dapat digambar secara terpisah dengan xaxis() dan yaxis().

```
>plot2d("x^3-x",<grid,<frame);
>xaxis(0,xx=-2:1,style="->"); yaxis(0,yy=-5:5,style="->"):
```

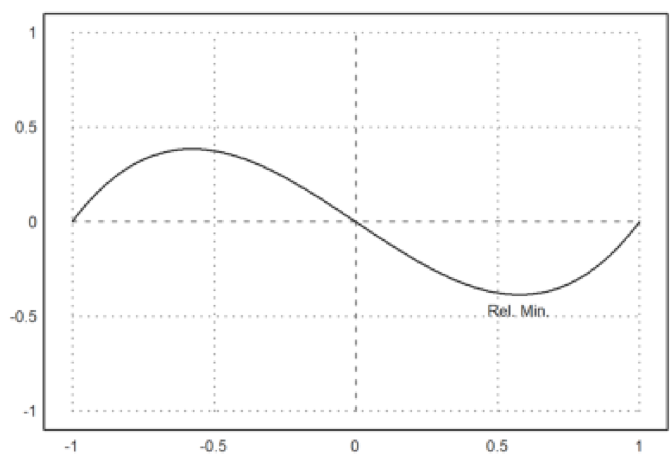


Teks pada plot dapat diatur dengan label(). Dalam contoh berikut, "lc" berarti bagian tengah bawah. Ini menetapkan posisi label relatif terhadap koordinat plot.

```
>function f(x) &= x^3-x
```

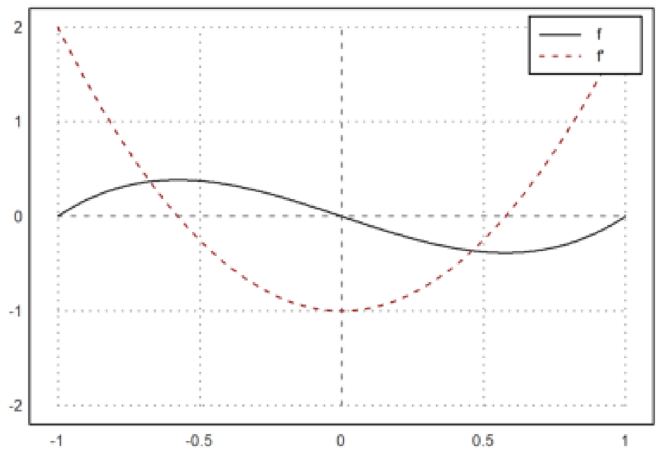
```
                                     3
                                    x  - x
```

```
>plot2d(f,-1,1,>square);
>x0=fmin(f,0,1); // compute point of minimum
>label("Rel. Min.",x0,f(x0),pos="lc"): // add a label there
```

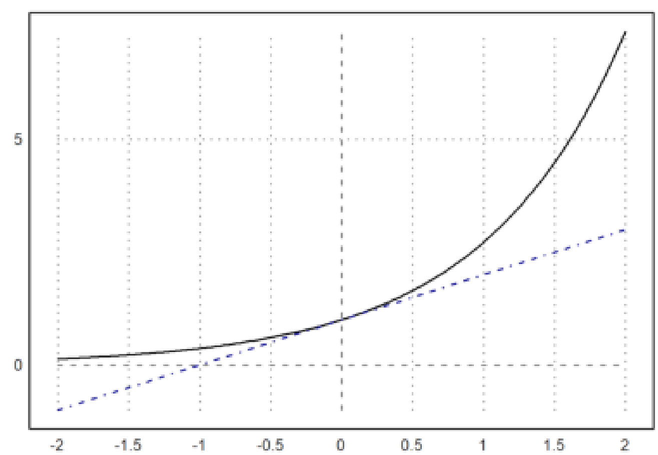


Ada juga kotak teks.

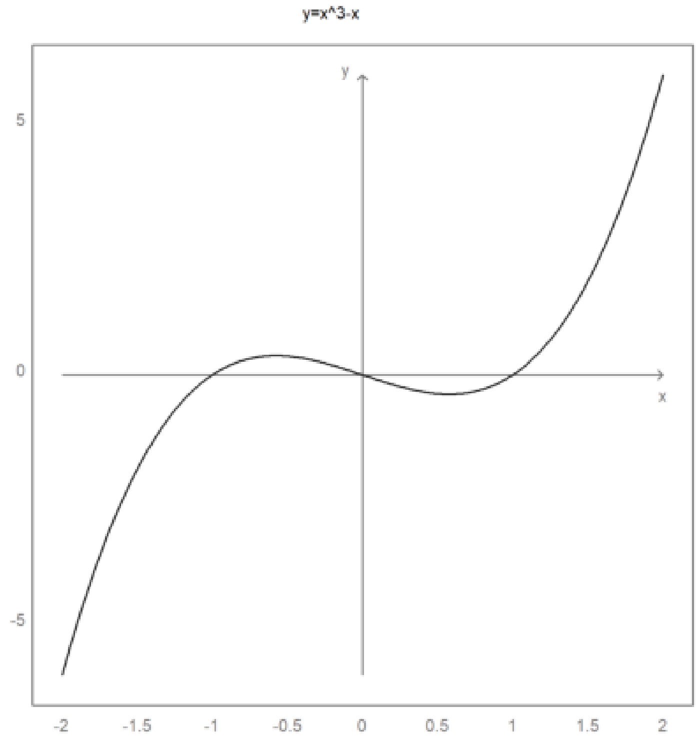
```
>plot2d(&f(x),-1,1,-2,2); // function
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,style="--",color=red); // derivative
>labelbox(["f","f'"],["-","--"],[black,red]): // label box
```




```
>plot2d(["exp(x)","1+x"],color=[black,blue],style=["-","-.-"]):
```



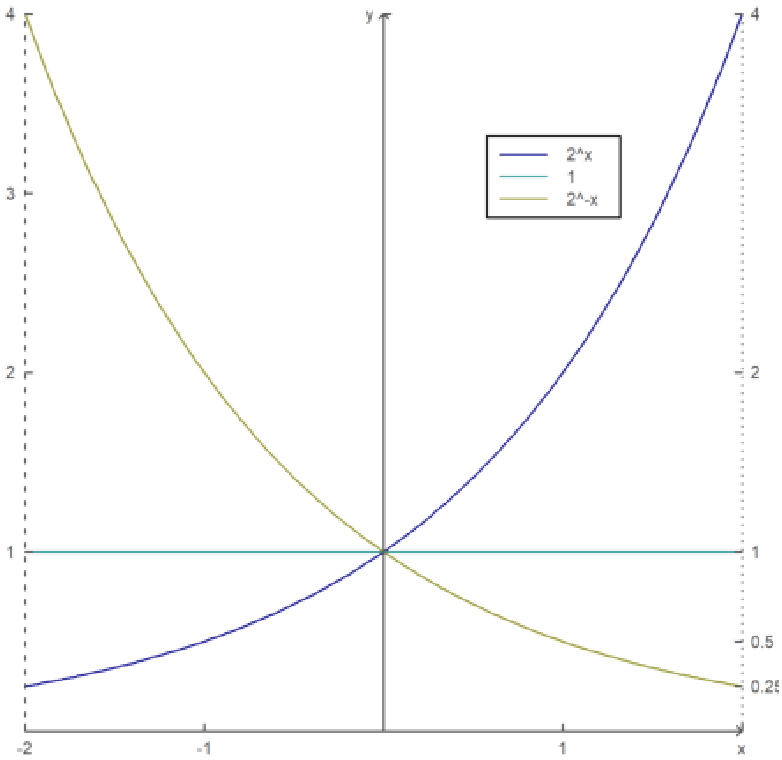

```
>gridstyle("->",color=gray,textcolor=gray,framecolor=gray);  ...
> plot2d("x^3-x",grid=1);   ...
> settitle("y=x^3-x",color=black); ...
> label("x",2,0,pos="bc",color=gray);  ...
> label("y",0,6,pos="cl",color=gray); ...
> reset():
```



Untuk kontrol lebih lanjut, sumbu x dan sumbu y dapat dilakukan secara manual.

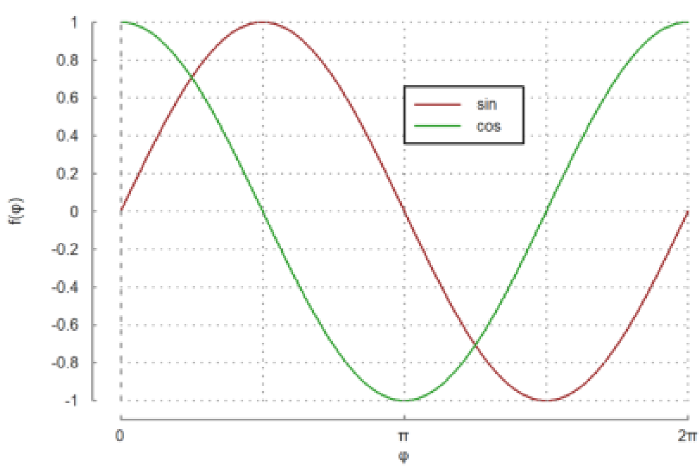
Perintah fullwindow() memperluas jendela plot karena kita tidak lagi memerlukan tempat untuk label di luar jendela plot. Gunakan shrinkwindow() atau reset() untuk menyetel ulang ke default.

```
>fullwindow; ...
> gridstyle(color=darkgray,textcolor=darkgray); ...
> plot2d(["2^x","1","2^(-x)"],a=-2,b=2,c=0,d=4,<grid,color=4:6,<frame); ...
> xaxis(0,-2:1,style="->"); xaxis(0,2,"x",<axis); ...
> yaxis(0,4,"y",style="->"); ...
> yaxis(-2,1:4,>left); ...
> yaxis(2,2^(-2:2),style=".",<left); ...
> labelbox(["2^x","1","2^-x"],colors=4:6,x=0.8,y=0.2); ...
> reset:
```



Berikut adalah contoh lain, di mana string Unicode digunakan dan sumbunya berada di luar area plot.

```
>aspect(1.5);
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=[red,green],<grid,<frame); ...
> xaxis(-1.1,(0:2)*pi,xt=["0",u"&pi;",u"2&pi;"],style="-",>ticks,>zero);  ...
> xgrid((0:0.5:2)*pi,<ticks); ...
> yaxis(-0.1*pi,-1:0.2:1,style="-",>zero,>grid); ...
> labelbox(["sin","cos"],colors=[red,green],x=0.5,y=0.2,>left); ...
> xlabel(u"&phi;"); ylabel(u"f(&phi;)"):
```

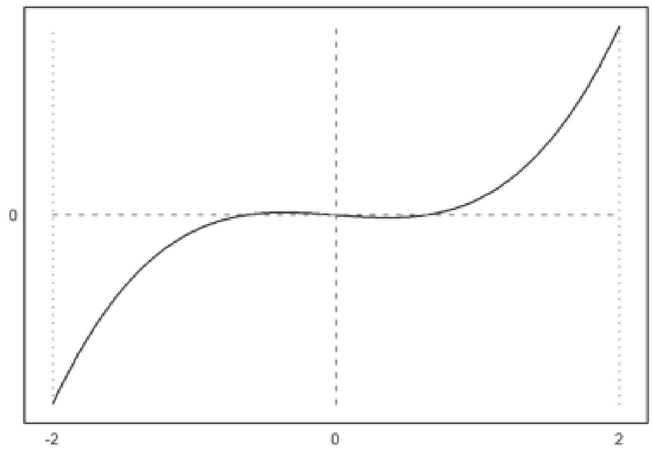


Contoh soal:
1. Tentukan plot dari fungsi berikut:

$$5x^3 - 2x$$

Penyelesaian:

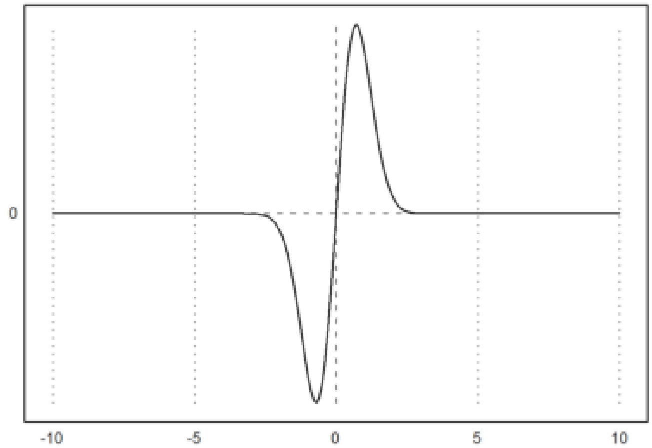
```
>aspect(1.5);
>plot2d("5x^3-2x",grid=0); // plot
>frame; xgrid([-2,0,2]); ygrid(0): // add frame and grid
```



Plotting 2D Data

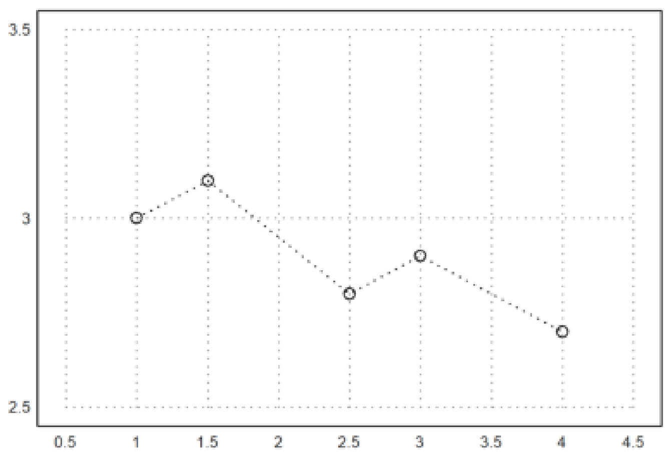
Jika x dan y adalah vektor data, maka data tersebut akan digunakan sebagai koordinat x dan y pada suatu kurva. Dalam hal ini, a, b, c, dan d, atau radius r dapat ditentukan, atau jendela plot akan menyesuaikan secara otomatis dengan data. Alternatifnya, >persegi dapat diatur untuk mempertahankan rasio aspek persegi.
Merencanakan ekspresi hanyalah singkatan dari plot data. Untuk plot data, Anda memerlukan satu atau beberapa baris nilai x, dan satu atau beberapa baris nilai y. Dari rentang dan nilai x, fungsi plot2d akan menghitung data yang akan diplot, secara default dengan evaluasi fungsi yang adaptif. Untuk plot titik gunakan ">titik", untuk garis dan titik campuran gunakan ">addpoints".
Tapi Anda bisa memasukkan data secara langsung.
- Gunakan vektor baris untuk x dan y untuk satu fungsi.
- Matriks untuk x dan y diplot baris demi baris.
Berikut adalah contoh dengan satu baris untuk x dan y.

```
>x=-10:0.1:10; y=exp(-x^2)*x; plot2d(x,y):
```

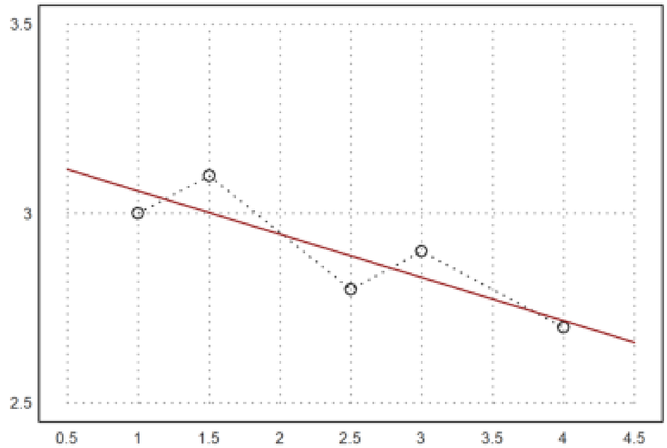


Data juga dapat diplot sebagai poin. Gunakan points=true untuk ini. Plotnya berfungsi seperti poligon, tetapi hanya menggambar sudutnya saja.
- style="...": Pilih dari "[]", "<>", "o", ".", "..", "+", "*", "[]", "< >", "o", "..", "", "|".
Untuk memplot kumpulan titik, gunakan >titik. Jika warna merupakan vektor warna, masing-masing titik
mendapat warna berbeda. Untuk matriks koordinat dan vektor kolom, warna diterapkan pada baris matriks.
Parameter >addpoints menambahkan titik ke segmen garis untuk plot data.

```
>xdata=[1,1.5,2.5,3,4]; ydata=[3,3.1,2.8,2.9,2.7]; // data
>plot2d(xdata,ydata,a=0.5,b=4.5,c=2.5,d=3.5,style="."); // lines
>plot2d(xdata,ydata,>points,>add,style="o"): // add points
```




```
>p=polyfit(xdata,ydata,1); // get regression line
>plot2d("polyval(p,x)",>add,color=red): // add plot of line
```

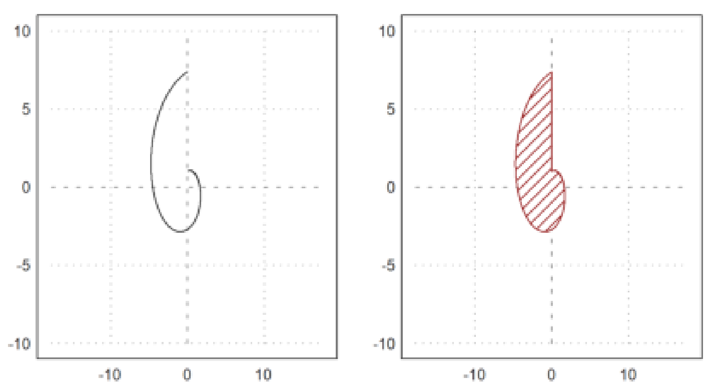


Menggambar Daerah Yang Dibatasi Kurva

Plot data sebenarnya berbentuk poligon. Kita juga dapat memplot kurva atau kurva terisi.
- filled=benar mengisi plot.
- style="...": Pilih dari "", "/", "\", "\/".
- fillcolor: Lihat di atas untuk mengetahui warna yang tersedia.

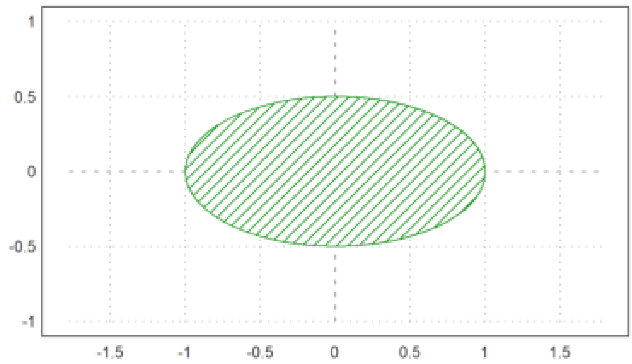
Warna isian ditentukan oleh argumen "fillcolor", dan pada <outline opsional, mencegah menggambar batas untuk semua gaya kecuali gaya default.

```
>t=linspace(0,2pi,1000); // parameter for curve
>x=sin(t)*exp(t/pi); y=cos(t)*exp(t/pi); // x(t) and y(t)
>figure(1,2); aspect(16/9)
>figure(1); plot2d(x,y,r=10); // plot curve
>figure(2); plot2d(x,y,r=10,>filled,style="/",fillcolor=red); // fill curve
>figure(0):
```

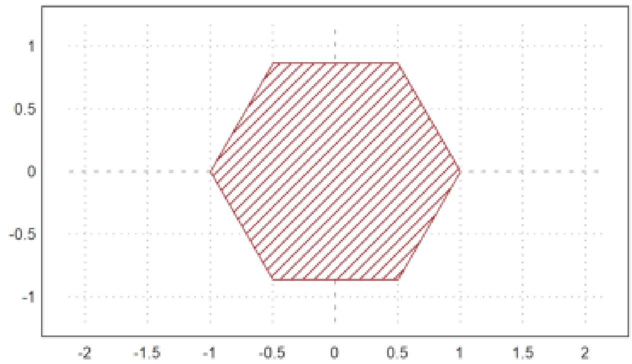


Dalam contoh berikut kita memplot elips terisi dan dua segi enam terisi menggunakan kurva tertutup dengan 6 titik dengan gaya isian berbeda.

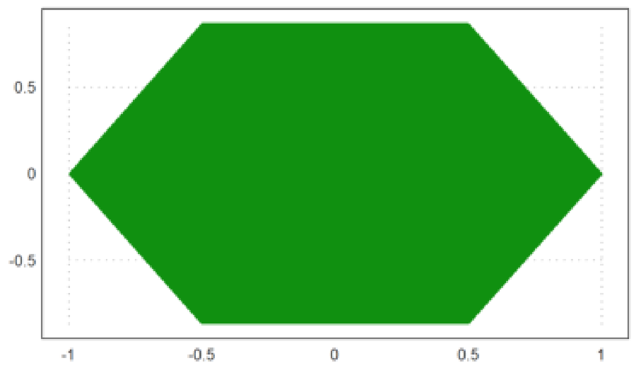
```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(x),cos(x)*0.5,r=1,>filled,style="/"):
```



```
>t=linspace(0,2pi,6); ...
>plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="/",fillcolor=red,r=1.2):
```

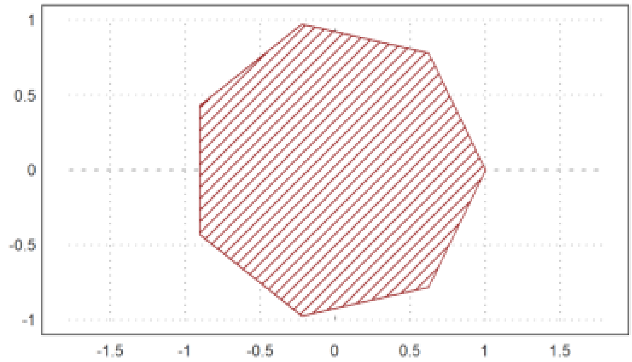


```
>t=linspace(0,2pi,6); plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="#"):
```



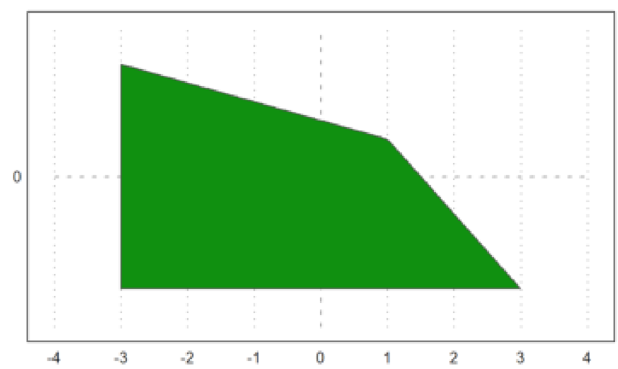
Contoh lainnya adalah septagon yang kita buat dengan 7 titik pada lingkaran satuan

```
>t=linspace(0,2pi,7);  ...
> plot2d(cos(t),sin(t),r=1,>filled,style="/",fillcolor=red):
```



Berikut adalah himpunan nilai maksimal dari empat kondisi linier yang kurang dari atau sama dengan 3. Ini adalah A[k].v<=3 untuk semua baris A. Untuk mendapatkan sudut yang bagus, kita menggunakan n yang relatif besar.

```
>A=[2,1;1,2;-1,0;0,-1];
>function f(x,y) := max([x,y].A');
>plot2d("f",r=4,level=[0;3],color=green,n=111):
```

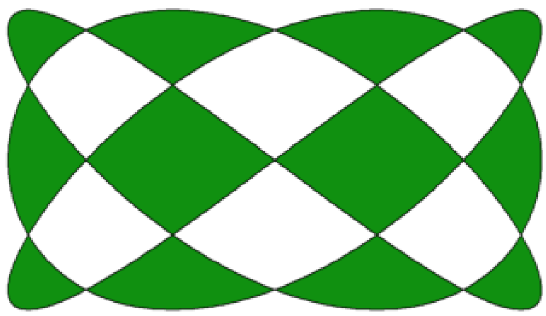


Poin utama dari bahasa matriks adalah memungkinkan pembuatan tabel fungsi dengan mudah.

```
>t=linspace(0,2pi,1000); x=cos(3*t); y=sin(4*t);
```

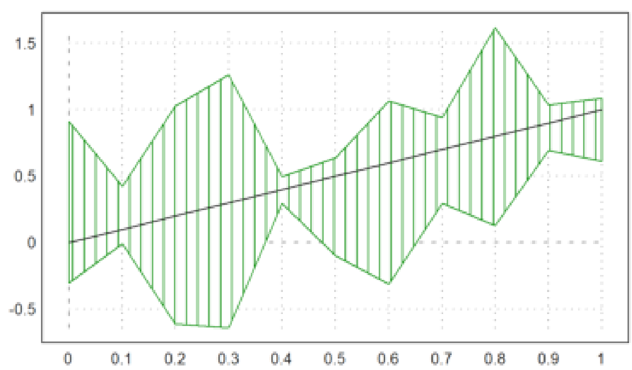
Kami sekarang memiliki nilai vektor x dan y. plot2d() dapat memplot nilai-nilai ini sebagai kurva yang menghubungkan titik-titik tersebut. Plotnya bisa diisi. Pada kasus ini memberikan hasil yang bagus karena aturan belitan, yang digunakan untuk isi.

```
>plot2d(x,y,<grid,<frame,>filled):
```



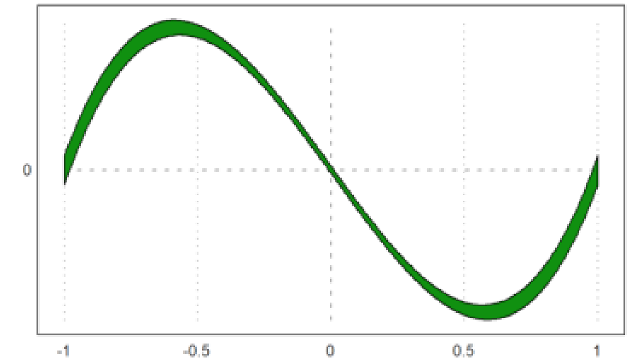
Vektor interval diplot terhadap nilai x sebagai wilayah terisi
antara nilai interval yang lebih rendah dan lebih tinggi.
Hal ini dapat berguna untuk memplot kesalahan perhitungan. Tapi itu
bisa juga dapat digunakan untuk memplot kesalahan statistik.

```
>t=0:0.1:1; ...
> plot2d(t,interval(t-random(size(t)),t+random(size(t))),style="|"); ...
> plot2d(t,t,add=true):
```



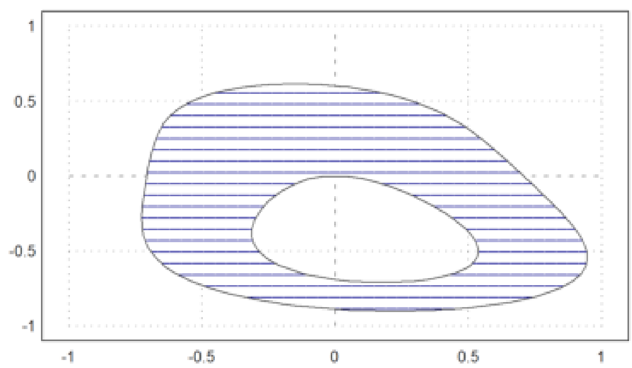
Jika x adalah vektor yang diurutkan, dan y adalah vektor interval, maka plot2d akan memplot rentang interval yang terisi pada bidang. Gaya isiannya sama dengan gaya poligon.

```
>t=-1:0.01:1; x=~t-0.01,t+0.01~; y=x^3-x;
>plot2d(t,y):
```



Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

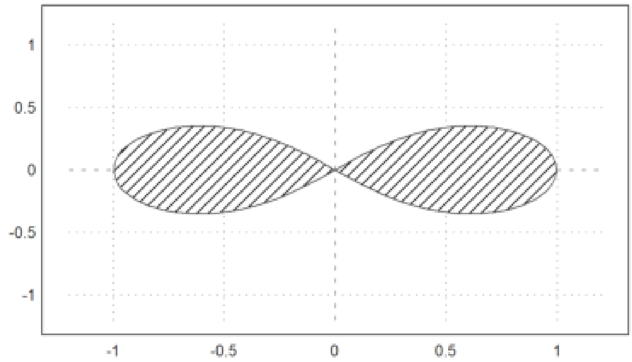
```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // define an expression f(x,y)
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```



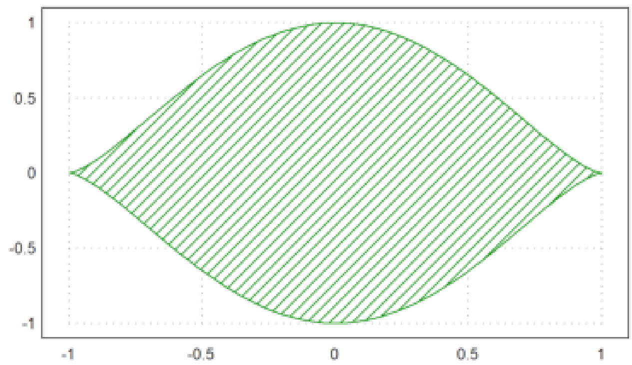
Kita juga dapat mengisi rentang nilai seperti

$$-1 \leq (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 \leq 0.$$

```
>plot2d("(x^2+y^2)^2-x^2+y^2",r=1.2,level=[-1;0],style="/"):
```




```
>plot2d("cos(x)","sin(x)^3",xmin=0,xmax=2pi,>filled,style="/"):
```



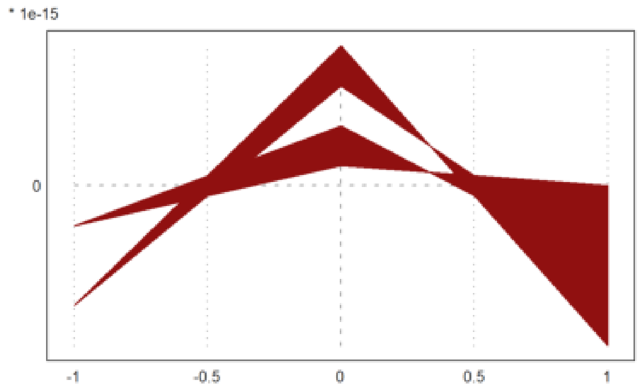
Contoh soal:
1. Tentukan plot dari fungsi berikut:

$$f(x) = cos(t)$$

$$f(x) = sin(2t)$$

Penyelesaian:

```
>t=linspace(0,4pi,8); plot2d(cos(t),sin(2t),>filled,style="#",fillcolor=red
```



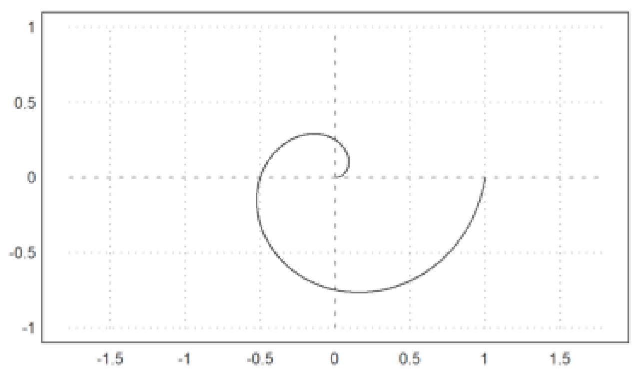
Grafik Fungsi Parametrik

Nilai x tidak perlu diurutkan. (x,y) hanya menggambarkan sebuah kurva. Jika x diurutkan, kurva tersebut merupakan grafik suatu fungsi.
Dalam contoh berikut, kita memplot spiral

$$\gamma(t) = t \cdot (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

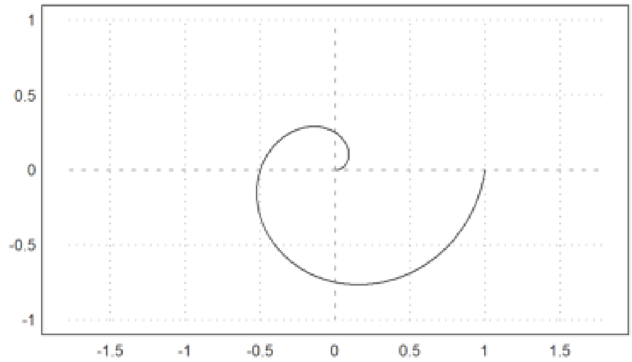
Kita perlu menggunakan banyak titik untuk tampilan yang halus atau fungsi adaptif() untuk mengevaluasi ekspresi (lihat fungsi adaptif() untuk lebih jelasnya).

```
>t=linspace(0,1,1000); ...
>plot2d(t*cos(2*pi*t),t*sin(2*pi*t),r=1):
```

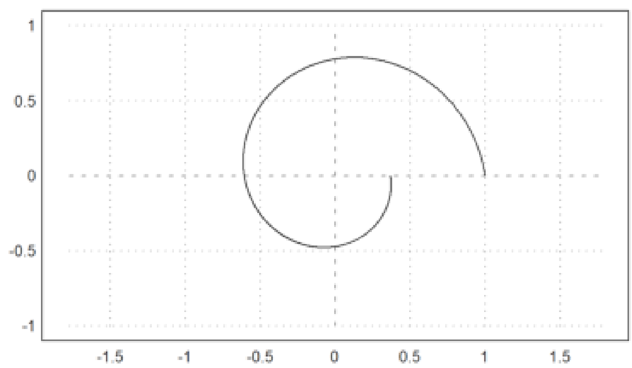


Sebagai alternatif, dimungkinkan untuk menggunakan dua ekspresi untuk kurva. Berikut ini plot kurva yang sama seperti di atas.

```
>plot2d("x*cos(2*pi*x)","x*sin(2*pi*x)",xmin=0,xmax=1,r=1):
```




```
>t=linspace(0,1,1000); r=exp(-t); x=r*cos(2pi*t); y=r*sin(2pi*t);
>plot2d(x,y,r=1):
```



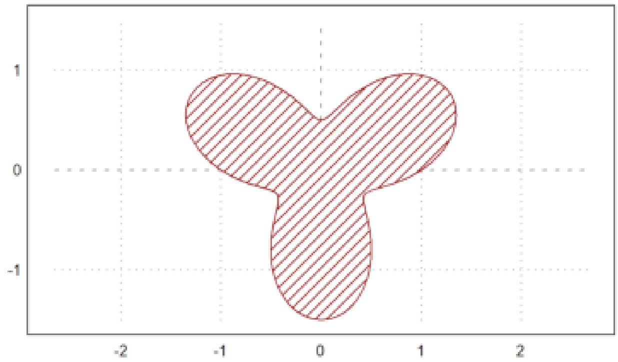
Pada contoh berikutnya, kita memplot kurvanya

$$\gamma(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))$$

dengan

$$r(t) = 1 + \frac{\sin(3t)}{2}.$$

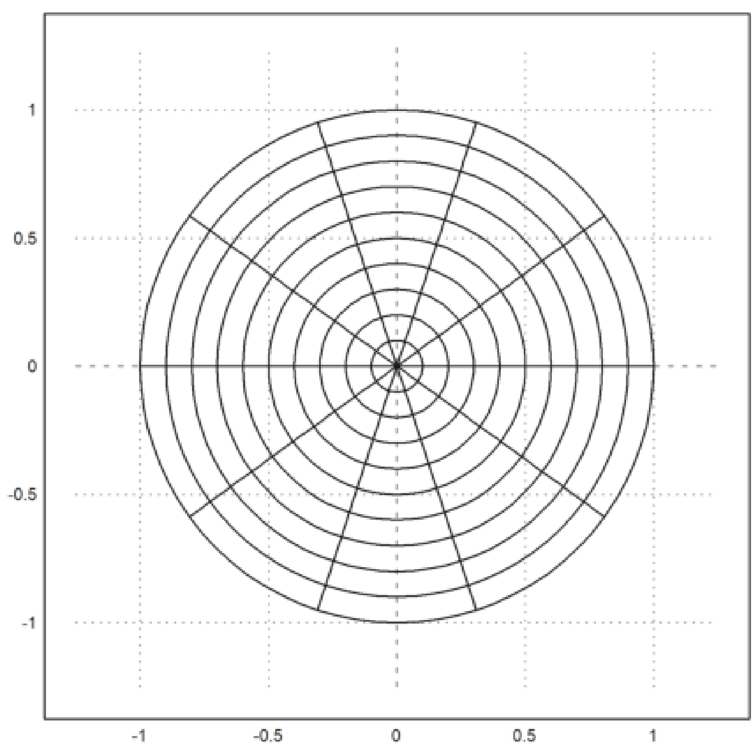
```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5):
```



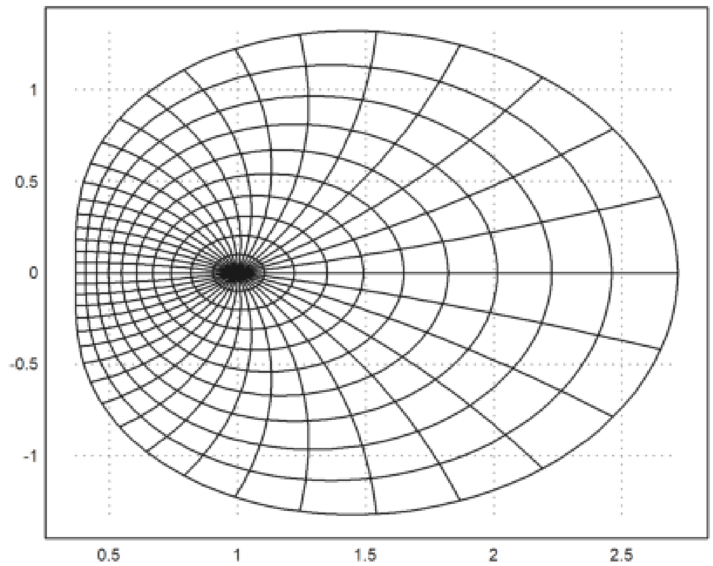
Menggambar Grafik Bilangan Kompleks

Serangkaian bilangan kompleks juga dapat diplot. Kemudian titik-titik grid akan dihubungkan. Jika sejumlah garis kisi ditentukan (atau vektor garis kisi 1x2) dalam argumen cgrid, hanya garis kisi tersebut yang terlihat.
Matriks bilangan kompleks secara otomatis akan diplot sebagai kisi-kisi pada bidang kompleks.
Pada contoh berikut, kita memplot gambar lingkaran satuan di bawah fungsi eksponensial. Parameter cgrid menyembunyikan beberapa kurva grid.

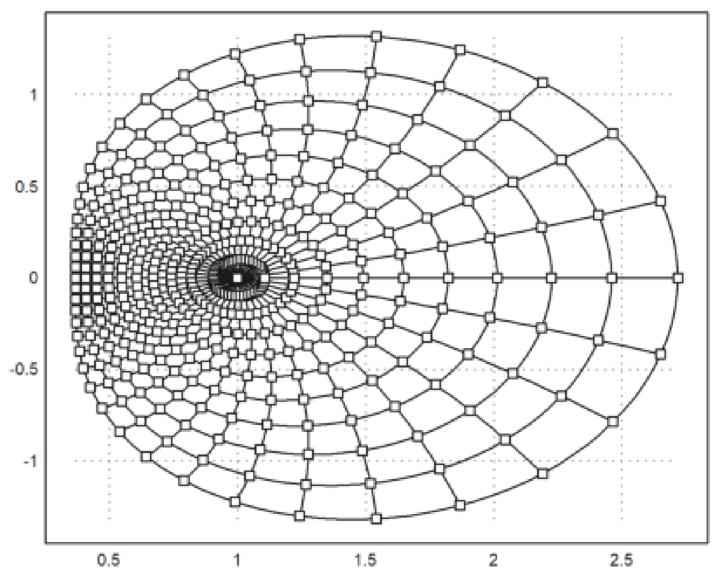
```
>aspect(); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,80)'; z=r*exp(I*a);...
>plot2d(z,a=-1.25,b=1.25,c=-1.25,d=1.25,cgrid=10):
```



```
>aspect(1.25); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,200)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),cgrid=[40,10]):
```




```
>r=linspace(0,1,10); a=linspace(0,2pi,40)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),>points,>add):
```

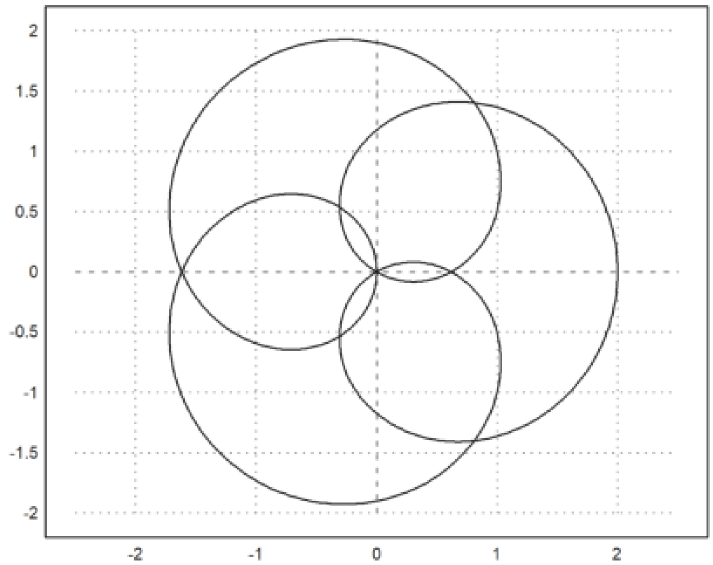


Vektor bilangan kompleks secara otomatis diplot sebagai kurva pada bidang kompleks dengan bagian nyata dan bagian imajiner.

Dalam contoh, kita memplot lingkaran satuan dengan

$$\gamma(t) = e^{it}$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); ...
>plot2d(exp(I*t)+exp(4*I*t),r=2):
```



Plot Statistik

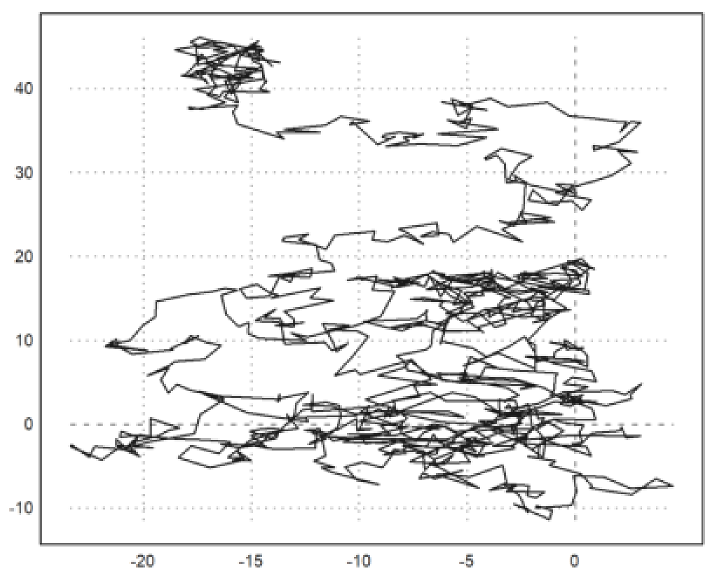
Ada banyak fungsi yang dikhususkan pada plot statistik. Salah satu plot yang sering digunakan adalah plot kolom.

Jumlah kumulatif dari nilai terdistribusi normal 0-1 menghasilkan jalan acak.

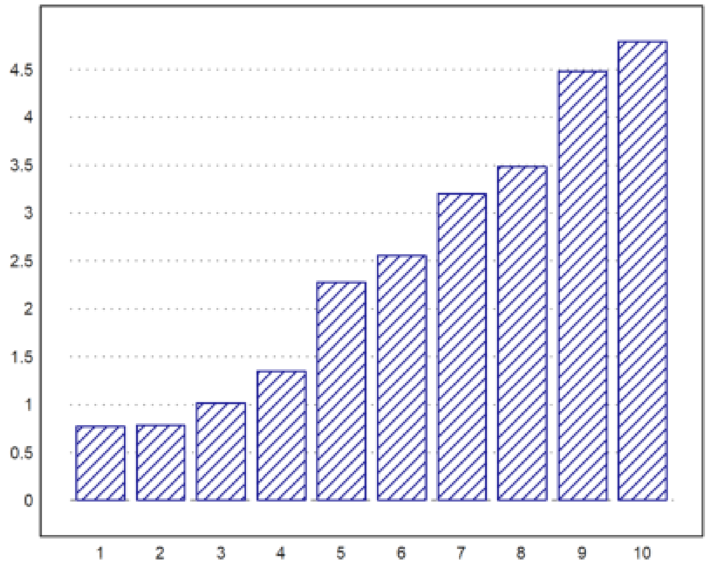
```
>plot2d(cumsum(randnormal(1,1000))):
```

Penggunaan dua baris menunjukkan jalan dalam dua dimensi.

```
>X=cumsum(randnormal(2,1000)); plot2d(X[1],X[2]):
```

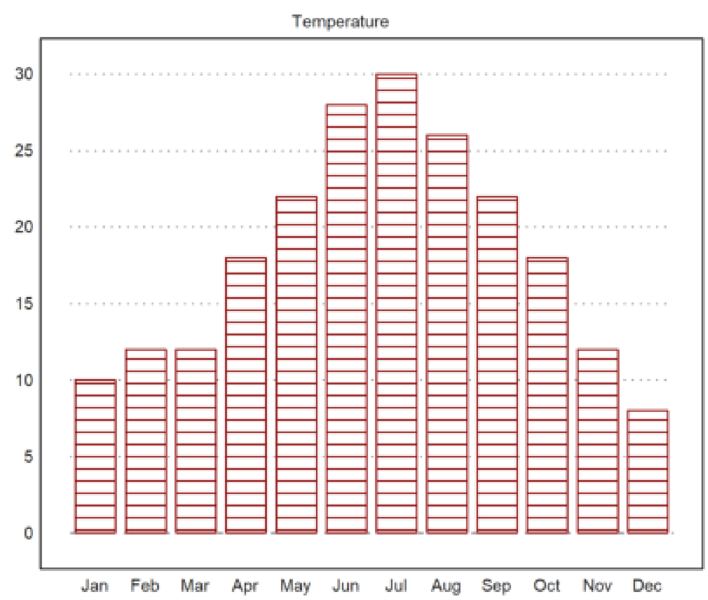


```
>columnsplot(cumsum(random(10)),style="/",color=blue):
```

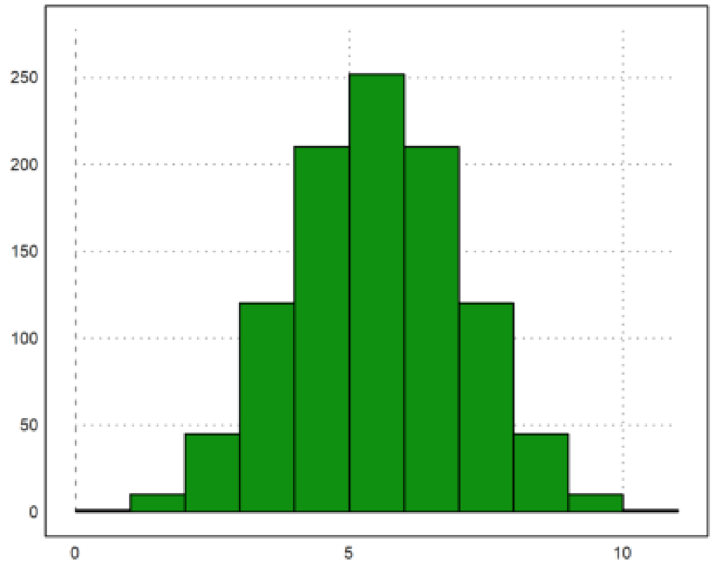


Itu juga dapat menampilkan string sebagai label.

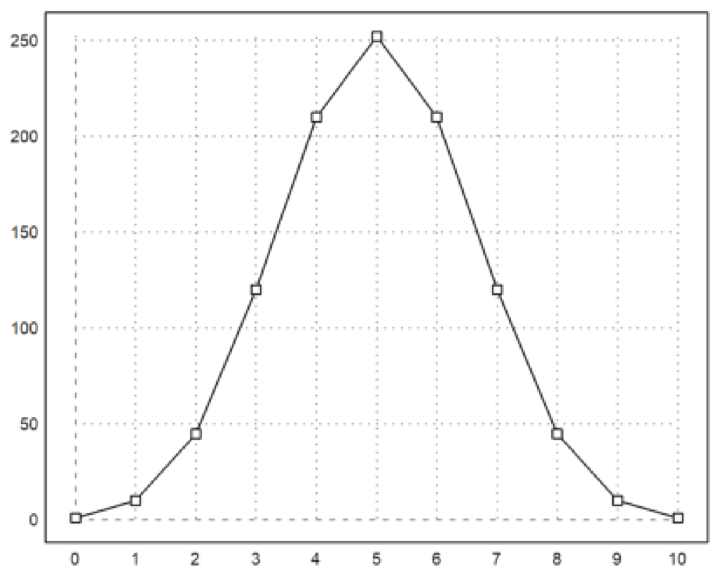
```
>months=["Jan","Feb","Mar","Apr","May","Jun", ...
>  "Jul","Aug","Sep","Oct","Nov","Dec"];
>values=[10,12,12,18,22,28,30,26,22,18,12,8];
>columnsplot(values,lab=months,color=red,style="-");
>title("Temperature"):
```



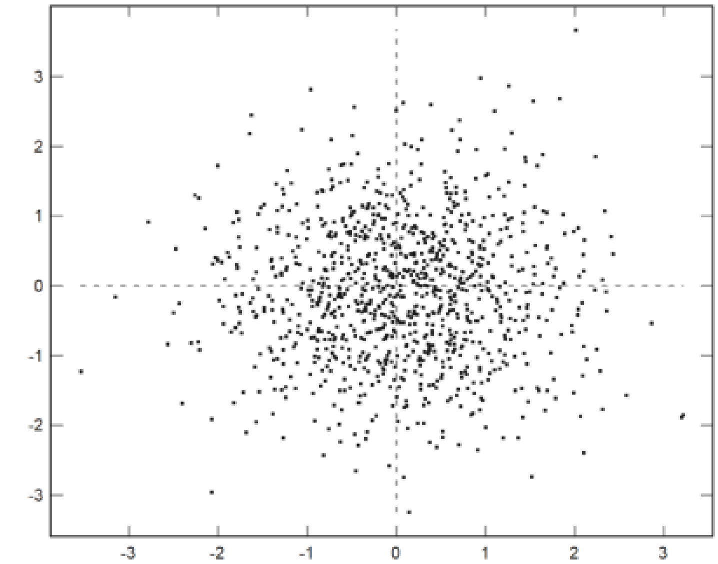

```
>k=0:10;
>plot2d(k,bin(10,k),>bar):
```



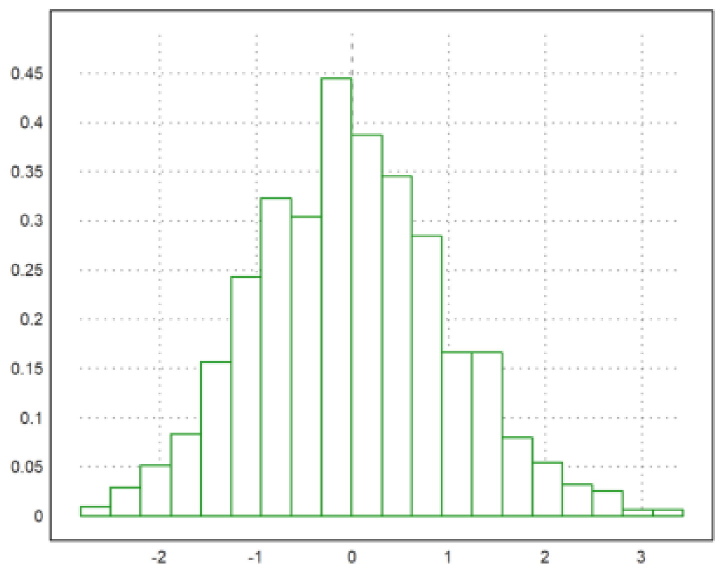

```
>plot2d(k,bin(10,k)); plot2d(k,bin(10,k),>points,>add):
```



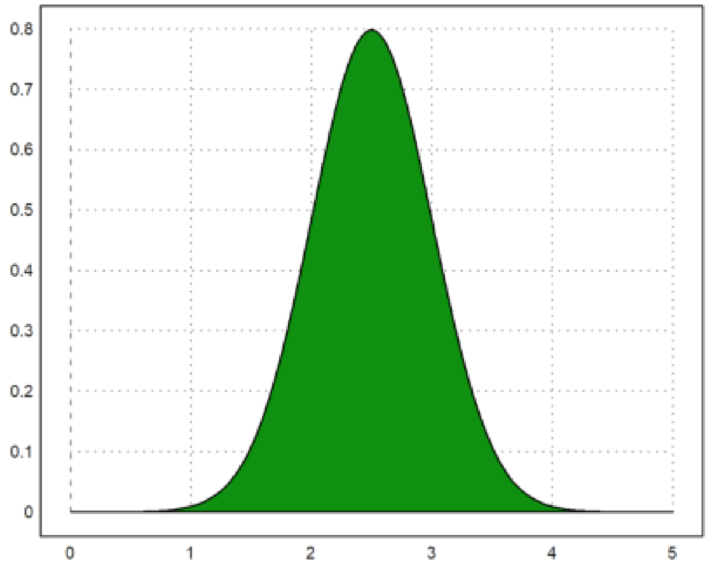

```
>plot2d(normal(1000),normal(1000),>points,grid=6,style=".."):
```




```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution,style="O"):
```

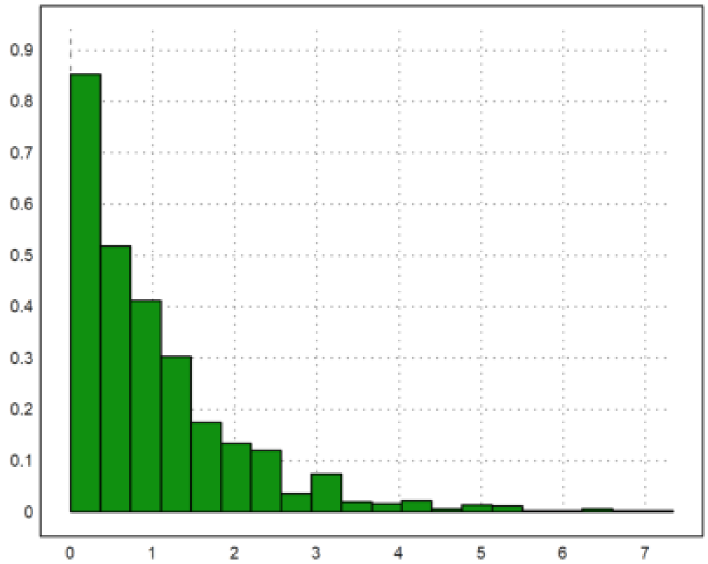



```
>plot2d("qnormal",0,5;2.5,0.5,>filled):
```



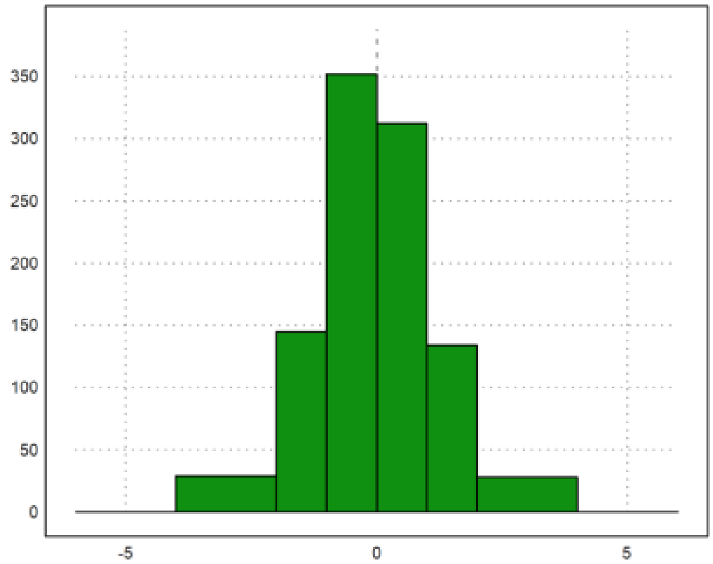
Untuk memplot distribusi statistik eksperimental, Anda dapat menggunakan distribution=n dengan plot2d.

```
>w=randexponential(1,1000); // exponential distribution
>plot2d(w,>distribution): // or distribution=n with n intervals
```



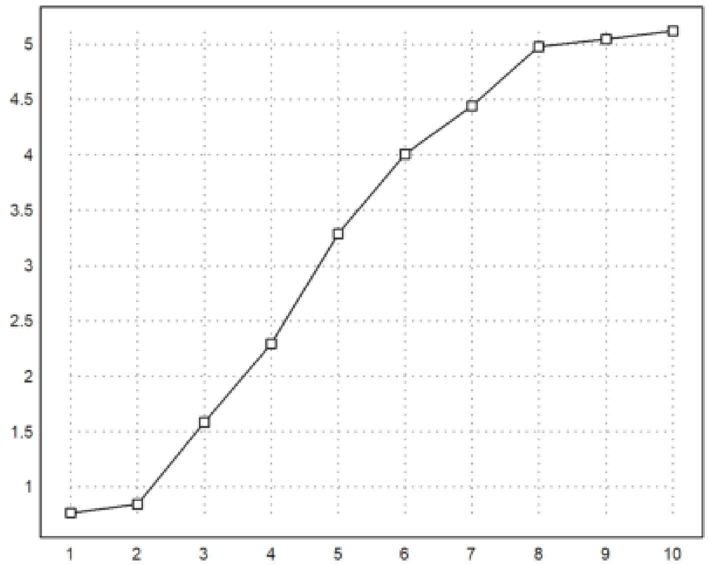
Atau Anda dapat menghitung distribusi dari data dan memplot hasilnya dengan >bar di plot3d, atau dengan plot kolom.

```
>w=normal(1000); // 0-1-normal distribution
>{x,y}=histo(w,10,v=[-6,-4,-2,-1,0,1,2,4,6]); // interval bounds v
>plot2d(x,y,>bar):
```

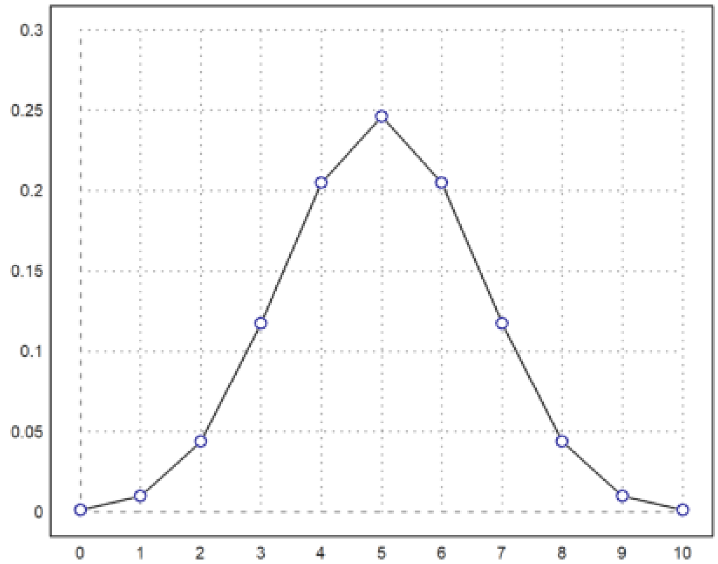


Fungsi statplot() mengatur gaya dengan string sederhana.

```
>statplot(1:10,cumsum(random(10)),"b"):
```



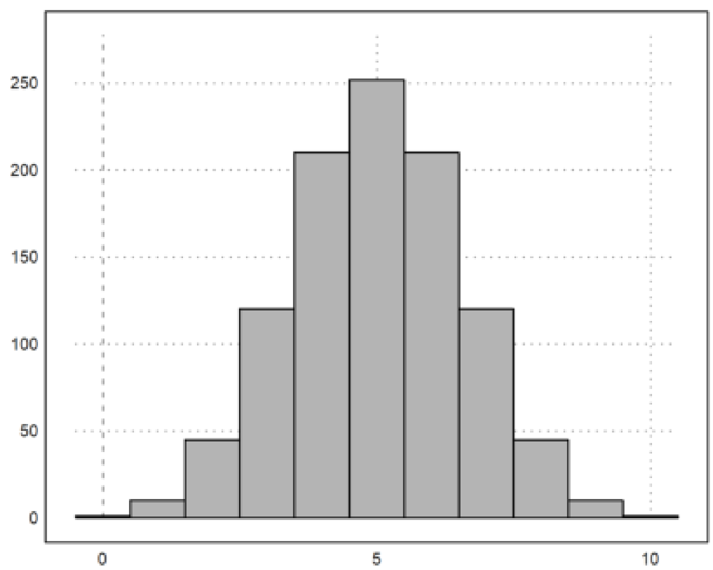

```
>n=10; i=0:n; ...
>plot2d(i,bin(n,i)/2^n,a=0,b=10,c=0,d=0.3); ...
>plot2d(i,bin(n,i)/2^n,points=true,style="ow",add=true,color=blue):
```



Selain itu, data dapat diplot sebagai batang. Dalam hal ini, x harus diurutkan dan satu elemen lebih panjang dari y. Batangnya akan memanjang dari x[i] hingga x[i+1] dengan nilai y[i]. Jika x berukuran sama dengan y, maka x akan diperpanjang satu elemen dengan spasi terakhir.

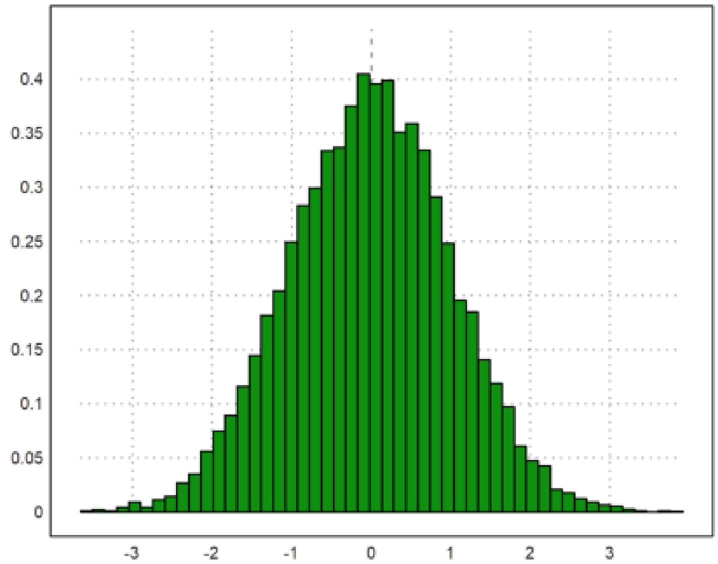
Gaya isian dapat digunakan seperti di atas.

```
>n=10; k=bin(n,0:n); ...
>plot2d(-0.5:n+0.5,k,bar=true,fillcolor=lightgray):
```

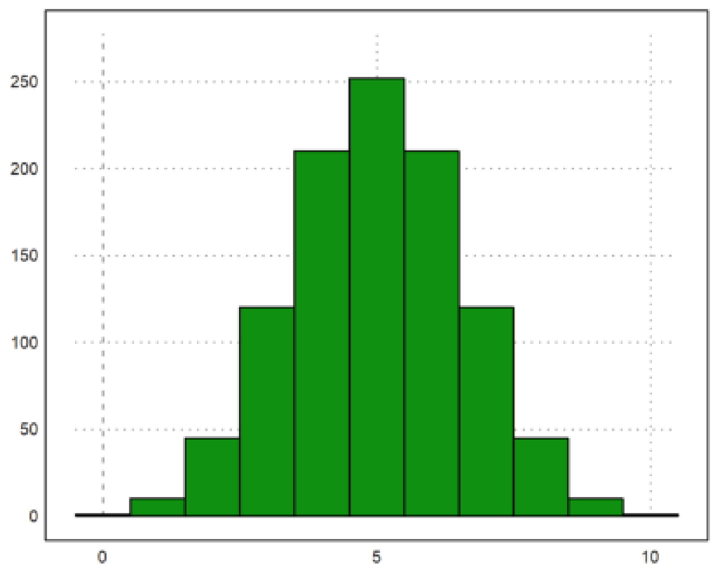


Data untuk plot batang (batang=1) dan histogram (histogram=1) dapat diberikan secara eksplisit dalam xv dan yv, atau dapat dihitung dari distribusi empiris dalam xv dengan >distribusi (atau distribusi=n). Histogram nilai xv akan dihitung secara otomatis dengan >histogram. Jika >even ditentukan, nilai xv akan dihitung dalam interval bilangan bulat.

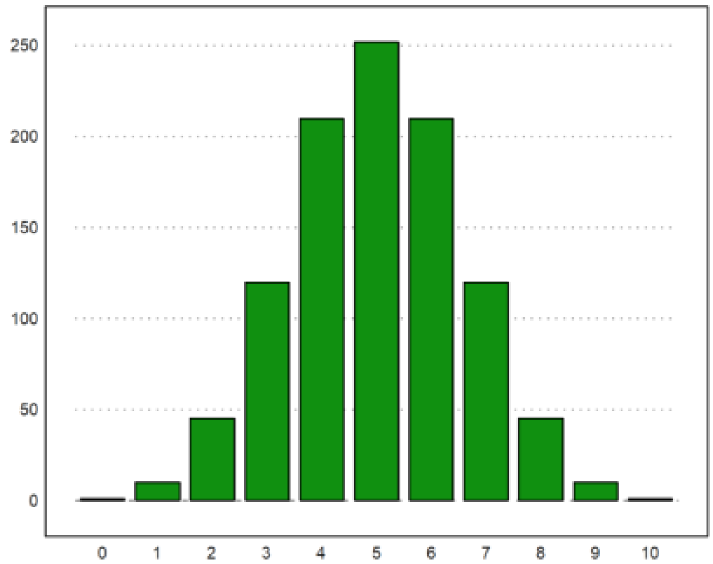
```
>plot2d(normal(10000),distribution=50):
```



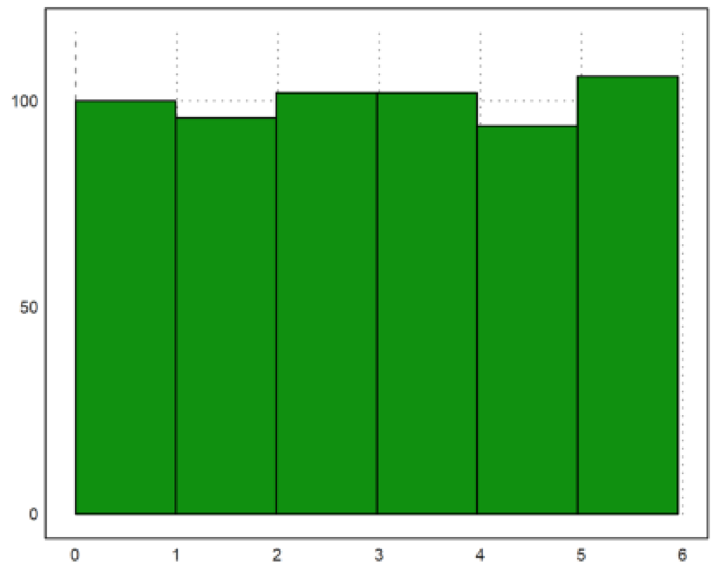

```
>k=0:10; m=bin(10,k); x=(0:11)-0.5; plot2d(x,m,>bar):
```



```
>columnsplot(m,k):
```

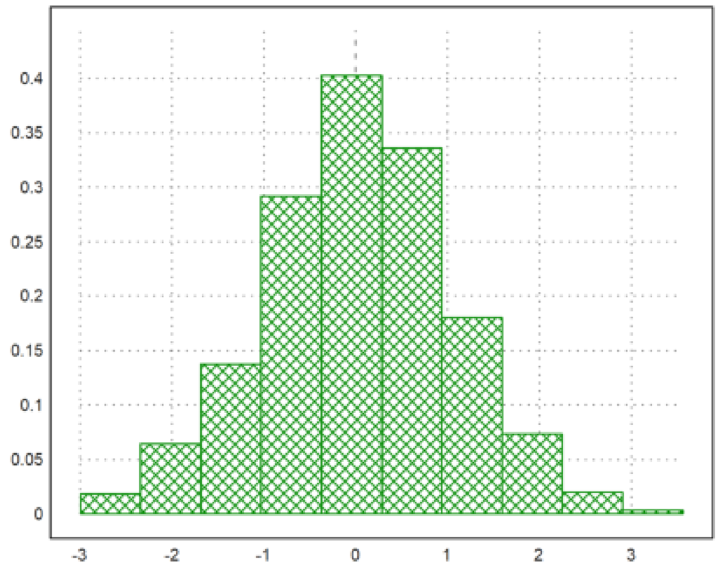



```
>plot2d(random(600)*6,histogram=6):
```



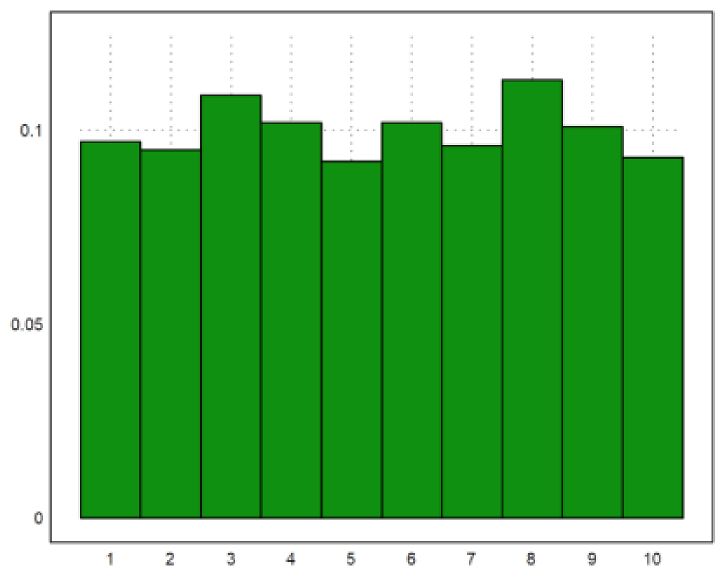
Untuk distribusi, terdapat parameter distribution=n, yang menghitung nilai secara otomatis dan mencetak distribusi relatif dengan n sub-interval.

```
>plot2d(normal(1,1000),distribution=10,style="\/"):
```



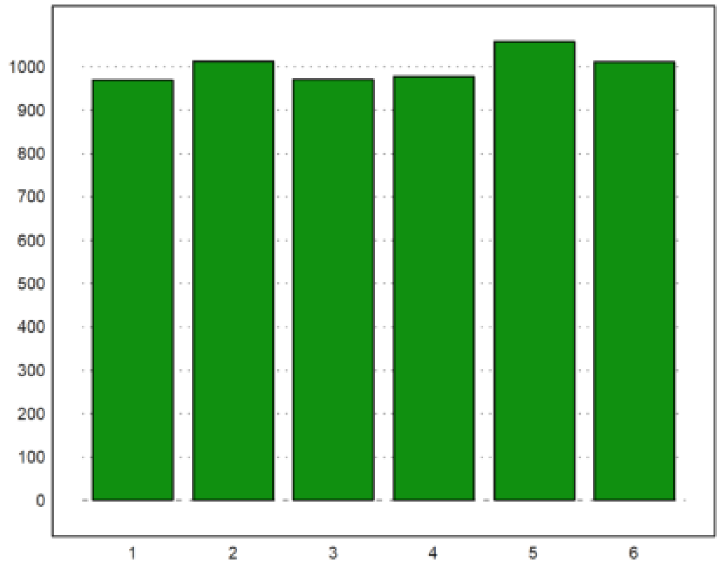
Dengan parameter even=true, ini akan menggunakan interval bilangan bulat.

```
>plot2d(intrandom(1,1000,10),distribution=10,even=true):
```

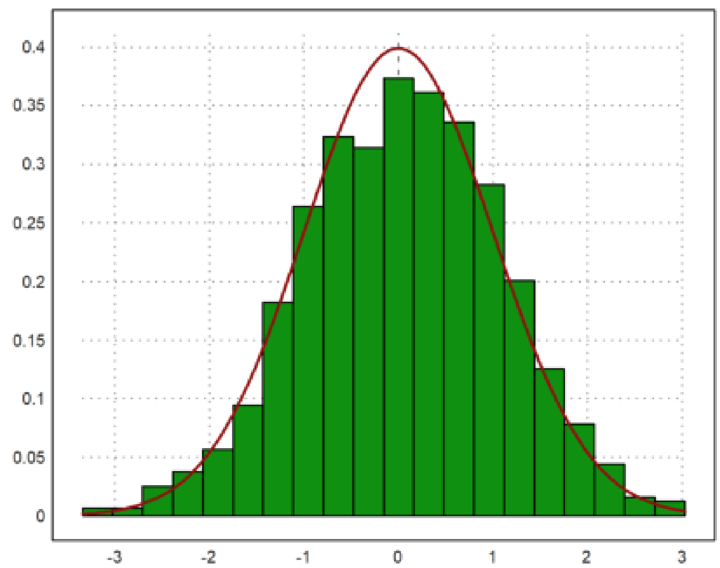


Perhatikan bahwa ada banyak plot statistik yang mungkin berguna. Silahkan lihat tutorial tentang statistik.

```
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,intrandom(1,6000,6))):
```

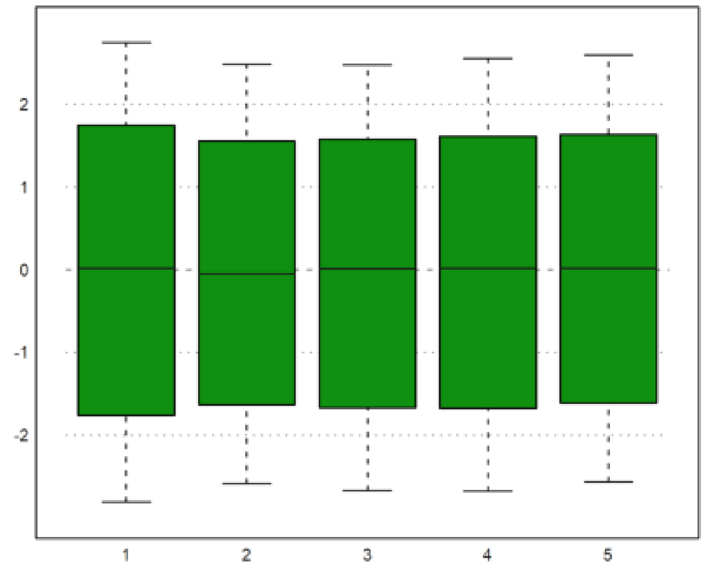



```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution); ...
>  plot2d("qnormal(x)",color=red,thickness=2,>add):
```



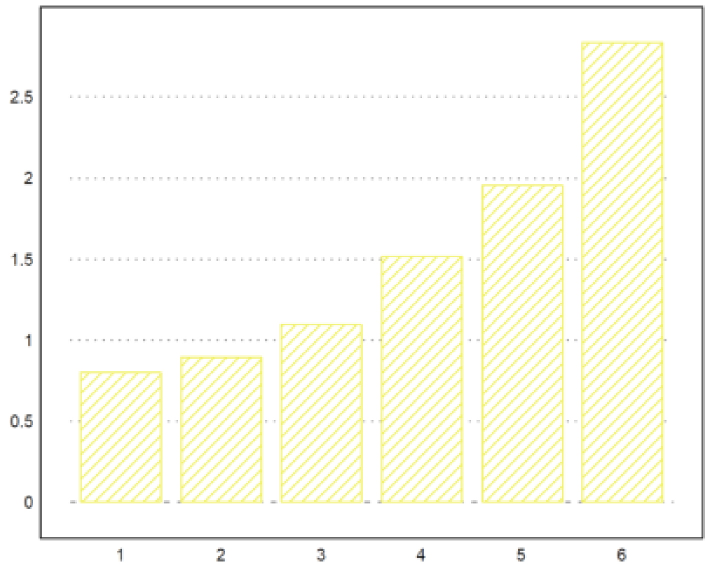
Ada juga banyak plot khusus untuk statistik. Plot kotak menunjukkan kuartil distribusi ini dan banyak outlier. Menurut definisinya, outlier dalam plot kotak adalah data yang melebihi 1,5 kali rentang 50% tengah plot.

```
>M=normal(5,1000); boxplot(quartiles(M)):
```



Contoh Soal:
1. Tentukan plot dalam bentuk histogram sebanyak 6!
Penyelesaian:

```
>columnsplot(cumsum(random(6)),style="/",color=yellow):
```



Fungsi Implisit

Plot implisit menunjukkan penyelesaian garis level f(x,y)=level, dimana "level" dapat berupa nilai tunggal atau vektor nilai. Jika level = "auto", akan ada garis level nc, yang akan tersebar antara fungsi minimum dan maksimum secara merata. Warna yang lebih gelap atau lebih terang dapat ditambahkan dengan >hue untuk menunjukkan nilai fungsi. Untuk fungsi implisit, xv harus berupa fungsi atau ekspresi parameter x dan y, atau alternatifnya, xv dapat berupa matriks nilai.

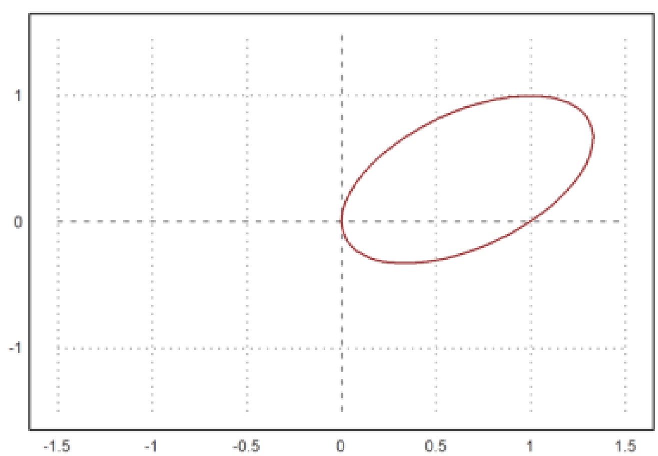
Euler dapat menandai garis level

$$f(x, y) = c$$

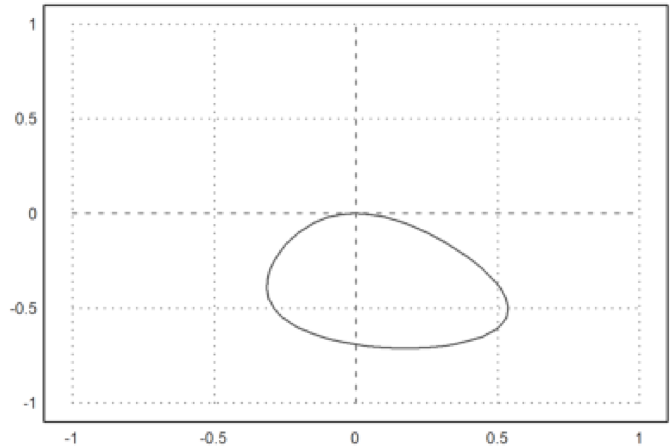
dari fungsi apa pun.

Untuk menggambar himpunan f(x,y)=c untuk satu atau lebih konstanta c, Anda dapat menggunakan plot2d() dengan plot implisitnya pada bidang. Parameter c adalah level=c, dimana c dapat berupa vektor garis level. Selain itu, skema warna dapat digambar di latar belakang untuk menunjukkan nilai fungsi setiap titik dalam plot. Parameter "n" menentukan kehalusan plot.

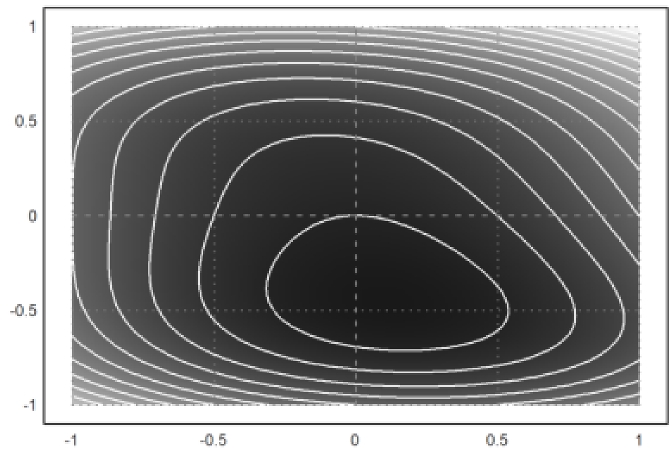
```
>aspect(1.5);
>plot2d("x^2+y^2-x*y-x",r=1.5,level=0,contourcolor=red):
```



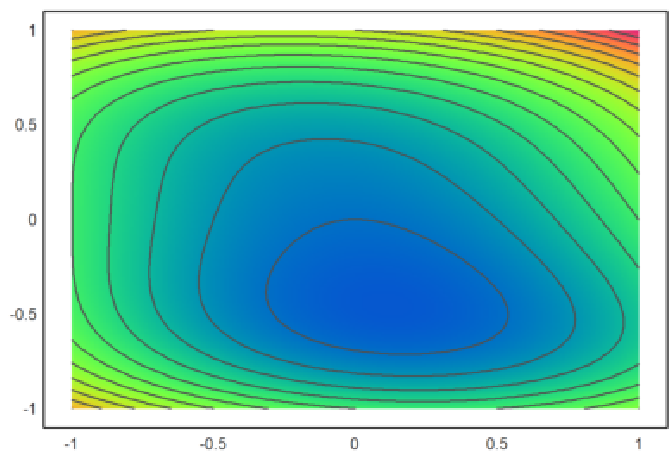

```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // define an expression f(x,y)
>plot2d(expr,level=0): // Solutions of f(x,y)=0
```




```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,contourcolor=white,n=200): // nice
```

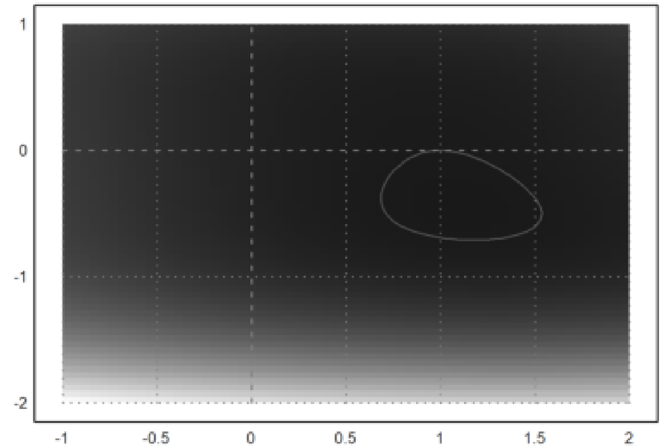



```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,>spectral,n=200,grid=4): // nicer
```

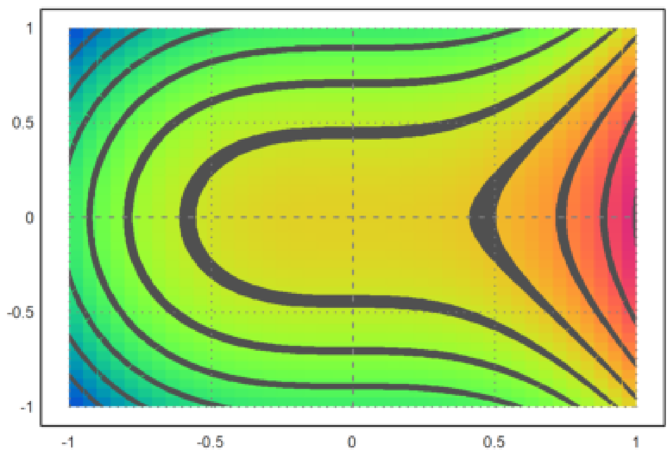


Ini juga berfungsi untuk plot data. Namun Anda harus menentukan rentangnya untuk label sumbu.

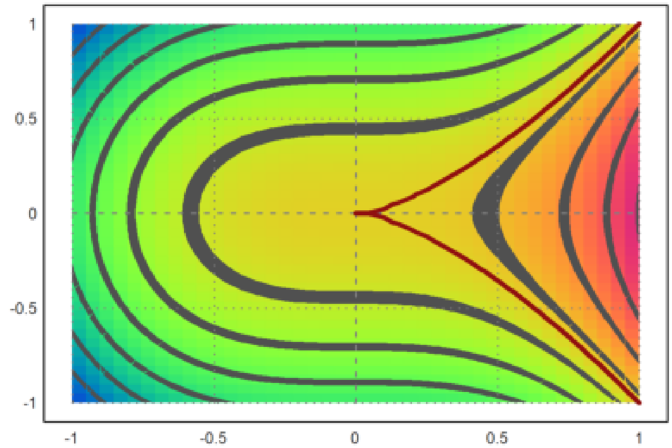
```
>x=-2:0.05:1; y=x'; z=expr(x,y);
>plot2d(z,level=0,a=-1,b=2,c=-2,d=1,>hue):
```



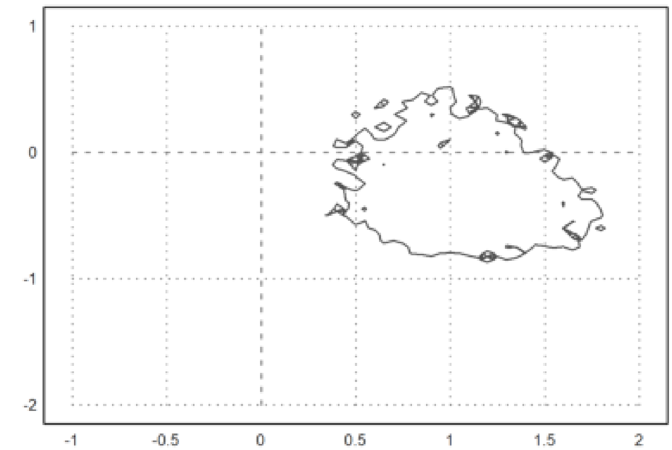

```
>plot2d("x^3-y^2",>contour,>hue,>spectral):
```



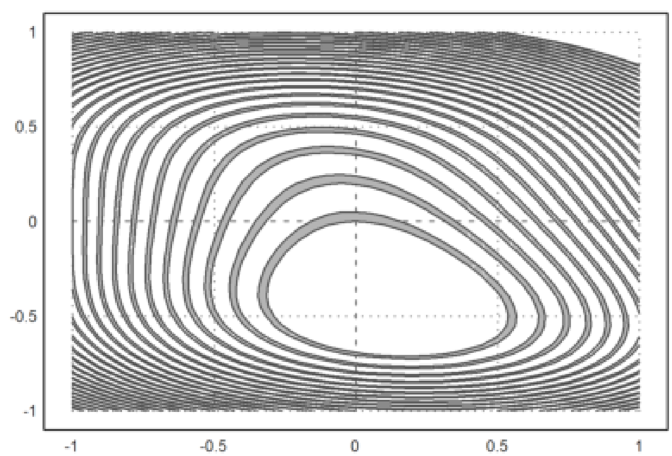

```
>plot2d("x^3-y^2",level=0,contourwidth=3,>add,contourcolor=red):
```



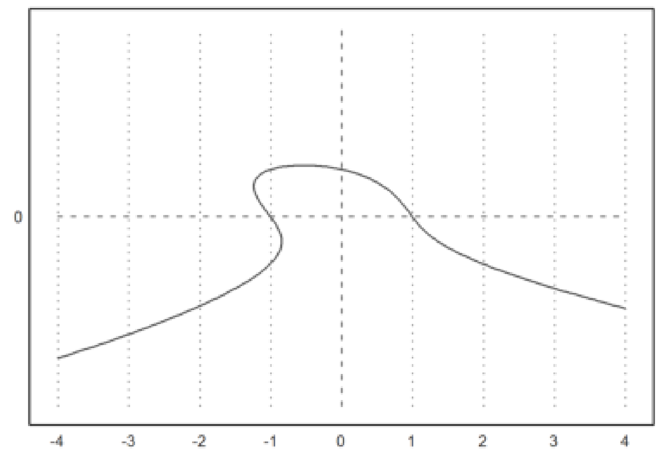

```
>z=z+normal(size(z))*0.2;
>plot2d(z,level=0.5,a=-1,b=2,c=-2,d=1):
```



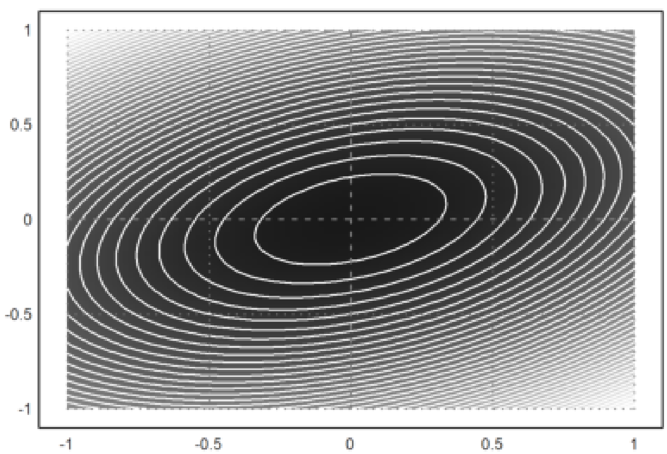

```
>plot2d(expr,level=[0:0.2:5;0.05:0.2:5.05],color=lightgray):
```



```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=1,r=4,n=100):
```




```
>plot2d("x^2+2*y^2-x*y",level=0:0.1:10,n=100,contourcolor=white,>hue):
```

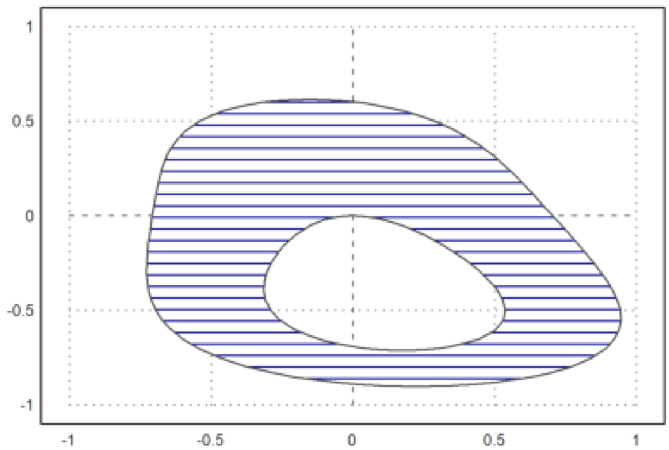


Dimungkinkan juga untuk mengisi set

$$a \leq f(x, y) \leq b$$

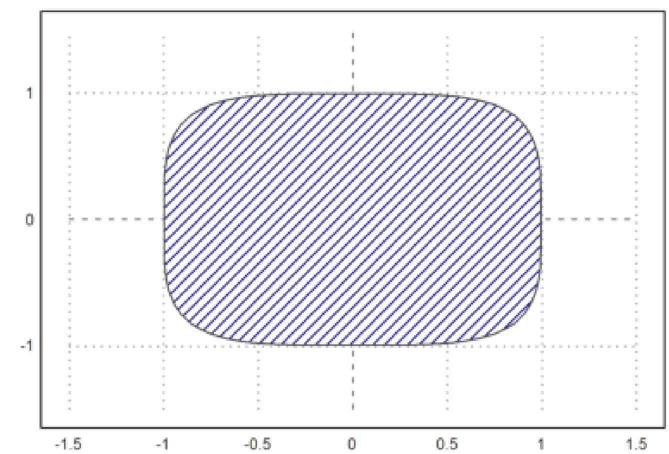
dengan rentang level.
Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

```
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```

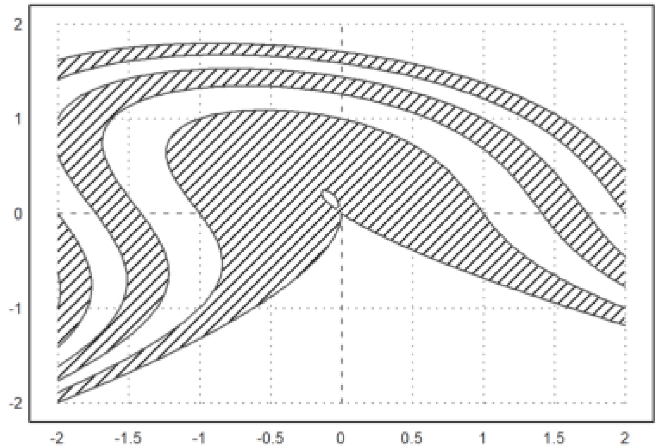


Plot implisit juga dapat menunjukkan rentang level. Maka level harus berupa matriks interval level 2xn, di mana baris pertama berisi awal dan baris kedua berisi akhir setiap interval. Alternatifnya, vektor baris sederhana dapat digunakan untuk level, dan parameter dl memperluas nilai level ke interval.

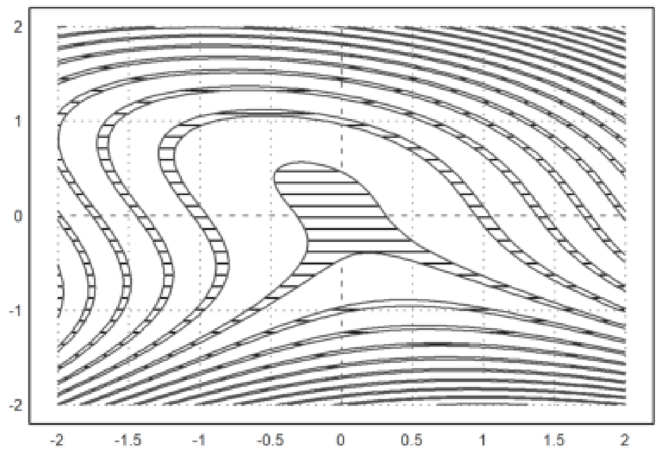
```
>plot2d("x^4+y^4",r=1.5,level=[0;1],color=blue,style="/"):
```



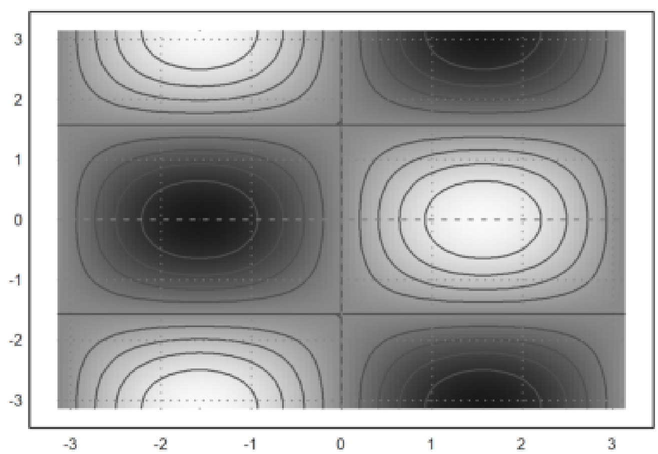

```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=[0,2,4;1,3,5],style="/",r=2,n=100):
```




```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=-10:20,r=2,style="-",dl=0.1,n=100):
```




```
>plot2d("sin(x)*cos(y)",r=pi,>hue,>levels,n=100):
```

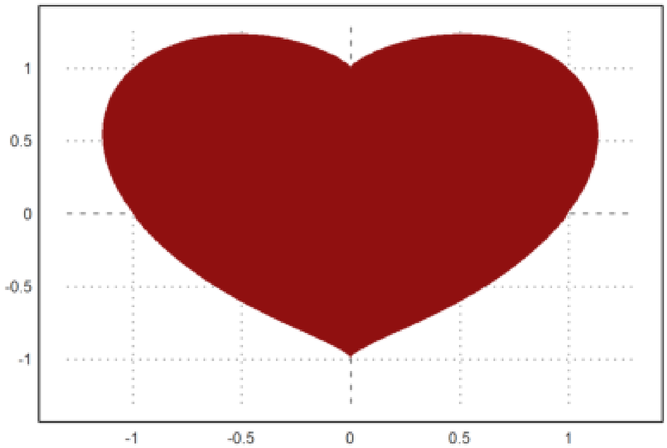


Dimungkinkan juga untuk menandai suatu wilayah

$$a \leq f(x, y) \leq b.$$

Hal ini dilakukan dengan menambahkan level dengan dua baris.

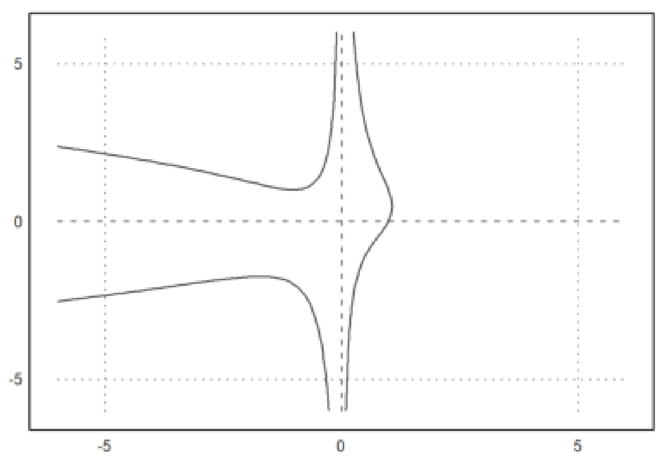
```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
>  style="#",color=red,<outline, ...
>  level=[-2;0],n=100):
```



Dimungkinkan untuk menentukan level tertentu. Misalnya, kita dapat memplot solusi persamaan seperti

$$x^3 - xy + x^2y^2 = 6$$

```
>plot2d("x^3-x*y+x^2*y^2",r=6,level=1,n=100):
```



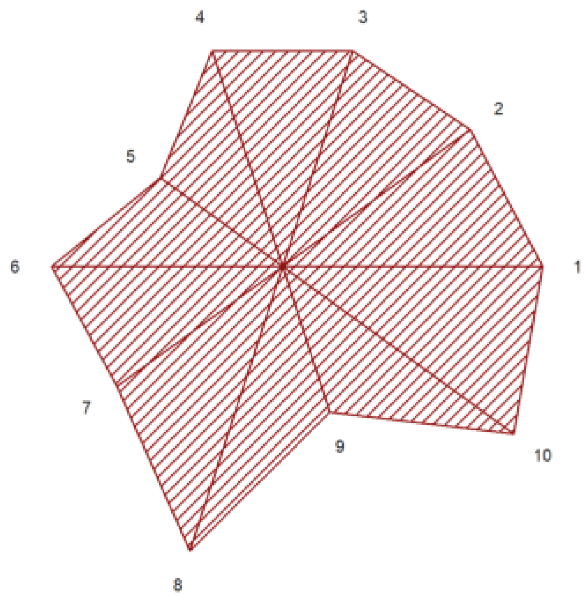
```
>function starplot1 (v, style="/", color=green, lab=none) ...
```

```
    if !holding() then clg; endif;
    w=window(); window(0,0,1024,1024);
    h=holding(1);
    r=max(abs(v))*1.2;
    setplot(-r,r,-r,r);
    n=cols(v); t=linspace(0,2pi,n);
    v=v|v[1]; c=v*cos(t); s=v*sin(t);
    cl=barcolor(color); st=barstyle(style);
    loop 1 to n
      polygon([0,c[#],c[#+1]],[0,s[#],s[#+1]],1);
      if lab!=none then
        rlab=v[#]+r*0.1;
        {col,row}=toscreen(cos(t[#])*rlab,sin(t[#])*rlab);
        ctext(""+lab[#],col,row-textheight()/2);
      endif;
    end;
    barcolor(cl); barstyle(st);
    holding(h);
    window(w);
  endfunction
```

Tidak ada tanda centang kotak atau sumbu di sini. Selain itu, kami menggunakan jendela penuh untuk plotnya.

Kami memanggil reset sebelum kami menguji plot ini untuk mengembalikan default grafis. Ini tidak perlu dilakukan jika Anda yakin plot Anda berhasil.

```
>reset; starplot1(normal(1,10)+5,color=red,lab=1:10):
```



Terkadang, Anda mungkin ingin merencanakan sesuatu yang plot2d tidak bisa lakukan, tapi hampir.

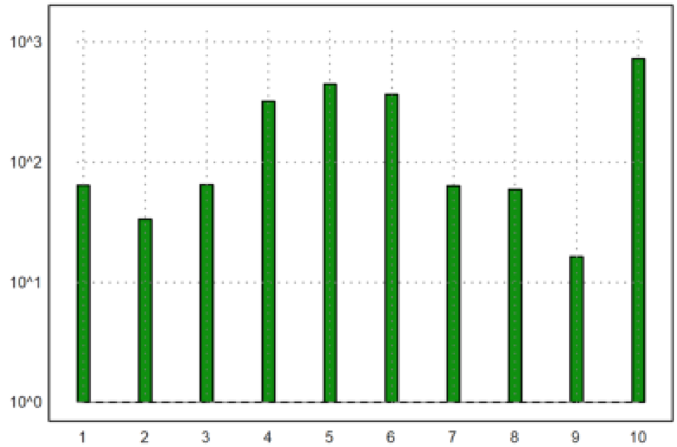
Dalam fungsi berikut, kita membuat plot impuls logaritmik. plot2d dapat melakukan plot logaritmik, tetapi tidak untuk batang impuls.

```
>function logimpulseplot1 (x,y) ...
```

```
    {x0,y0}=makeimpulse(x,log(y)/log(10));
    plot2d(x0,y0,>bar,grid=0);
    h=holding(1);
    frame();
    xgrid(ticks(x));
    p=plot();
    for i=-10 to 10;
      if i<=p[4] and i>=p[3] then
         ygrid(i,yt="10^"+i);
      endif;
    end;
    holding(h);
  endfunction
```

Mari kita uji dengan nilai yang terdistribusi secara eksponensial.

```
>aspect(1.5); x=1:10; y=-log(random(size(x)))*200; ...
>logimpulseplot1(x,y):
```



Mari kita menganimasikan kurva 2D menggunakan plot langsung. Perintah plot(x,y) hanya memplot kurva ke dalam jendela plot. setplot(a,b,c,d) menyetel jendela ini.
Fungsi wait(0) memaksa plot muncul di jendela grafis. Jika tidak, pengundian ulang akan dilakukan dalam interval waktu yang jarang.

```
>function animliss (n,m) ...
```

```
  t=linspace(0,2pi,500);
  f=0;
  c=framecolor(0);
  l=linewidth(2);
  setplot(-1,1,-1,1);
  repeat
    clg;
    plot(sin(n*t),cos(m*t+f));
    wait(0);
    if testkey() then break; endif;
    f=f+0.02;
  end;
  framecolor(c);
  linewidth(l);
  endfunction
```

Tekan tombol apa saja untuk menghentikan animasi ini.

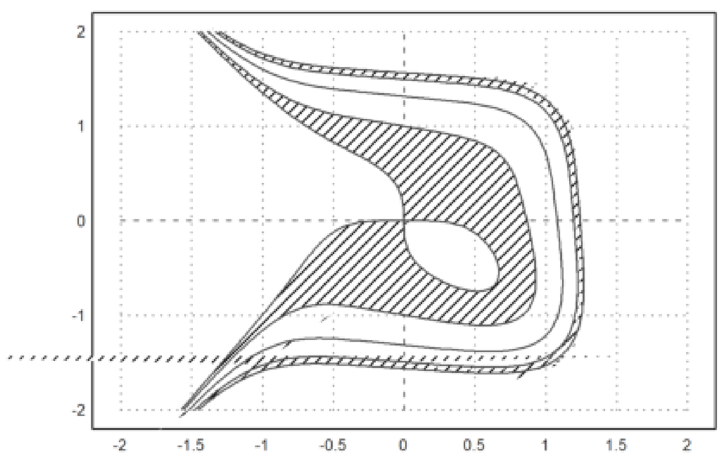
```
>animliss(2,3); // lihat hasilnya, jika sudah puas, tekan ENTER
```

Contoh Soal
1. Tentukan plot dari fungsi implisit berikut!

$$2x^5 + y^4 + xy$$

Penyelesaian:

```
>plot2d("2x^5+y^4+x*y",level=[0,3,6;1,3,5],style="/",r=2,n=100):
```

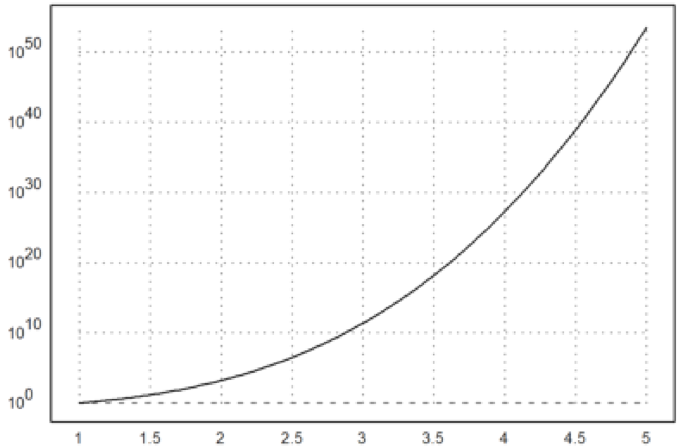


Plot Logaritma

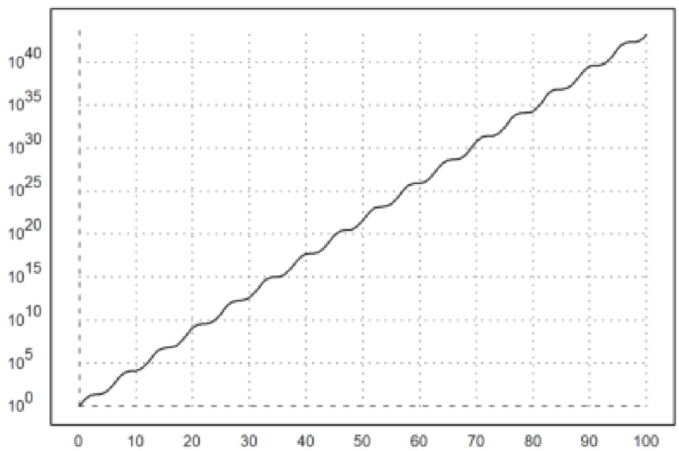
EMT menggunakan parameter "logplot" untuk skala logaritmik.
Plot logaritma dapat diplot menggunakan skala logaritma di y dengan logplot=1, atau menggunakan skala logaritma di x dan y dengan logplot=2, atau di x dengan logplot=3.

```
 - logplot=1: y-logaritma
 - logplot=2: x-y-logaritma
 - logplot=3: x-logaritma
```

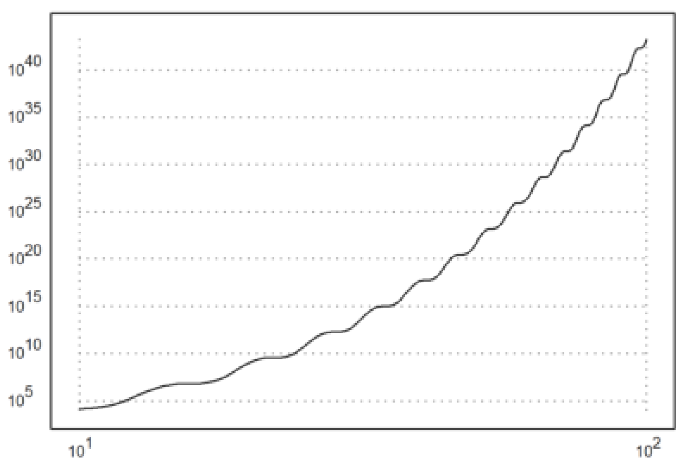
```
>plot2d("exp(x^3-x)*x^2",1,5,logplot=1):
```



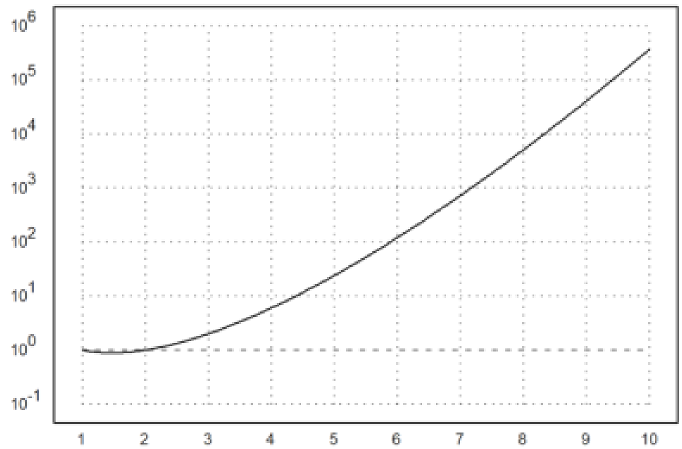

```
>plot2d("exp(x+sin(x))",0,100,logplot=1):
```



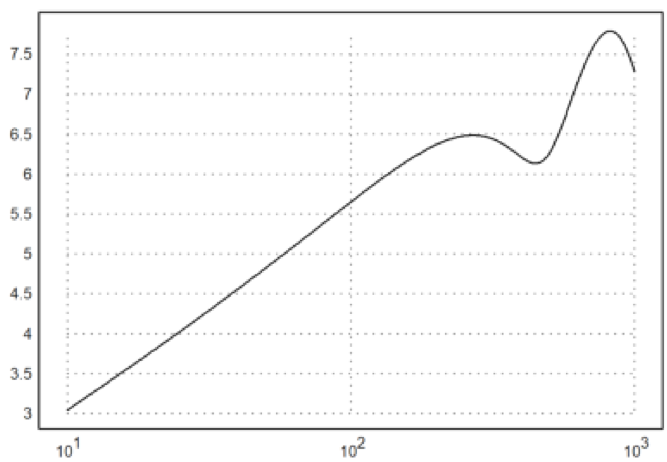

```
>plot2d("exp(x+sin(x))",10,100,logplot=2):
```



```
>plot2d("gamma(x)",1,10,logplot=1):
```

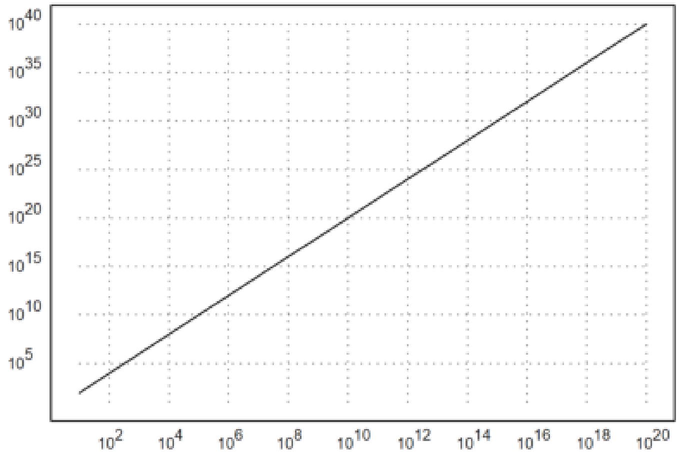



```
>plot2d("log(x*(2+sin(x/100)))",10,1000,logplot=3):
```



Ini juga berfungsi dengan plot data.

```
>x=10^(1:20); y=x^2-x;
>plot2d(x,y,logplot=2):
```

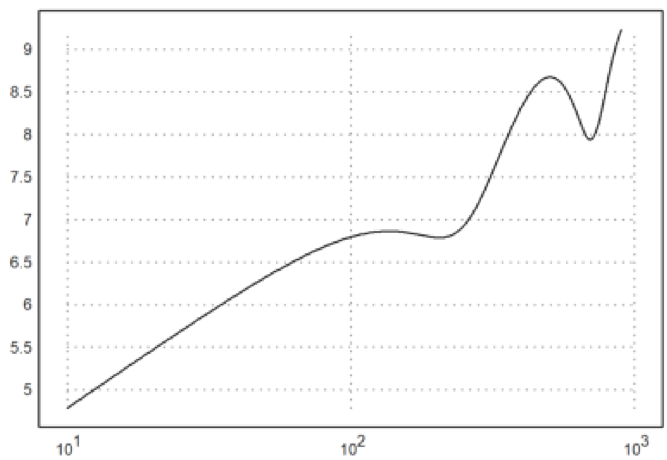


Contoh Soal:
1. Tentukan plot dari fungsi berikut:

$$log(4x * (2 + cos(x/75)))$$

Penyelesaian:

```
>plot2d("log(4x*(2+cos(x/75)))",10,900,logplot=3):
```



Rujukan Lengkap Fungsi plot2d()

```
function plot2d (xv, yv, btest, a, b, c, d, xmin, xmax, r, n,  ..
logplot, grid, frame, framecolor, square, color, thickness, style, ..
auto, add, user, delta, points, addpoints, pointstyle, bar, histogram,  .
distribution, even, steps, own, adaptive, hue, level, contour,  ..
nc, filled, fillcolor, outline, title, xl, yl, maps, contourcolor, ..
contourwidth, ticks, margin, clipping, cx, cy, insimg, spectral,  ..
cgrid, vertical, smaller, dl, niveau, levels)
```

Multipurpose plot function for plots in the plane (2D plots). This function can do plots of functions of one variables, data plots, curves in the plane, bar plots, grids of complex numbers, and implicit plots of functions of two variables.
Parameters
x,y : equations, functions or data vectors
a,b,c,d : Plot area (default a=-2,b=2)
r : if r is set, then a=cx-r, b=cx+r, c=cy-r, d=cy+r

```
r can be a vector [rx,ry] or a vector [rx1,rx2,ry1,ry2].
```

xmin,xmax : range of the parameter for curves
auto : Determine y-range automatically (default)
square : if true, try to keep square x-y-ranges
n : number of intervals (default is adaptive)
grid : 0 = no grid and labels,

```
1 = axis only,
2 = normal grid (see below for the number of grid lines)
3 = inside axis
4 = no grid
5 = full grid including margin
6 = ticks at the frame
7 = axis only
8 = axis only, sub-ticks
```

frame : 0 = no frame
framecolor: color of the frame and the grid
margin : number between 0 and 0.4 for the margin around the plot
color : Color of curves. If this is a vector of colors,

```
it will be used for each row of a matrix of plots. In the case
point plots, it should be a column vector. If a row vector or a
full matrix of colors is used for point plots, it will be used
each data point.
```

thickness : line thickness for curves

```
This value can be smaller than 1 for very thin lines.
```

style : Plot style for lines, markers, and fills.

```
For points use
"[]", "<>", ".", "..", "...",
"*", "+", "|", "-", "o"
"[]#", "<>#", "o#" (filled shapes)
"[]w", "<>w", "ow" (non-transparent)
For lines use
"-", "--", "-.", ".", ".-.", "-.-", "->"
For filled polygons or bar plots use
"#", "#O", "O", "/", "\", "\/",
"+", "|", "-", "t"
```

points : plot single points instead of line segments
addpoints : if true, plots line segments and points
add : add the plot to the existing plot
user : enable user interaction for functions
delta : step size for user interaction
bar : bar plot (x are the interval bounds, y the interval values)
histogram : plots the frequencies of x in n subintervals
distribution=n : plots the distribution of x with n subintervals
even : use inter values for automatic histograms.
steps : plots the function as a step function (steps=1,2)
adaptive : use adaptive plots (n is the minimal number of steps)
level : plot level lines of an implicit function of two variables
outline : draws boundary of level ranges.
If the level value is a 2xn matrix, ranges of levels will be drawn in the color using the given fill style. If outline is true, it will be drawn in the contour color. Using this feature, regions of f(x,y) between limits can be marked.
hue : add hue color to the level plot to indicate the function

```
value
```

contour : Use level plot with automatic levels
nc : number of automatic level lines
title : plot title (default "")
xl, yl : labels for the x- and y-axis
smaller : if >0, there will be more space to the left for labels.
vertical :

```
Turns vertical labels on or off. This changes the global variable
verticallabels locally for one plot. The value 1 sets only vertical
text, the value 2 uses vertical numerical labels on the y axis.
```

filled : fill the plot of a curve
fillcolor : fill color for bar and filled curves
outline : boundary for filled polygons
logplot : set logarithmic plots

```
1 = logplot in y,
2 = logplot in xy,
3 = logplot in x
```

own :

```
A string, which points to an own plot routine. With >user, you get
the same user interaction as in plot2d. The range will be set
before each call to your function.
```

maps : map expressions (0 is faster), functions are always mapped.
contourcolor : color of contour lines
contourwidth : width of contour lines
clipping : toggles the clipping (default is true)
title :

```
This can be used to describe the plot. The title will appear above
the plot. Moreover, a label for the x and y axis can be added with
xl="string" or yl="string". Other labels can be added with the
functions label() or labelbox(). The title can be a unicode
string or an image of a Latex formula.
```

cgrid :

```
Determines the number of grid lines for plots of complex grids.
Should be a divisor of the the matrix size minus 1 (number of
subintervals). cgrid can be a vector [cx,cy].
```

Overview
The function can plot
- expressions, call collections or functions of one variable,
- parametric curves,
- x data against y data,
- implicit functions,
- bar plots,
- complex grids,
- polygons.

If a function or expression for xv is given, plot2d() will compute values in the given range using the function or expression. The expression must be an expression in the variable x. The range must be defined in the parameters a and b unless the default range should be used. The y-range will be computed automatically, unless c and d are specified, or a radius r, which yields the range
r,r
for x and y. For plots of functions, plot2d will use an adaptive evaluation of the function by default. To speed up the plot for complicated functions, switch this off with <adaptive, and optionally decrease the number of intervals n. Moreover, plot2d() will by default use mapping. I.e., it will compute the plot element for element. If your expression or your functions can handle a vector x, you can switch that off with <maps for faster evaluation. Note that adaptive plots are always computed element for element. If functions or expressions for both xv and for yv are specified, plot2d() will compute a curve with the xv values as x-coordinates and the yv values as y-coordinates. In this case, a range should be defined for the parameter using xmin, xmax. Expressions contained in strings must always be expressions in the parameter variable x.

BAB 3

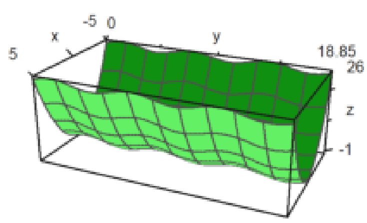
EMT plot 3D

Menggambar Plot 3D dengan EMT

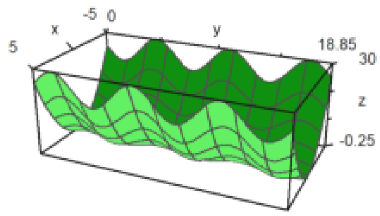
Ini adalah pengenalan plot 3D di Euler. Kita memerlukan plot 3D untuk memvisualisasikan fungsi dari dua variabel.
Euler menggambar fungsi-fungsi tersebut dengan menggunakan algoritme pengurutan untuk menyembunyikan bagian-bagian di latar belakang. Secara umum, Euler menggunakan proyeksi pusat. Standarnya adalah dari kuadran x-y positif ke arah asal x=y=z=0, tetapi sudut=0° terlihat dari arah sumbu-y. Sudut pandang dan ketinggian dapat diubah.
Euler can plot :
- memplot - permukaan dengan garis bayangan dan garis datar,
- awan titik,
- kurva parametrik,
- permukaan implisit.

Plot 3D suatu fungsi menggunakan plot3d. Cara termudah adalah dengan memplot ekspresi dalam x dan y. Parameter r mengatur rentang plot sekitar (0,0).

```
>aspect(1.5); plot3d("x^2+sin(y)",-5,5,0,6*pi):
```



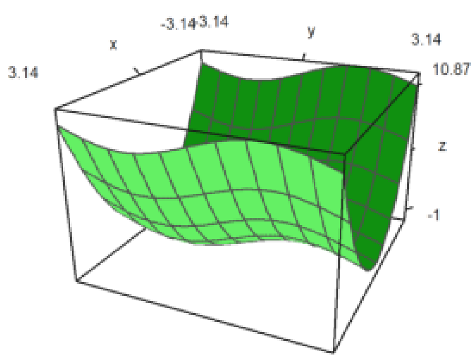
```
>plot3d("x^2+x*sin(y)",-5,5,0,6*pi):
```



Silakan lakukan modifikasi agar gambar "talang bergelombang" tersebut tidak lurus melainkan melengkung/melingkar, baik melingkar secara mendatar maupun melingkar turun/naik (seperti papan peluncur pada kolam renang. Temukan rumusnya.

Berikut rumus agar gambar "talang bergelombang" tidak lurus melainkan melengkung/melingkar, baik melingkar secara mendatar maupun melingkar turun/naik:

```
>aspect(1.5); plot3d("x^2+sin(y)",r=pi):
```



Fungsi dua Variabel

Untuk grafik suatu fungsi, gunakan -

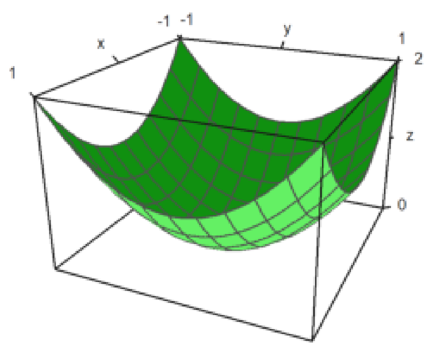
- ekspresi sederhana dalam x dan y,
- nama fungsi dari dua variabel,
- atau matriks data.

Standarnya adalah kisi-kisi kawat berisi dengan warna berbeda di kedua sisi. Perhatikan bahwa jumlah interval kisi default adalah 10, tetapi plot menggunakan jumlah default persegi panjang 40x40 untuk membuat permukaannya. Ini bisa diubah.

- n=40, n=[40,40]: jumlah garis grid di setiap arah.
- grid=10, grid=[10,10]: : jumlah garis grid di setiap arah.

Kami menggunakan default n=40 dan grid=10.

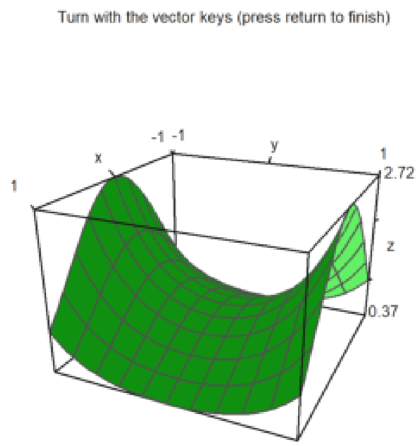
```
>plot3d("x^2+y^2"):
```



Interaksi pengguna dimungkinkan dengan parameter >pengguna. Pengguna dapat menekan tombol berikut.

- left,right,up,down: : putar sudut pandang,
- +,-: memperbesar atau memperkecil
- a: menghasilkan anaglyph (lihat di bawah)
- l: beralih memutar sumber cahaya(lihat di bawah)
- space: atur ulang ke default
- return: interaksi akhir

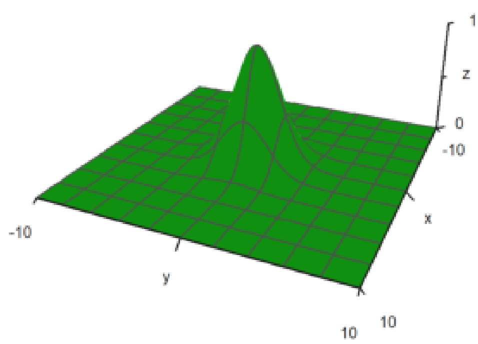
```
>plot3d("exp(-x^2+y^2)",>user, ...
>  title="Turn with the vector keys (press return to finish)"):
```



Rentang plot untuk fungsi dapat ditentukan dengan :
- a,b: rentang x
- c,d: rentang y
- r: persegi simetris di sekelilingnya(0,0).
- n: jumlah subinterval untuk plot.

Ada beberapa parameter untuk menskalakan fungsi atau mengubah tampilan grafik.
fscale: menskalakan ke nilai fungsi (defaultnya adalah <fscale).
scale: angka atau vektor 1x2 untuk menskalakan ke arah x dan y
frame: jenis bingkai (default 1).

```
>plot3d("exp(-(x^2+y^2)/5)",r=10,n=80,fscale=4,scale=1.2,frame=3,>user):
```



Tampilan dapat diubah dengan berbagai cara.
- distance: jarak pandang ke plot.
- zoom: the zoom value.
- sudut: the angle to the negative y-axis in radians.
- height: the height of the view in radians.

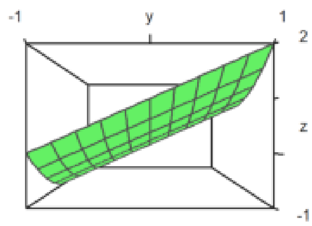
Nilai default dapat diperiksa atau diubah dengan fungsi view(). Ini mengembalikan parameter dalam urutan di atas.

```
>view
```

```
[5,   2.6,   2,   0.4]
```

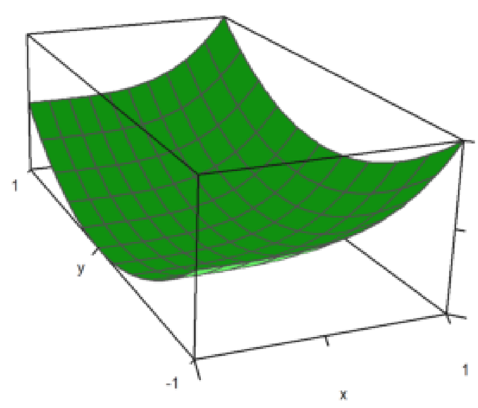
Jarak yang lebih dekat membutuhkan lebih sedikit zoom. Efeknya lebih seperti lensa sudut lebar.
ada contoh berikut, sudut=0 dan tinggi=0 dilihat dari sumbu y negatif. Label sumbu untuk y disembunyikan dalam kasus ini.

```
>plot3d("x^2+y",distance=3,zoom=1,angle=pi/2,height=0):
```



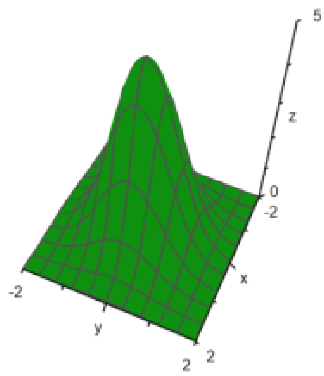
Plot selalu terlihat berada di tengah kubus plot. Anda dapat memindahkan bagian tengah dengan parameter tengah.

```
>plot3d("x^4+y^2",a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°, ...
>  center=[0.4,0,0],zoom=5):
```



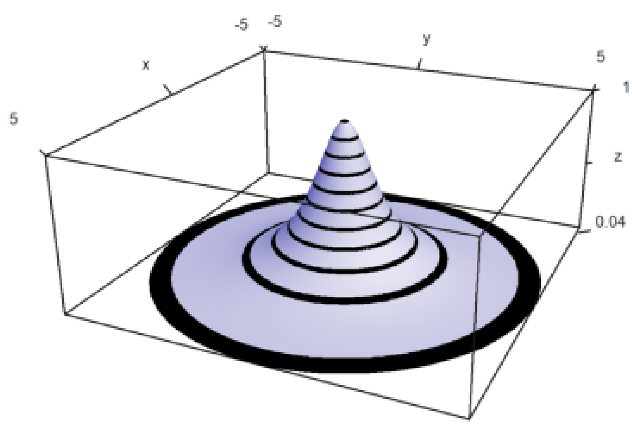
Plotnya diskalakan agar sesuai dengan unit kubus untuk dilihat. Jadi tidak perlu mengubah jarak atau zoom tergantung ukuran plot. Namun labelnya mengacu pada ukuran sebenarnya.
Jika Anda mematikannya dengan scale=false, Anda harus berhati-hati agar plot tetap masuk ke dalam jendela plotting, dengan mengubah jarak pandang atau zoom, dan memindahkan bagian tengah.

```
>plot3d("5*exp(-x^2-y^2)",r=2,<fscale,<scale,distance=13,height=50°, ...
>  center=[0,0,-2],frame=3):
```

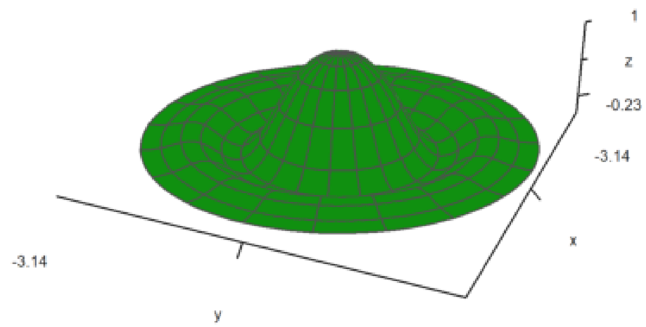


Plot kutub juga tersedia. Parameter polar=true menggambar plot kutub. Fungsi tersebut harus tetap merupakan fungsi dari x dan y. Parameter "fscale" menskalakan fungsi dengan skalanya sendiri. Kalau tidak, fungsinya akan diskalakan agar sesuai dengan kubus.

```
>plot3d("1/(x^2+y^2+1)",r=5,>polar, ...
>fscale=2,>hue,n=100,zoom=4,>contour,color=blue):
```

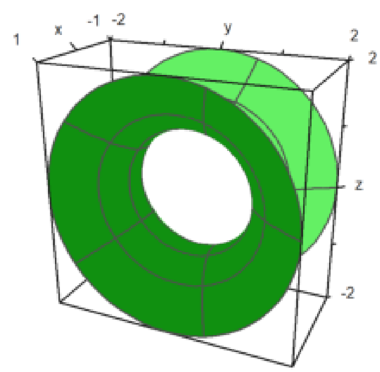


```
>function f(r) := exp(-r/2)*cos(r); ...
>plot3d("f(x^2+y^2)",>polar,scale=[1,1,0.4],r=pi,frame=3,zoom=4):
```

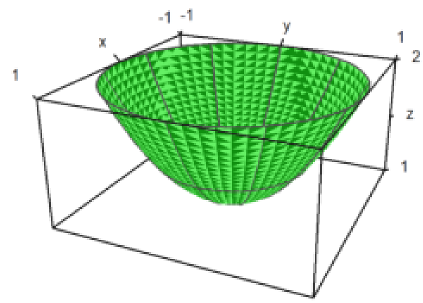


Parameter memutar memutar fungsi di x di sekitar sumbu x.
- rotate=1: Uses the x-axis
- rotate=2: Uses the z-axis

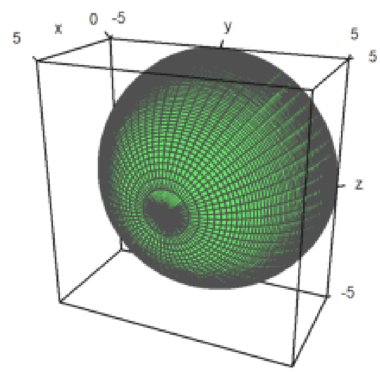
```
>plot3d("x^2+1",a=-1,b=1,rotate=true,grid=5):
```



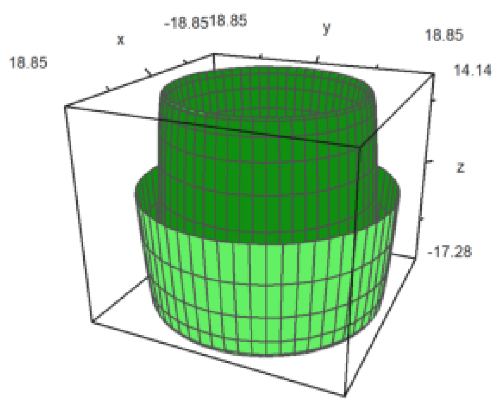

```
>plot3d("x^2+1",a=-1,b=1,rotate=2,grid=5):
```




```
>plot3d("sqrt(25-x^2)",a=0,b=5,rotate=1):
```

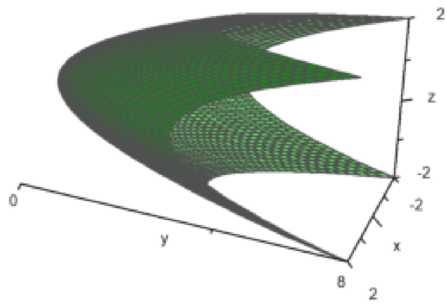



```
>plot3d("x*sin(x)",a=0,b=6pi,rotate=2):
```



Berikut adalah plot dengan tiga fungsi.

```
>plot3d("x","x^2+y^2","y",r=2,zoom=3.5,frame=3):
```

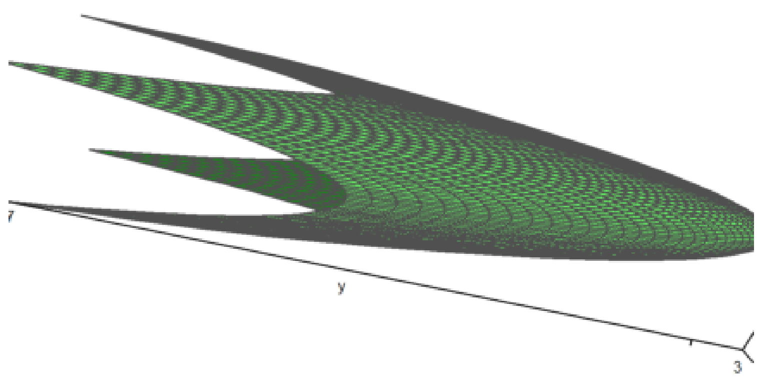


Contoh Soal dan Penyelesaian:
1. Buatlah grafik dari fungsi berikut ini

$$f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$$

Penyelesaian:

```
>plot3d("x","3-x^2-y^2","y",r=5,zoom=8,frame=3):
```

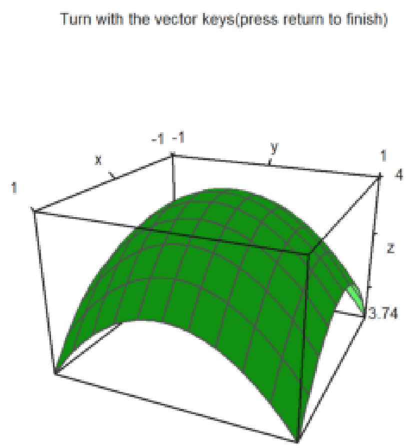


2. Buatlah grafik dari fungsi berikut ini

$$f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$$

Penyelesaian:

```
>plot3d("(16-x^2-y^2)^(1/2)",>user, ...
>title= "Turn with the vector keys(press return to finish)"):
```



Plot Kontur

Untuk plotnya, Euler menambahkan garis grid. Sebaliknya dimungkinkan untuk menggunakan garis datar dan rona satu warna atau rona warna spektral. Euler dapat menggambar ketinggian fungsi pada plot dengan arsiran. Di semua plot 3D, Euler dapat menghasilkan anaglyph.

- >hue: Mengaktifkan bayangan cahaya, bukan kabel.

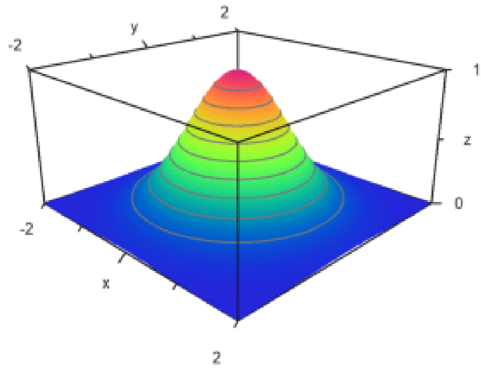
```
>contour: : Membuat plot garis kontur otomatis pada plot.
```

- level=... (or levels): A Vektor nilai garis kontur.

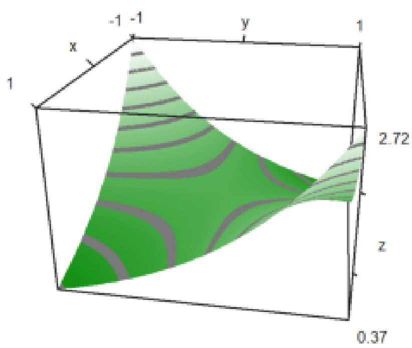
Standarnya adalah level="auto", yang menghitung beberapa garis level secara otomatis. Seperti yang Anda lihat di plot, level sebenarnya adalah rentang level.

Gaya default dapat diubah. Untuk plot kontur berikut, kami menggunakan grid yang lebih halus berukuran 100x100 poin, menskalakan fungsi dan plot, dan menggunakan sudut pandang yang berbeda.

```
>plot3d("exp(-x^2-y^2)",r=2,n=100,level="thin", ...
> >contour,>spectral,fscale=1,scale=1.1,angle=45°,height=20°):
```



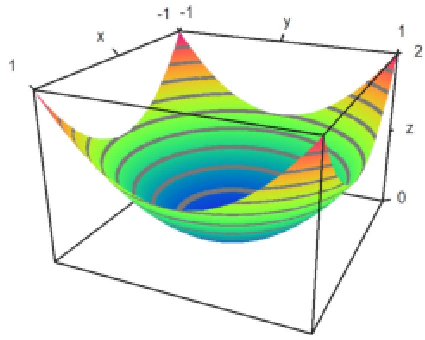

```
>plot3d("exp(x*y)",angle=100°,>contour,color=green):
```



Bayangan defaultnya menggunakan warna abu-abu. Namun rentang warna spektral juga tersedia.
- >spectral: Menggunakan skema spektral default
- color=...: Menggunakan warna khusus atau skema

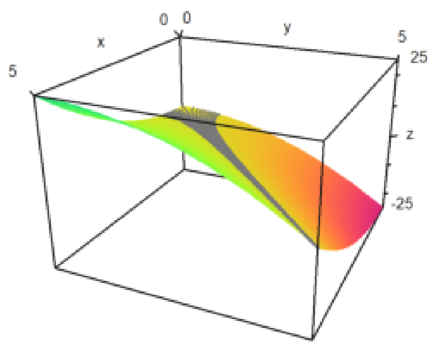
spektral Untuk plot berikut, kami menggunakan skema spektral default dan menambah jumlah titik untuk mendapatkan tampilan yang sangat halus.

```
>plot3d("x^2+y^2",>spectral,>contour,n=100):
```



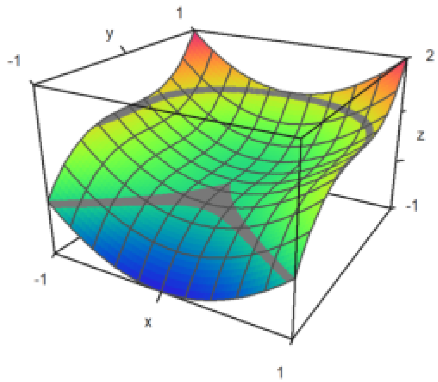
Selain garis level otomatis, kita juga dapat menetapkan nilai garis level. Ini akan menghasilkan garis level yang tipis, bukan rentang level.

```
>plot3d("x^2-y^2",0,5,0,5,level=-1:0.1:1,color=redgreen):
```



Dalam plot berikut, kita menggunakan dua pita tingkat yang sangat luas dari -0,1 hingga 1, dan dari 0,9 hingga 1. Ini dimasukkan sebagai matriks dengan batas tingkat sebagai kolom. Selain itu, kami melapisi grid dengan 10 interval di setiap arah.

```
>plot3d("x^2+y^3",level=[-0.1,0.9;0,1], ...
>  >spectral,angle=30°,grid=10,contourcolor=gray):
```

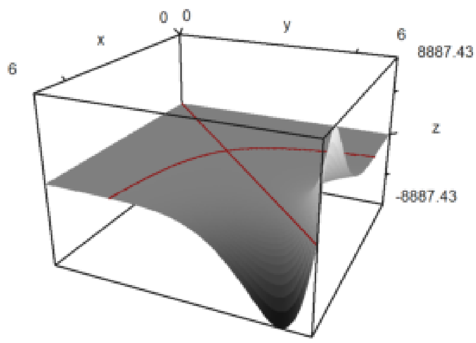


Pada contoh berikut, kita memplot himpunan, di mana :

$$f(x, y) = x^y - y^x = 0$$

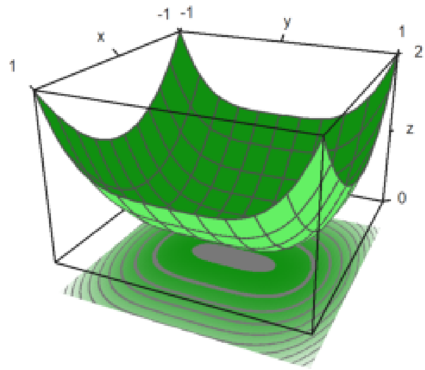
Kami menggunakan satu garis tipis untuk garis level.

```
>plot3d("x^y-y^x",level=0,a=0,b=6,c=0,d=6,contourcolor=red,n=100):
```



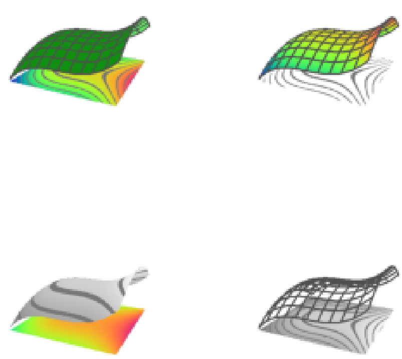
Dimungkinkan untuk menampilkan bidang kontur di bawah plot. Warna dan jarak ke plot dapat ditentukan.

```
>plot3d("x^2+y^4",>cp,cpcolor=green,cpdelta=0.2):
```



Berikut beberapa gaya lainnya. Kami selalu mematikan bingkai, dan menggunakan berbagai skema warna untuk plot dan kisi.

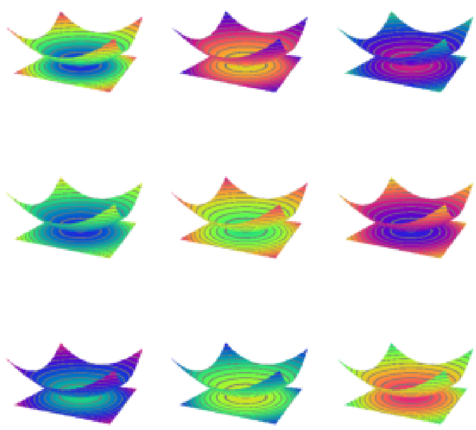
```
>figure(2,2); ...
>expr="y^3-x^2"; ...
>figure(1);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>cp,cpcolor=spectral); ...
>figure(2);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>spectral,grid=10,cp=2); ...
>figure(3);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>contour,color=gray,nc=5,cp=3,cpcolor=greenred); ...
>figure(4);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>hue,grid=10,>transparent,>cp,cpcolor=gray); ...
>figure(0):
```



Ada beberapa skema spektral lainnya, yang diberi nomor dari 1 hingga 9. Namun Anda juga dapat menggunakan warna=nilai, di mana nilai :

- spectral: untuk rentang dari biru ke merah
- white: untuk rentang yang lebih redup
- yellowblue,purplegreen,blueyellow,greenred
- blueyellow, greenpurple,yellowblue,redgreen

```
>figure(3,3); ...
>for i=1:9;  ...
>  figure(i); plot3d("x^2+y^2",spectral=i,>contour,>cp,<frame,zoom=4);  ...
>end; ...
>figure(0):
```

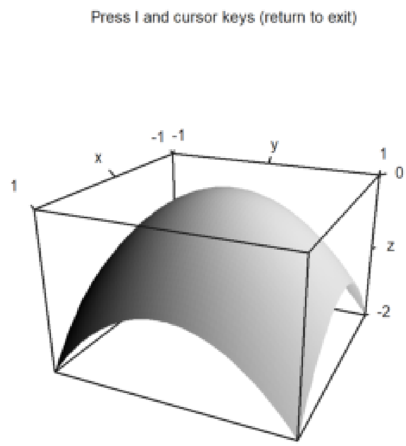


Sumber cahaya dapat diubah dengan l dan tombol kursor selama interaksi pengguna. Itu juga dapat diatur dengan parameter.

- light: arah
- amb: ambient light between 0 and 1

Catatan : program tidak membuat perbedaan antara sisi plot. Tidak ada bayangan. Untuk ini, Anda memerlukan Povray.

```
>plot3d("-x^2-y^2", ...
>  hue=true,light=[0,1,1],amb=0,user=true, ...
>  title="Press l and cursor keys (return to exit)"):
```

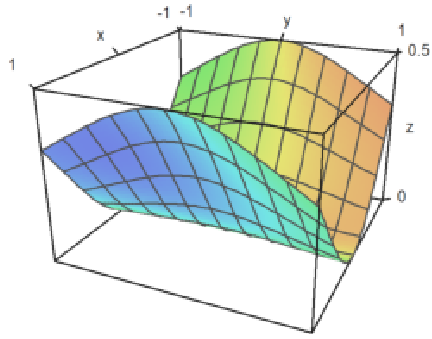


Parameter warna mengubah warna permukaan. Warna garis level juga bisa diubah.

```
>plot3d("-x^2-y^2",color=rgb(0.2,0.2,0),hue=true,frame=false, ...
>   zoom=3,contourcolor=red,level=-2:0.1:1,dl=0.01):
```

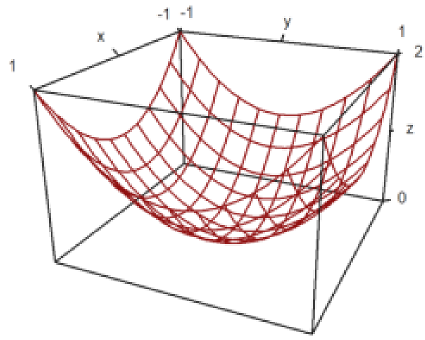
Warna 0 memberikan efek pelangi yang istimewa.

```
>plot3d("x^2/(x^2+y^2+1)",color=0,hue=true,grid=10):
```



Permukaannya juga bisa transparan.

```
>plot3d("x^2+y^2",>transparent,grid=10,wirecolor=red):
```

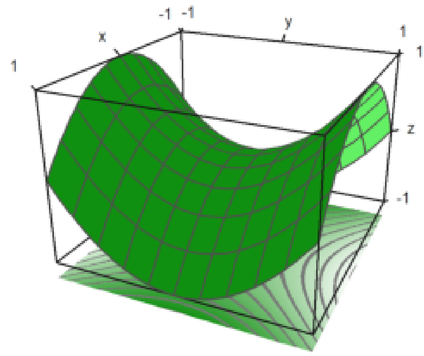


Contoh Soal dan Penyelesaian:
1. Buatlah grafik dari fungsi berikut ini

$$z = y^2 - x^2$$

Penyelesaian:

```
>plot3d("y^2-x^2",>cp,cpcolor=green,cpdelta=0.1):
```



Plot Implisit

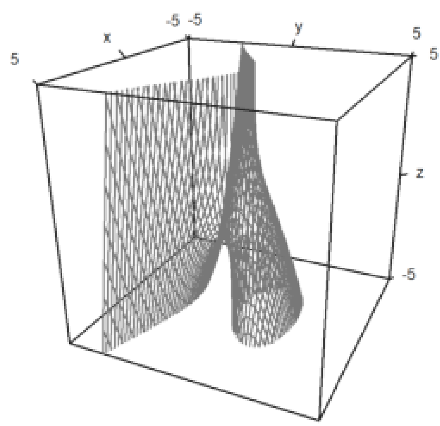
Ada juga plot implisit dalam tiga dimensi. Euler menghasilkan pemotongan melalui objek. Fitur plot3d mencakup plot implisit. Plot ini menunjukkan himpunan nol suatu fungsi dalam tiga variabel. Permukaannya juga bisa transparan.
Solusi dari

$$f(x, y, z) = 0$$

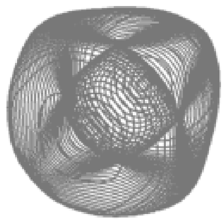
dapat divisualisasikan dalam potongan yang sejajar dengan bidang xy-, xz- dan yz.
- implicit=1: cut parallel to the y-z-plane
- implicit=2: cut parallel to the x-z-plane
- implicit=4: cut parallel to the x-y-plane
Tambahkan nilai berikut, jika Anda mau. Dalam contoh kita memplot :

$$M = \{(x, y, z) : x^2 + y^3 + zy = 1\}$$

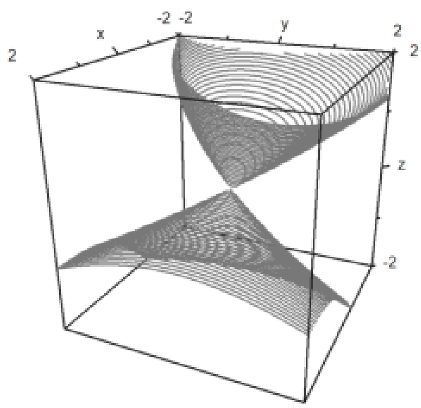
```
>plot3d("x^2+y^3+z*y-1",r=5,implicit=3):
```



```
>c=1; d=1;
>plot3d("((x^2+y^2-c^2)^2+(z^2-1)^2)*((y^2+z^2-c^2)^2+(x^2-1)^2)*((z^2+x^2-
```



```
>plot3d("x^2+y^2+4*x*z+z^3",>implicit,r=2,zoom=2.5):
```

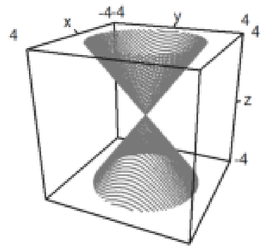


Contoh Soal dan Penyelesaian:
1. Buatlah grafik dari fungsi berikut ini

$$f(x, y, z) = 16x^2 + 16y^2 - 9z^2$$

Penyelesaian:

```
>plot3d("16*x^2+16*y^2-9*z^2",>implicit,r=4,zoom=1.5):
```



Memplot Data 3D

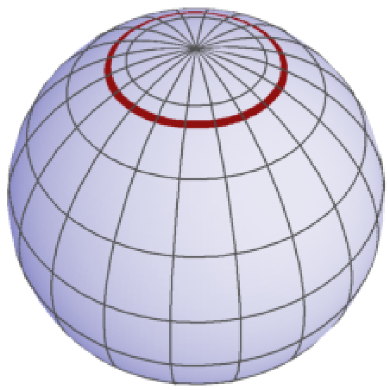
Sama seperti plot2d, plot3d menerima data. Untuk objek 3D, Anda perlu menyediakan matriks nilai x-, y- dan z, atau tiga fungsi atau ekspresi fx(x,y), fy(x,y), fz(x,y).

$$\gamma(t, s) = (x(t, s), y(t, s), z(t, s))$$

Karena x,y,z adalah matriks, kita asumsikan bahwa (t,s) melewati grid persegi. Hasilnya, Anda dapat memplot gambar persegi panjang di ruang angkasa.
Anda dapat menggunakan bahasa matriks Euler untuk menghasilkan koordinat secara efektif.

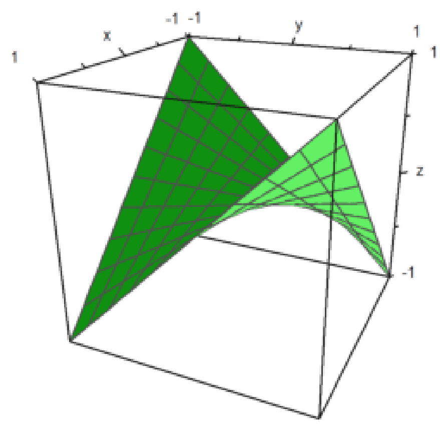
Dalam contoh berikut, kita menggunakan vektor nilai t dan vektor kolom nilai s untuk membuat parameter permukaan bola. Dalam gambar kita dapat menandai wilayah, dalam kasus kita wilayah kutub.

```
>t=linspace(0,2pi,180); s=linspace(-pi/2,pi/2,90)'; ...
>x=cos(s)*cos(t); y=cos(s)*sin(t); z=sin(s); ...
>plot3d(x,y,z,>hue, ...
>color=blue,<frame,grid=[10,20], ...
>values=s,contourcolor=red,level=[90°-24°;90°-22°], ...
>scale=1.4,height=50°):
```



Berikut ini contohnya yaitu grafik suatu fungsi.

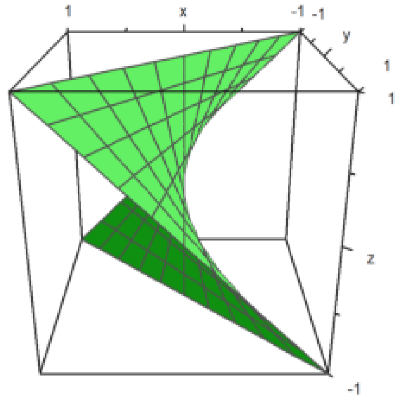
```
>t=-1:0.1:1; s=(-1:0.1:1)'; plot3d(t,s,t*s,grid=10):
```



Namun, kita bisa membuat berbagai macam permukaan. Berikut adalah permukaan yang sama sebagai suatu fungsi :

$$x = y\, z$$

```
>plot3d(t*s,t,s,angle=180°,grid=10):
```



Dengan lebih banyak usaha, kita dapat menghasilkan banyak permukaan.
Dalam contoh berikut kita membuat tampilan bayangan dari bola yang terdistorsi. Koordinat bola yang biasa adalah

$$\gamma(t,s) = (\cos(t)\cos(s), \sin(t)\sin(s), \cos(s))$$

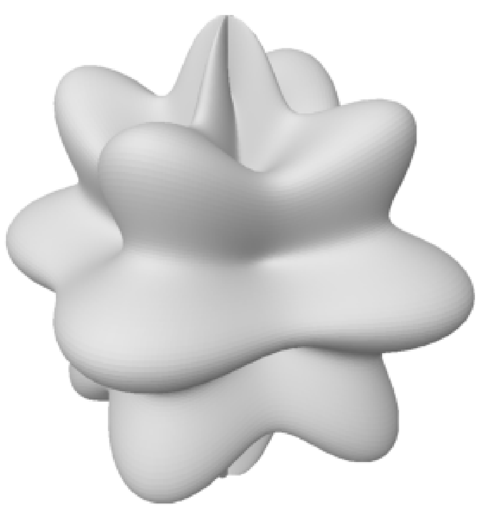
dengan

$$0 \leq t \leq 2\pi, \quad \frac{-\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}.$$

Kami mengurangi hal ini dengan sebuah faktor

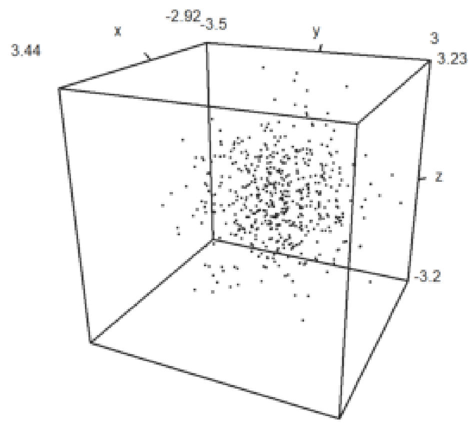
$$d(t,s) = \frac{\cos(4t) + \cos(8s)}{4}.$$

```
>t=linspace(0,2pi,320); s=linspace(-pi/2,pi/2,160)'; ...
>d=1+0.2*(cos(4*t)+cos(8*s)); ...
>plot3d(cos(t)*cos(s)*d,sin(t)*cos(s)*d,sin(s)*d,hue=1, ...
>  light=[1,0,1],frame=0,zoom=5):
```



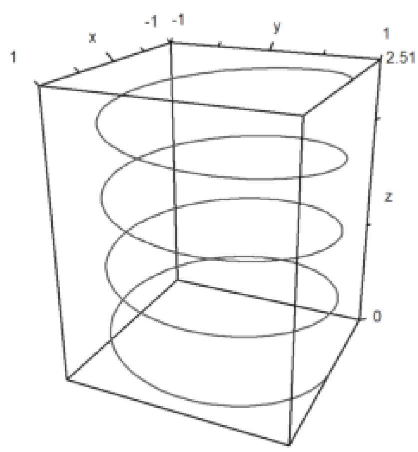
Tentu saja, point cloud juga dimungkinkan. Untuk memplot data titik dalam ruang, kita memerlukan tiga vektor untuk koordinat titik-titik tersebut.
Gayanya sama seperti di plot2d dengan points=true;

```
>n=500;  ...
>  plot3d(normal(1,n),normal(1,n),normal(1,n),points=true,style="."):
```

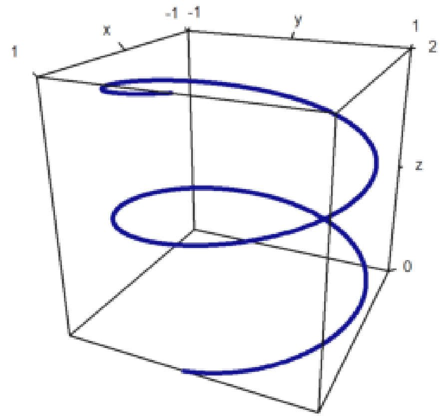


Dimungkinkan juga untuk memplot kurva dalam 3D. Dalam hal ini, lebih mudah untuk menghitung terlebih dahulu titik-titik kurva. Untuk kurva pada bidang kita menggunakan barisan koordinat dan parameter wire=true.

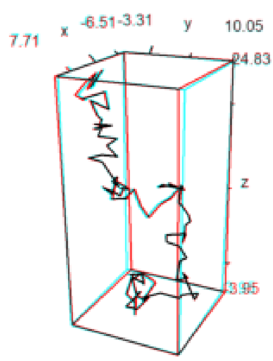
```
>t=linspace(0,8pi,500); ...
>plot3d(sin(t),cos(t),t/10,>wire,zoom=3):
```



```
>t=linspace(0,4pi,1000); plot3d(cos(t),sin(t),t/2pi,>wire, ...
>linewidth=3,wirecolor=blue):
```

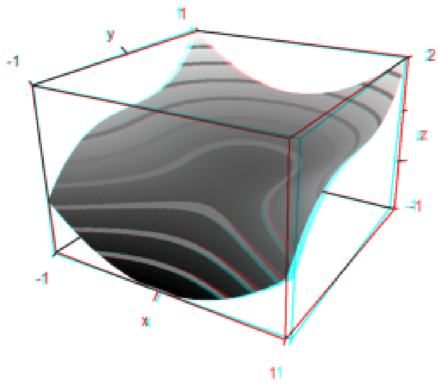



```
>X=cumsum(normal(3,100)); ...
> plot3d(X[1],X[2],X[3],>anaglyph,>wire):
```



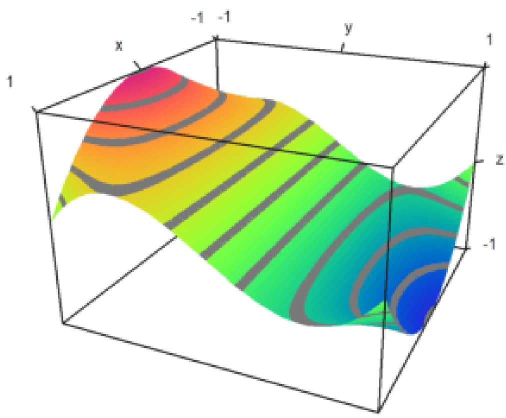
EMT juga dapat membuat plot dalam mode anaglyph. Untuk melihat plot seperti itu, Anda memerlukan kacamata berwarna merah/cyan.

```
> plot3d("x^2+y^3",>anaglyph,>contour,angle=30°):
```



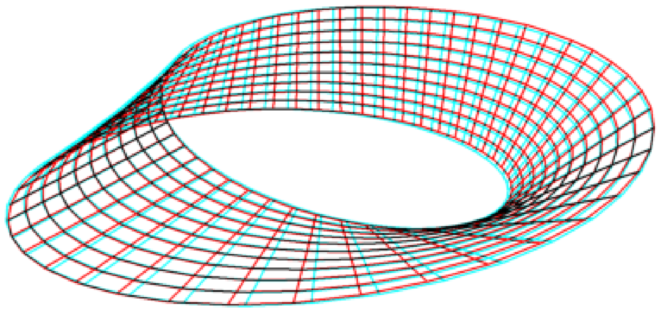
Seringkali skema warna spektral digunakan untuk plot. Ini menekankan ketinggian fungsinya.

```
>plot3d("x^2*y^3-y",>spectral,>contour,zoom=3.2):
```



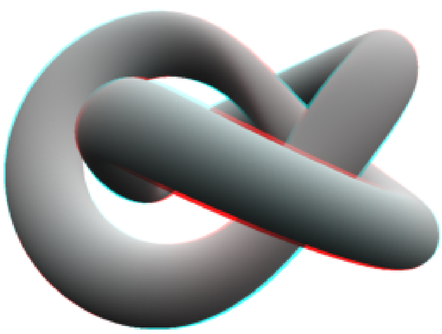
Euler juga dapat memplot permukaan yang diparameterisasi, jika parameternya adalah nilai x, y, dan z dari gambar kotak persegi panjang di ruang tersebut.
Untuk demo berikut, kami menyiapkan parameter u- dan v-, dan menghasilkan koordinat ruang dari parameter tersebut.

```
>u=linspace(-1,1,10); v=linspace(0,2*pi,50)'; ...
>X=(3+u*cos(v/2))*cos(v); Y=(3+u*cos(v/2))*sin(v); Z=u*sin(v/2); ...
>plot3d(X,Y,Z,>anaglyph,<frame,>wire,scale=2.3):
```



Berikut adalah contoh yang lebih rumit, yang megah dengan kacamata merah/cyan.

```
>u:=linspace(-pi,pi,160); v:=linspace(-pi,pi,400)';  ...
>x:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*cos(2*v); ...
>y:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*sin(2*v); ...
> z=sin(u)+2*cos(3*v); ...
>plot3d(x,y,z,frame=0,scale=1.5,hue=1,light=[1,0,-1],zoom=2.8,>anaglyph):
```

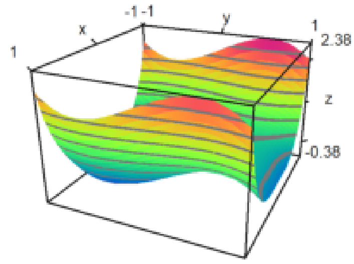


Contoh Soal dan Penyelesaian:
1. Buatlah grafik dari fungsi berikut ini

$$f(x,y) = 2x^4 - y^3 + y$$

Penyelesaian:

```
>plot3d("2*x^4-y^3+y",>spectral,>contour,zoom=2):
```

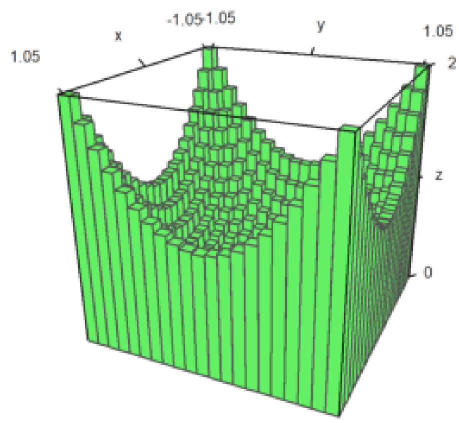


Plot Statistik

Plot batang juga dimungkinkan. Untuk ini, kita harus menyediakan
- x: vektor baris dengan n+1 elemen
- y: vektor kolom dengan n+1 elemen
- z: matriks nilai nxn.

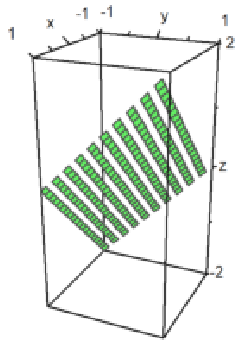
z bisa lebih besar, tetapi hanya nilai nxn yang akan digunakan.
Dalam contoh ini, pertama-tama kita menghitung nilainya. Kemudian kita sesuaikan x dan y, sehingga vektor-vektornya berpusat pada nilai yang digunakan.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x^2+y^2; ...
>xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y_1.1)-0.05; ...
>plot3d(xa,ya,z,bar=true):
```



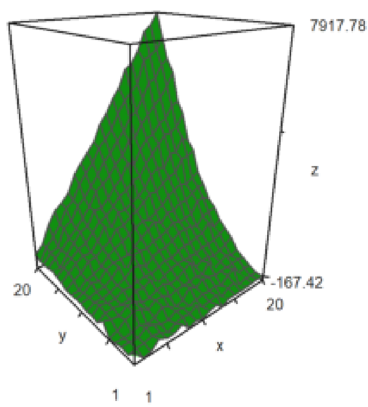
Dimungkinkan untuk membagi plot suatu permukaan menjadi dua bagian atau lebih.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x+y; d=zeros(size(x)); ...
>plot3d(x,y,z,disconnect=2:2:20):
```

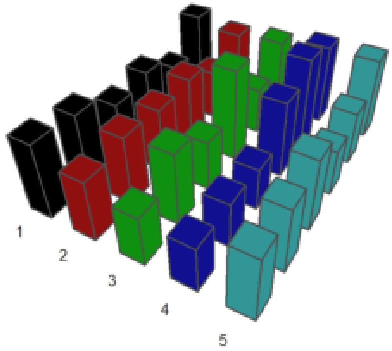


Jika memuat atau menghasilkan matriks data M dari file dan perlu memplotnya dalam 3D, Anda dapat menskalakan matriks ke [-1,1] dengan skala(M), atau menskalakan matriks dengan >zscale. Hal ini dapat dikombinasikan dengan faktor penskalaan individual yang diterapkan sebagai tambahan.

```
>i=1:20; j=i'; ...
>plot3d(i*j^2+100*normal(20,20),>zscale,scale=[1,1,1.5],angle=-40°,zoom=1.8
```




```
>Z=intrandom(5,100,6); v=zeros(5,6); ...
>loop 1 to 5; v[#]=getmultiplicities(1:6,Z[#]); end; ...
>columnsplot3d(v',scols=1:5,ccols=[1:5]):
```

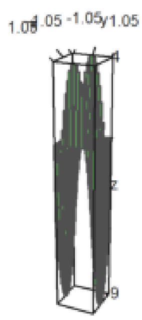


Contoh Soal dan Penyelesaian:
1. Buatlah grafik dari fungsi berikut ini

$$z = 4x^2 - 9y^2$$

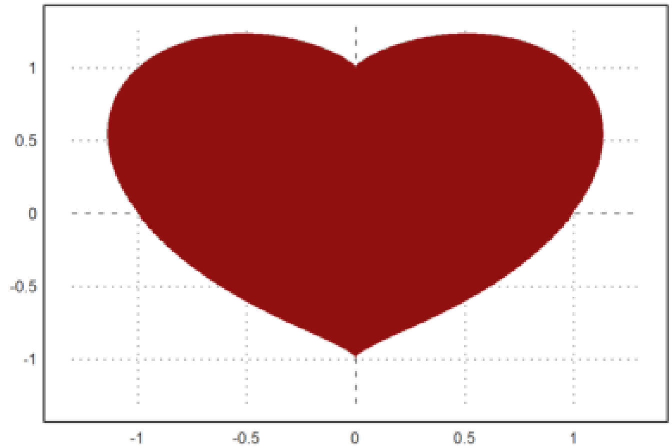
Penyelesaian:

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=4*x^2-9*y^2; ...
>xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y_1.1)-0.05; ...
>plot3d(xa,ya,z,bar=true):
```



Permukaan Benda Putar

```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
>style="#",color=red,<outline, ...
>level=[-2;0],n=100):
```




```
>ekspresi &= (x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3; $ekspresi
```

$$\left(y^2+x^2-1\right)^3-x^2\,y^3$$

Kami ingin memutar kurva hati di sekitar sumbu y. Inilah ungkapan yang mendefinisikan hati:

$$f(x,y)=(x^2+y^2-1)^3-x^2.y^3.$$

Selanjutnya kita atur

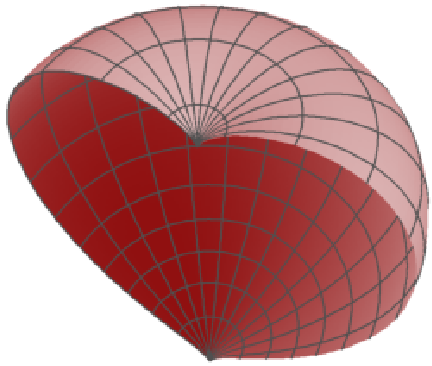
$$x=r.cos(a),\quad y=r.sin(a).$$

```
>function fr(r,a) &= ekspresi with [x=r*cos(a),y=r*sin(a)] | trigreduce; $f
```

$$\left(r^2-1\right)^3+\frac{\left(\sin\left(5\,a\right)-\sin\left(3\,a\right)-2\,\sin a\right)\,r^5}{16}$$

Hal ini memungkinkan untuk mendefinisikan fungsi numerik, yang menyelesaikan r, jika a diberikan. Dengan fungsi tersebut kita dapat memplot jantung yang diputar sebagai permukaan parametrik.

```
>function map f(a) := bisect("fr",0,2;a); ...
>t=linspace(-pi/2,pi/2,100); r=f(t);  ...
>s=linspace(pi,2pi,100)'; ...
>plot3d(r*cos(t)*sin(s),r*cos(t)*cos(s),r*sin(t), ...
>>hue,<frame,color=red,zoom=4,amb=0,max=0.7,grid=12,height=50°):
```

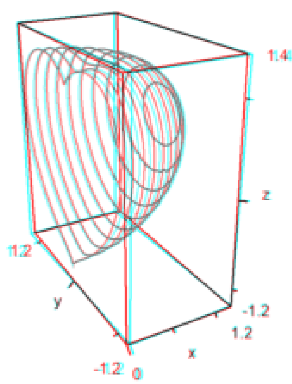


Berikut ini adalah plot 3D dari gambar di atas yang diputar mengelilingi sumbu z. Kami mendefinisikan fungsi yang mendeskripsikan objek.

```
>function f(x,y,z) ...
```

```
  r=x^2+y^2;
  return (r+z^2-1)^3-r*z^3;
   endfunction
```

```
>plot3d("f(x,y,z)", ...
>xmin=0,xmax=1.2,ymin=-1.2,ymax=1.2,zmin=-1.2,zmax=1.4, ...
>implicit=1,angle=-30°,zoom=2.5,n=[10,100,60],>anaglyph):
```



Contoh Soal dan Penyelesaian:
1. Buatlah grafik dari fungsi berikut ini

$$f(x, y) = (2x^2 + y^2 - 2)^4 - x^2y^3$$

Penyelesaian:

```
>plot2d("(2x^2+y^2-2)^4-x^2*y^3",r=3.3, ...
>style="#",color=orange,<outline, ...
>level=[-6;0],n=68):
```

Plot 3D Khusus

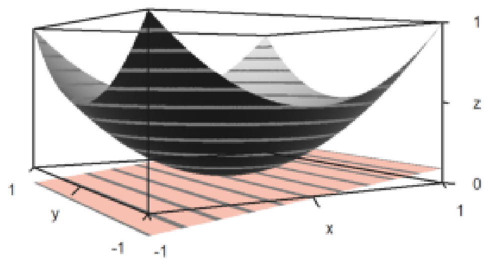
Fungsi plot3d bagus untuk dimiliki, tetapi tidak memenuhi semua kebutuhan. Selain rutinitas yang lebih mendasar, dimungkinkan untuk mendapatkan plot berbingkai dari objek apa pun yang Anda suka.
Meskipun Euler bukan program 3D, ia dapat menggabungkan beberapa objek dasar. Kami mencoba memvisualisasikan paraboloid dan garis singgungnya.

```
>function myplot ...
```

```
    y=-1:0.01:1; x=(-1:0.01:1)';
    plot3d(x,y,0.2*(x-0.1)/2,<scale,<frame,>hue, ..
      hues=0.5,>contour,color=orange);
    h=holding(1);
    plot3d(x,y,(x^2+y^2)/2,<scale,<frame,>contour,>hue);
    holding(h);
  endfunction
```

Sekarang framedplot() menyediakan bingkai, dan mengatur tampilan.

```
>framedplot("myplot",[-1,1,-1,1,0,1],height=0,angle=-30°, ...
>  center=[0,0,-0.7],zoom=3):
```

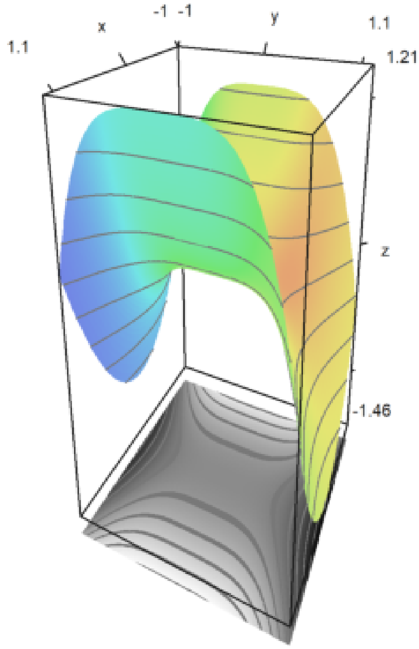


Dengan cara yang sama, Anda dapat memplot bidang kontur secara manual. Perhatikan bahwa plot3d() menyetel jendela ke fullwindow(), secara default, tetapi plotcontourplane() berasumsi demikian.

```
>x=-1:0.02:1.1; y=x'; z=x^2-y^4;
>function myplot (x,y,z) ...
```

```
    zoom(2);
    wi=fullwindow();
    plotcontourplane(x,y,z,level="auto",<scale);
    plot3d(x,y,z,>hue,<scale,>add,color=white,level="thin");
    window(wi);
    reset();
  endfunction
```

```
>myplot(x,y,z):
```



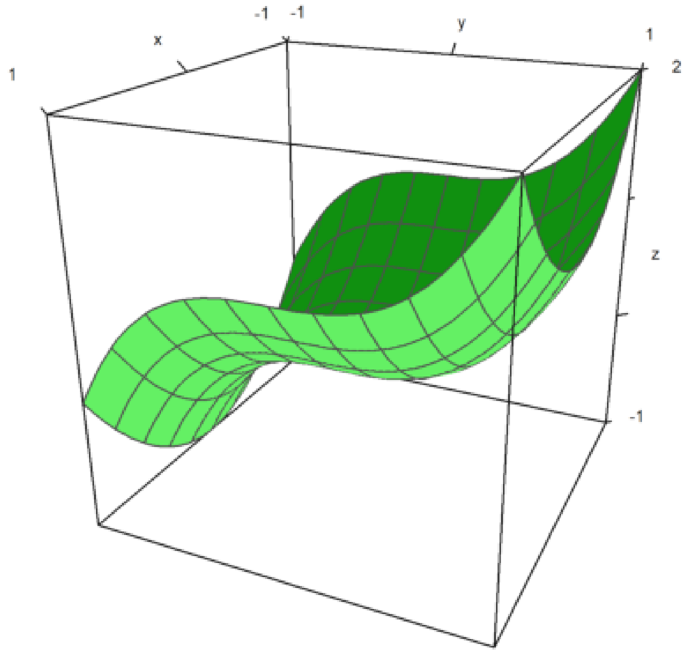
Animasi

Euler dapat menggunakan frame untuk melakukan pra-komputasi animasi.

Salah satu fungsi yang memanfaatkan teknik ini adalah memutar. Itu dapat mengubah sudut pandang dan menggambar ulang plot 3D. Fungsi ini memanggil addpage() untuk setiap plot baru. Akhirnya ia menganimasikan plotnya.

Silakan pelajari sumber rotasi untuk melihat lebih detail.

```
>function testplot () := plot3d("x^2+y^3"); ...
>rotate("testplot"); testplot():
```

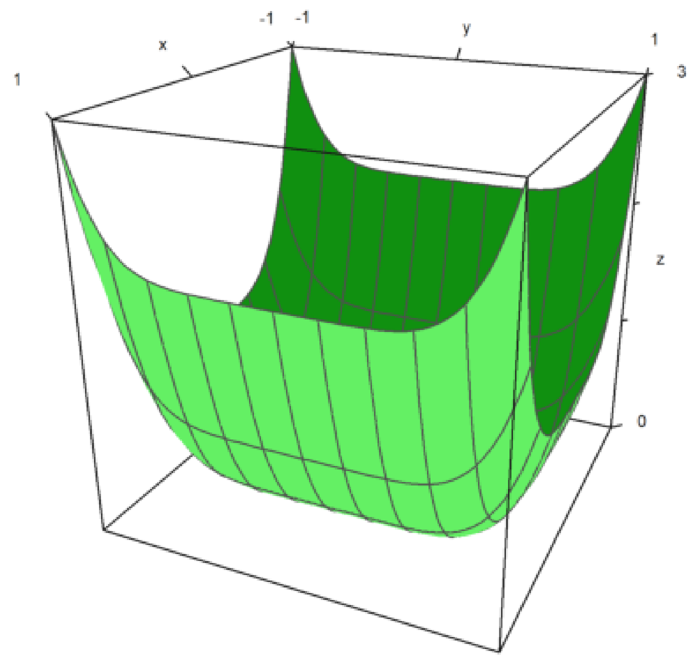


Contoh Soal dan Penyelesaian:
1. Buatlah grafik dari fungsi berikut

$$f(x, y) = 2x^4 + y^6$$

Penyelesaian:

```
>function testplot () := plot3d("2x^4+y^6"); ...
>rotate("testplot"); testplot():
```



Menggambar Povray

Dengan bantuan file Euler povray.e, Euler dapat menghasilkan file Povray. Hasilnya sangat bagus untuk dilihat.

Anda perlu menginstal Povray (32bit atau 64bit) dari http://www.povray.org/, dan meletakkan sub-direktori "bin" Povray ke jalur lingkungan, atau mengatur variabel "defaultpovray" dengan jalur lengkap yang mengarah ke "pvengine.exe".

Antarmuka Povray Euler menghasilkan file Povray di direktori home pengguna, dan memanggil Povray untuk menguraikan file-file ini. Nama file default adalah current.pov, dan direktori default adalah eulerhome(), biasanya c:\Users\Username\Euler. Povray menghasilkan file PNG, yang dapat dimuat oleh Euler ke dalam notebook. Untuk membersihkan file-file ini, gunakan povclear().

Fungsi pov3d memiliki semangat yang sama dengan plot3d. Ini dapat menghasilkan grafik fungsi f(x,y), atau permukaan dengan koordinat X,Y,Z dalam matriks, termasuk garis level opsional. Fungsi ini memulai raytracer secara otomatis, dan memuat adegan ke dalam notebook Euler.

Selain pov3d(), ada banyak fungsi yang menghasilkan objek Povray. Fungsi-fungsi ini mengembalikan string, yang berisi kode Povray untuk objek. Untuk menggunakan fungsi ini, mulai file Povray dengan povstart(). Kemudian gunakan writeln(...) untuk menulis objek ke file adegan. Terakhir, akhiri file dengan povend(). Secara default, raytracer akan dimulai, dan PNG akan dimasukkan ke dalam notebook Euler.

Fungsi objek memiliki parameter yang disebut "tampilan", yang memerlukan string dengan kode Povray untuk tekstur dan penyelesaian objek. Fungsi povlook() dapat digunakan untuk menghasilkan string ini. Ini memiliki parameter untuk warna, transparansi, Phong Shading dll.

Perhatikan bahwa alam semesta Povray memiliki sistem koordinat lain. Antarmuka ini menerjemahkan semua koordinat ke sistem Povray. Jadi Anda dapat terus berpikir dalam sistem koordinat Euler dengan z menunjuk vertikal ke atas, dan sumbu x,y,z di tangan kanan. Fungsi pov3d memiliki semangat yang sama dengan plot3d. Ini dapat menghasilkan grafik fungsi f(x,y), atau permukaan dengan koordinat X,Y,Z dalam matriks, termasuk garis level opsional. Fungsi ini memulai raytracer secara otomatis, dan memuat adegan ke dalam notebook Euler.
Anda perlu memuat file povray

```
>load povray;
```

Pastikan, direktori Povray bin ada di jalurnya. Jika tidak, edit variabel berikut sehingga berisi jalur ke povray yang dapat dieksekusi.

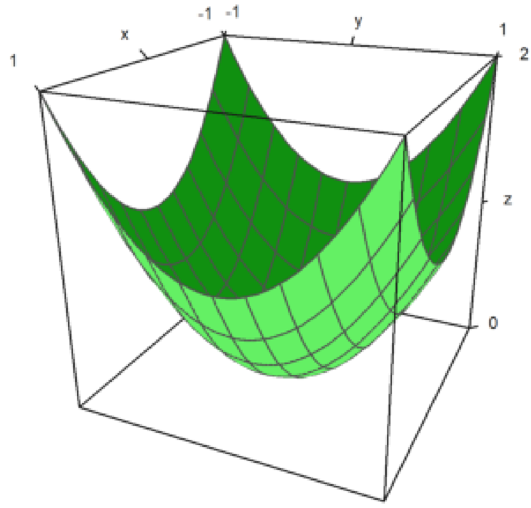
```
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

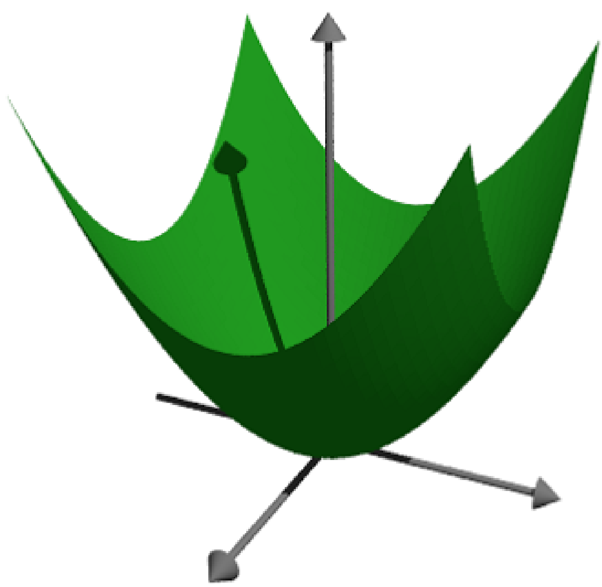
Untuk kesan pertama, kami memplot fungsi sederhana. Perintah berikut menghasilkan file povray di direktori pengguna Anda, dan menjalankan Povray untuk penelusuran sinar file ini.

Jika Anda memulai perintah berikut, GUI Povray akan terbuka, menjalankan file, dan menutup secara otomatis. Karena alasan keamanan, Anda akan ditanya apakah Anda ingin mengizinkan file exe dijalankan. Anda dapat menekan batal untuk menghentikan pertanyaan lebih lanjut. Anda mungkin harus menekan OK di jendela Povray untuk mengonfirmasi dialog pengaktifan Povray.

```
>plot3d("x^2+y^2",zoom=2):
```

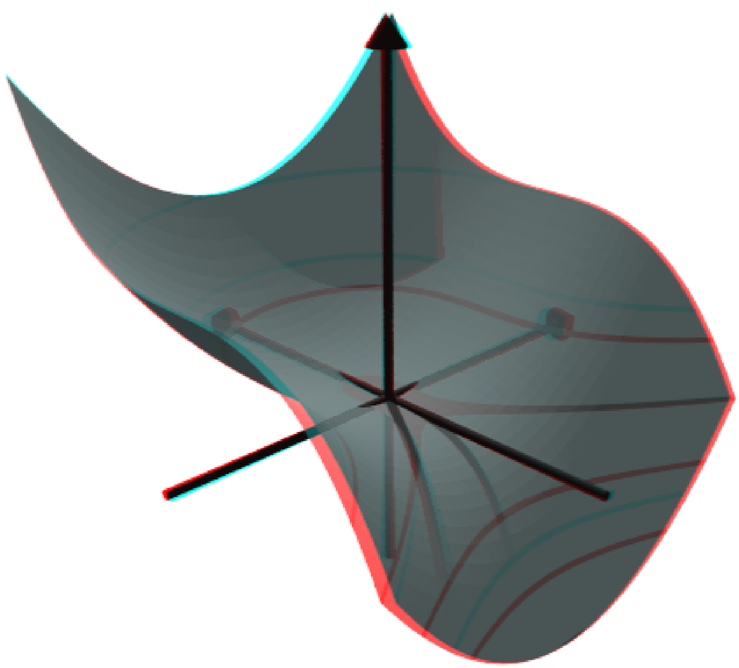



```
>pov3d("x^2+y^2",zoom=3);
```



Kita dapat membuat fungsinya transparan dan menambahkan penyelesaian lainnya. Kita juga dapat menambahkan garis level ke plot fungsi.

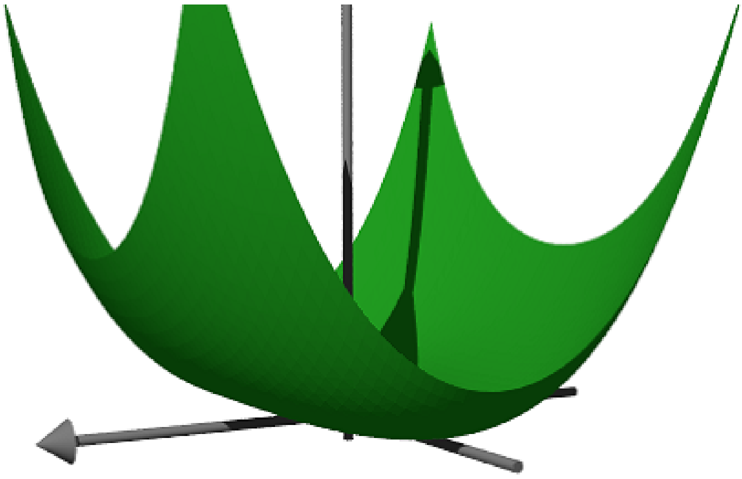
```
>pov3d("x^2+y^3",axiscolor=red,angle=-45°,>anaglyph, ...
>  look=povlook(cyan,0.2),level=-1:0.5:1,zoom=3.8);
```



Terkadang perlu untuk mencegah penskalaan fungsi, dan menskalakan fungsi secara manual.

Kita memplot himpunan titik pada bidang kompleks, dimana hasil kali jarak ke 1 dan -1 sama dengan 1.

```
>pov3d("((x-1)^2+y^2)*((x+1)^2+y^2)/40",r=2, ...
>  angle=-120°,level=1/40,dlevel=0.005,light=[-1,1,1],height=10°,n=50, ...
>  <fscale,zoom=3.8);
```

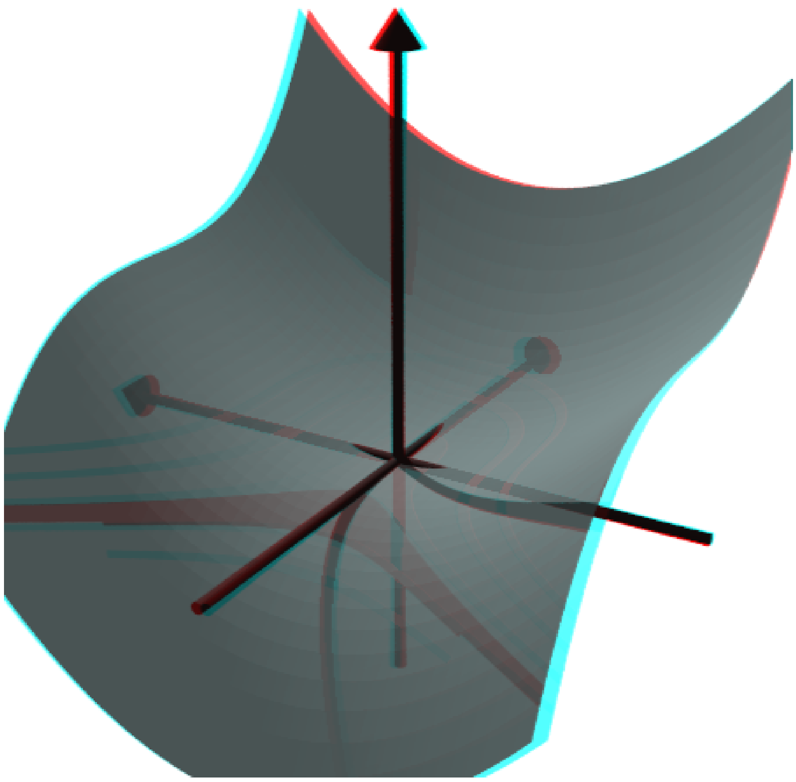


Contoh Soal dan Penyelesaian:
1. Buatlah grafik pov3d dari fungsi berikut ini

$$f(x,y) = 5x^3 + 4y^2$$

Penyelesaian:

```
>pov3d("5x^3+4y^2",axiscolor=red,angle=-60°,>anaglyph, ...
>  look=povlook(cyan,0.2),level=-1:0.5:1,zoom=4.6);
```

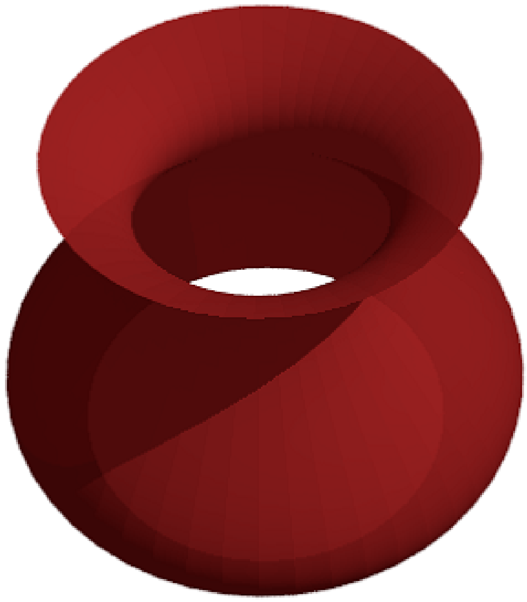


Merencanakan dengan Koordinat

Daripada menggunakan fungsi, kita bisa memplotnya dengan koordinat. Seperti di plot3d, kita memerlukan tiga matriks untuk mendefinisikan objek.

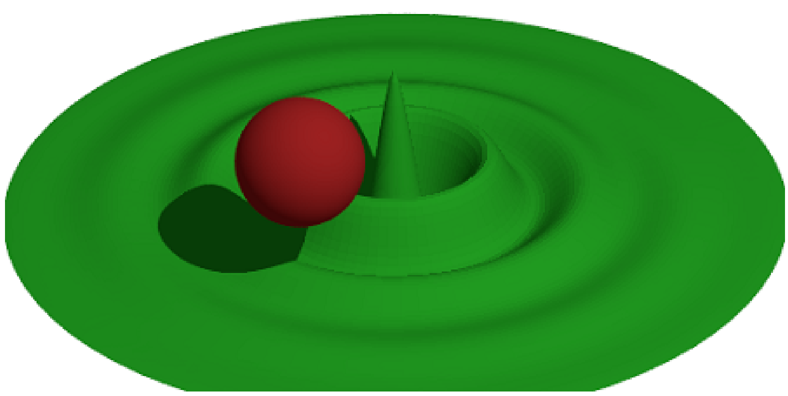
Dalam contoh ini kita memutar suatu fungsi di sekitar sumbu z.

```
>function f(x) := x^3-x+1; ...
>x=-1:0.01:1; t=linspace(0,2pi,50)'; ...
>Z=x; X=cos(t)*f(x); Y=sin(t)*f(x); ...
>pov3d(X,Y,Z,angle=40°,look=povlook(red,0.1),height=50°,axis=0,zoom=4,light
```



Pada contoh berikut, kita memplot gelombang teredam. Kami menghasilkan gelombang dengan bahasa matriks Euler.
Kami juga menunjukkan, bagaimana objek tambahan dapat ditambahkan ke adegan pov3d. Untuk pembuatan objek, lihat contoh berikut. Perhatikan bahwa plot3d menskalakan plot, sehingga cocok dengan kubus satuan.

```
>r=linspace(0,1,80); phi=linspace(0,2pi,80)'; ...
>x=r*cos(phi); y=r*sin(phi); z=exp(-5*r)*cos(8*pi*r)/3;  ...
>pov3d(x,y,z,zoom=6,axis=0,height=30°,add=povsphere([0.5,0,0.25],0.15,povlo
>  w=500,h=300);
```



Dengan metode peneduh canggih Povray, sangat sedikit titik yang dapat menghasilkan permukaan yang sangat halus. Hanya pada batas-batas dan dalam bayangan, triknya mungkin terlihat jelas.

Untuk ini, kita perlu menjumlahkan vektor normal di setiap titik matriks.

```
>Z &= x^2*y^3
```

$$x^2 y^3$$

Persamaan permukaannya adalah [x,y,Z]. Kami menghitung dua turunan dari x dan y dan mengambil perkalian silangnya sebagai normal.

```
>dx &= diff([x,y,Z],x); dy &= diff([x,y,Z],y);
```

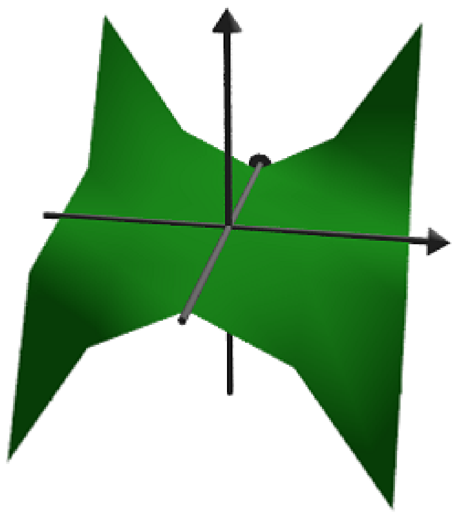
Kami mendefinisikan normal sebagai produk silang dari turunan ini, dan mendefinisikan fungsi koordinat

```
>N &= crossproduct(dx,dy); NX &= N[1]; NY &= N[2]; NZ &= N[3]; N,
```

$$[- 2 x y^3 , - 3 x^2 y^2 , 1]$$

Kami hanya menggunakan 25 poin.

```
>x=-1:0.5:1; y=x';
>pov3d(x,y,Z(x,y),angle=10°, ...
>  xv=NX(x,y),yv=NY(x,y),zv=NZ(x,y),<shadow);
```



Berikut ini adalah simpul Trefoil yang dilakukan oleh A. Busser di Povray. Ada versi yang lebih baik dalam contoh ini.
See: Examples\Trefoil Knot | Trefoil Knot
Untuk tampilan yang bagus dengan poin yang tidak terlalu banyak, kami menambahkan vektor normal di sini. Kami menggunakan Maxima untuk menghitung normalnya bagi kami. Pertama, tiga fungsi koordinat sebagai ekspresi simbolik.

```
>X &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*cos(2*y); ...
>Y &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*sin(2*y); ...
>Z &= sin(x)+2*cos(3*y);
```

Kemudian kedua vektor turunan ke x dan y.

```
>dx &= diff([X,Y,Z],x); dy &= diff([X,Y,Z],y);
```

Sekarang normalnya, yaitu perkalian silang kedua turunannya.

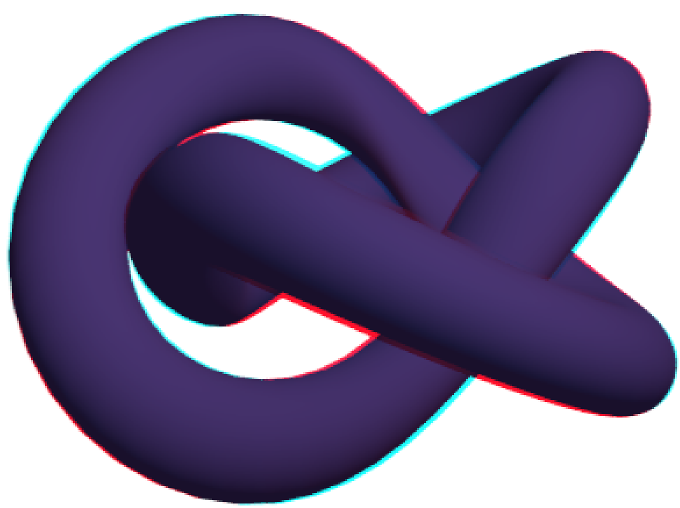
```
>dn &= crossproduct(dx,dy);
```

Kami sekarang mengevaluasi semua ini secara numerik.

```
>x:=linspace(-%pi,%pi,40); y:=linspace(-%pi,%pi,100)';
```

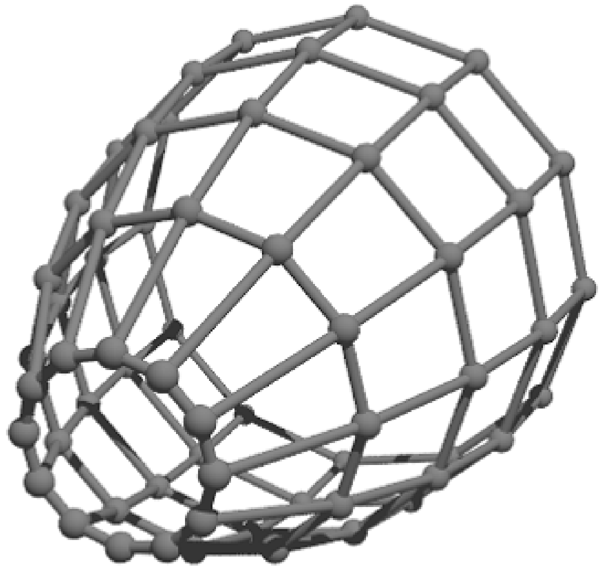
Vektor normal adalah evaluasi ekspresi simbolik dn[i] untuk i=1,2,3. Sintaksnya adalah &"ekspresi"(parameter). Ini adalah alternatif dari metode pada contoh sebelumnya, di mana kita mendefinisikan ekspresi simbolik NX, NY, NZ terlebih dahulu.

```
>pov3d(X(x,y),Y(x,y),Z(x,y),>anaglyph,axis=0,zoom=5,w=450,h=350, ...
>  <shadow,look=povlook(blue), ...
>  xv=&"dn[1]"(x,y), yv=&"dn[2]"(x,y), zv=&"dn[3]"(x,y));
```



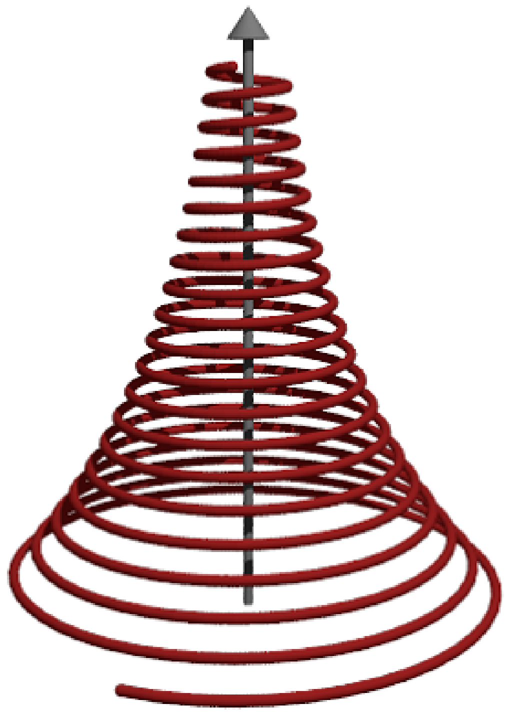
Kami juga dapat menghasilkan grid dalam 3D.

```
>povstart(zoom=4); ...
>x=-1:0.5:1; r=1-(x+1)^2/6; ...
>t=(0°:30°:360°)'; y=r*cos(t); z=r*sin(t); ...
>writeln(povgrid(x,y,z,d=0.02,dballs=0.05)); ...
>povend();
```



Dengan povgrid(), kurva dimungkinkan.

```
>povstart(center=[0,0,1],zoom=3.6); ...
>t=linspace(0,2,1000); r=exp(-t); ...
>x=cos(2*pi*10*t)*r; y=sin(2*pi*10*t)*r; z=t; ...
>writeln(povgrid(x,y,z,povlook(red))); ...
>writeAxis(0,2,axis=3); ...
>povend();
```



Objek Povray

Di atas, kami menggunakan pov3d untuk memplot permukaan. Antarmuka povray di Euler juga dapat menghasilkan objek Povray. Objek ini disimpan sebagai string di Euler, dan perlu ditulis ke file Povray.
Kami memulai output dengan povstart().

```
>povstart(zoom=4);
```

Pertama kita mendefinisikan tiga silinder, dan menyimpannya dalam string di Euler.
Fungsi povx() dll. hanya mengembalikan vektor [1,0,0], yang dapat digunakan sebagai gantinya.

```
>c1=povcylinder(-povx,povx,1,povlook(red)); ...
>c2=povcylinder(-povy,povy,1,povlook(yellow)); ...
>c3=povcylinder(-povz,povz,1,povlook(blue)); ...
```

String tersebut berisi kode Povray, yang tidak perlu kita pahami pada saat itu.
Fungsi povx() dll. hanya mengembalikan vektor [1,0,0], yang dapat digunakan sebagai gantinya.

```
>c2
```

```
 cylinder { <0,0,-1>, <0,0,1>, 1
  texture { pigment { color rgb <0.941176,0.941176,0.392157> }  }
  finish { ambient 0.2 }
  }
```

As you see, we added texture to the objects in three different colors.

Hal ini dilakukan oleh povlook(), yang mengembalikan string dengan kode Povray yang relevan. Kita dapat menggunakan warna default Euler, atau menentukan warna kita sendiri. Kita juga dapat menambahkan transparansi, atau mengubah cahaya sekitar.

```
>povlook(rgb(0.1,0.2,0.3),0.1,0.5)
```

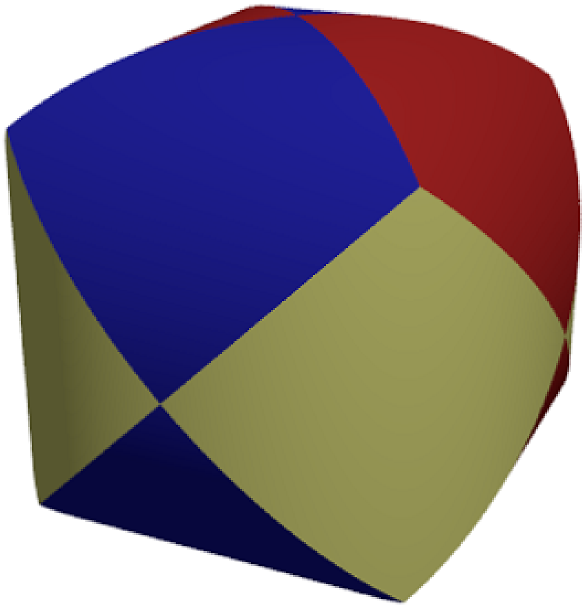
```
  texture { pigment { color rgbf <0.101961,0.2,0.301961,0.1> }  }
  finish { ambient 0.5 }
```

Sekarang kita mendefinisikan objek persimpangan, dan menulis hasilnya ke file.
i dilakukan oleh povlook(), yang mengembalikan string dengan kode Povray yang relevan. Kita dapat menggunakan warna default Euler, atau menentukan warna kita sendiri. Kita juga dapat menambahkan transparansi, atau mengubah cahaya sekitar.

```
>writeln(povintersection([c1,c2,c3]));
```

Persimpangan tiga silinder sulit untuk divisualisasikan jika Anda belum pernah melihatnya sebelumnya.

```
>povend;
```



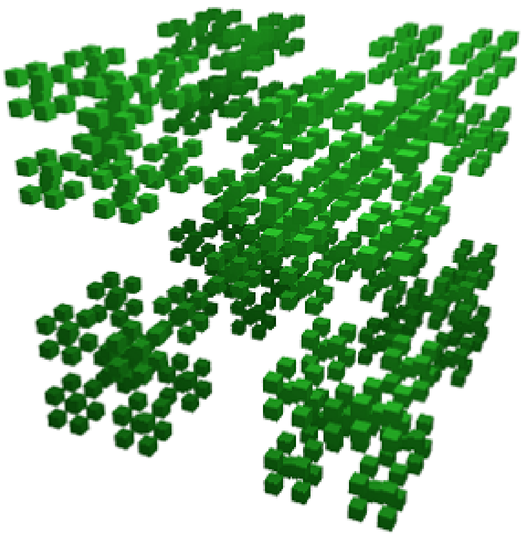
Fungsi berikut menghasilkan fraktal secara rekursif.

Fungsi pertama menunjukkan bagaimana Euler menangani objek Povray sederhana. Fungsi povbox() mengembalikan string, yang berisi koordinat kotak, tekstur, dan hasil akhir.

```
>function onebox(x,y,z,d) := povbox([x,y,z],[x+d,y+d,z+d],povlook());
>function fractal (x,y,z,h,n) ...
```

```
   if n==1 then writeln(onebox(x,y,z,h));
   else
     h=h/3;
     fractal(x,y,z,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y,z,h,n-1);
     fractal(x,y+2*h,z,h,n-1);
     fractal(x,y,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y+2*h,z,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x,y+2*h,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y+2*h,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x+h,y+h,z+h,h,n-1);
   endif;
  endfunction
```

```
>povstart(fade=10,<shadow);
>fractal(-1,-1,-1,2,4);
>povend();
```



Perbedaan memungkinkan pemisahan satu objek dari objek lainnya. Seperti persimpangan, ada bagian dari objek CSG di Povray.

```
>povstart(light=[5,-5,5],fade=10);
```

Untuk demonstrasi ini, kami mendefinisikan objek di Povray, alih-alih menggunakan string di Euler. Definisi segera ditulis ke file.
Koordinat kotak -1 berarti [-1,-1,-1].

```
>povdefine("mycube",povbox(-1,1));
```

Kita bisa menggunakan objek ini di povobject(), yang mengembalikan string seperti biasa.

```
>c1=povobject("mycube",povlook(red));
```

Kami membuat kubus kedua, dan memutar serta menskalakannya sedikit.

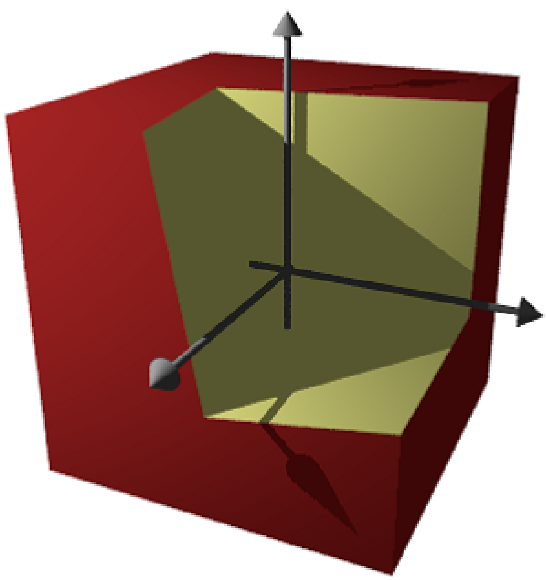
```
>c2=povobject("mycube",povlook(yellow),translate=[1,1,1], ...
>  rotate=xrotate(10°)+yrotate(10°), scale=1.2);
```

Lalu kita ambil selisih kedua benda tersebut.

```
>writeln(povdifference(c1,c2));
```

Sekarang tambahkan tiga sumbu.

```
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=1); ...
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=2); ...
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=4); ...
>povend();
```



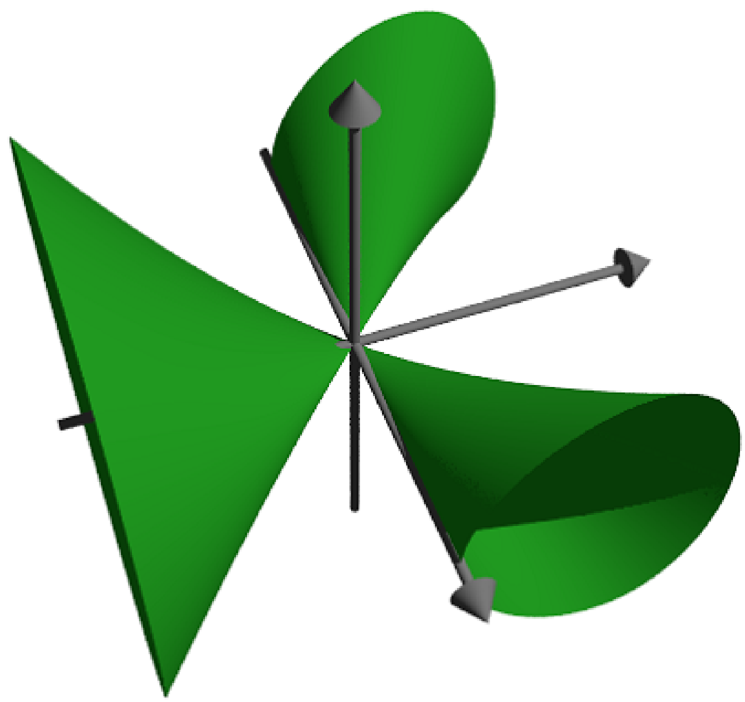
Fungsi Implisit

Povray dapat memplot himpunan di mana f(x,y,z)=0, seperti parameter implisit di plot3d. Namun hasilnya terlihat jauh lebih baik.
Sintaks untuk fungsinya sedikit berbeda. Anda tidak dapat menggunakan keluaran ekspresi Maxima atau Euler.

```
>povstart(angle=70°,height=50°,zoom=4);
```

Buat permukaan implisit. Perhatikan sintaksis yang berbeda dalam ekspresi.

```
>writeln(povsurface("pow(x,2)*y-pow(y,3)-pow(z,2)",povlook(green))); ...
>writeAxes(); ...
>povend();
```



Objek Jaring

Dalam contoh ini, kami menunjukkan cara membuat objek mesh, dan menggambarnya dengan informasi tambahan.
Kita ingin memaksimalkan xy pada kondisi x+y=1 dan mendemonstrasikan sentuhan tangensial garis datar.

```
>povstart(angle=-10°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=7);
```

Kita tidak dapat menyimpan objek dalam string seperti sebelumnya, karena terlalu besar. Jadi kita mendefinisikan objek dalam file Povray menggunakan declare. Fungsi povtriangle() melakukan ini secara otomatis. Ia dapat menerima vektor normal seperti pov3d().
Berikut ini definisi objek mesh, dan segera menuliskannya ke dalam file.

```
>X=0:0.02:1; y=x'; z=x*y; vx=-y; vy=-x; vz=1;
>mesh=povtriangles(x,y,z,"",vx,vy,vz);
```

Sekarang kita mendefinisikan dua cakram, yang akan berpotongan dengan permukaan.

```
>cl=povdisc([0.5,0.5,0],[1,1,0],2); ...
>ll=povdisc([0,0,1/4],[0,0,1],2);
```

Tulis permukaannya dikurangi kedua cakram.

```
>writeln(povdifference(mesh,povunion([cl,ll]),povlook(green)));
```

Tuliskan kedua perpotongan tersebut.

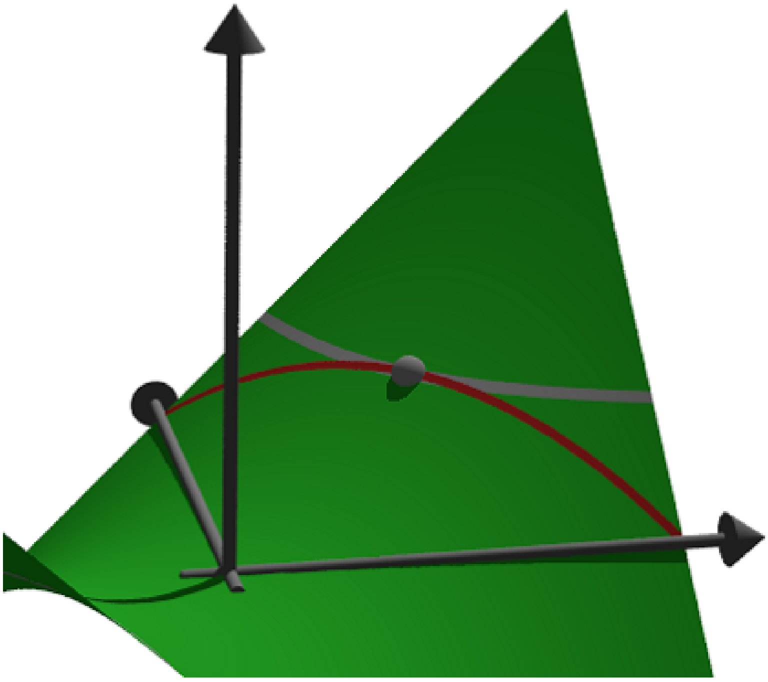
```
>writeln(povintersection([mesh,cl],povlook(red))); ...
>writeln(povintersection([mesh,ll],povlook(gray)));
```

Tulis poin maksimal.

```
>writeln(povpoint([1/2,1/2,1/4],povlook(gray),size=2*defaultpointsize));
```

Tambahkan sumbu dan selesai.

```
>writeAxes(0,1,0,1,0,1,d=0.015); ...
>povend();
```



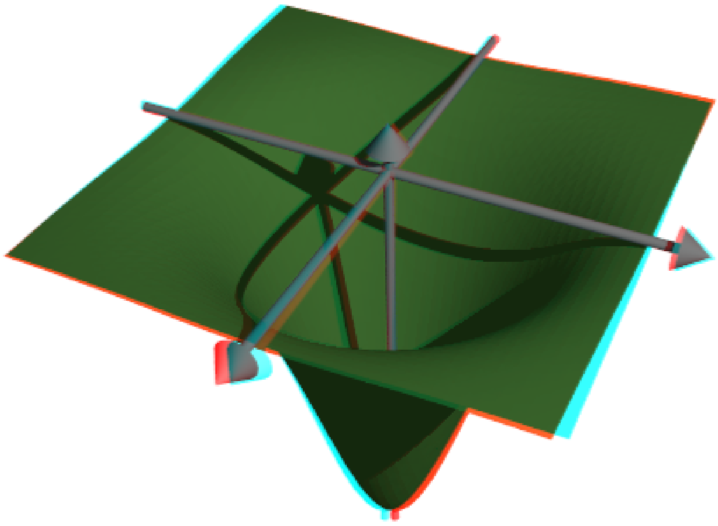
Anaglyphs di Povray

Untuk menghasilkan anaglyph untuk kacamata merah/cyan, Povray harus dijalankan dua kali dari posisi kamera berbeda. Ini menghasilkan dua file Povray dan dua file PNG, yang dimuat dengan fungsi loadanaglyph().

Tentu saja, Anda memerlukan kacamata berwarna merah/cyan untuk melihat contoh berikut dengan benar.

Fungsi pov3d() memiliki saklar sederhana untuk menghasilkan anaglyph.

```
>pov3d("-exp(-x^2-y^2)/2",r=2,height=45°,>anaglyph, ...
>  center=[0,0,0.5],zoom=3.5);
```



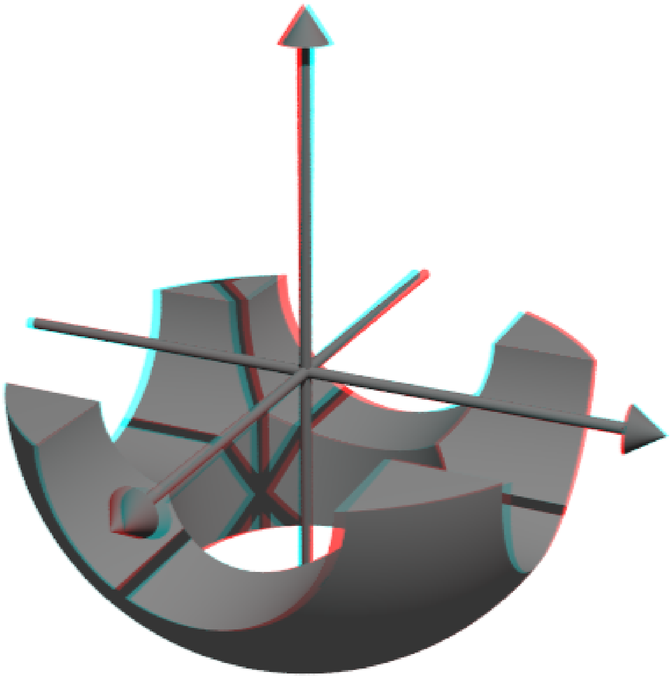
Jika Anda membuat adegan dengan objek, Anda perlu memasukkan pembuatan adegan ke dalam fungsi, dan menjalankannya dua kali dengan nilai berbeda untuk parameter anaglyph.

```
>function myscene ...
```

```
    s=povsphere(povc,1);
    cl=povcylinder(-povz,povz,0.5);
    clx=povobject(cl,rotate=xrotate(90°));
    cly=povobject(cl,rotate=yrotate(90°));
    c=povbox([-1,-1,0],1);
    un=povunion([cl,clx,cly,c]);
    obj=povdifference(s,un,povlook(red));
    writeln(obj);
    writeAxes();
  endfunction
```

Fungsi povanaglyph() melakukan semua ini. Parameternya seperti gabungan povstart() dan povend().

```
>povanaglyph("myscene",zoom=4.5);
```



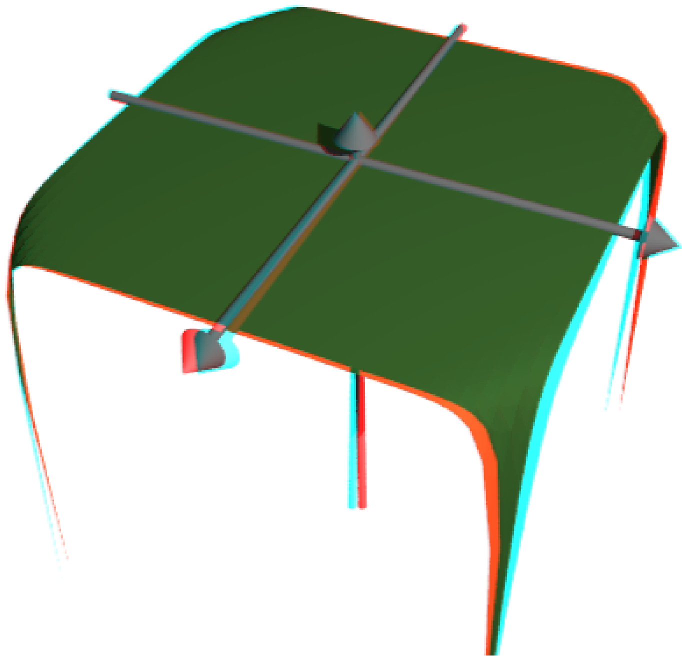
Contoh Soal dan Penyelesaian

1. Buatlah grafik dari fungsi berikut ini

$$f(x,y) = e^{2x^2+3y^2}$$

Penyelesaian:

```
>pov3d("-exp(2x^2+3y^2)/2",r=2,height=45°,>anaglyph, ...
>  center=[0,0,0.5],zoom=3.5);
```



Mendefinisikan Objek sendiri

Antarmuka povray Euler berisi banyak objek. Namun Anda tidak dibatasi pada hal ini. Anda dapat membuat objek sendiri, yang menggabungkan objek lain, atau merupakan objek yang benar-benar baru.
Kami mendemonstrasikan torus. Perintah Povray untuk ini adalah "torus". Jadi kami mengembalikan string dengan perintah ini dan parameternya. Perhatikan bahwa torus selalu berpusat pada titik asal.

```
>function povdonat (r1,r2,look="") ...
```

```
    return "torus {"+r1+","+r2+look+"}";
  endfunction
```

Ini torus pertama kami.

```
>t1=povdonat(0.8,0.2)
```

```
  torus {0.8,0.2}
```

Mari kita gunakan objek ini untuk membuat torus kedua, diterjemahkan dan diputar.

```
>t2=povobject(t1,rotate=xrotate(90°),translate=[0.8,0,0])
```

```
object { torus {0.8,0.2}
 rotate 90 *x
 translate <0.8,0,0>
 }
```

Sekarang kita tempatkan objek-objek tersebut ke dalam sebuah adegan. Untuk tampilannya kami menggunakan Phong Shading.

```
>povstart(center=[0.4,0,0],angle=0°,zoom=3.8,aspect=1.5); ...
>writeln(povobject(t1,povlook(green,phong=1))); ...
>writeln(povobject(t2,povlook(green,phong=1))); ...
```

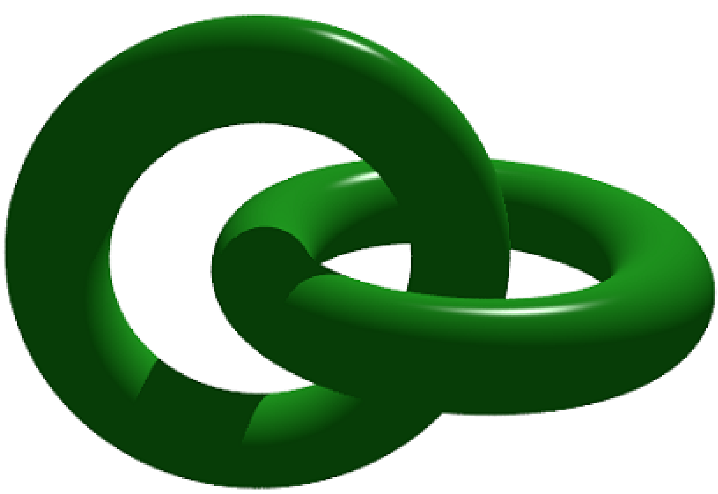
```
>povend();
```

memanggil program Povray. Namun, jika terjadi kesalahan, kesalahan tersebut tidak ditampilkan. Oleh karena itu Anda harus menggunakan

```
>povend(<exit);
```

jika ada yang tidak berhasil. Ini akan membiarkan jendela Povray terbuka.

```
>povend(h=320,w=480);
```



Berikut adalah contoh yang lebih rumit. Kami memecahkannya

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad c.x \to \text{Max.}$$

dan menunjukkan titik-titik yang layak dan optimal dalam plot 3D.

```
>A=[10,8,4;5,6,8;6,3,2;9,5,6];
>b=[10,10,10,10]';
>c=[1,1,1];
```

Pertama, mari kita periksa, apakah contoh ini punya solusinya.

```
>x=simplex(A,b,c,>max,>check)'
```

```
[0,   1,   0.5]
```

Yes, it has.
Selanjutnya kita mendefinisikan dua objek. Yang pertama adalah the plane

$$a \cdot x \leq b$$

```
>function oneplane (a,b,look="") ...
```

```
    return povplane(a,b,look)
  endfunction
```

Kemudian kita mendefinisikan perpotongan semua setengah ruang dan sebuah kubus.

```
>function adm (A, b, r, look="") ...
```

```
    ol=[];
    loop 1 to rows(A); ol=ol|oneplane(A[#],b[#]); end;
    ol=ol|povbox([0,0,0],[r,r,r]);
    return povintersection(ol,look);
  endfunction
```

Sekarang kita dapat merencanakan adegannya.

```
>povstart(angle=120°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=3.5); ...
>writeln(adm(A,b,2,povlook(green,0.4))); ...
>writeAxes(0,1.3,0,1.6,0,1.5); ...
```

Berikut ini adalah lingkaran di sekitar optimal.

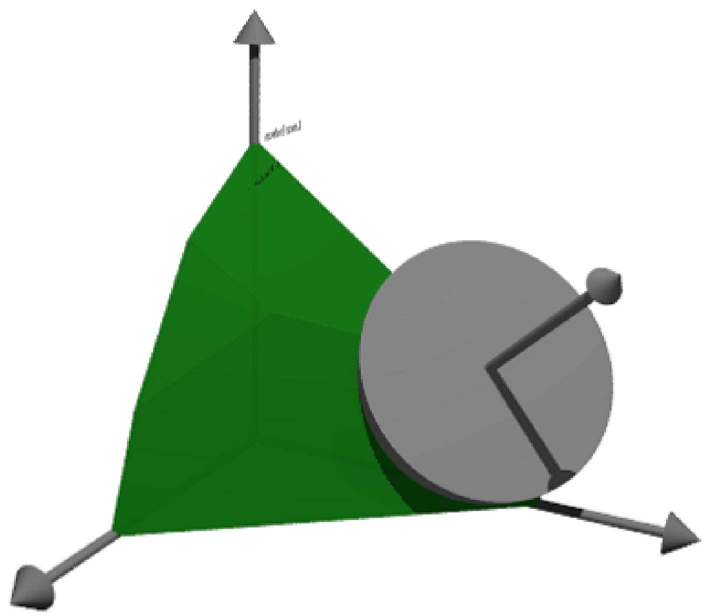
```
>writeln(povintersection([povsphere(x,0.5),povplane(c,c.x')], ...
>  povlook(red,0.9)));
```

Dan kesalahan ke arah optimal.

```
>writeln(povarrow(x,c*0.5,povlook(red)));
```

Kami menambahkan teks ke layar. Teks hanyalah objek 3D. Kita perlu menempatkan dan memutarnya sesuai dengan pandangan kita.

```
>writeln(povtext("Linear Problem",[0,0.2,1.3],size=0.05,rotate=5°)); ...
>povend();
```



Contoh Lainnya

Anda dapat menemukan beberapa contoh Povray di Euler di file berikut.
ee: Examples/Dandelin Spheres
See: Examples/Donat Math
See: Examples/Trefoil Knot
See: Examples/Optimization by Affine Scaling

BAB 4

EMT Untuk Kalkulus

Kalkulus dengan EMT

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:
- Fungsi (fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi)
- Limit Fungsi,
- Turunan Fungsi,
- Integral Tak Tentu,
- Integral Tentu dan Aplikasinya,
- Barisan dan Deret (kekonvergenan barisan dan deret).

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).

Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:
- Menggunakan format nama_fungsi := rumus fungsi (untuk fungsi numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik, namun dapat dihitung secara numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &&= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik murni, tidak dapat dihitung langsung),
- Fungsi sebagai program EMT.

Setiap format harus diawali dengan perintah function (bukan sebagai ekspresi).
Berikut adalah adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi:

$$f(x) = 2x^2 + e^{\sin(x)}.$$

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik
>f(0), f(1), f(pi)
```

```
1
4.31977682472
20.7392088022
```

```
>f(a) // tidak dapat dihitung nilainya
```

```
Variable or function a not found.
Error in:
f(a) // tidak dapat dihitung nilainya ...
   ^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!
Berikutnya kita definisikan fungsi:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x + 1}.$$

```
>function g(x) := sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
>g(3)
```

```
10
```

```
>g(0)
```

```
1
```

```
>g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik
```

```
4
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

```
>f(g(5)) // komposisi fungsi
```

```
17772221.041
```

```
>g(f(5))
```

```
891.478954615
```

```
>function h(x) := f(g(x)) // definisi komposisi fungsi
>h(5) // sama dengan f(g(5))
```

```
17772221.041
```

Silakan Anda plot kurva fungsi komposisi fungsi f dan g:

$$h(x) = f(g(x))$$

dan

$$u(x) = g(f(x))$$

bersama-sama kurva fungsi f dan g dalam satu bidang koordinat.

```
>f(0:10) // nilai-nilai f(0), f(1), f(2), ..., f(10)
```

```
[2,  5.43656,  14.7781,  40.1711,  109.196,  296.826,  806.858,
2193.27,  5961.92,  16206.2,  44052.9]
```

```
>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi
```

```
[2,  5.43656,  14.7781,  40.1711,  109.196,  296.826,  806.858,
2193.27,  5961.92,  16206.2,  44052.9]
```

```
>gmap(200:210)
```

```
[601,  604,  607,  610,  613,  616,  619,  622,  625,  628,  631]
```

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x^2 & x \le 0. \end{cases}$$

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara "inline" menggunakan format :=, melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata "map" digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata "map" fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

```
>function map f(x) ...
```

```
  if x>0 then return x^3
  else return x^2
  endif;
endfunction
```

```
>f(1)
```

```
1
```

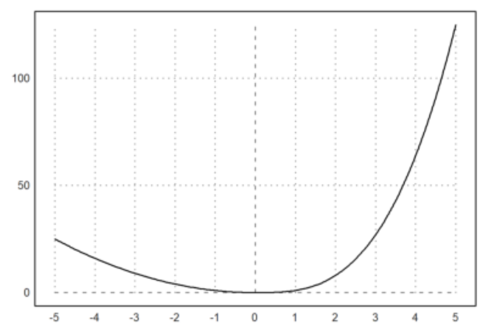
```
>f(-2)
```

```
4
```

```
>f(-5:5)
```

```
[25,  16,  9,  4,  1,  0,  1,  8,  27,  64,  125]
```

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-5,5):
```




```
>function f(x) &= 2*E^x // fungsi simbolik
```

```
                               x
                            2 E
```

```
>$f(a) // nilai fungsi secara simbolik
```

$$2\,e^{a}$$

```
>f(E) // nilai fungsi berupa bilangan desimal
```

```
30.308524483
```

```
>$f(E), $float(%)
```

$$30.30852448295852$$

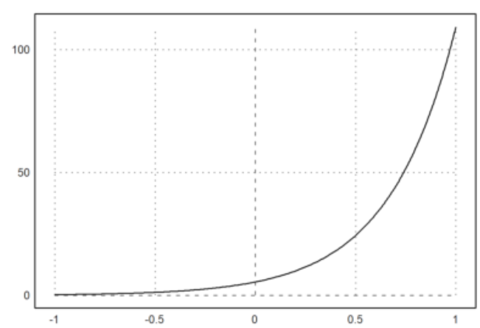
```
>function g(x) &= 3*x+1
```

```
                            3 x + 1
```

```
>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi
```

```
                             3 x + 1
                          2 E
```

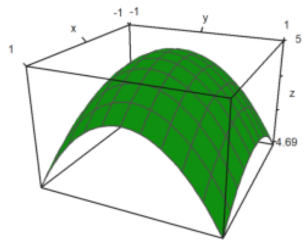
```
>plot2d("h(x)",-1,1):
```



Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan fungsi-fungsi tersebut dan komposisinya di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung beberapa nilainya, baik untuk satu nilai maupun vektor. Gambar grafik fungsi-fungsi tersebut dan komposisi-komposisi 2 fungsi.
Juga, carilah fungsi beberapa (dua) variabel. Lakukan hal sama seperti di atas.
Soal 1:

```
>function r(x,y):=sqrt(25-(x^2+2y^2))
>plot3d("r",>user):
```



Soal 2:
Misalkan kita mendefinisikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x > 0 \\ x^2 - 2 & x \leq 0. \end{cases}$$

```
>function map f(x) ...
```

```
    if x>0 then return 2*x+3
    else return x^2-2
    endif;
  endfunction
```

```
>f(1)
```

```
5
```

```
>f(4)
```

```
11
```

Soal 3:

```
>function k(x,y):=sqrt(1-(x^2+y^2))
>k(1,0)
```

```
0
```

```
>k(0,1)
```

```
0
```

Soal 4:

```
>function m(x,y):= x^3-2*x*y+3*y
>m(-2,3)
```

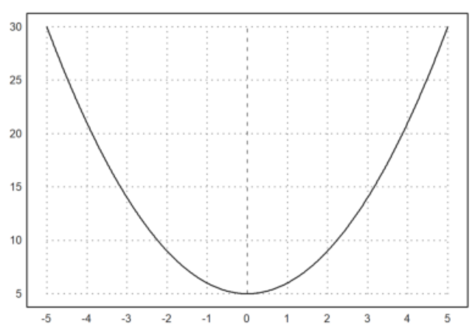
```
13
```

```
>m(1/9:2,2:3)
```

```
[5.55693,  3.70508]
```

Soal 5:

```
>function n(x):= x^2+5
>plot2d("n(x)",-5,5):
```



Menghitung Limit

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni "limit". Fungsi "limit" dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi "plus" atau "minus". Hasil limit dapat berupa nilai, "und" (tak definisi), "ind" (tak tentu namun terbatas), "infinity" (kompleks tak hingga). Perhatikan beberapa contoh berikut. Perhatikan cara menampilkan perhitungan secara lengkap, tidak hanya menampilkan hasilnya saja.

```
>$showev('limit(sqrt(x^2-3*x)/(x+1),x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-3\,x}}{x+1}=1$$

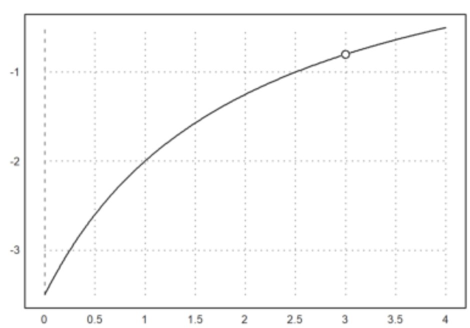
```
>$limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3)
```

$$-\frac{4}{5}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-13\,x^2+51\,x-63}{x^3-4\,x^2-3\,x+18}=-\frac{4}{5}$$

Fungsi tersebut diskontinu di titik x=3. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>aspect(1.5); plot2d("(x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18)",0,4); plot2d
```



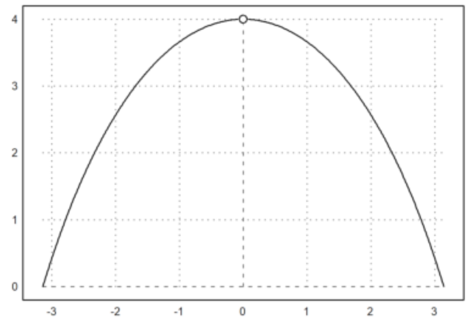

```
>$limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)
```

$$4$$

$$2\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\,\sin x}{1-\cos x}\right)=4$$

Fungsi tersebut diskontinu di titik x=0. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>plot2d("2*x*sin(x)/(1-cos(x))",-pi,pi); plot2d(0,4,>points,style="ow",>add
```



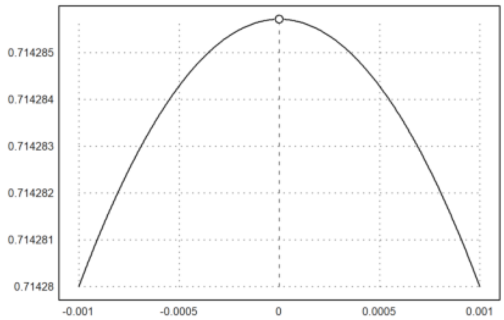

```
>$limit(cot(7*h)/cot(5*h),h,0)
```

$$\frac{5}{7}$$

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\cot \left(7\,h\right)}{\cot \left(5\,h\right)}}=\frac{5}{7}$$

Fungsi tersebut juga diskontinu (karena tidak terdefinisi) di x=0. Berikut adalah grafiknya.

```
>plot2d("cot(7*x)/cot(5*x)",-0.001,0.001); plot2d(0,5/7,>points,style="ow",
```

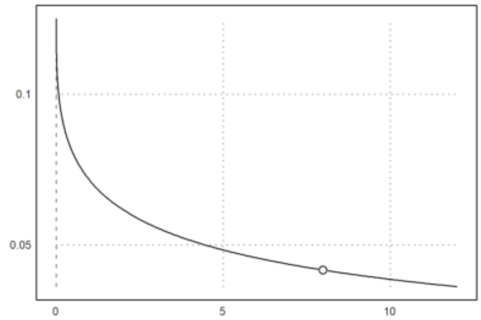



```
>$showev('limit(((x/8)^(1/3)-1)/(x-8),x,8))
```

$$\lim_{x\to 8}{\frac{\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}-1}{x-8}}=\frac{1}{24}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.
Penyelesaian:

```
>plot2d("((x/8)^(1/3)-1)/(x-8)",0,12); plot2d(8, 1/24,>points,style="ow",>a
```

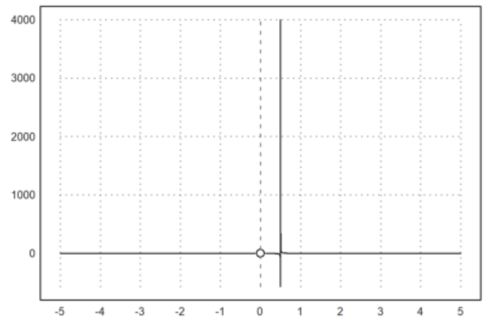



```
>$showev('limit(1/(2*x-1),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\frac{1}{2\,x-1}}=-1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.
Penyelesaian:

```
>plot2d("(1/(2*x-1))",-5,5); plot2d(0,-1,>points,style="ow",>add):
```

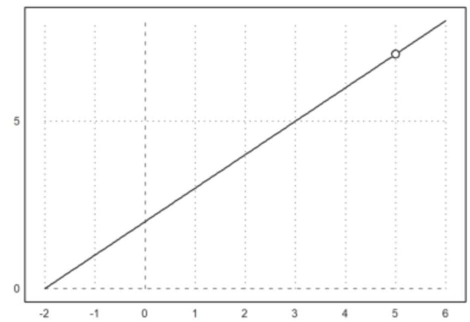



```
>$showev('limit((x^2-3*x-10)/(x-5),x,5))
```

$$\lim_{x\to 5}{\frac{x^2-3\,x-10}{x-5}}=7$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.
Penyelesaian:

```
>plot2d("((x^2-3*x-10)/(x-5))",-2,6); plot2d(5,7,>points,style="ow",>add):
```

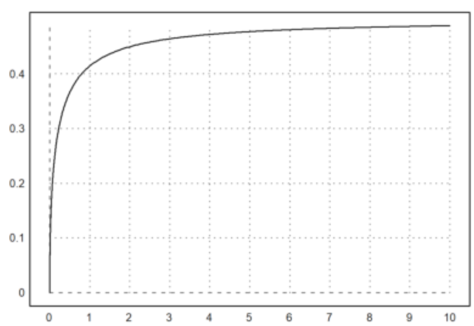



```
>
>$showev('limit(sqrt(x^2+x)-x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \frac{1}{2}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.
Penyelesaian:

```
>plot2d("(sqrt(x^2+x)-x)",0,10):
```

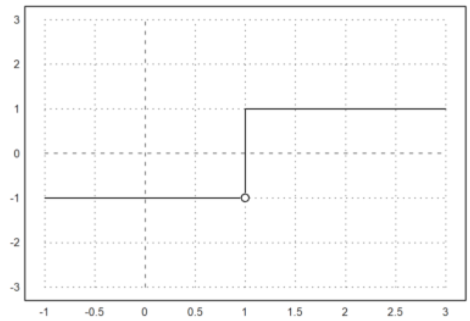



```
>
>$showev('limit(abs(x-1)/(x-1),x,1,minus))
```

$$\lim_{x\uparrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} = -1$$

Hitung limit di atas untuk x menuju 1 dari kanan.
Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.
Penyelesaian:

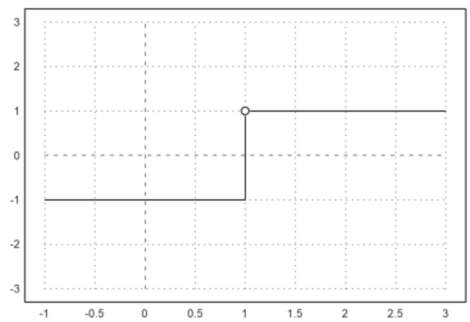
```
>plot2d("abs(x-1)/(x-1)",-1,3,-3,3); plot2d(1,-1,>points,style="ow",>add):
```



```
>$showev('limit(abs(x-1)/(x-1),x,1,plus))
```

$$\lim_{x\downarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} = 1$$

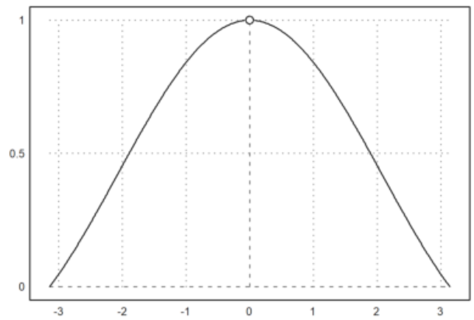
```
>plot2d("abs(x-1)/(x-1)",-1,3,-3,3); plot2d(1,1,>points,style="ow",>add):
```



```
>$showev('limit(sin(x)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

```
>plot2d("sin(x)/x",-pi,pi); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```

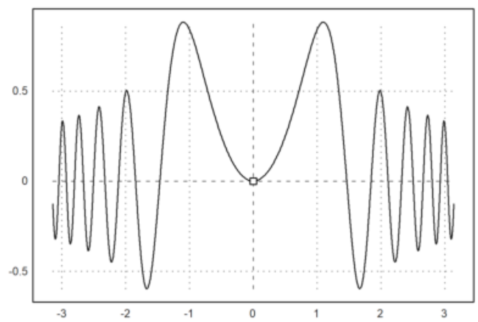



```
>$showev('limit(sin(x^3)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x}=0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.
Penyelesaian:

```
>plot2d("sin(x^3)/x",-pi,pi); plot2d(0,0,>points,style="cow",>add):
```




```
>$showev('limit(log(x), x, minf))
```

$$\lim_{x\to -\infty}\log x=\mathit{infinity}$$

```
>$showev('limit((-2)^x,x, inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}(-2)^x = infinity$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,minus))
```

$$\lim_{t\uparrow 2} t-\sqrt{2-t} = 2$$

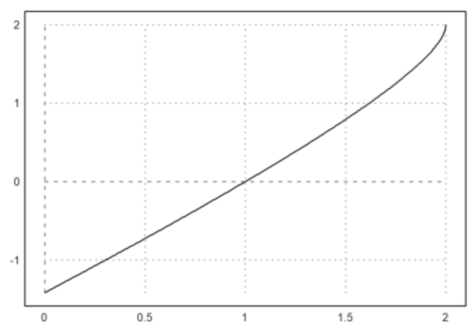
```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,plus))
```

$$\lim_{t\downarrow 2} t-\sqrt{2-t} = 2$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,5,plus)) // Perhatikan hasilnya
```

$$\lim_{t\downarrow 5} t-\sqrt{2-t} = 5-\sqrt{3}\, i$$

```
>plot2d("x-sqrt(2-x)",0,2):
```

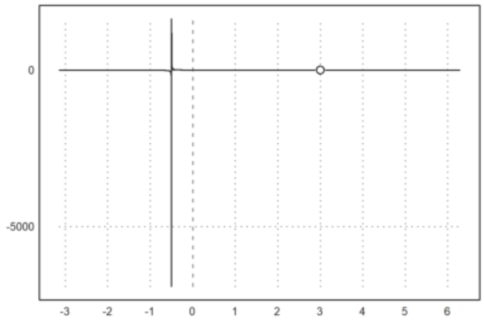



```
>$showev('limit((x^2-9)/(2*x^2-5*x-3),x,3))
```

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2\,x^2-5\,x-3} = \frac{6}{7}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.
Penyelesaian:

```
>plot2d("(x^2-9)/(2*x^2-5*x-3)",-pi,2pi); plot2d(3,6/7,>points,style="ow",>
```

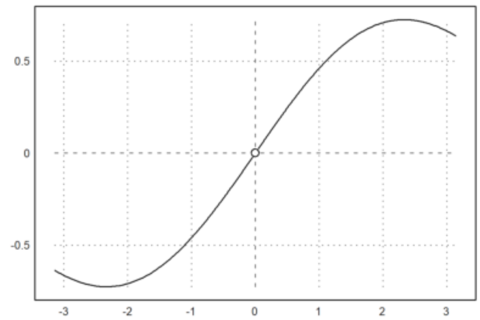


```
>$showev('limit((1-cos(x))/x,x,0))
```

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.
Penyelesaian:

```
>plot2d("(1-cos(x))/x",-pi,pi); plot2d(0,0,>points,style="ow",>add):
```

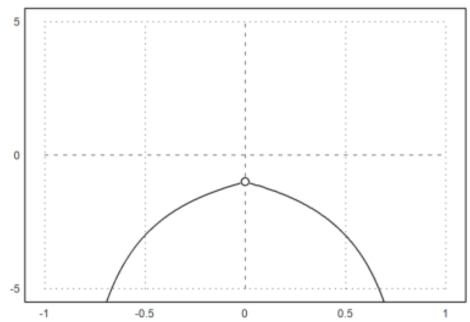


```
>$showev('limit((x^2+abs(x))/(x^2-abs(x)),x,0))
```

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| + x^2}{x^2 - |x|} = -1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.
penyelesaian:

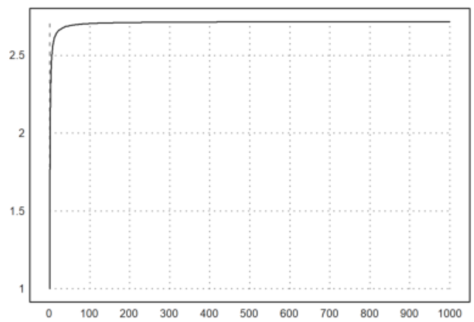
```
>plot2d("(x^2+abs(x))/(x^2-abs(x))",-1,1,-5,5); plot2d(0,-1,>points,style="
```




```
>$showev('limit((1+1/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x}=e$$

```
>plot2d("(1+1/x)^x",0,1000):
```




```
>$showev('limit((1+k/x)^x,x,inf))
```

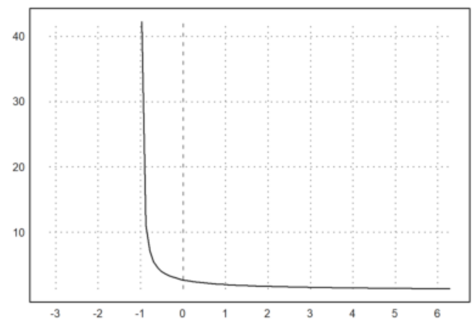
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{k}{x}+1\right)^{x}=e^{k}$$

```
>$showev('limit((1+x)^(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}} = e$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.
Penyelesaian:

```
>plot2d("(1+x)^(1/x)",-pi,2pi):
```




```
>$showev('limit((x/(x+k))^x,x,inf))
```

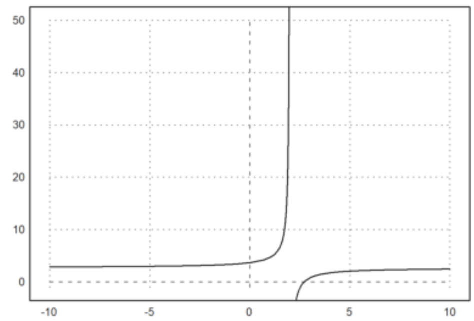
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+k}\right)^{x} = e^{-k}$$

```
>$showev('limit((E^x-E^2)/(x-2),x,2))
```

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{x}-e^{2}}{x-2} = e^{2}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.
Penyelesaian:

```
>plot2d("(E*x-E^2)/(x-2)",-10,10,-1,50):
```



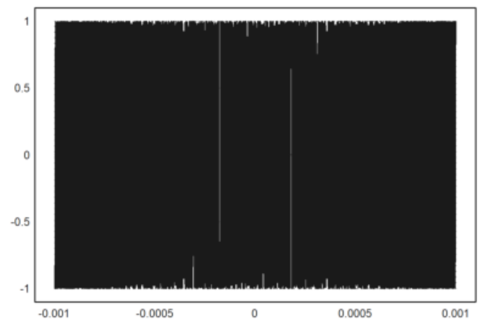

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ind$$

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

```
>plot2d("sin(1/x)",-0.001,0.001):
```



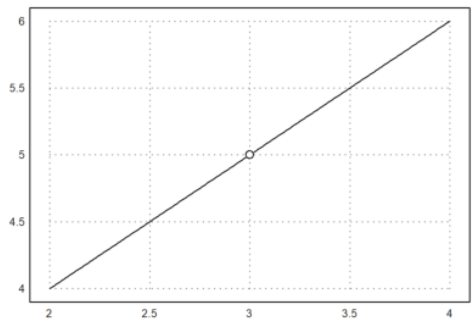
Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung nilai limit fungsi tersebut di beberapa nilai dan di tak hingga. Gambar grafik fungsi tersebut untuk mengkonfirmasi nilai-nilai limit tersebut.
Soal 1:

```
>$showev('limit((x^2-x-6)/(x-3),x,3))
```

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5$$

```
>plot2d("(x^2-x-6)/(x-3)",2,4); plot2d(3,5,>points,style="ow",>add):
```

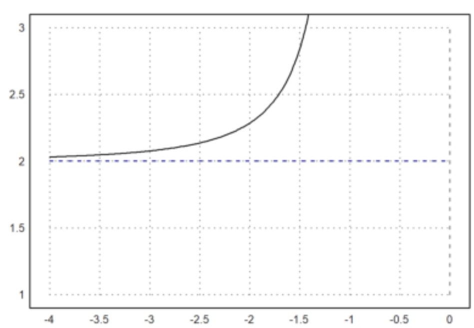


Soal 2:

```
>$showev('limit((2*x^3)/(1+x^3),x, -inf))
```

$$2 \left(\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^3 + 1}\right) = 2$$

```
>plot2d("(2*x^3)/(1+x^3)",-4,0,1,3); ...
>plot2d("2",style="--",color=blue,>add):
```

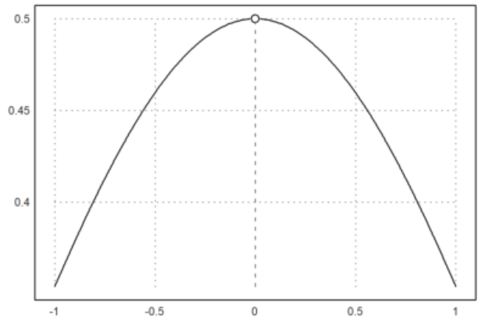


Soal 3:

```
>$showev('limit((sin(x))^2/(2*x^2),x,0))
```

$$\frac{\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

```
>plot2d("(sin(x))^2/(2*x^2)",-1,1); plot2d(0,1/2,>points,style="ow",>add):
```

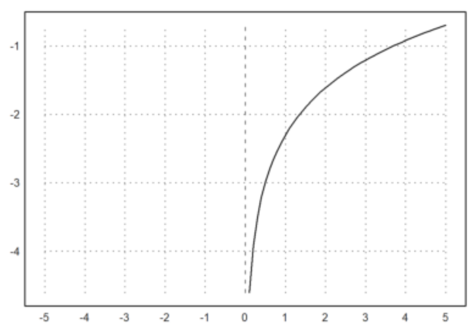


Soal 4:

```
>$showev('limit(log(x/10),x,10))
```

$$\lim_{x\to 10} \log\left(\frac{x}{10}\right) = 0$$

```
>plot2d("log(x/10)",-5,5):
```

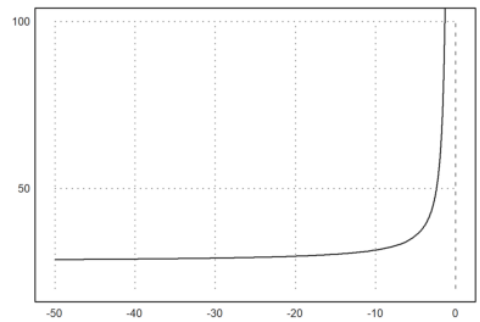


Soal 5:

```
>$showev('limit((1+2/(3*x))^(5*x),x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3\,x}+1\right)^{5\,x}=e^{\frac{10}{3}}$$

```
>plot2d("(1+2/(3*x))^(5*x)",-50,0,20,100):
```



Turunan Fungsi

Definisi turunan:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan (limit).

```
>$showev('limit(((x+h)^2-x^2)/h,h,0)) // turunan x^2
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=2\,x$$

```
>p &= expand((x+h)^2-x^2)|simplify; $p //pembilang dijabarkan dan disederha
```

$$2\,h\,x+h^2$$

```
>q &=ratsimp(p/h); $q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanaka
```

$$2\,x+h$$

```
>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan
```

$$2\,x$$

```
>$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\left(x+h\right)^{n}-x^{n}}{h}}=n\,x^{n-1}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.
Sebagai petunjuk, ekspansikan (x+h)^n dengan menggunakan teorema binomial.
Bukti:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Untuk

$$f(x)=x^n$$

$$\frac{d}{dx}sin(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

Dengan

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}a^kb^{n-k}$$

maka

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x^n+\frac{n}{1!}x^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3+...)-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{n.x^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3+...}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} n.x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}.x^{n-2}h + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.x^{n-3}h^2 + ...$$

$$= n.x^{n-1} + 0 + 0 + ... + 0$$

$$= n.x^{n-1}$$

Jadi, terbukti benar bahwa

$$f'(x^n) = n.x^{n-1}$$

```
>$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)
```

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini. Sebagai petunjuk, ekspansikan sin(x+h) dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut. Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sin(x+h) - sin(x)}{h}$$

$$sin(a+b) = sin(a)cos(a) + cos(a)sin(b)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{sin(x)cos(h) + cos(x)sin(h) - sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} sinx.\frac{cos(h)-1}{h} + \lim_{h\to 0} cos(x).\frac{sin(h)}{h}$$

$$= sin(x).0 + cos(x).1$$

$$= cos(x)$$

Jadi, terbukti benar bahwa

$$f'(sin(x)) = cos(x)$$

```
>$showev('limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log\left(x+h\right)-\log x}{h}=\frac{1}{x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini. Sebagai petunjuk, gunakan sifat-sifat logaritma dan hasil limit pada bagian sebelumnya di atas.
Bukti:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{log(x+h)-logx}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{d}{dh}(log(x+h)-logx)}{\frac{d}{dh}(h)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}}{1}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x+h}$$
$$=\frac{1}{x}$$

Jadi, terbukti benar bahwa

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{log(x+h)-logx}{h}=\frac{1}{x}$$

```
>$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=-\frac{1}{x^2}$$

```
>$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

```
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
```

```
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Maxima is asking
Acceptable answers are: yes, y, Y, no, n, N, unknown, uk
Is x an integer?

Use assume!
Error in:
 $showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x ...
                                       ^
```

Maxima bermasalah dengan limit:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}.$$

Oleh karena itu diperlukan trik khusus agar hasilnya benar.

```
>$showev('limit((E^h-1)/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

```
>$showev('factor(E^(x+h)-E^x))
```

$$factor\left(e^{x+h} - e^x\right) = \left(e^h - 1\right)\, e^x$$

```
>$showev('limit(factor((E^(x+h)-E^x)/h),h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

$$\left(\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}\right)\, e^x = e^x$$

```
>function f(x) &= x^x
```

```
                                   x
                                  x
```

```
>$showev('limit(f(x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}x^{x}=1$$

Silakan Anda gambar kurva

$$y = x^x.$$

Penyelesaian:

```
>plot2d("x^x"):
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^{x}}{h}=\mathit{infinity}$$

```
>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^{x}}{h}=\mathit{infinity}$$

Di sini Maxima juga bermasalah terkait limit:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^{x}}{h}.$$

Dalam hal ini diperlukan asumsi nilai x.

```
>&assume(x>0); $showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^{x}}{h}=x^{x}\,\left(\log x+1\right)$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>&forget(x>0) // jangan lupa, lupakan asumsi untuk kembali ke semula
```

```
[x > 0]
```

```
>&forget(x<0)
```

[x < 0]

```
>&facts()
```

[]

```
>$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\arcsin\left(x+h\right)-\arcsin x}{h}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(x+h\right)-\tan x}{h}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>function f(x) &= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)
```

sinh(x)

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{e^{-x}\,\left(e^{2\,x}+1\right)}{2}$$

Hasilnya adalah cosh(x), karena

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,red]):
```

```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

```
                          2     5
                       sin  (3 x  + 7)
```

```
>diff(f,3), diffc(f,3)
```

```
1198.32948904
1198.72863721
```

Apakah perbedaan diff dan diffc?

```
>$showev('diff(f(x),x))
```

$$\frac{d}{d\,x}\,\sin^2\left(3\,x^5+7\right)=30\,x^4\,\cos\left(3\,x^5+7\right)\,\sin\left(3\,x^5+7\right)$$

```
>$% with x=3
```

$$\%at\left(\frac{d}{d\,x}\,\sin^2\left(3\,x^5+7\right),x=3\right)=2430\,\cos 736\,\sin 736$$

```
>$float(%)
```

$$\%at\left(\frac{d^{1.0}}{d\,x^{1.0}}\,\sin^2\left(3.0\,x^5+7.0\right),x=3.0\right)=1198.728637211748$$

```
>plot2d(f,0,3.1):
```

```
>function f(x) &=5*cos(2*x)-2*x*sin(2*x) // mendifinisikan fungsi f
```

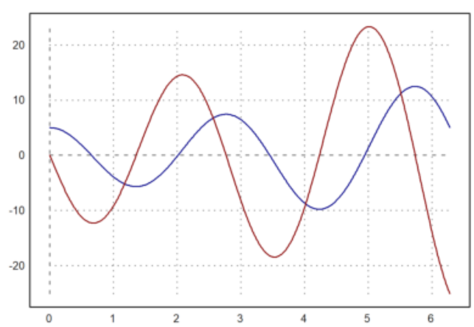
```
                          5 cos(2 x) - 2 x sin(2 x)
```

```
>function df(x) &=diff(f(x),x) // fd(x) = f'(x)
```

```
                        - 12 sin(2 x) - 4 x cos(2 x)
```

```
>$'f(1)=f(1), $float(f(1)), $'f(2)=f(2), $float(f(2)) // nilai f(1) dan f(2
```

$$-0.2410081230863468$$




```
>xp=solve("df(x)",1,2,0) // solusi f'(x)=0 pada interval [1, 2]
```

```
1.35822987384
```

```
>df(xp), f(xp) // cek bahwa f'(xp)=0 dan nilai ekstrim di titik tersebut
```

```
0
-5.67530133759
```

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]): //grafik fungsi dan turu
```

Perhatikan titik-titik "puncak" grafik y=f(x) dan nilai turunan pada saat grafik fungsinya mencapai titik "puncak" tersebut.

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, tentukan turunannya dengan menggunakan definisi turunan (limit), menggunakan perintah diff, dan secara manual (langkah demi langkah yang dihitung dengan Maxima) seperti contoh-contoh di atas. Gambar grafik fungsi asli dan fungsi turunannya pada sumbu koordinat yang sama.
1. Tentukan nilai turunan berikut dan sketsakan grafiknya.

$$f(x) = 2x^2 + 6$$

Penyelesaian:

```
>function f(x) &= 2*x^2+6; $f(x)
```

$$2\,x^2+6$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); &df(x)//df(x)=f'(x)
```

```
4 x
```

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[red,green]):
```

2. Tentukan turunan dari fungsi berikut dan sketsakan grafiknya

$$f(x) = \frac{4x - 1}{x - 6}$$

Penyelesaian:

```
>function f(x) &= (4*x-1)/(x-6); $f(x)
```

$$\frac{4\,x - 1}{x - 6}$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$-\frac{23}{x^2 - 12\,x + 36}$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-10,10,color=[blue,red]):
```

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-4}}$$

3. Tentukan turunan dari fungsi berikut dan sketsakan grafiknya

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x - 4}}$$

Penyelesaian:

```
>function f(x) &= 3/sqrt(x-4); $f(x)
```

$$\frac{3}{\sqrt{x - 4}}$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)funct
```

$$-\frac{3}{2\,(x - 4)^{\frac{3}{2}}}$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-10,10,color=[yellow,red]):
```

4. Tentukan turunan fungsi berikut dan sketsakan grafiknya

$$f(x) = 4sin(x) + 2cos(x)$$

Penyelesaian:

```
>function f(x) &= (4*sin(x)+2*cos(x)); $f(x)
```

$$4\ \sin x + 2\ \cos x$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); &df(x)
```

```
- 2 (sin(x) - 2 cos(x))
```

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,yellow]):
```

$$f(x) = \frac{sin(x) + cos(x)}{cos(x)}$$

5. Tentukan turunan dan grafik fungsi berikut dan sketsakan grafiknya.

$$f(x) = \frac{sin(x) + cos(x)}{cos(x)}$$

Penyelesaian:

```
>function f(x) &= (sin(x)+cos(x))/(cos(x)); $f(x)
```

$$\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,yellow]):
```

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a), \quad \text{dengan } F'(x) = f(x).$$

Integral

EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu. Untuk integral tak tentu (simbolik) sudah tentu EMT menggunakan Maxima, sedangkan untuk perhitungan integral tentu EMT sudah menyediakan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

Pada notebook ini akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a), \quad \text{dengan } F'(x) = f(x).$$

Fungsi untuk menentukan integral adalah integrate. Fungsi ini dapat digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu (jika fungsinya memiliki antiderivatif). Untuk perhitungan integral tentu fungsi integrate menggunakan metode numerik (kecuali fungsinya tidak integrabel, kita tidak akan menggunakan metode ini).

```
>$showev('integrate(x^n,x))
```

```
Answering "Is n equal to -1?" with "no"
```

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x),x))
```

$$\int \frac{1}{x+1}\, dx = \log\left(x+1\right)$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$$

```
>$showev('integrate(1/sqrt(1-x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))
```

$$\int_0^{\pi} \sin x\;dx = 2$$

```
>plot2d("sin(x)",0,2*pi):
```

$$\int_a^b \sin x\;dx = \cos a - \cos b$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,a,b))
```

$$\int_a^b \sin x\;dx = \cos a - \cos b$$

```
>$showev('integrate(x^n,x,a,b))
```

```
Answering "Is n positive, negative or zero?" with "positive"
```

$$\int_a^b x^n\;dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x))
```

$$\int x^2\,\sqrt{2\,x+1}\;dx = \frac{(2\,x+1)^{\frac{7}{2}}}{28} - \frac{(2\,x+1)^{\frac{5}{2}}}{10} + \frac{(2\,x+1)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x,0,2))
```

$$\int_{0}^{2}x^2\,\sqrt{2\,x+1}\,dx=\frac{2\,5^{\frac{5}{2}}}{21}-\frac{2}{105}$$

```
>$ratsimp(%)
```

$$\int_{0}^{2}x^2\,\sqrt{2\,x+1}\,dx=\frac{2\,5^{\frac{7}{2}}-2}{105}$$

```
>$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)*E^sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi^2))
```

$$\int_{0}^{\pi^2}\frac{\sin\left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\sin a+\left(e^{\pi}+1\right)\,\cos a$$

```
>$factor(%)
```

$$\int_{0}^{\pi^2}\frac{\sin\left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\left(\sin a-\cos a\right)$$

```
>function map f(x) &= E^(-x^2)
```

```
          2
       - x
      E
```

```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(x\right)}{2}$$

Fungsi f tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

$$erf(x)=\int\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,dx.$$

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).
Misalkan kita akan menghitung:

$$\int_{0}^{\pi}{e^ {- x^2 }\;dx}$$

```
>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```

$$\int_{0}^{\pi}{e^ {- x^2 }\;dx}$$

Integral tentu

$$\int_{0}^{\pi}{f\left(x\right)\;dx}$$

dapat dihampiri dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva y=f(x) tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

```
>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1); // t sebagai list untuk menyimpan nilai-n
>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t)); // simpan nilai-nilai f(x)
>// jangan menggunakan x sebagai list, kecuali Anda pakar Maxima!
```

Hasilnya adalah:

$$\int_{0}^{\pi}{x^2+50\;dx}=48.64225458159455$$

Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval (=0.1) dan jumlah nilai-nilai f(x) untuk x = 0.1, 0.2, 0.3, ..., 3.2.

```
>0.1*sum(f(x+0.1)) // cek langsung dengan perhitungan numerik EMT
```

```
0.836219610253
```

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval 0.001. (Silakan dicoba!)
Meskipun Maxima tidak dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut untuk batas-batas yang berhingga, namun integral tersebut dapat dihitung secara eksak jika batas-batasnya tak hingga. Ini adalah salah satu keajaiban di dalam matematika, yang terbatas tidak dapat dihitung secara eksak, namun yang tak hingga malah dapat dihitung secara eksak.

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,inf))
```

$$\int_{0}^{\infty }{e^ {- x^2 }\;dx}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Tunjukkan kebenaran hasil di atas!
Berikut adalah contoh lain fungsi yang tidak memiliki antiderivatif, sehingga integral tentunya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

```
>function f(x) &= x^x
```

```
                                    x
                                   x
```

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_{0}^{1}{x^{x}\;dx}=\int_{0}^{1}{x^{x}\;dx}$$

```
>x=0:0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```

$$\int_{0}^{1}{x^{x}\;dx}=0.7834935879025506$$

Maxima gagal menghitung integral tentu tersebut secara langsung menggunakan perintah integrate. Berikut kita lakukan seperti contoh sebelumnya untuk mendapat hasil atau pendekatan nilai integral tentu tersebut.

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
```

maxima: 'integrate(f(x),x,0,1) = 0.01*sum(fx[i],i,1,length(fx))
Apakah hasil tersebut cukup baik? perhatikan gambarnya.

```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

```
                  2     5
               sin  (3 x   + 7)
```

```
>integrate(f,0,1)
```

```
0.542581176074
```

```
>&showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

```
          1                           1              pi
          /                     gamma(-) sin(14) sin(--)
          [     2    5                5              10
          I  sin  (3 x   + 7) dx = ------------------------
          ]                                 1/5
          /                             10 6
          0
         4/5                   1           4/5                  1
 - (((6    gamma_incomplete(-, 6 I) + 6    gamma_incomplete(-, - 6 I))
                               5                                5
              4/5                        1
 sin(14) + (6    I gamma_incomplete(-, 6 I)
                                         5
    4/5                       1                        pi
 - 6    I gamma_incomplete(-, - 6 I)) cos(14)) sin(--) - 60)/120
                              5                        10
```

```
>&float(%)
```

```
          1.0
          /
          [       2      5
          I    sin  (3.0 x   + 7.0) dx =
          ]
          /
          0.0
0.09820784258795788 - 0.008333333333333333
 (0.3090169943749474 (0.1367372182078336
```

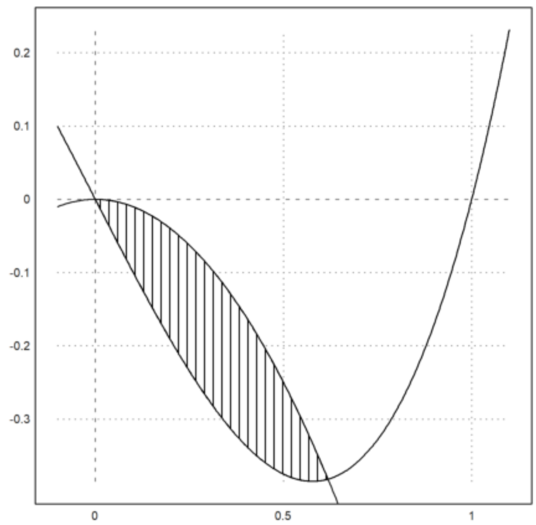
```
(4.192962712629476 I gamma__incomplete(0.2, 6.0 I)
- 4.192962712629476 I gamma__incomplete(0.2, - 6.0 I))
+ 0.9906073556948704 (4.192962712629476 gamma__incomplete(0.2, 6.0 I)
+ 4.192962712629476 gamma__incomplete(0.2, - 6.0 I))) - 60.0)
```

```
>$showev('integrate(x*exp(-x),x,0,1)) // Integral tentu (eksak)
```

$$\int_{0}^{1} x\,e^{-x}\,dx = 1 - 2\,e^{-1}$$

Aplikasi Integral Tentu

```
>plot2d("x^3-x",-0.1,1.1); plot2d("-x^2",>add);  ...
>b=solve("x^3-x+x^2",0.5); x=linspace(0,b,200); xi=flipx(x); ...
>plot2d(x|xi,x^3-x|-xi^2,>filled,style="|",fillcolor=1,>add): // Plot daera
```




```
>a=solve("x^3-x+x^2",0), b=solve("x^3-x+x^2",1) // absis titik-titik potong
```

```
0
0.61803398875
```

```
>integrate("(-x^2)-(x^3-x)",a,b) // luas daerah yang diarsir
```

```
0.0758191713542
```

Hasil tersebut akan kita bandingkan dengan perhitungan secara analitik.

```
>a &= solve((-x^2)-(x^3-x),x); $a // menentukan absis titik potong kedua ku
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{5}-1}{2},x=\frac{\sqrt{5}-1}{2},x=0\right]$$

```
>$showev('integrate(-x^2-x^3+x,x,0,(sqrt(5)-1)/2)) // Nilai integral secara
```

$$\int_{0}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{-x^3-x^2+x\;dx}=\frac{13-5^{\frac{3}{2}}}{24}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{0.0}^{0.61803398874989 49}{-1.0\,x^3-1.0\,x^2+x\;dx}=0.07581917135421037$$

Panjang Kurva

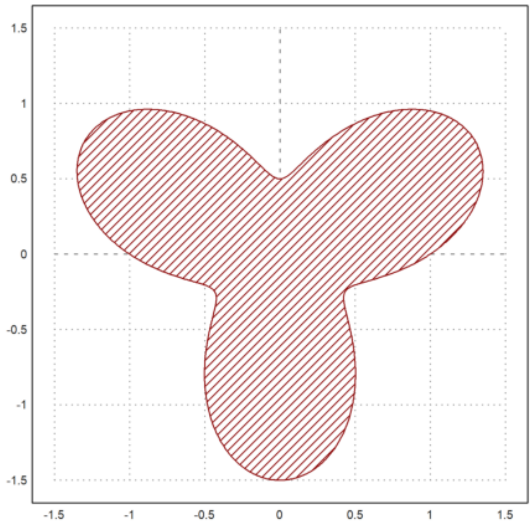
Hitunglah panjang kurva berikut ini dan luas daerah di dalam kurva tersebut.

$$\gamma(t)=(r(t)\cos(t),r(t)\sin(t))$$

dengan

$$r(t)=1+\frac{\sin(3t)}{2},\quad 0\leq t\leq 2\pi.$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5): // Kita gambar kurvanya
```




```
>function r(t) &= 1+sin(3*t)/2; $'r(t)=r(t)
```

$$r\left(t\right)=\frac{\sin \left(3\,t\right)}{2}+1$$

```
>function fx(t) &= r(t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

$$fx\left(t\right)=\cos t\,\left(\frac{\sin \left(3\,t\right)}{2}+1\right)$$

```
>function fy(t) &= r(t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

$$fy\left(t\right)=\sin t\,\left(\frac{\sin \left(3\,t\right)}{2}+1\right)$$

```
>function ds(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2)))
```

$$ds\left(t\right)=\frac{\sqrt{4\,\cos \left(6\,t\right)+4\,\sin \left(3\,t\right)+9}}{2}$$

```
>$integrate(ds(x),x,0,2*pi) //panjang (keliling) kurva
```

$$\frac{\int_{0}^{2\,\pi}{\sqrt{4\,\cos \left(6\,x\right)+4\,\sin \left(3\,x\right)+9}\;dx}}{2}$$

Maxima gagal melakukan perhitungan eksak integral tersebut.
Berikut kita hitung integralnya secara umerik dengan perintah EMT.

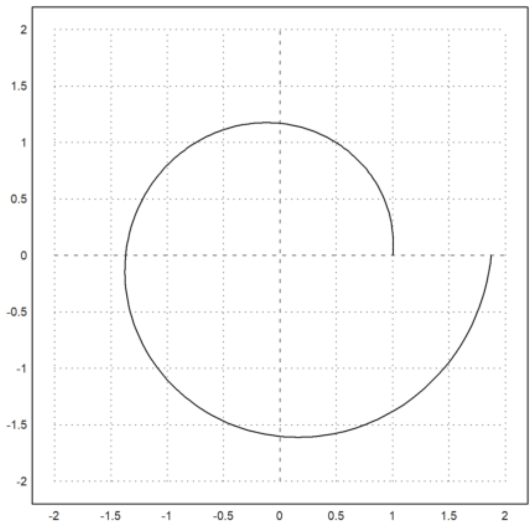
```
>integrate("ds(x)",0,2*pi)
```

```
9.0749467823
```

Spiral Logaritmik

$$x = e^{ax} \cos x, \; y = e^{ax} \sin x.$$

```
>a=0.1; plot2d("exp(a*x)*cos(x)","exp(a*x)*sin(x)",r=2,xmin=0,xmax=2*pi):
```



```
>&kill(a) // hapus expresi a
```

```
done
```

```
>function fx(t) &= exp(a*t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

$$fx\left(t\right)=e^{a\,t}\,\cos t$$

```
>function fy(t) &= exp(a*t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

$$fy\left(t\right)=e^{a\,t}\,\sin t$$

```
>function df(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2)))
```

$$df\left(t\right)=\sqrt{a^2+1}\,e^{a\,t}$$

```
>S &=integrate(df(t),t,0,2*%pi); $S // panjang kurva (spiral)
```

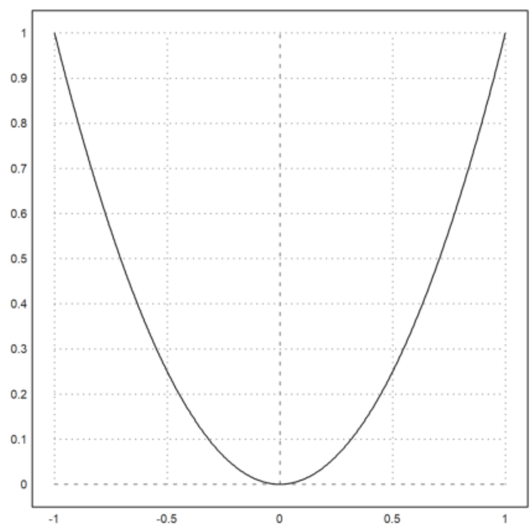
$$\sqrt{a^2+1}\,\left(\frac{e^{2\,\pi\,a}}{a}-\frac{1}{a}\right)$$

```
>S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1
```

```
8.78817491636
```

Soal:
Tunjukkan bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah K=2.pi.r.
Berikut adalah contoh menghitung panjang parabola.

```
>plot2d("x^2",xmin=-1,xmax=1):
```



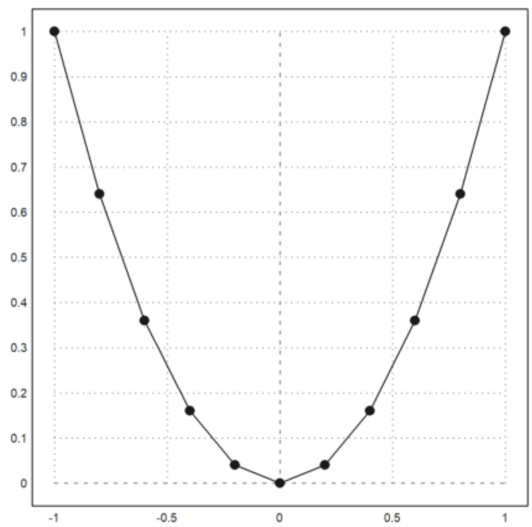
```
>$showev('integrate(sqrt(1+diff(x^2,x)^2),x,-1,1))
```

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{4\,x^2+1}\,dx=\frac{\operatorname{asinh}2+2\,\sqrt{5}}{2}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{-1.0}^{1.0}\sqrt{4.0\,x^2+1.0}\,dx=2.957885715089195$$

```
>x=-1:0.2:1; y=x^2; plot2d(x,y);  ...
>  plot2d(x,y,points=1,style="o#",add=1):
```



Panjang tersebut dapat dihampiri dengan menggunakan jumlah panjang ruas-ruas garis yang menghubungkan titik-titik pada parabola tersebut.

```
>i=1:cols(x)-1; sum(sqrt((x[i+1]-x[i])^2+(y[i+1]-y[i])^2))
```

```
2.95191957027
```

Hasilnya mendekati panjang yang dihitung secara eksak. Untuk mendapatkan hampiran yang cukup akurat, jarak antar titik dapat diperkecil, misalnya 0.1, 0.05, 0.01, dan seterusnya. Cobalah Anda ulangi perhitungannya dengan nilai-nilai tersebut.

Koordinat Kartesius

Berikut diberikan contoh perhitungan panjang kurva menggunakan koordinat Kartesius. Kita akan hitung panjang kurva dengan persamaan implisit:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

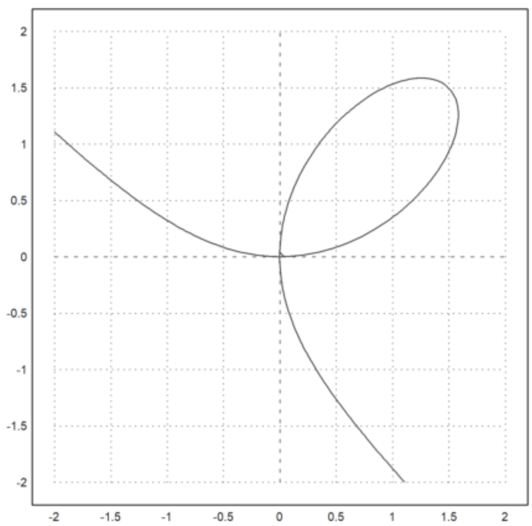
```
>z &= x^3+y^3-3*x*y; $z
```

$$y^3 - 3\,x\,y + x^3$$

```
>plot2d(z,r=2,level=0,n=100):
```

Kita tertarik pada kurva di kuadran pertama.

```
>plot2d(z,a=0,b=2,c=0,d=2,level=[-10;0],n=100,contourwidth=3,style="/"):
```



Kita selesaikan persamaannya untuk x.

```
>$z with y=l*x, sol &= solve(%,x); $sol
```

$$\left[x = \frac{3\,l}{l^3 + 1} , x = 0\right]$$

Kita gunakan solusi tersebut untuk mendefinisikan fungsi dengan Maxima.

```
>function f(l) &= rhs(sol[1]); $'f(l)=f(l)
```

$$f(l) = \frac{3\,l}{l^3+1}$$

Fungsi tersebut juga dapat digunaka untuk menggambar kurvanya. Ingat, bahwa fungsi tersebut adalah nilai x dan nilai y=l*x, yakni x=f(l) dan y=l*f(l).

```
>plot2d(&f(x),&x*f(x),xmin=-0.5,xmax=2,a=0,b=2,c=0,d=2,r=1.5):
```

Elemen panjang kurva adalah:

$$ds = \sqrt{f'(l)^2 + (lf'(l)+f(l))^2}.$$

```
>function ds(l) &= ratsimp(sqrt(diff(f(l),l)^2+diff(l*f(l),l)^2)); $'ds(l)=
```

$$ds(l) = \frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}$$

```
>$integrate(ds(l),l,0,1)
```

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}\,dl$$

Integral tersebut tidak dapat dihitung secara eksak menggunakan Maxima. Kita hitung integral etrsebut secara numerik dengan Euler. Karena kurva simetris, kita hitung untuk nilai variabel integrasi dari 0 sampai 1, kemudian hasilnya dikalikan 2.

```
>2*integrate("ds(x)",0,1)
```

```
4.91748872168
```

```
>2*romberg(&ds(x),0,1)// perintah Euler lain untuk menghitung nilai hampira
```

```
4.91748872168
```

Perhitungan di datas dapat dilakukan untuk sebarang fungsi x dan y dengan mendefinisikan fungsi EMT, misalnya kita beri nama panjangkurva. Fungsi ini selalu memanggil Maxima untuk menurunkan fungsi yang diberikan.

```
>function panjangkurva(fx,fy,a,b) ...
```

```
  ds=mxm("sqrt(diff(@fx,x)^2+diff(@fy,x)^2)");
  return romberg(ds,a,b);
  endfunction
```

```
>panjangkurva("x","x^2",-1,1) // cek untuk menghitung panjang kurva parabol
```

```
  2.95788571509
```

Bandingkan dengan nilai eksak di atas.

```
>2*panjangkurva(mxm("f(x)"),mxm("x*f(x)"),0,1) // cek contoh terakhir, band
```

```
  4.91748872168
```

Kita hitung panjang spiral Archimides berikut ini dengan fungsi tersebut.

```
>plot2d("x*cos(x)","x*sin(x)",xmin=0,xmax=2*pi,square=1):
```

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}\,dl$$

```
>panjangkurva("x*cos(x)","x*sin(x)",0,2*pi)
```

```
  21.2562941482
```

Berikut kita definisikan fungsi yang sama namun dengan Maxima, untuk perhitungan eksak.

```
>&kill(ds,x,fx,fy)
```

```
done
```

$$3\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x\sqrt{9\,x^2+4}\,dx = 3\left(\frac{7^{\frac{3}{2}}}{27}-\frac{8}{27}\right)$$

```
>function ds(fx,fy) &&= sqrt(diff(fx,x)^2+diff(fy,x)^2)
```

```
                          2                   2
             sqrt(diff  (fy, x) + diff  (fx, x))
```

```
>sol &= ds(x*cos(x),x*sin(x)); $sol // Kita gunakan untuk menghitung panjan
```

$$\sqrt{\left(\cos x-x\,\sin x\right)^2+\left(\sin x+x\,\cos x\right)^2}$$

```
>$sol | trigreduce | expand, $integrate(%,x,0,2*pi), %()
```

$$\frac{\mathrm{asinh}\,\left(2\,\pi\right)+2\,\pi\,\sqrt{4\,\pi^2+1}}{2}$$

```
21.2562941482
```

Hasilnya sama dengan perhitungan menggunakan fungsi EMT.
Berikut adalah contoh lain penggunaan fungsi Maxima tersebut.

```
>plot2d("3*x^2-1","3*x^3-1",xmin=-1/sqrt(3),xmax=1/sqrt(3),square=1):
```

$$\frac{\mathrm{asinh}\,\left(2\,\pi\right)+2\,\pi\,\sqrt{4\,\pi^2+1}}{2}$$

```
>sol &= radcan(ds(3*x^2-1,3*x^3-1)); $sol
```

$$3\,x\,\sqrt{9\,x^2+4}$$

```
>$showev('integrate(sol,x,0,1/sqrt(3))), $2*float(%) // panjang kurva di at
```

$$6.0\int_{0.0}^{0.5773502691896258} x\,\sqrt{9.0\,x^2+4.0}\,dx = 2.337835372767141$$

$$3\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x\sqrt{9\,x^2+4}\,dx = 3\left(\frac{7^{\frac{3}{2}}}{27}-\frac{8}{27}\right)$$

Sikloid

Berikut kita akan menghitung panjang kurva lintasan (sikloid) suatu titik pada lingkaran yang berputar ke kanan pada permukaan datar. Misalkan jari-jari lingkaran tersebut adalah r. Posisi titik pusat lingkaran pada saat t adalah:

$$(rt, r).$$

Misalkan posisi titik pada lingkaran tersebut mula-mula (0,0) dan posisinya pada saat t adalah:

$$(r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t))).$$

Berikut kita plot lintasan tersebut dan beberapa posisi lingkaran ketika t=0, t=pi/2, t=r*pi.

```
>x &= r*(t-sin(t))
```

```
                         r (t - sin(t))
```

```
>y &= r*(1-cos(t))
```

```
                         r (1 - cos(t))
```

Berikut kita gambar sikloid untuk r=1.

```
>ex &= x-sin(x); ey &= 1-cos(x); aspect(1);
>plot2d(ex,ey,xmin=0,xmax=4pi,square=1); ...
>  plot2d("2+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
>  plot2d([2,ex(2)],[1,ey(2)],color=red,>add); ...
>  plot2d(ex(2),ey(2),>points,>add,color=red); ...
>  plot2d("2pi+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
>  plot2d([2pi,ex(2pi)],[1,ey(2pi)],color=red,>add);  ...
>  plot2d(ex(2pi),ey(2pi),>points,>add,color=red):
```

Berikut dihitung panjang lintasan untuk 1 putaran penuh. (Jangan salah menduga bahwa panjang lintasan 1 putaran penuh sama dengan keliling lingkaran!)

```
>ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(ds) // elemen
```

$$\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\cos x + 1} = \sqrt{2 - 2\cos x}$$

```
>ds &= trigsimp(ds); $ds
```

$$\sqrt{2 - 2\cos x}$$

```
>$showev('integrate(ds,x,0,2*pi)) // hitung panjang sikloid satu putaran pe
```

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos x}\, dx = 8$$

```
>integrate(mxm("ds"),0,2*pi) // hitung secara numerik
```

```
8
```

```
>romberg(mxm("ds"),0,2*pi) // cara lain hitung secara numerik
```

```
8
```

Perhatikan, seperti terlihat pada gambar, panjang sikloid lebih besar daripada keliling lingkarannya, yakni:

$$2\pi.$$

Kurvatur (Kelengkungan) Kurva

image: Osculating.png

Aslinya, kelengkungan kurva diferensiabel (yakni, kurva mulus yang tidak lancip) di titik P didefinisikan melalui lingkaran oskulasi (yaitu, lingkaran yang melalui titik P dan terbaik memperkirakan, paling banyak menyinggung kurva di sekitar P). Pusat dan radius kelengkungan kurva di P adalah pusat dan radius lingkaran oskulasi. Kelengkungan adalah kebalikan dari radius kelengkungan:

$$\kappa = \frac{1}{R}$$

dengan R adalah radius kelengkungan. (Setiap lingkaran memiliki kelengkungan ini pada setiap titiknya, dapat diartikan, setiap lingkaran berputar 2pi sejauh 2piR.)
Definisi ini sulit dimanipulasi dan dinyatakan ke dalam rumus untuk kurva umum. Oleh karena itu digunakan definisi lain yang ekivalen.

Definisi Kurvatur dengan Fungsi Parametrik Panjang Kurva

Setiap kurva diferensiabel dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik terhadap panjang kurva s:

$$\gamma(s) = (x(s),\ y(s)),$$

dengan x dan y adalah fungsi riil yang diferensiabel, yang memenuhi:

$$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} = 1.$$

Ini berarti bahwa vektor singgung

$$\mathbf{T}(s) = (x'(s),\ y'(s))$$

memiliki norm 1 dan merupakan vektor singgung satuan.
Apabila kurvanya memiliki turunan kedua, artinya turunan kedua x dan y ada, maka T′(s) ada. Vektor ini merupakan normal kurva yang arahnya menuju pusat kurvatur, norm-nya merupakan nilai kurvatur (kelengkungan):

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(s) &= \gamma'(s),\\ \mathbf{T}^2(s) &= 1 \text{ (konstanta)} \Rightarrow \mathbf{T}'(s)\cdot\mathbf{T}(s) = 0\\ \kappa(s) &= \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\gamma''(s)\| = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2}.\end{aligned}$$

Nilai

$$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

disebut jari-jari (radius) kelengkungan kurva.
Bilangan riil

$$k(s) = \pm\kappa(s)$$

disebut nilai kelengkungan bertanda.
Contoh:
Akan ditentukan kurvatur lingkaran

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t.$$

```
>fx &= r*cos(t); fy &=r*sin(t);
>&assume(t>0,r>0); s &=integrate(sqrt(diff(fx,t)^2+diff(fy,t)^2),t,0,t); s
```

```
r t
```

```
>&kill(s); fx &= r*cos(s/r); fy &=r*sin(s/r); // definisi ulang persamaan p
>k &= trigsimp(sqrt(diff(fx,s,2)^2+diff(fy,s,2)^2)); $k // nilai kurvatur l
```

$$\frac{1}{r}$$

Untuk representasi parametrik umum, misalkan

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

merupakan persamaan parametrik untuk kurva bidang yang terdiferensialkan dua kali. Kurvatur untuk kurva tersebut didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \quad (\phi \text{ adalah sudut kemiringan garis singgung dan } s \text{ adalah panjang kurva}) \\ &= \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.\end{aligned}$$

Selanjutnya, pembilang pada persamaan di atas dapat dicari sebagai berikut.

$$\sec^2\phi \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(\tan\phi) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \frac{1}{\sec^2\phi}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2\phi}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}.\end{aligned}$$

Jadi, rumus kurvatur untuk kurva parametrik

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

adalah

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Jika kurvanya dinyatakan dengan persamaan parametrik pada koordinat kutub

$$x = r(\theta)\cos\theta,\ y = r(\theta)\sin\theta,$$

maka rumus kurvaturnya adalah

$$\kappa(\theta)=\frac{r(\theta)^2+2r'(\theta)^2-r(\theta)r''(\theta)}{\left(r'(\theta)^2+r'(\theta)^2\right)^{3/2}}.$$

(Silakan Anda turunkan rumus tersebut!)
Contoh:
Lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari r dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik

$$x=r\cos t,\ y=r\sin t.$$

Nilai kelengkungan lingkaran tersebut adalah

$$\kappa(t)=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{\left(x'(t)^2+y'(t)^2\right)^{3/2}}=\frac{r^2}{r^3}=\frac{1}{r}.$$

Hasil cocok dengan definisi kurvatur suatu kelengkungan.
Kurva

$$y=f(x)$$

dapat dinyatakan ke dalam persamaan parametrik

$$x=t,\ y=f(t),\ \text{ dengan } x'(t)=1,\ x''(t)=0,$$

sehingga kurvaturnya adalah

$$\kappa(t)=\frac{y''(t)}{\left(1+y'(t)^2\right)^{3/2}}.$$

Contoh:
Akan ditentukan kurvatur parabola

$$y=ax^2+bx+c.$$

```
>function f(x) &= a*x^2+b*x+c; $y=f(x)
```

$$y=a\,x^2+b\,x+c$$

```
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) //
```

$$k\left(x\right)=\frac{2\,a}{\left(\left(2\,a\,x+b\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

```
>function f(x) &= x^2+x+1; $y=f(x) // akan kita plot kelengkungan parabola
```

$$y = x^2 + x + 1$$

```
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) //
```

$$k\left(x\right)=\frac{2}{\left(\left(2\,x+1\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Berikut kita gambar parabola tersebut beserta kurva kelengkungan, kurva jari-jari kelengkungan dan salah satu lingkaran oskulasi di titik puncak parabola. Perhatikan, puncak parabola dan jari-jari lingkaran oskulasi di puncak parabola adalah

$$(-1/2, 3/4),\ 1/k(2) = 1/2,$$

sehingga pusat lingkaran oskulasi adalah (-1/2, 5/4).

```
>plot2d(["f(x)", "k(x)"],-2,1, color=[blue,red]); plot2d("1/k(x)",-1.5,1,co
>plot2d("-1/2+1/k(-1/2)*cos(x)","5/4+1/k(-1/2)*sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add
```

Untuk kurva yang dinyatakan dengan fungsi implisit

$$F(x, y) = 0$$

dengan turunan-turunan parsial

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x},\ F_y = \frac{\partial F}{\partial y},\ F_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\ F_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\ F_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right),$$

berlaku

$$F_x dx + F_y dy = 0 \text{ atau } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y},$$

sehingga kurvaturnya adalah

$$\kappa = \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{\left(F_x^2 + F_y^2\right)^{3/2}}.$$

(Silakan Anda turunkan sendiri!)

Contoh 1:

Parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

dapat dinyatakan ke dalam persamaan implisit

$$ax^2 + bx + c - y = 0.$$

```
>function F(x,y) &=a*x^2+b*x+c-y; $F(x,y)
```

$$-y + a\,x^2 + b\,x + c$$

```
>Fx &= diff(F(x,y),x), Fxx &=diff(F(x,y),x,2), Fy &=diff(F(x,y),y), Fxy &=d
```

```
                                2 a x + b

                                   2 a

                                   - 1

                                    0

                                    0
```

```
>function k(x) &= (Fy^2*Fxx-2*Fx*Fy*Fxy+Fx^2*Fyy)/(Fx^2+Fy^2)^(3/2); $'k(x)
```

Hasilnya sama dengan sebelumnya yang menggunakan persamaan parabola biasa.

Latihan

- Bukalah buku Kalkulus.
- Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi).
- Untuk setiap fungsi, tentukan anti turunannya (jika ada), hitunglah integral tentu dengan batas-batas yang menarik (Anda tentukan sendiri), seperti contoh-contoh tersebut.
- Lakukan hal yang sama untuk fungsi-fungsi yang tidak dapat diintegralkan (cari sedikitnya 3 fungsi).
- Gambar grafik fungsi dan daerah integrasinya pada sumbu koordinat yang sama.
- Gunakan integral tentu untuk mencari luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva yang berpotongan di dua titik. (Cari dan gambar kedua kurva dan arsir (warnai) daerah yang

dibatasi oleh keduanya.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung volume benda putar kurva y= f(x) yang diputar mengelilingi sumbu x dari x=a sampai x=b, yakni

$$V = \int_a^b \pi(f(x)^2\, dx.$$

(Pilih fungsinya dan gambar kurva dan benda putar yang dihasilkan. Anda dapat mencari contoh-contoh bagaimana cara menggambar benda hasil perputaran suatu kurva.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung panjang kurva y=f(x) dari x=a sampai x=b dengan menggunakan rumus:

$$S = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx.$$

(Pilih fungsi dan gambar kurvanya.)
- Apabila fungsi dinyatakan dalam koordinat kutub x=f(r,t), y=g(r,t), r=h(t), x=a bersesuaian dengan t=t0 dan x=b bersesuian dengan t=t1, maka rumus di atas akan menjadi:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\, dt.$$

- Pilih beberapa kurva menarik (selain lingkaran dan parabola) dari buku kalkulus. Nyatakan setiap kurva tersebut dalam bentuk:

```
a. koordinat Kartesius (persamaan y=f(x))
b. koordinat kutub ( r=r(theta))
c. persamaan parametrik x=x(t), y=y(t)
d. persamaan implit F(x,y)=0
```

- Tentukan kurvatur masing-masing kurva dengan menggunakan keempat representasi tersebut (hasilnya harus sama).
- Gambarlah kurva asli, kurva kurvatur, kurva jari-jari lingkaran oskulasi, dan salah satu lingkaran oskulasinya.

Jawab

Soal 1:

```
>function f(x) &= 5*x^2; $f(x)
```

$$5\,x^2$$

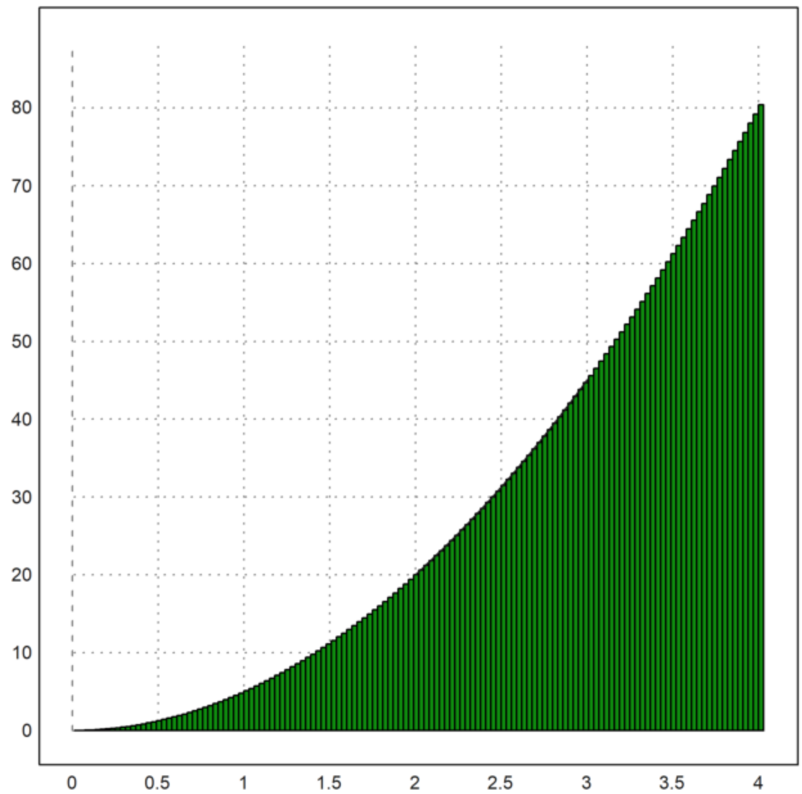
```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$5\int x^2\,dx=\frac{5\,x^3}{3}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,2,3))
```

$$5\int_{2}^{3}x^2\,dx=\frac{95}{3}$$

```
>x=0.01:0.03:4; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",2,3,>add):
```



Soal 2:

```
>function f(x) &= cos(2*x+5); $f(x)
```

$$\cos\left(2\,x+5\right)$$

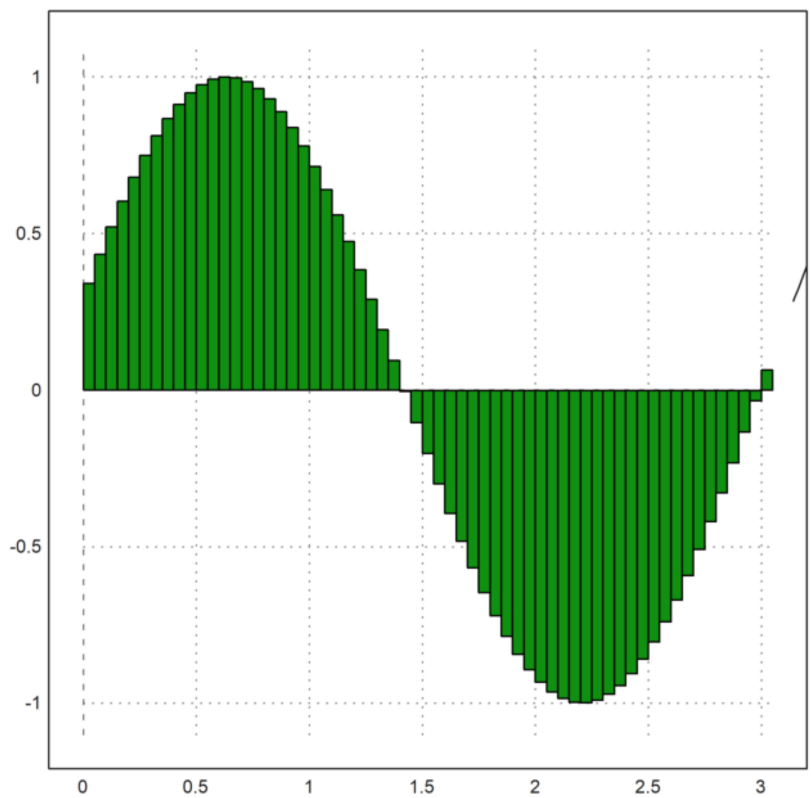
```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int \cos\left(2\,x+5\right)\,dx=\frac{\sin\left(2\,x+5\right)}{2}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,pi,2*pi))
```

$$\int_{\pi}^{2\,\pi}{\cos\left(2\,x+5\right)\;dx}=0$$

```
>x=0:0.05:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.03),>bar); plot2d("f(x)",pi,2*pi,>add):
```



Soal 3:

```
>function f(x) &= (sin(x))*(cos(x))^2; $f(x)
```

$$\cos^2 x\,\sin x$$

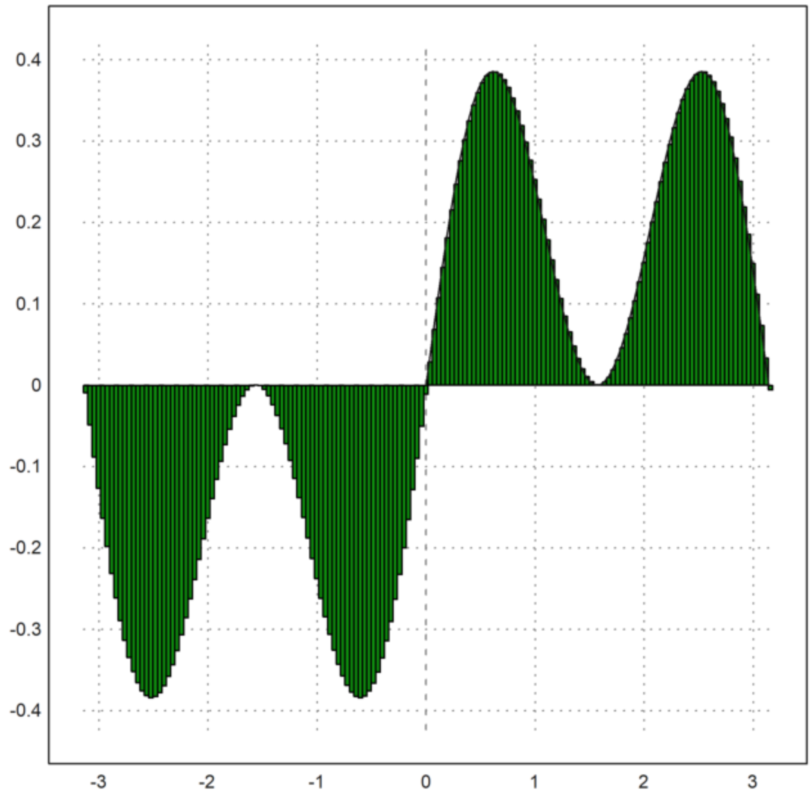
```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int \cos^2 x\, \sin x\, dx = -\frac{\cos^3 x}{3}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,pi))
```

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x\, \sin x\, dx = \frac{2}{3}$$

```
>x=-pi:0.04:pi; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



Soal 4:

```
>function f(x) &= (x^2*(2-x^3)^(1/2)); $f(x)
```

$$x^2\, \sqrt{2 - x^3}$$

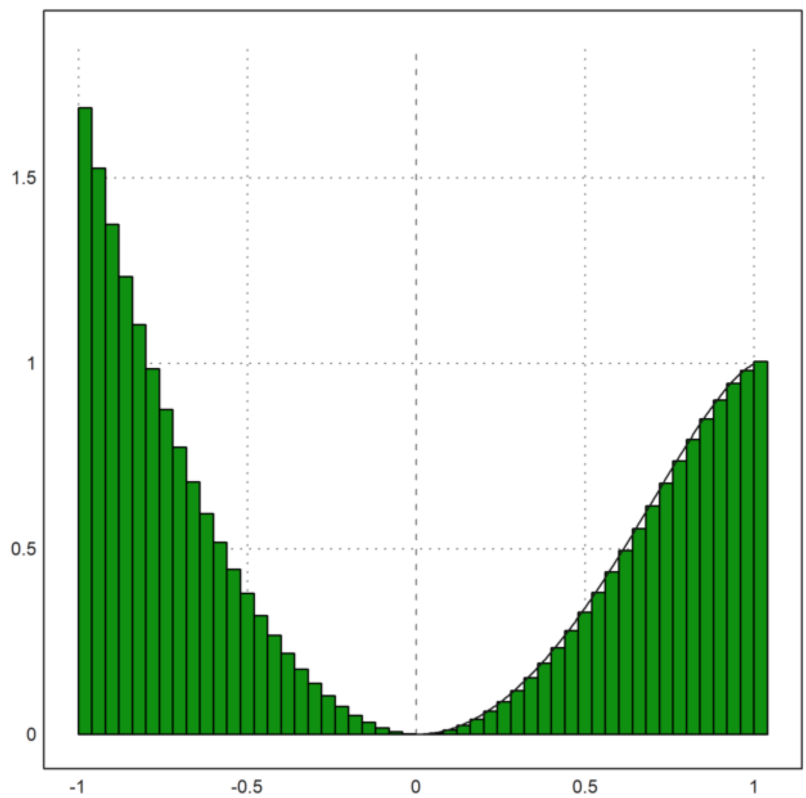
```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int x^2\,\sqrt{2-x^3}\,dx=-\frac{2\,\left(2-x^3\right)^{\frac{3}{2}}}{9}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_{0}^{1}{x^2\,\sqrt{2-x^3}\,dx}=\frac{2^{\frac{5}{2}}}{9}-\frac{2}{9}$$

```
>x=-1:0.04:1; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```



Soal 5:

```
>function f(x) &= sqrt(24-x^2); $f(x)
```

$$\sqrt{24-x^2}$$

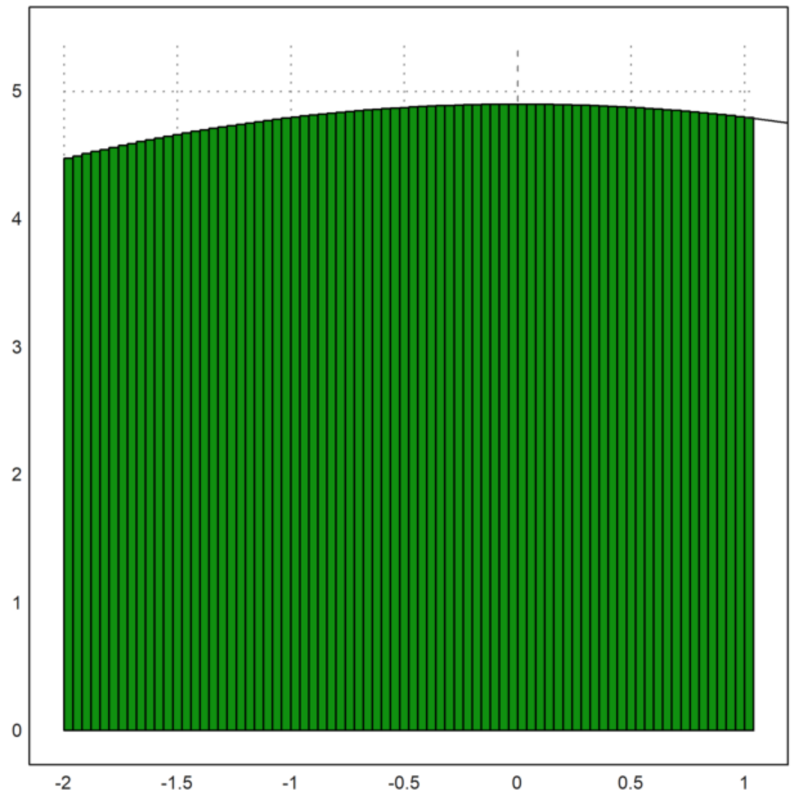
```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int \sqrt{24-x^2}\,dx = 12\,\arcsin\left(\frac{x}{2\,\sqrt{6}}\right) + \frac{x\,\sqrt{24-x^2}}{2}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,1,2))
```

$$\int_1^2 \sqrt{24-x^2}\,dx = 12\,\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - \frac{24\,\arcsin\left(\frac{1}{2\,\sqrt{6}}\right)+\sqrt{23}}{2} + 2\,\sqrt{5}$$

```
>x=-2:0.04:1; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",1,2,>add):
```

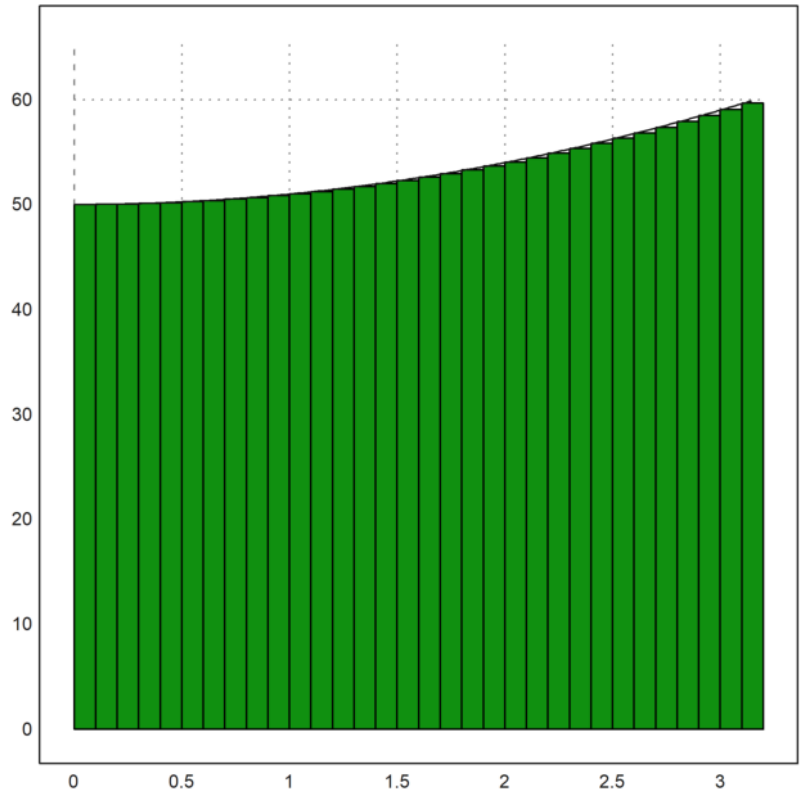


Soal 6:

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
>function f(x) &= x^2+50; $f(x)
```

$$x^2 + 50$$

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



Barisan dan Deret

(Catatan: bagian ini belum lengkap. Anda dapat membaca contoh-contoh pengguanaan EMT dan Maxima untuk menghitung limit barisan, rumus jumlah parsial suatu deret, jumlah tak hingga suatu deret konvergen, dan sebagainya. Anda dapat mengeksplor contoh-contoh di EMT atau perbagai panduan penggunaan Maxima di software Maxima atau dari Internet.)

Barisan dapat didefinisikan dengan beberapa cara di dalam EMT, di antaranya:

- dengan cara yang sama seperti mendefinisikan vektor dengan elemen-elemen beraturan (menggunakan titik dua ":");
- menggunakan perintah "sequence" dan rumus barisan (suku ke -n);
- menggunakan perintah "iterate" atau "niterate";
- menggunakan fungsi Maxima "create_list" atau "makelist" untuk menghasilkan barisan simbolik;
- menggunakan fungsi biasa yang inputnya vektor atau barisan;
- menggunakan fungsi rekursif.

EMT menyediakan beberapa perintah (fungsi) terkait barisan, yakni:

- sum: menghitung jumlah semua elemen suatu barisan
- cumsum: jumlah kumulatif suatu barisan
- differences: selisih antar elemen-elemen berturutan

EMT juga dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga maupun deret tak hingga, dengan menggunakan perintah (fungsi) "sum". Perhitungan dapat dilakukan secara numerik maupun simbolik dan eksak.

Berikut adalah beberapa contoh perhitungan barisan dan deret menggunakan EMT.

```
>1:10 // barisan sederhana
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

```
>1:2:30
```

```
[1,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29]
```

Iterasi dan Barisan

EMT menyediakan fungsi iterate("g(x)", x0, n) untuk melakukan iterasi

$$x_{k+1} = g(x_k),\ x_0 = x_0, k = 1, 2, 3, ..., n.$$

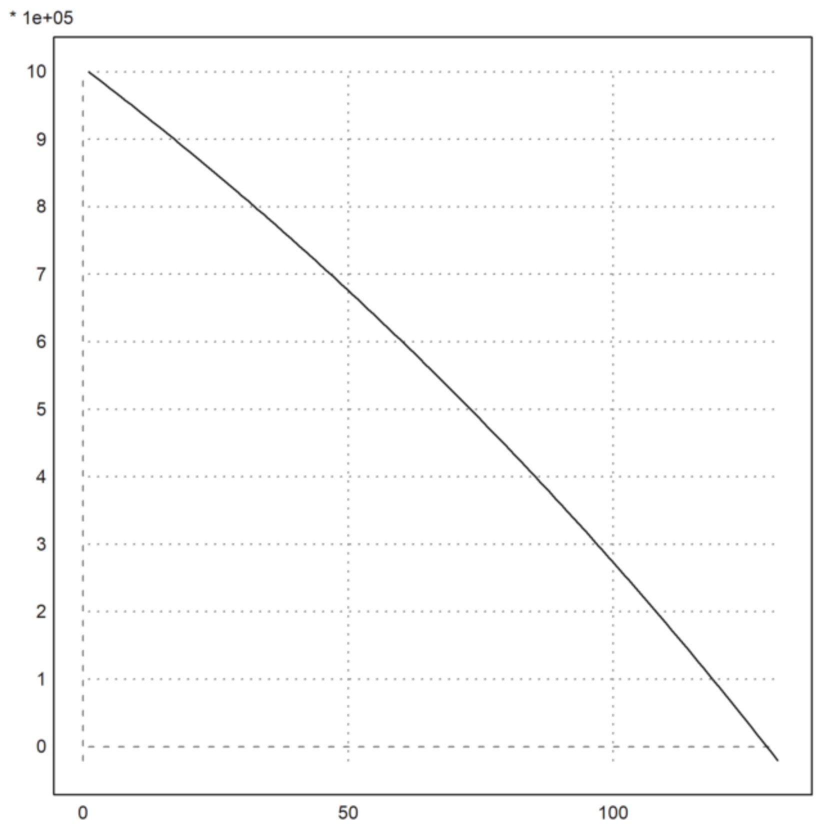
Berikut ini disajikan contoh-contoh penggunaan iterasi dan rekursi dengan EMT. Contoh pertama menunjukkan pertumbuhan dari nilai awal 1000 dengan laju pertambahan 5%, selama 10 periode.

```
>q=1.05; iterate("x*q",1000,n=10)'
```

```
           1000
           1050
         1102.5
        1157.63
        1215.51
        1276.28
         1340.1
         1407.1
        1477.46
        1551.33
        1628.89
```

Contoh berikutnya memperlihatkan bahaya menabung di bank pada masa sekarang! Dengan bunga tabungan sebesar 6% per tahun atau 0.5% per bulan dipotong pajak 20%, dan biaya administrasi 10000 per bulan, tabungan sebesar 1 juta tanpa diambil selama sekitar 10 tahunan akan habis diambil oleh bank!

```
>r=0.005; plot2d(iterate("(1+0.8*r)*x-10000",1000000,n=130)):
```



Silakan Anda coba-coba, dengan tabungan minimal berapa agar tidak akan habis diambil oleh bank dengan ketentuan bunga dan biaya administrasi seperti di atas.
Berikut adalah perhitungan minimal tabungan agar aman di bank dengan bunga sebesar r dan biaya administrasi a, pajak bunga 20%.

```
>$solve(0.8*r*A-a,A), $% with [r=0.005, a=10]
```

$$[A = 2500.0]$$

Berikut didefinisikan fungsi untuk menghitung saldo tabungan, kemudian dilakukan iterasi.

```
>function saldo(x,r,a) := round((1+0.8*r)*x-a,2);
>iterate({{"saldo",0.005,10}},1000,n=6)
```

```
[1000,   994,   987.98,   981.93,   975.86,   969.76,   963.64]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},2000,n=6)
```

```
[2000,   1998,   1995.99,   1993.97,   1991.95,   1989.92,   1987.88]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},2500,n=6)
```

```
[2500,   2500,   2500,   2500,   2500,   2500,   2500]
```

Tabungan senilai 2,5 juta akan aman dan tidak akan berubah nilai (jika tidak ada penarikan), sedangkan jika tabungan awal kurang dari 2,5 juta, lama kelamaan akan berkurang meskipun tidak pernah dilakukan penarikan uang tabungan.

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},3000,n=6)
```

```
[3000,   3002,   3004.01,   3006.03,   3008.05,   3010.08,   3012.12]
```

Tabungan yang lebih dari 2,5 juta baru akan bertambah jika tidak ada penarikan.
Untuk barisan yang lebih kompleks dapat digunakan fungsi "sequence()". Fungsi ini menghitung nilai-nilai x[n] dari semua nilai sebelumnya, x[1],...,x[n-1] yang diketahui.
Berikut adalah contoh barisan Fibonacci.

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1$$

```
>sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],15)
```

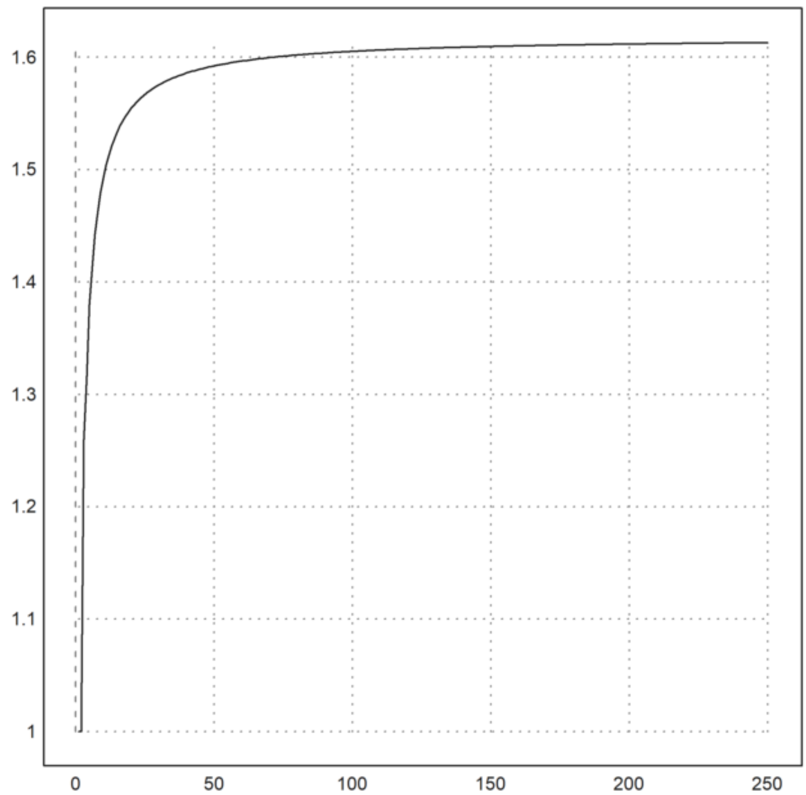
```
[1,   1,   2,   3,   5,   8,   13,   21,   34,   55,   89,   144,   233,   377,   610]
```

Barisan Fibonacci memiliki banyak sifat menarik, salah satunya adalah akar pangkat ke-n suku ke-n akan konvergen ke pecahan emas:

```
>$'(1+sqrt(5))/2=float((1+sqrt(5))/2)
```

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618033988749895$$

```
>plot2d(sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],250)^(1/(1:250))):
```



Barisan yang sama juga dapat dihasilkan dengan menggunakan loop.

```
>x=ones(500); for k=3 to 500; x[k]=x[k-1]+x[k-2]; end;
```

Rekursi dapat dilakukan dengan menggunakan rumus yang tergantung pada semua elemen sebelumnya. Pada contoh berikut, elemen ke-n merupakan jumlah (n-1) elemen sebelumnya, dimulai dengan 1 (elemen ke-1). Jelas, nilai elemen ke-n adalah 2^(n-2), untuk n=2, 4, 5, ...

```
>sequence("sum(x)",1,10)
```

```
[1,   1,   2,   4,   8,   16,   32,   64,   128,   256]
```

Selain menggunakan ekspresi dalam x dan n, kita juga dapat menggunakan fungsi. Pada contoh berikut, digunakan iterasi

$$x_n = A \cdot x_{n-1},$$

dengan A suatu matriks 2x2, dan setiap x[n] merupakan matriks/vektor 2x1.

```
>A=[1,1;1,2]; function suku(x,n) := A.x[,n-1]
>sequence("suku",[1;1],6)
```

```
  Real 2 x 6 matrix

              1             2             5            13       ...
              1             3             8            21       ...
```

Hasil yang sama juga dapat diperoleh dengan menggunakan fungsi perpangkatan matriks "matrixpower()". Cara ini lebih cepat, karena hanya menggunakan perkalian matriks sebanyak log_2(n).

$$x_n = A.x_{n-1} = A^2.x_{n-2} = A^3.x_{n-3} = ... = A^{n-1}.x_1.$$

```
>sequence("matrixpower(A,n).[1;1]",1,6)
```

```
  Real 2 x 6 matrix

              1             5            13            34       ...
              1             8            21            55       ...
```

Spiral Theodorus

image: Spiral_of_Theodorus.png
Spiral Theodorus (spiral segitiga siku-siku) dapat digambar secara rekursif. Rumus rekursifnya adalah:

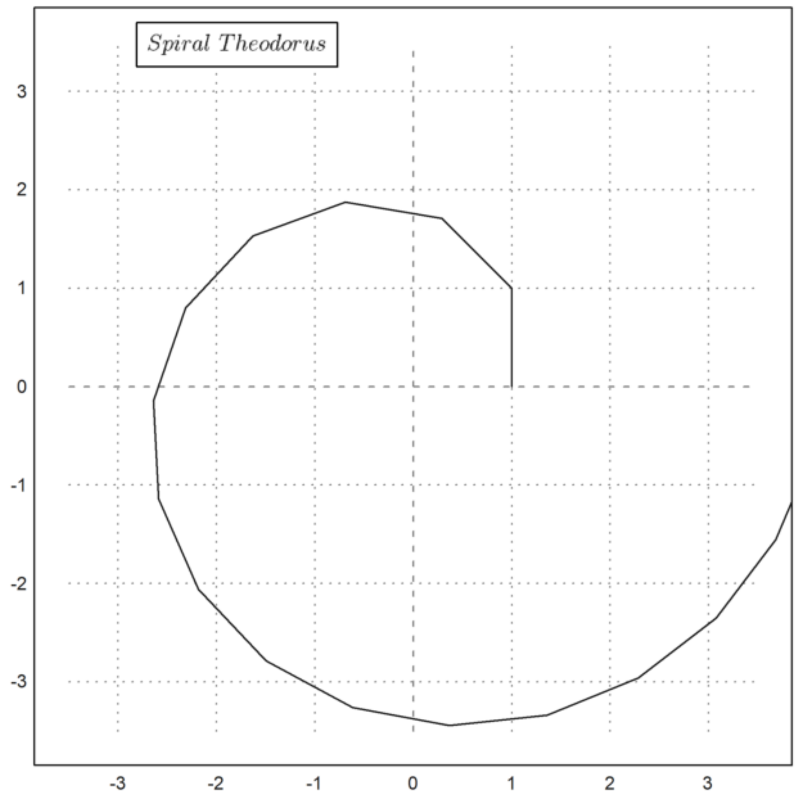
$$x_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n-1}}\right) x_{n-1}, \quad x_1 = 1,$$

yang menghasilkan barisan bilangan kompleks.

```
>function g(n) := 1+I/sqrt(n)
```

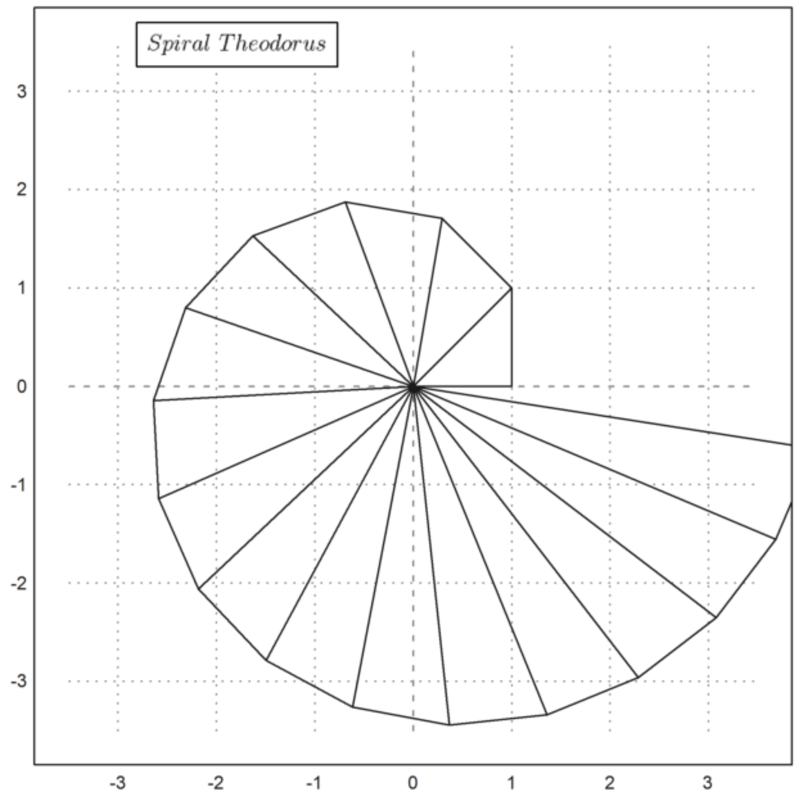
Rekursinya dapat dijalankan sebanyak 17 untuk menghasilkan barisan 17 bilangan kompleks, kemudian digambar bilangan-bilangan kompleksnya.

```
>x=sequence("g(n-1)*x[n-1]",1,17); plot2d(x,r=3.5); textbox(latex("Spiral\
```



Selanjutnya dihubungan titik 0 dengan titik-titik kompleks tersebut menggunakan loop.

```
>for i=1:cols(x); plot2d([0,x[i]],>add); end:
```




```
>
```

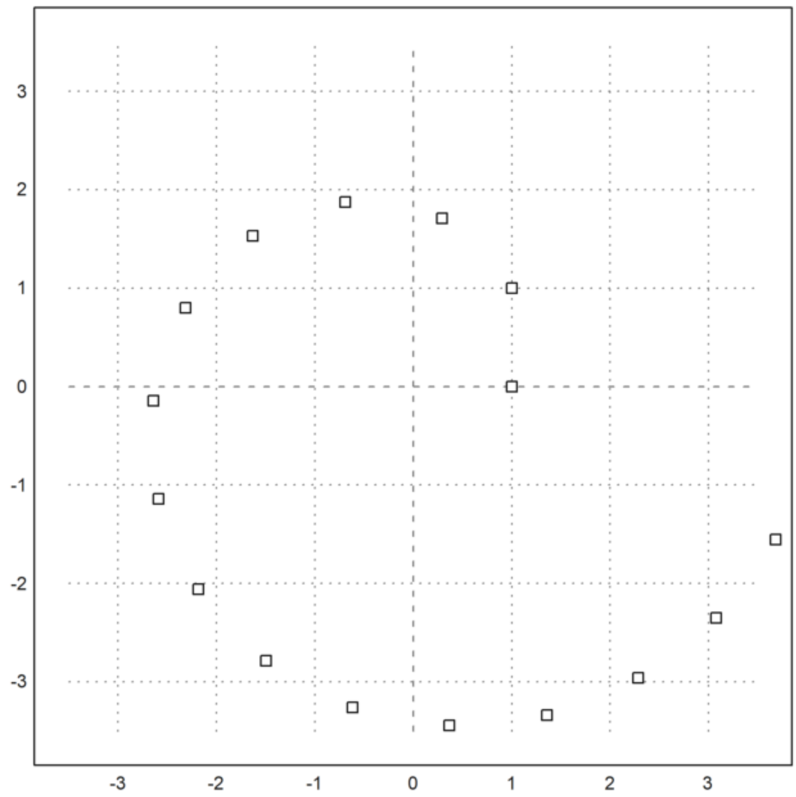
Spiral tersebut juga dapat didefinisikan menggunakan fungsi rekursif, yang tidak memmerlukan indeks dan bilangan kompleks. Dalam hal ini diigunakan vektor kolom pada bidang.

```
>function gstep (v) ...
```

```
  w=[-v[2];v[1]];
  return v+w/norm(w);
  endfunction
```

Jika dilakukan iterasi 16 kali dimulai dari [1;0] akan didapatkan matriks yang memuat vektor-vektor dari setiap iterasi.

```
>x=iterate("gstep",[1;0],16); plot2d(x[1],x[2],r=3.5,>points):
```



Kekonvergenan

Terkadang kita ingin melakukan iterasi sampai konvergen. Apabila iterasinya tidak konvergen setelah ditunggu lama, Anda dapat menghentikannya dengan menekan tombol [ESC].

```
>iterate("cos(x)",1) // iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan x(0)=1.
```

```
0.739085133216
```

Iterasi tersebut konvergen ke penyelesaian persamaan

$$x = \cos(x).$$

Iterasi ini juga dapat dilakukan pada interval, hasilnya adalah barisan interval yang memuat akar tersebut.

```
>hasil := iterate("cos(x)",~1,2~) //iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan interv
```

```
~0.739085133211,0.7390851332133~
```

Jika interval hasil tersebut sedikit diperlebar, akan terlihat bahwa interval tersebut memuat akar persamaan x=cos(x).

```
>h=expand(hasil,100), cos(h) << h
```

```
~0.73908513309,0.73908513333~
1
```

Iterasi juga dapat digunakan pada fungsi yang didefinisikan.

```
>function f(x) := (x+2/x)/2
```

Iterasi x(n+1)=f(x(n)) akan konvergen ke akar kuadrat 2.

```
>iterate("f",2), sqrt(2)
```

```
1.41421356237
1.41421356237
```

Jika pada perintah iterate diberikan tambahan parameter n, maka hasil iterasinya akan ditampilkan mulai dari iterasi pertama sampai ke-n.

```
>iterate("f",2,5)
```

```
[2,   1.5,   1.41667,   1.41422,   1.41421,   1.41421]
```

Untuk iterasi ini tidak dapat dilakukan terhadap interval.

```
>niterate("f",~1,2~,5)
```

```
[ ~1,2~,   ~1,2~,   ~1,2~,   ~1,2~,   ~1,2~,   ~1,2~ ]
```

Perhatikan, hasil iterasinya sama dengan interval awal. Alasannya adalah perhitungan dengan interval bersifat terlalu longgar. Untuk meingkatkan perhitungan pada ekspresi dapat digunakan pembagian intervalnya, menggunakan fungsi ieval().

```
>function s(x) := ieval("(x+2/x)/2",x,10)
```

Selanjutnya dapat dilakukan iterasi hingga diperoleh hasil optimal, dan intervalnya tidak semakin mengecil. Hasilnya berupa interval yang memuat akar persamaan:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Satu-satunya solusi adalah

$$x = \sqrt{2}.$$

```
>iterate("s",~1,2~)
```

```
 ~1.41421356236,1.41421356239~
```

Fungsi "iterate()" juga dapat bekerja pada vektor. Berikut adalah contoh fungsi vektor, yang menghasilkan rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri.

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n} \right)$$

Iterasi ke-n disimpan pada vektor kolom x[n].

```
>function g(x) := [(x[1]+x[2])/2;sqrt(x[1]*x[2])]
```

Iterasi dengan menggunakan fungsi tersebut akan konvergen ke rata-rata aritmetika dan geometri dari nilai-nilai awal.

```
>iterate("g",[1;5])
```

```
       2.60401
       2.60401
```

Hasil tersebut konvergen agak cepat, seperti kita cek sebagai berikut.

```
>iterate("g",[1;5],4)
```

```
             1             3       2.61803       2.60403       2.60401
             5       2.23607       2.59002       2.60399       2.60401
```

Iterasi pada interval dapat dilakukan dan stabil, namun tidak menunjukkan bahwa limitnya pada batas-batas yang dihitung.

```
>iterate("g",[~1~;~5~],4)
```

```
 Interval 2 x 5 matrix

 ~0.99999999999999778,1.0000000000000022~     ...
 ~4.9999999999999911,5.0000000000000089~     ...
```

Iterasi berikut konvergen sangat lambat.

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

```
>iterate("sqrt(x)",2,10)
```

```
[2,  1.41421,  1.18921,  1.09051,  1.04427,  1.0219,  1.01089,
1.00543,  1.00271,  1.00135,  1.00068]
```

Kekonvergenan iterasi tersebut dapat dipercepatdengan percepatan Steffenson:

```
>steffenson("sqrt(x)",2,10)
```

```
[1.04888,  1.00028,  1,  1]
```

Iterasi menggunakan Loop yang ditulis Langsung

Berikut adalah beberapa contoh penggunaan loop untuk melakukan iterasi yang ditulis langsung pada baris perintah.

```
>x=2; repeat x=(x+2/x)/2; until x^2~=2; end; x,
```

```
1.41421356237
```

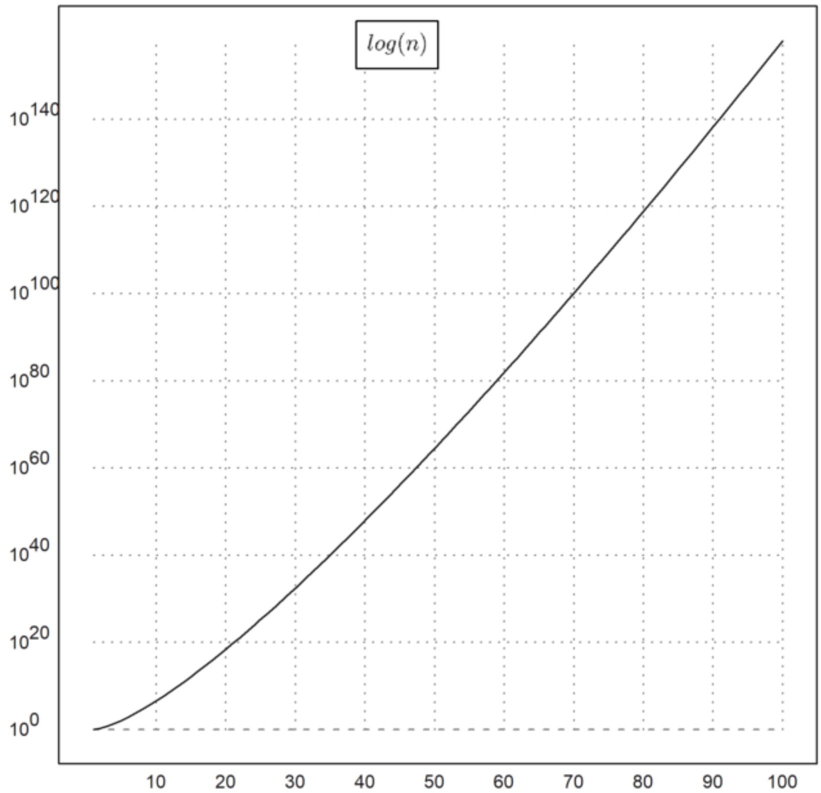
Penggabungan matriks menggunakan tanda "|" dapat digunakan untuk menyimpan semua hasil iterasi.

```
>v=[1]; for i=2 to 8; v=v|(v[i-1]*i); end; v,
```

```
[1,  2,  6,  24,  120,  720,  5040,  40320]
```

hasil iterasi juga dapat disimpan pada vektor yang sudah ada.

```
>v=ones(1,100); for i=2 to cols(v); v[i]=v[i-1]*i; end; ...
>plot2d(v,logplot=1); textbox(latex(&log(n)),x=0.5):
```




```
>A =[0.5,0.2;0.7,0.1]; b=[2;2]; ...
>x=[1;1]; repeat xnew=A.x-b; until all(xnew~=x); x=xnew; end; ...
>x,
```

```
      -7.09677
      -7.74194
```

Iterasi di dalam Fungsi

Fungsi atau program juga dapat menggunakan iterasi dan dapat digunakan untuk melakukan iterasi. Berikut adalah beberapa contoh iterasi di dalam fungsi.
Contoh berikut adalah suatu fungsi untuk menghitung berapa lama suatu iterasi konvergen. Nilai fungsi tersebut adalah hasil akhir iterasi dan banyak iterasi sampai konvergen.

```
>function map hiter(f$,x0) ...
```

```
  x=x0;
  maxiter=0;
  repeat
    xnew=f$(x);
    maxiter=maxiter+1;
```

```
    until xnew~=x;
    x=xnew;
  end;
  return maxiter;
  endfunction
```

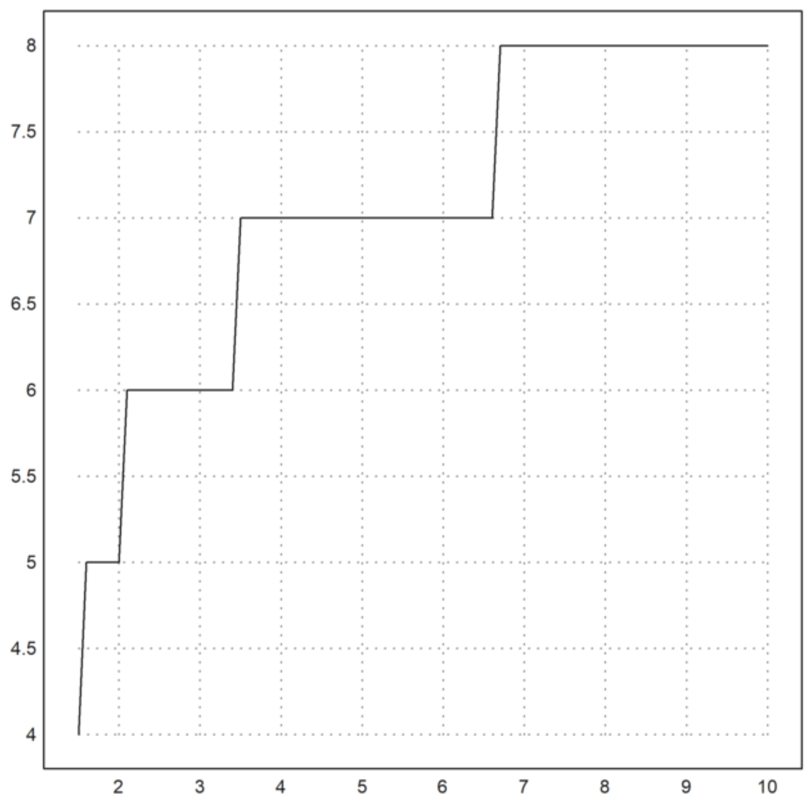
Misalnya, berikut adalah iterasi untuk mendapatkan hampiran akar kuadrat 2, cukup cepat, konvergen pada iterasi ke-5, jika dimulai dari hampiran awal 2.

```
>hiter("(x+2/x)/2",2)
```

```
  5
```

Karena fungsinya didefinisikan menggunakan "map". maka nilai awalnya dapat berupa vektor.

```
>x=1.5:0.1:10; hasil=hiter("(x+2/x)/2",x); ...
>  plot2d(x,hasil):
```



Dari gambar di atas terlihat bahwa kekonvergenan iterasinya semakin lambat, untuk nilai awal semakin besar, namun penambahnnya tidak kontinu. Kita dapat menemukan kapan maksimum iterasinya bertambah.

```
>hasil[1:10]
```

```
[4,   5,   5,   5,   5,   5,   6,   6,   6,   6]
```

```
>x[nonzeros(differences(hasil))]
```

```
[1.5,   2,   3.4,   6.6]
```

maksimum iterasi sampai konvergen meningkat pada saat nilai awalnya 1.5, 2, 3.4, dan 6.6. Contoh berikutnya adalah metode Newton pada polinomial kompleks berderajat 3.

```
>p &= x^3-1; newton &= x-p/diff(p,x); $newton
```

$$x - \frac{x^3 - 1}{3\,x^2}$$

Selanjutnya didefinisikan fungsi untuk melakukan iterasi (aslinya 10 kali).

```
>function iterasi(f$,x,n=10) ...
```

```
loop 1 to n; x=f$(x); end;
return x;
endfunction
```

Kita mulai dengan menentukan titik-titik grid pada bidang kompleksnya.

```
>r=1.5; x=linspace(-r,r,501); Z=x+I*x'; W=iterasi(newton,Z);
```

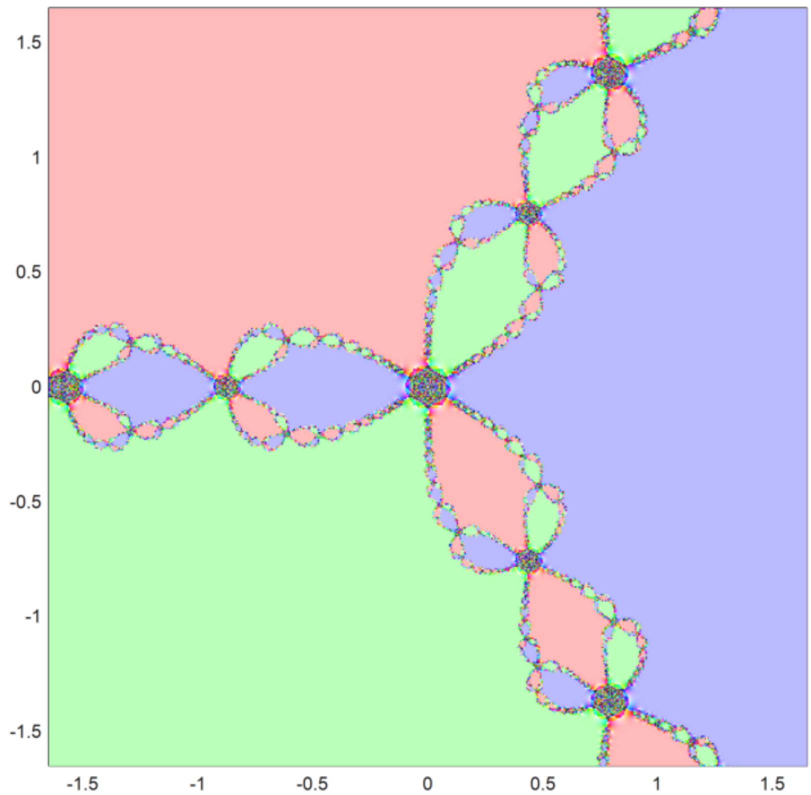
Berikut adalah akar-akar polinomial di atas.

```
>z=&solve(p)()
```

```
[ -0.5+0.866025i,  -0.5-0.866025i,  1+0i  ]
```

Untuk menggambar hasil iterasinya, dihitung jarak dari hasil iterasi ke-10 ke masing-masing akar, kemudian digunakan untuk menghitung warna yang akan digambar, yang menunjukkan limit untuk masing-masing nilai awal.
Fungsi plotrgb() menggunakan jendela gambar terkini untuk menggambar warna RGB sebagai matriks.

```
>C=rgb(max(abs(W-z[1]),1),max(abs(W-z[2]),1),max(abs(W-z[3]),1)); ...
>  plot2d(none,-r,r,-r,r); plotrgb(C):
```



Iterasi Simbolik

Seperti sudah dibahas sebelumnya, untuk menghasilkan barisan ekspresi simbolik dengan Maxima dapat digunakan fungsi makelist().

```
>&powerdisp:true // untuk menampilkan deret pangkat mulai dari suku berpang
```

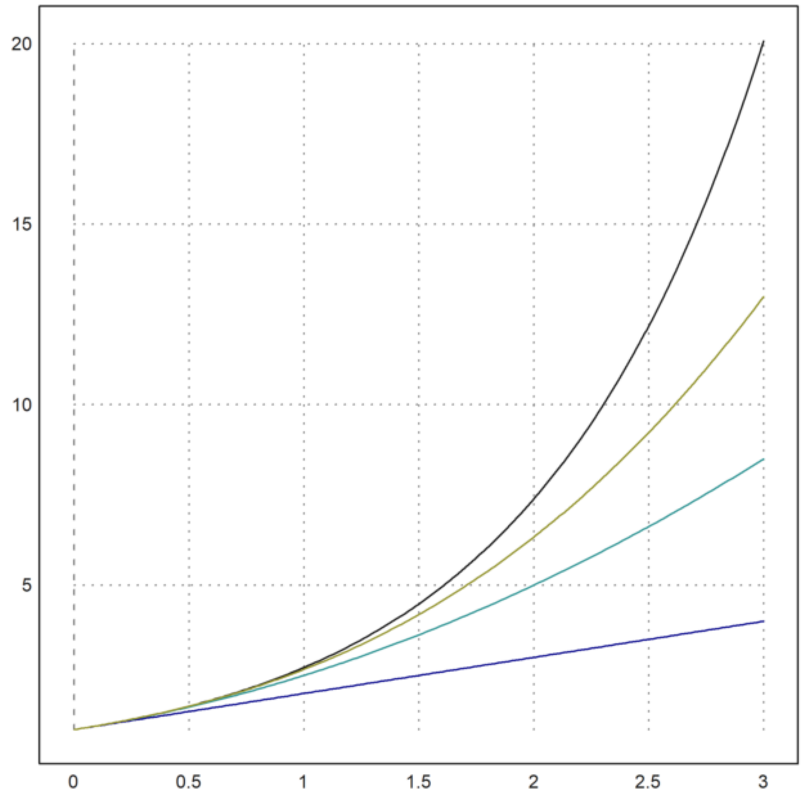
```
true
```

```
>deret &= makelist(taylor(exp(x),x,0,k),k,1,3); $deret // barisan deret Tay
```

$$\left[1+x,1+x+\frac{x^2}{2},1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right]$$

Untuk mengubah barisan deret tersebut menjadi vektor string di EMT digunakan fungsi mxm2str(). Selanjutnya, vektor string/ekspresi hasilnya dapat digambar seperti menggambar vektor eskpresi pada EMT.

```
>plot2d("exp(x)",0,3); // plot fungsi aslinya, e^x
>plot2d(mxm2str("deret"),>add,color=4:6): // plot ketiga deret taylor hampi
```

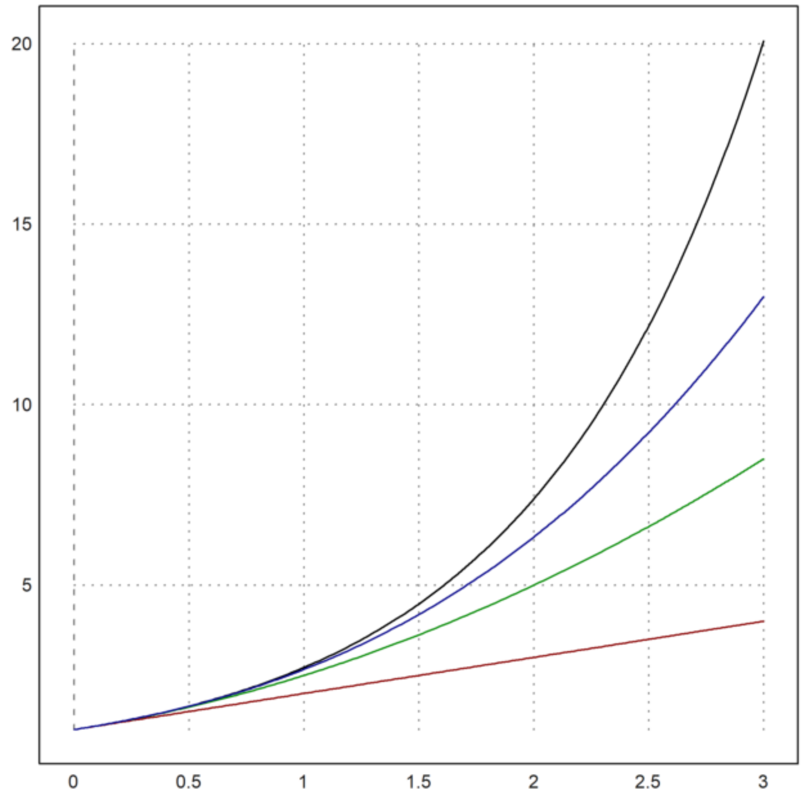


Selain cara di atas dapat juga dengan cara menggunakan indeks pada vektor/list yang dihasilkan.

```
>$deret[3]
```

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$

```
>plot2d(["exp(x)",&deret[1],&deret[2],&deret[3]],0,3,color=1:4):
```



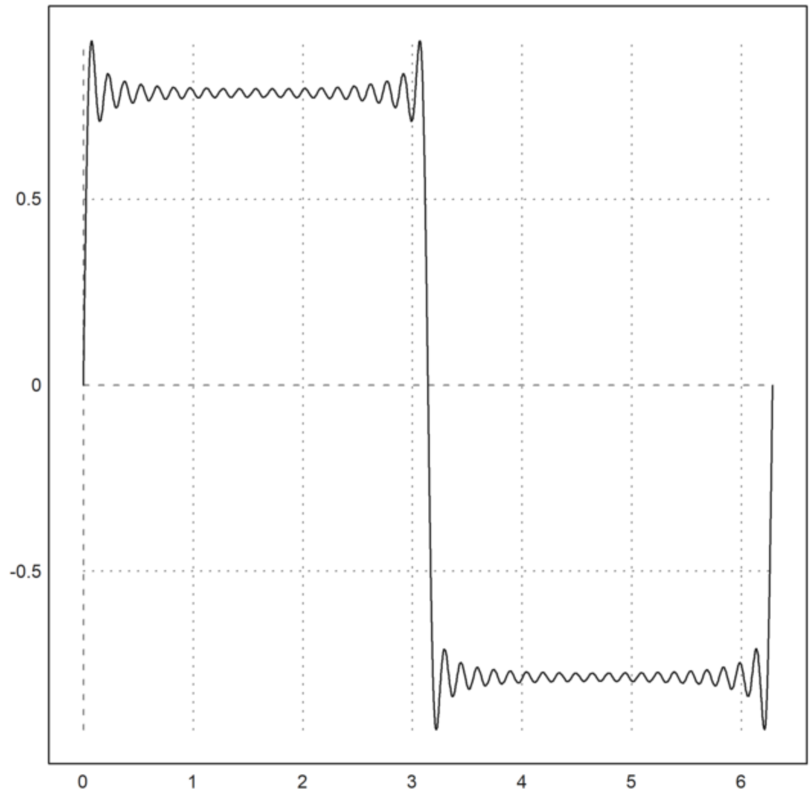

```
>$sum(sin(k*x)/k,k,1,5)
```

$$\sin x+\frac{\sin \left(2\,x\right)}{2}+\frac{\sin \left(3\,x\right)}{3}+\frac{\sin \left(4\,x\right)}{4}+\frac{\sin \left(5\,x\right)}{5}$$

Berikut adalah cara menggambar kurva

$$y=\sin(x)+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots.$$

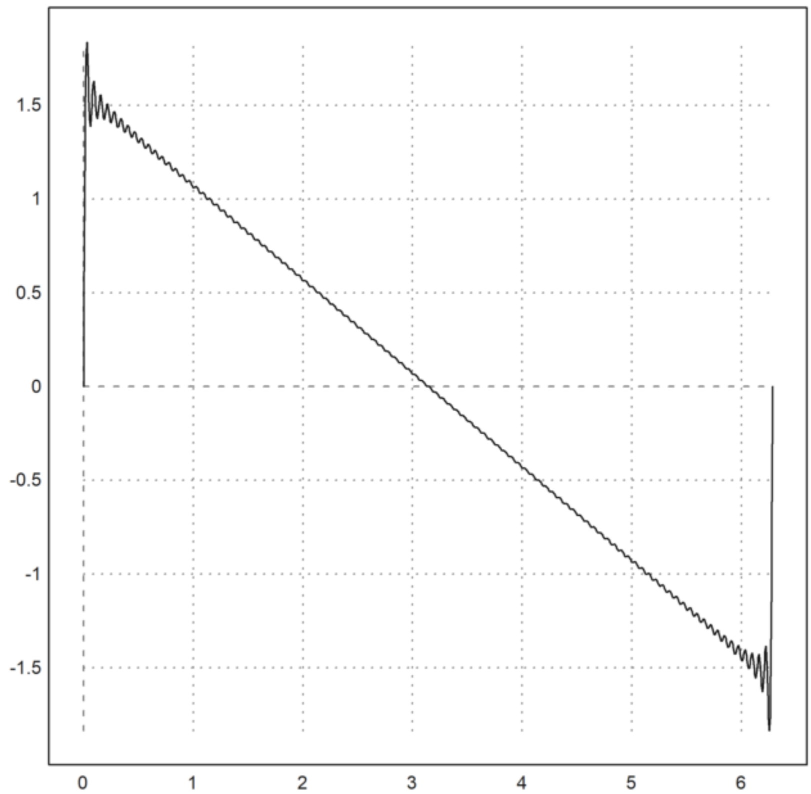
```
>plot2d(&sum(sin((2*k+1)*x)/(2*k+1),k,0,20),0,2pi):
```



Hal serupa juga dapat dilakukan dengan menggunakan matriks, misalkan kita akan menggambar kurva

$$y = \sum_{k=1}^{100} \frac{\sin(kx)}{k}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

```
>x=linspace(0,2pi,1000); k=1:100; y=sum(sin(k*x')/k)'; plot2d(x,y):
```



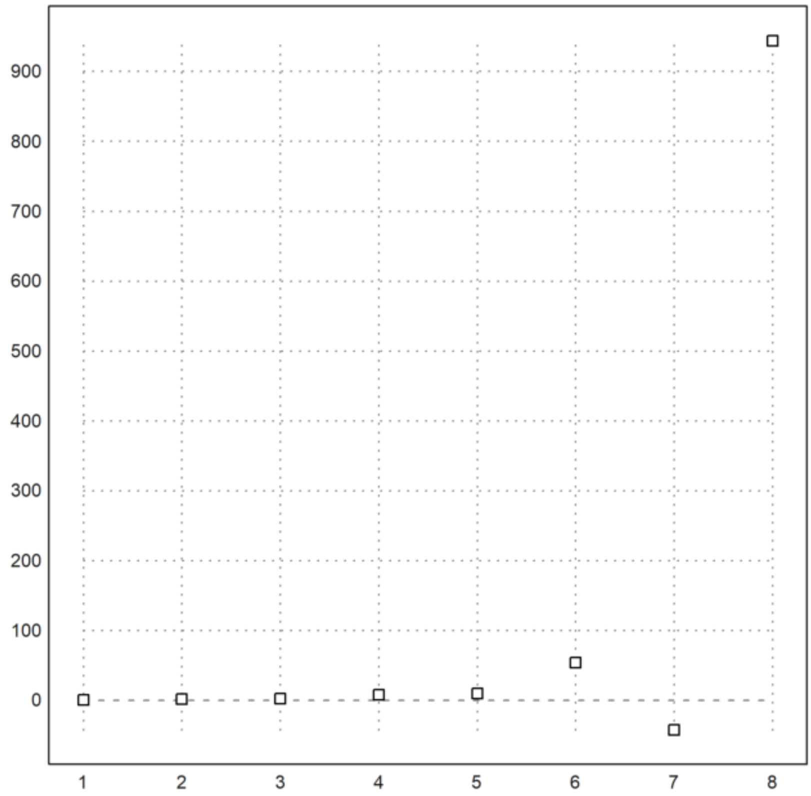
Tabel Fungsi

Terdapat cara menarik untuk menghasilkan barisan dengan ekspresi Maxima. Perintah mxmtable() berguna untuk menampilkan dan menggambar barisan dan menghasilkan barisan sebagai vektor kolom.

Sebagai contoh berikut adalah barisan turunan ke-n x^x di x=1.

```
>mxmtable("diffat(x^x,x=1,n)","n",1,8,frac=1);
```

```
     1
     2
     3
     8
    10
    54
   -42
   944
```




```
>$'sum(k, k, 1, n) = factor(ev(sum(k, k, 1, n),simpsum=true)) // simpsum:me
```

```
>$'sum(1/(3^k+k), k, 0, inf) = factor(ev(sum(1/(3^k+k), k, 0, inf),simpsum=
```

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum(1/x^2, x, 1, inf)= ev(sum(1/x^2, x, 1, inf),simpsum=true) // ev: men
>$'sum((-1)^(k-1)/k, k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^(x-1)/x, x, 1, inf),si
```

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf
>$ev(sum(1/n!, n, 0, inf),simpsum=true)
```

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung, harusnya hasilnya e.

```
>&assume(abs(x)<1); $'sum(a*x^k, k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsu
```

Deret geometri tak hingga, dengan asumsi rasional antara -1 dan 1.

```
>$'sum(x^k/k!,k,0,inf)=ev(sum(x^k/k!,k,0,inf),simpsum=true)
>$limit(sum(x^k/k!,k,0,n),n,inf)
>function d(n) &= sum(1/(k^2-k),k,2,n); $'d(n)=d(n)
>$d(10)=ev(d(10),simpsum=true)
>$d(100)=ev(d(100),simpsum=true)
```

Deret Taylor

Deret Taylor suatu fungsi f yang diferensiabel sampai tak hingga di sekitar x=a adalah:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}.$$

```
>$'e^x =taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x=0, sampai su
>$'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1
```

BAB 5

EMT Untuk Geometri

Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometeri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

```
defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d
setPlotrange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang
```

koordinat

```
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas
```

sumbu-x dan y adalah -r sd r

```
plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"
plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label
```

"AB" sejauh d

```
plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d
plotCircle (c,"c",v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P
```

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

```
turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi
turnLeft(v):   memutar vektor v ke kiri
turnRight(v):  memutar vektor v ke kanan
normalize(v): normal vektor v
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektorv dan w.
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh.
```

ax+by=c.

```
lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v
getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g
getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g
getPointOnLine(g):  titik pada garis g
perpendicular(A, g):  garis melalui A tegak lurus garis g
parallel (A, g):  garis melalui A sejajar garis g
lineIntersection(g, h):  titik potong garis g dan h
projectToLine(A, g):   proyeksi titik A pada garis g
distance(A, B):  jarak titik A dan B
distanceSquared(A, B):  kuadrat jarak A dan B
quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B
areaTriangle(A, B, C):  luas segitiga ABC
computeAngle(A, B, C):   besar sudut <ABC
angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut <ABC
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r
getCircleCenter(c):  pusat lingkaran c
getCircleRadius(c):  jari-jari lingkaran c
circleThrough(A,B,C):  lingkaran melalui A, B, C
middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB
lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkran c
circleCircleIntersections (c1, c2):  titik potong lingkaran c1 dan
```

c2

```
planeThrough(A, B, C):  bidang melalui titik A, B, C
```

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

```
getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y
getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan
```

y dengan titik A pada

```
sisi positif (kanan/atas) garis
quad(A,B): kuadrat jarak AB
spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni
```

sin(alpha)^2 dengan

```
alpha sudut yang menghadap sisi a.
crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga
```

dengan panjang sisi a, b, c.

```
triplespread(sa,sb,sc): persamaan 3 spread sa,sb,sc yang memebntuk
```

suatu segitiga

```
doublespread(sa): Spread sudut rangkap Spread 2*phi, dengan
```

sa=sin(phi)^2 spread a.

Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang, tetapkan 3 titik dan plotkan.

```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
```

Kemudian tiga segmen.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

Fungsi geometri mencakup fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format untuk garis adalah [a,b,c], yang merepresentasikan garis dengan persamaan ax+by=c.

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
[-1,  2,  2]
```

Hitung garis tegak lurus yang melalui A pada BC.

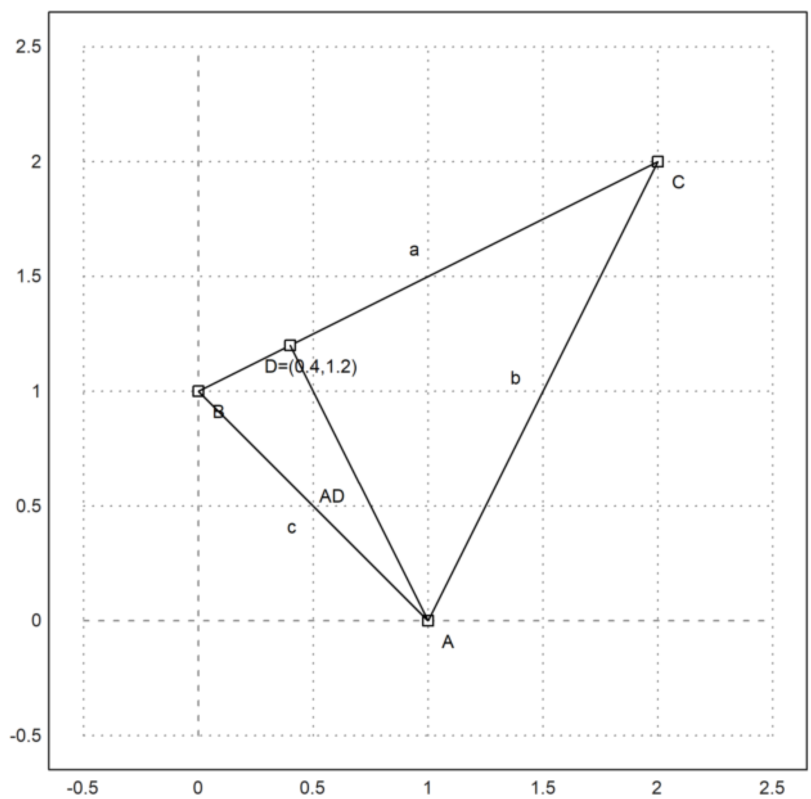
```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
```

Dan perpotongannya dengan BC.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
```

Plotkan.

```
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan
>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```



Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AD.BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

```
1.5
```

Bandingkan dengan rumus determinan.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langsung dengan fungsi
```

```
1.5
```

Cara lain menghitung luas segitigas ABC:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

```
1.5
```

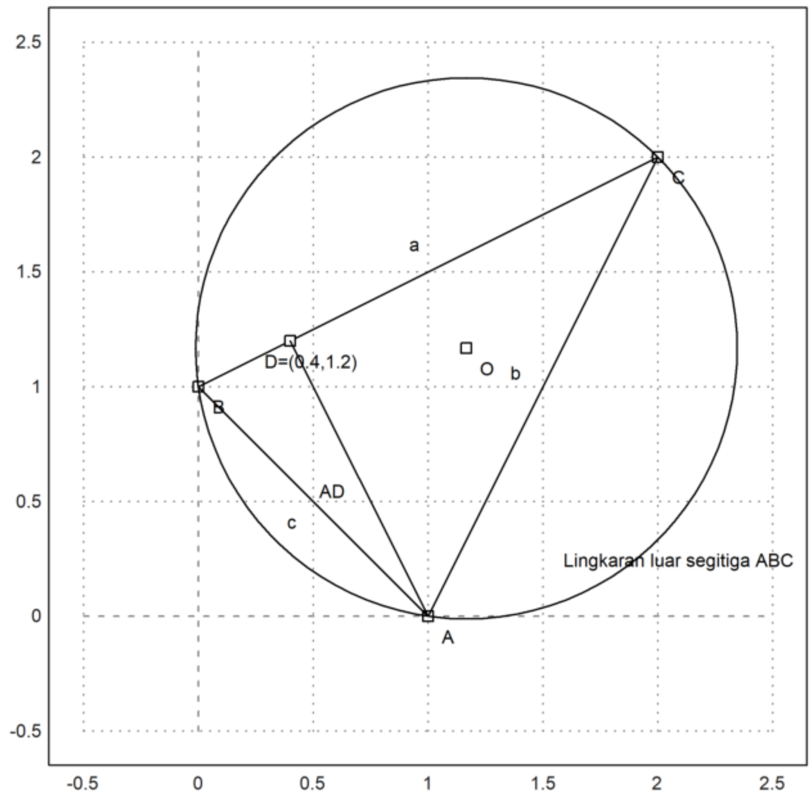
Sudut pada C.

```
>degprint(computeAngle(B,C,A))
```

```
36°52'11.63''
```

Sekarang, lingkarilah segitiga tersebut.

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

```
>O, R
```

```
[1.16667,  1.16667]
1.17851130198
```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

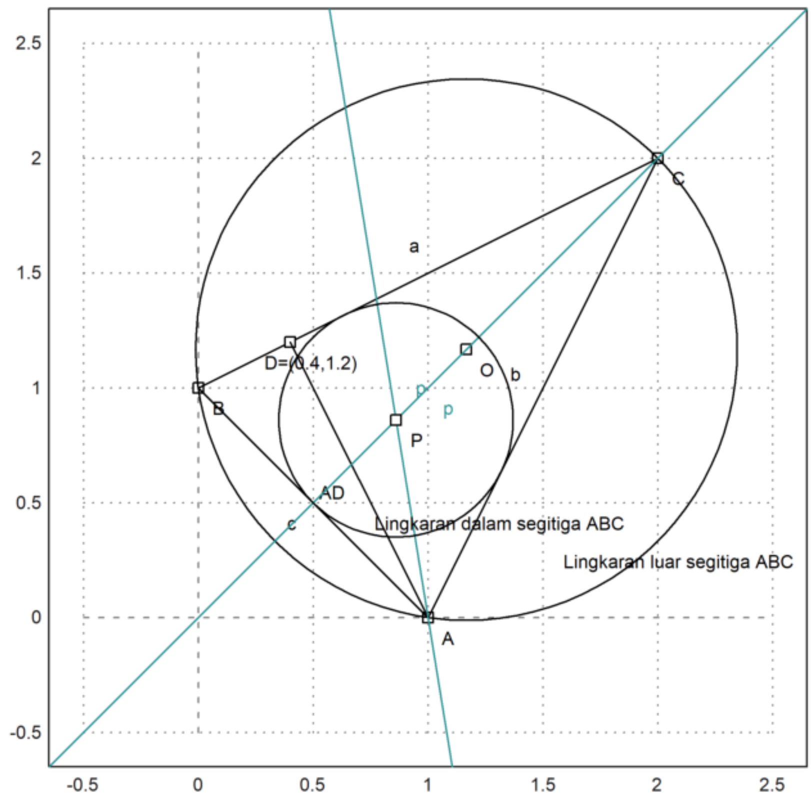
```
[0.86038,  0.86038]
```

Tambahkan semuanya ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi s
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
0.509653732104
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gamba
```



Latihan

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.
2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Merupakan segitiga apakah itu?
3. Hitung luas segitiga tersebut.
4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.
5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.
6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?

Jawab
1.

```
>setPlotRange(-0.5,7,-0.5,7);
>O=[6,1]; plotPoint(O,"O");
>P=[0,5]; plotPoint(P,"P");
>Q=[5,6]; plotPoint(Q,"Q");
```

2.

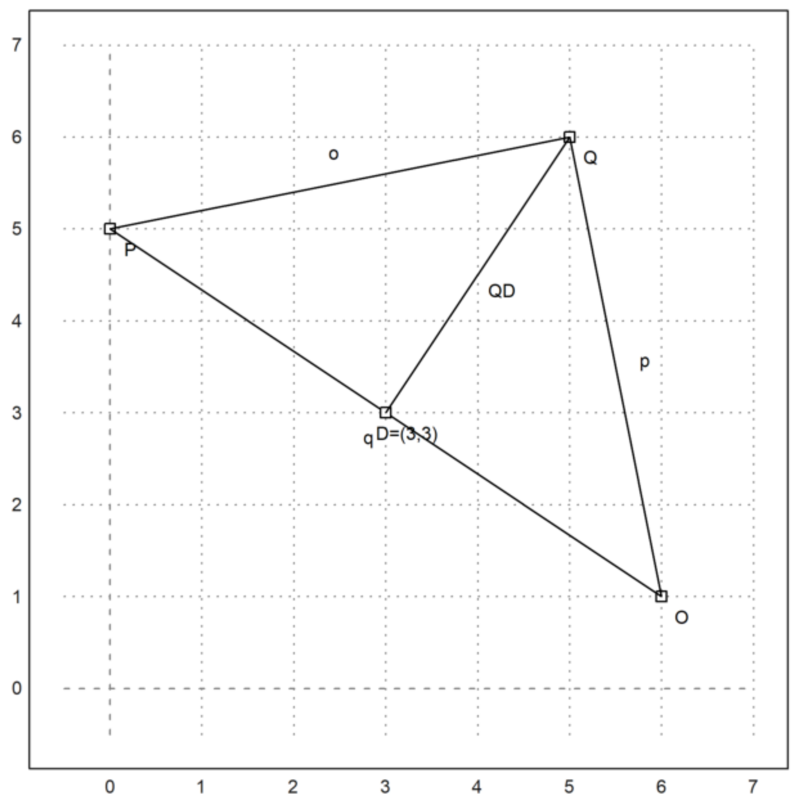
```
>plotSegment(O,P,"q");
>plotSegment(P,Q,"o");
>plotSegment(Q,O,"p");
>lineThrough(O,P)
```

```
[-4,  -6,  -30]
```

```
>h=perpendicular(Q,lineThrough(O,P));
```

merupakan segitiga sama kaki

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(O,P));
>plotPoint(D,value=1);
>aspect(1); plotSegment(Q,D):
```



3. Akan ditentukan luas segitiga di atas

$$L\triangle ABC = \frac{1}{2}OP.QD.$$

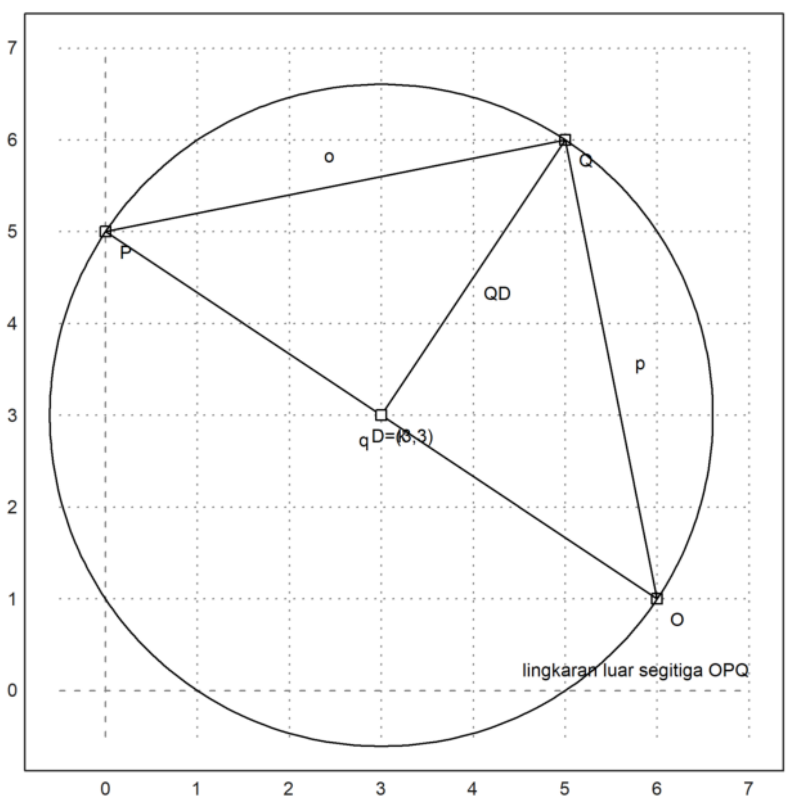
```
>norm(O-P)*norm(Q-D)/2
```

```
13
```

Jadi luas segitiga diatas adalah 13

4.

```
>c=circleThrough(O,P,Q);
>L=getCircleRadius(c);
>K=getCircleCenter(c);
>plotPoint(K,"k");
>plotCircle(c,"lingkaran luar segitiga OPQ"):
```




```
>K,L
```

```
[3,  3]
Space between commands expected!
Found: L (character 76)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
K,L ...
  ^
```

Jari-jari lingkaran luar segitiga adalah 3

```
>l=angleBisector(O,Q,P);
>g=angleBisector(Q,O,P);
>z=lineIntersection(l,g)
```

```
[3.82843,  4.24264]
```

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1);
```

5.

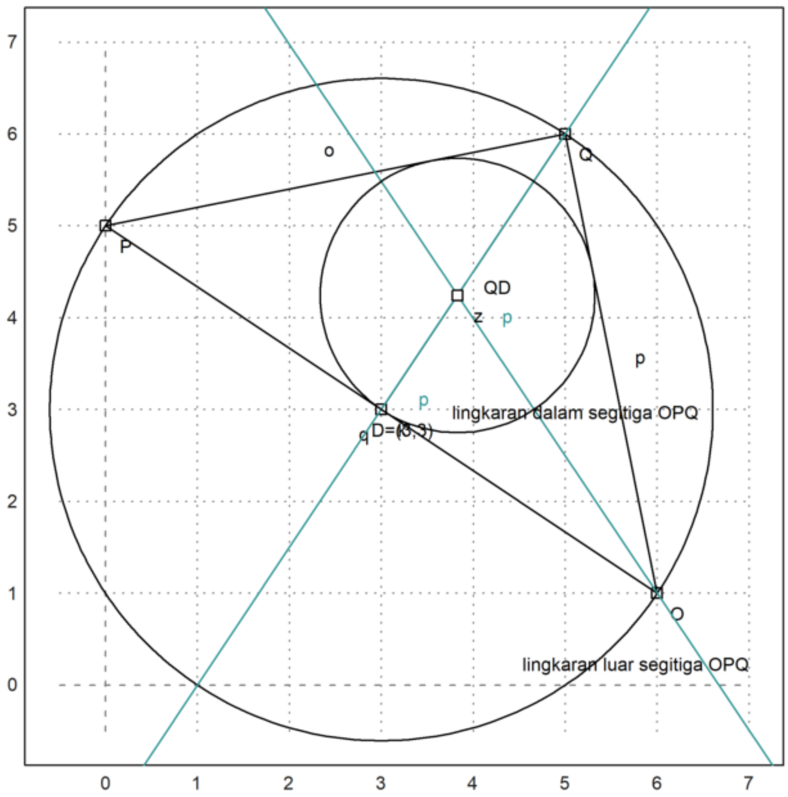
```
>plotPoint(z,"z");
```

Jari-jari lingkaran dalam segitiga adalah 1.49

```
>r=norm(z-projectToLine(z,lineThrough(O,P)))
```

```
1.49346823813
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(z,r),"lingkaran dalam segitiga OPQ"):
```



6.
Rumus luas lingkaran

$$\pi r^2$$

Luas lingkaran luar

$$\pi r^2, r = 3$$

sehingga

```
>pi
```

```
3.14159265359
```

```
>r:=3
```

```
3
```

```
>L=pi*r^2
```

```
28.2743338823
```

Luas lingkaran dalam

$$\pi r^2, r = 1.49346823813$$

sehingga

```
>pi
```

```
3.14159265359
```

```
>r=1.49346823813
```

```
1.49346823813
```

```
>L2=pi*r^2
```

```
7.0071570979
```

hubungan:
lingkaran dalam dan luas segitiga
jari-jari lingkaran dalam = luas segitiga dibagi setengah keliling segitiga

$$\frac{L\triangle OPQ}{\frac{1}{2}K\triangle OPQ} = r$$

Contoh 2: Geometri Smbolik

Kita dapat menghitung geometri eksak dan simbolik menggunakan Maxima.
File geometri.e menyediakan fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, kita dapat menggunakan komputasi simbolik sekarang.

```
>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi untuk garis dan lingkaran bekerja seperti fungsi Euler, tetapi menyediakan komputasi simbolis.

```
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

```
[- 1, 2, 2]
```

Kita bisa mendapatkan persamaan garis dengan mudah.

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$2\,y-x=2$$

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough([x1,y1],[x2,y2]),x,y), $solve(%,y) // persama
```

$$x\,\left(y_1-y_2\right)+\left(x_2-x_1\right)\,y=x_1\,\left(y_1-y_2\right)+\left(x_2-x_1\right)\,y_1$$

$$\left[y=\frac{-\left(x_1-x\right)\,y_2-\left(x-x_2\right)\,y_1}{x_2-x_1}\right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A
```

$$\left(x_1-1\right)\,y-x\,y_1=-y_1$$

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

```
[2, 1, 2]
```

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

```
 2  6
[-, -]
 5  5
```

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran m
```

$$\left[\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3\sqrt{2}}\right]$$

```
>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$\frac{5}{3\sqrt{2}}$$

$$1.178511301977579$$

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis
```

$$y = x$$

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // ti
```

$$\left[\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+2}{6}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+2}{6}\right]$$

```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya
```

```
[0.86038,  0.86038]
```

Perpotongan Garis dan Lingkaran

Tentu, kita juga dapat memotong garis dengan lingkaran dan lingkaran dengan lingkaran.

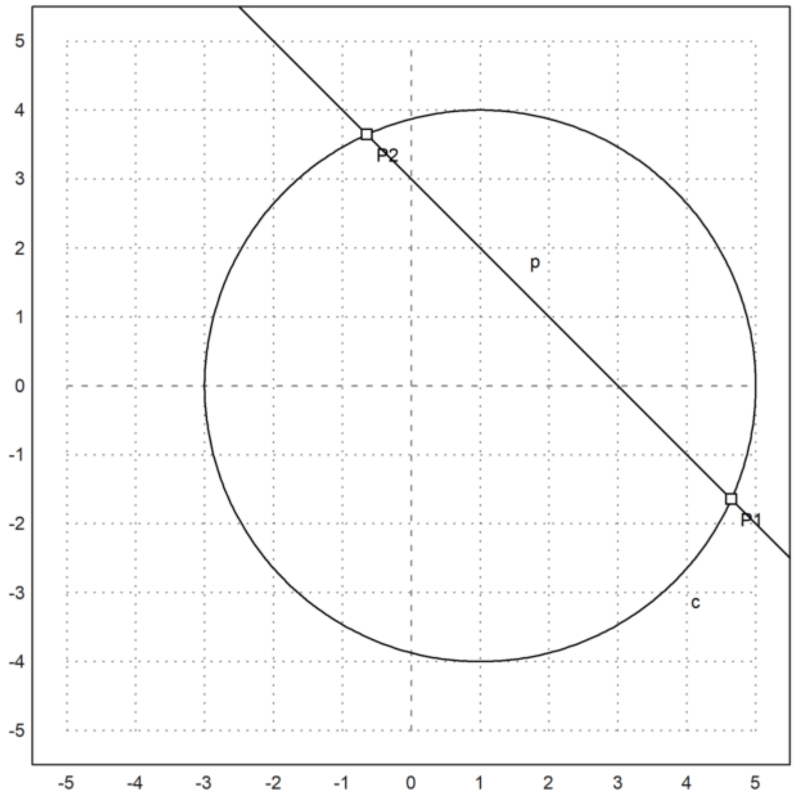
```
>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
```

Perpotongan garis dengan lingkaran menghasilkan dua titik dan nilai titik perpotongannya.

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
>P1, P2, f
```

```
[4.64575,  -1.64575]
[-0.645751,  3.64575]
2
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```



Hal yang sama pada Maxima.

```
>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

```
[1, 0, 4]
```

```
>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

```
[1, 1, 3]
```

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan ga
```

$$\left[\left[\sqrt{7}+2, 1-\sqrt{7}\right], \left[2-\sqrt{7}, \sqrt{7}+1\right]\right]$$

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap busur yang sama adalah sama besar.

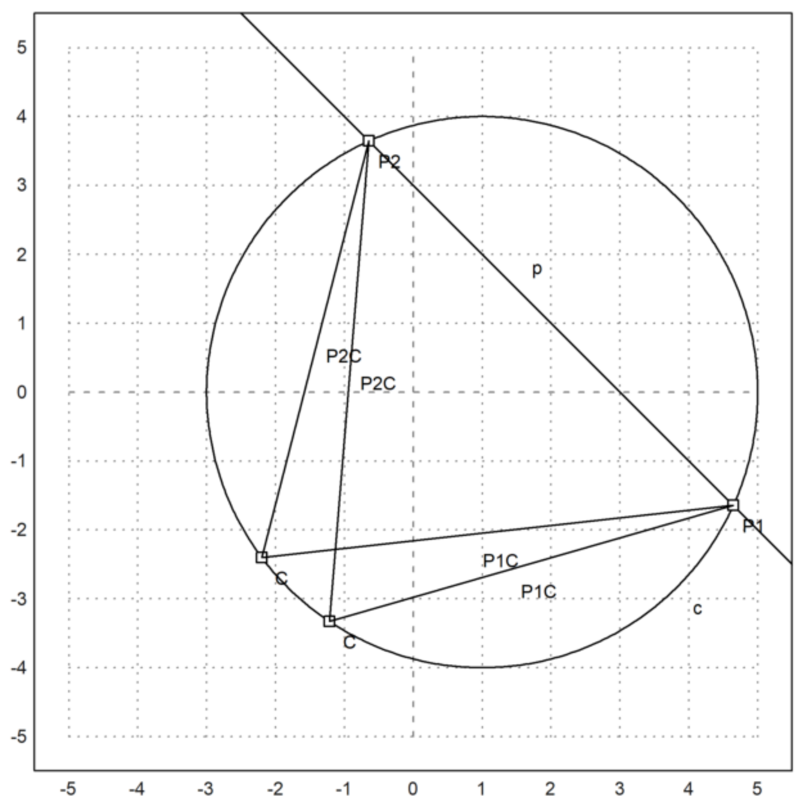
```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

```
>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

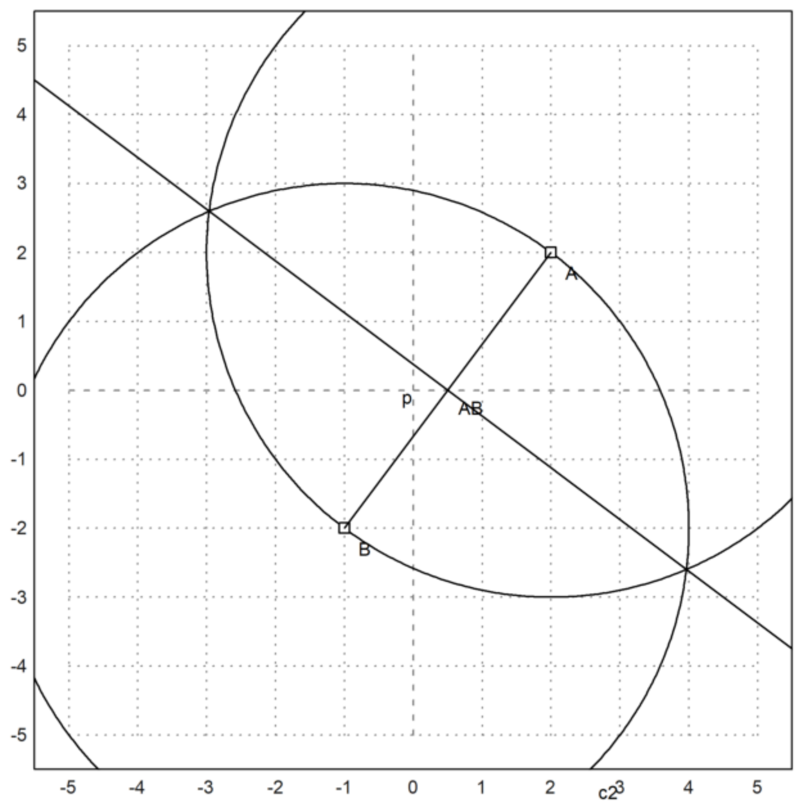
```
>insimg;
```



Garis Sumbu

Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:
1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melallui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```



Selanjutnya, kita lakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
```

Persamaan untuk perpotongan cukup rumit. Tetapi kita dapat menyederhanakannya, jika kita menyelesaikan untuk y.

```
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

Ini memang sama dengan tegak lurus tengah, yang dihitung dengan cara yang sangat berbeda.

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

```
>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[y=\frac{\left(b_2-a_2\right)\,x-a_1\,b_2+a_2\,b_1}{b_1-a_1}\right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1-a_1)}{(b_2-a_2)}\times\frac{(b_2-a_2)}{(b_1-a_1)}=-1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.

Contoh 3: Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad \text{dengan } s=(a+b+c)/2,$$

atau bisa ditulis dalam bentuk lain:

$$L=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

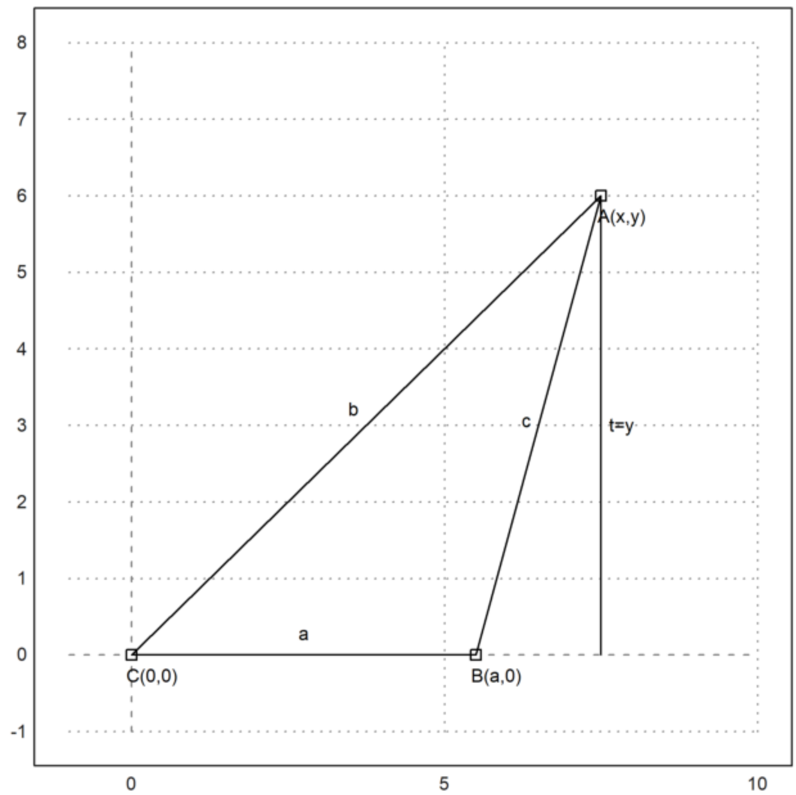
Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\times y.$$

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad (x-a)^2 + y^2 = c^2.$$

```
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "
> plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");
>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6],"c",15);
>plotSegment([0,0],[7.5,6],"b",25);
>plotSegment([7.5,6],[7.5,0],"t=y",25):
```




```
>remvalue x,y,a,b,c
>&assume(a>0); sol &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

```
                 2     2     2
              - c  + b  + a
        [[x = --------------, y = 
                   2 a
        4       2  2       2  2     4       2  2     4
  sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
```

```
- ------------------------------------------------],
                            2 a
        2    2    2
     - c  + b  + a
[x = --------------, y = 
          2 a
        4      2  2      2  2    4      2  2    4
sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
--------------------------------------------------]]
                          2 a
```

Ekstrak solusi y.

```
>ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2))
```

$$y=\frac{\sqrt{\left(-c+b+a\right)\,\left(c-b+a\right)\,\left(c+b-a\right)\,\left(c+b+a\right)}}{2\,a}$$

Kita dapatkan rumus Heron.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H\left(a,b,c\right)=\frac{\sqrt{\left(-c+b+a\right)\,\left(c-b+a\right)\,\left(c+b-a\right)\,\left(c+b+a\right)}}{4}$$

```
>$'Luas=H(2,5,6) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 2, 5, 6
```

$$Luas=\frac{3\,\sqrt{39}}{4}$$

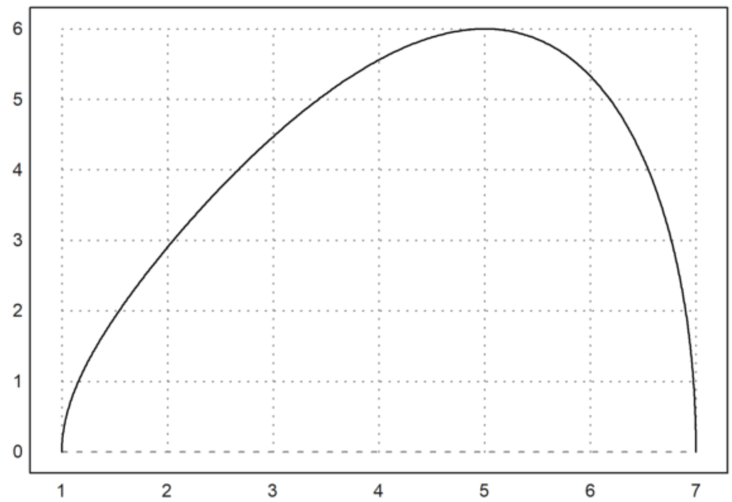
Tentu, setiap segitiga siku-siku merupakan kasus yang sering dijumpai.

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

```
6
```

Dan jelas bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan kedua sisinya 3 dan 4.

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang
```



Kasus umum juga bisa digunakan.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

$$\left[c=-\sqrt{b^2+a^2}, c=\sqrt{b^2+a^2}, c=0\right]$$

Sekarang, mari kita cari himpunan semua titik di mana b+c=d untuk suatu konstanta d. Sudah diketahui bahwa ini adalah sebuah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

$$\left[x=\frac{(d-c)^2-c^2+a^2}{2\,a}, y=\frac{\sqrt{-(d-c)^4+2\,c^2\,(d-c)^2+2\,a^2\,(d-c)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}\right]$$

Dan buatlah fungsi-fungsi dari hal ini.

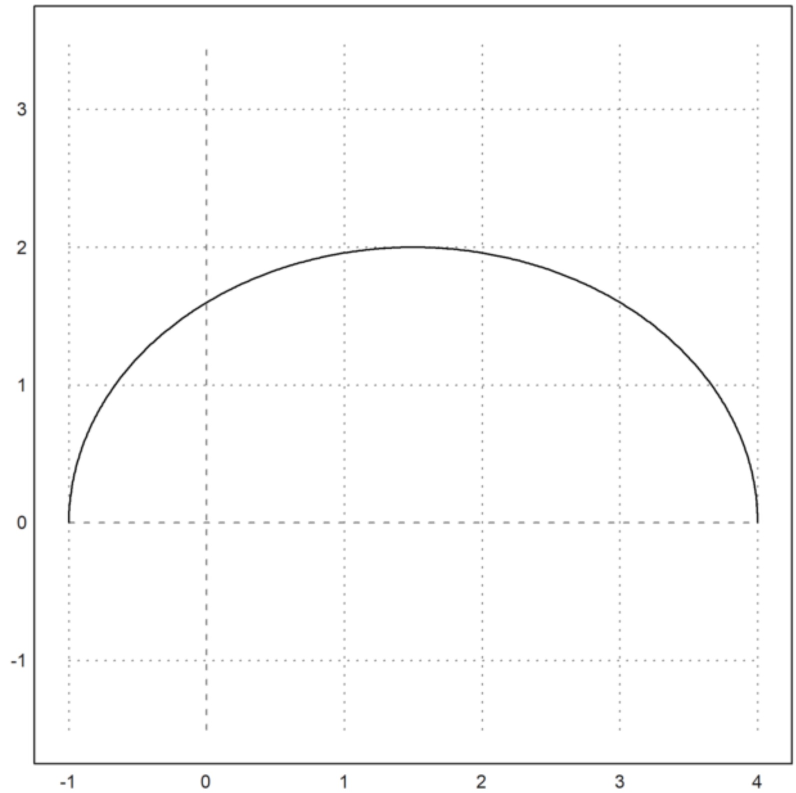
```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1
```

$$\frac{(d-c)^2-c^2+a^2}{2\,a}$$

$$\frac{\sqrt{-(d-c)^4+2\,c^2\,(d-c)^2+2\,a^2\,(d-c)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}$$

Sekarang kita dapat menggambar himpunannya. Sisi b bervariasi dari 1 hingga 4. Sudah diketahui bahwa kita mendapatkan sebuah elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```



Kita dapat memeriksa persamaan umum untuk elips ini, yaitu

$$\frac{(x-x_m)^2}{u^2}+\frac{(y-y_m)}{v^2}=1,$$

di mana (xm, ym) adalah titik pusat, serta u dan v adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)
```

$$1$$

Kita lihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk x=0. Dengan demikian, luas segitiga dengan a+b+c=d adalah maksimal, jika segitiga tersebut sama sisi. Kita ingin membuktikannya secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

$$\left[\frac{d\,(d-2\,a)\,(d-2\,b)}{8}-\frac{(-d+2\,b+2\,a)\,d\,(d-2\,b)}{8}=0,\frac{d\,(d-2\,a)\,(d-2\,b)}{8}-\frac{(-d+2\,b+2\,a)\,d\,(d-2\,\right.$$

Kita mendapatkan beberapa minima, yang termasuk dalam segitiga dengan satu sisi 0, dan solusi a = b = c = d / 3.

```
>$solve(eqns,[a,b])
```

$$\left[\left[a=\frac{d}{3},b=\frac{d}{3}\right],\left[a=0,b=\frac{d}{2}\right],\left[a=\frac{d}{2},b=0\right],\left[a=\frac{d}{2},b=\frac{d}{2}\right]\right]$$

Ada juga metode Lagrange, yang memaksimalkan H(a,b,c)^2 sehubungan dengan a+b+d=d.

```
>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la,diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...
>   diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])
```

```
                         d      d
           [[a = 0, b = -, c = -, la = 0],
                         2      2
     d              d                d      d
 [a = -, b = 0, c = -, la = 0], [a = -, b = -, c = 0, la = 0],
     2              2                2      2
                              3
     d      d      d         d
 [a = -, b = -, c = -, la = ---]]
     3      3      3        108
```

Kita bisa membuat plot situassi.
Pertama, tetapkan titik-titik di Maxima.

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

$$\left[\frac{-c^2+b^2+a^2}{2\,a},\frac{\sqrt{-c^4+2\,b^2\,c^2+2\,a^2\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}}{2\,a}\right]$$

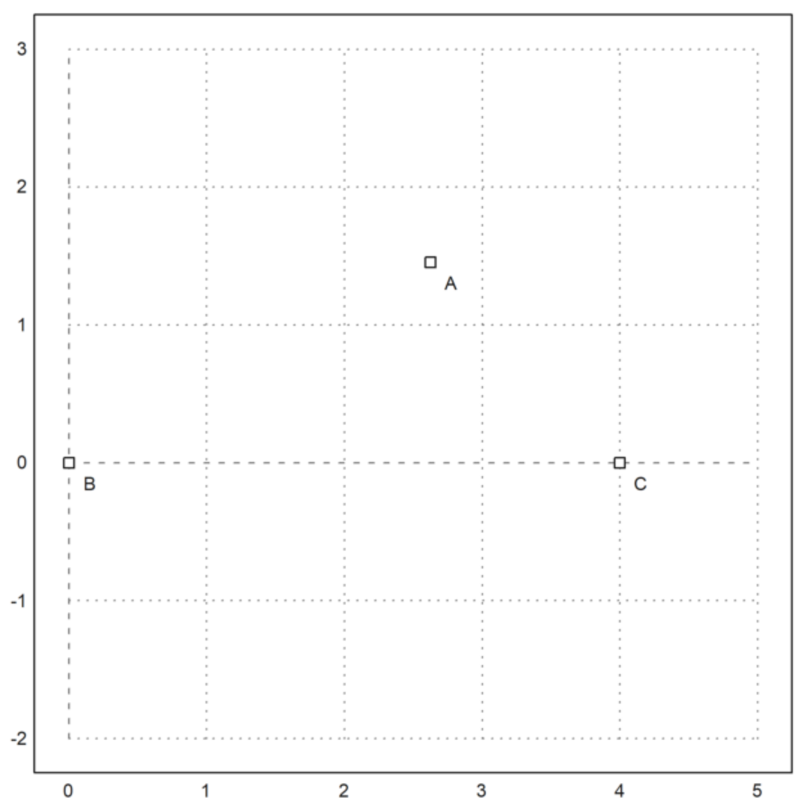
```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

$$[0,0]$$

$$[a,0]$$

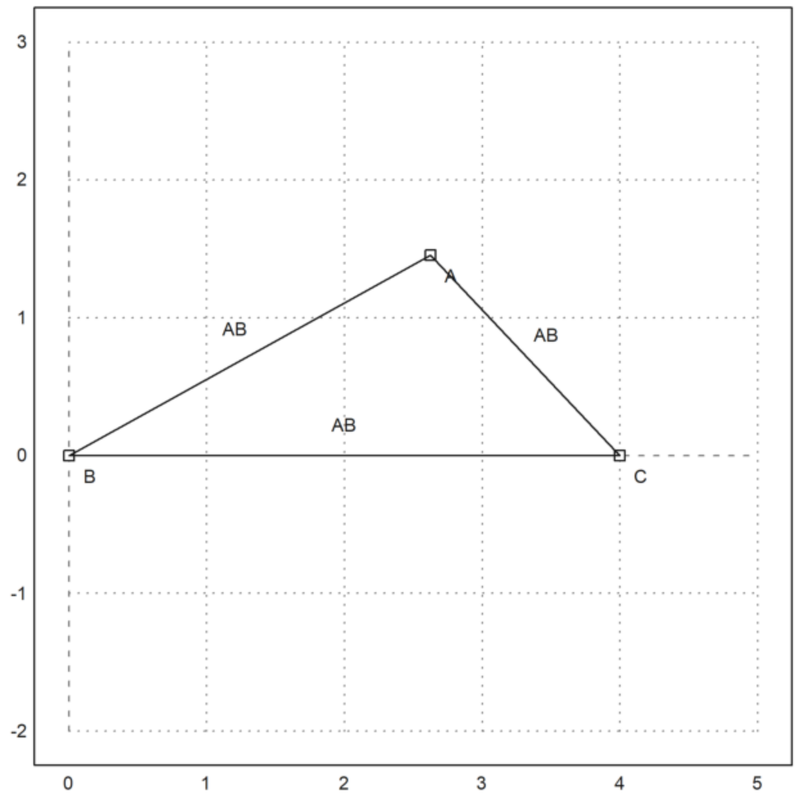
Kemudian, tetapkan rentang plot, dan titik-titik plot.

```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
>a=4; b=3; c=2; ...
>plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...
>plotPoint(mxmeval("A"),"A"):
```



Plot segmen-segmen tersebut.

```
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):
```



Hitung garis tegak lurus tengah dalam Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan titik pusat lingkaran.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

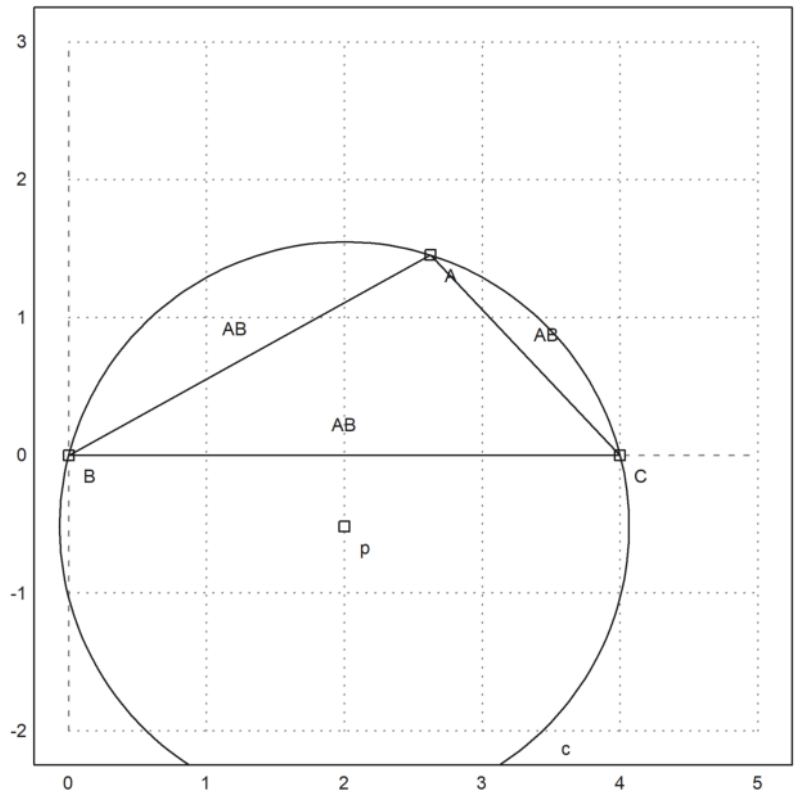
Kita peroleh rumus untuk jari-jari lingkaran.
circle.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$\frac{i\,a\,b\,c}{\sqrt{c-b-a}\,\sqrt{c-b+a}\,\sqrt{c+b-a}\,\sqrt{c+b+a}}$$

Mari kita tambahkan ke dalam plot.

```
>plotPoint(U()); ...
>plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
```



Dengan menggunakan geometri, kami memperoleh rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$$

untuk radius. Kita bisa mengecek, apakah bernilai benar dengan Maxima. Maxima akan memperhitungkannya hanya jika kita mengkuadratkannya.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2  | factor
```

$$-\frac{4\,a^2\,b^2\,c^2}{(c-b-a)\,(c-b+a)\,(c+b-a)\,(c+b+a)}$$

Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari segitiga apa pun yang tidak sama sisi. Garis ini merupakan garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, termasuk ortosentrum, circumcenter, centroid, titik Exeter, dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.
Sebagai demonstrasi, kami menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.
Pertama, kita mendefinisikan sudut-sudut segitiga dalam Euler. Kita menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolis.

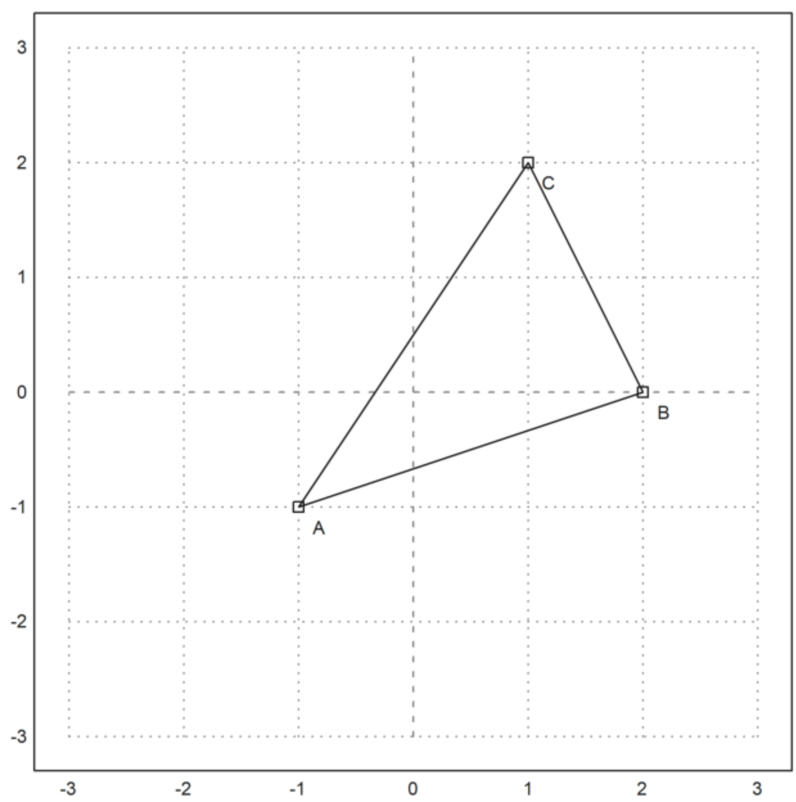
```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];
```

Untuk memplot objek geometris, kita menyiapkan area plot, dan menambahkan titik-titiknya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot tersebut.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

Kita juga bisa menambahkan sisi-sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```



Berikut ini adalah luas area segitiga, dengan menggunakan rumus determinan. Tentu, kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

```
[- 1, 3, - 2]
```

Dan juga mendapatkan formula untuk baris ini.
menggunakan rumus determinan. Tentu, kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$3\,y-x=-2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan sebuah titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari bentuk Hesse. Dengan memasukkan titik tersebut akan dihasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{3\,y-x+2}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

Sekarang kita menghitung keliling ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

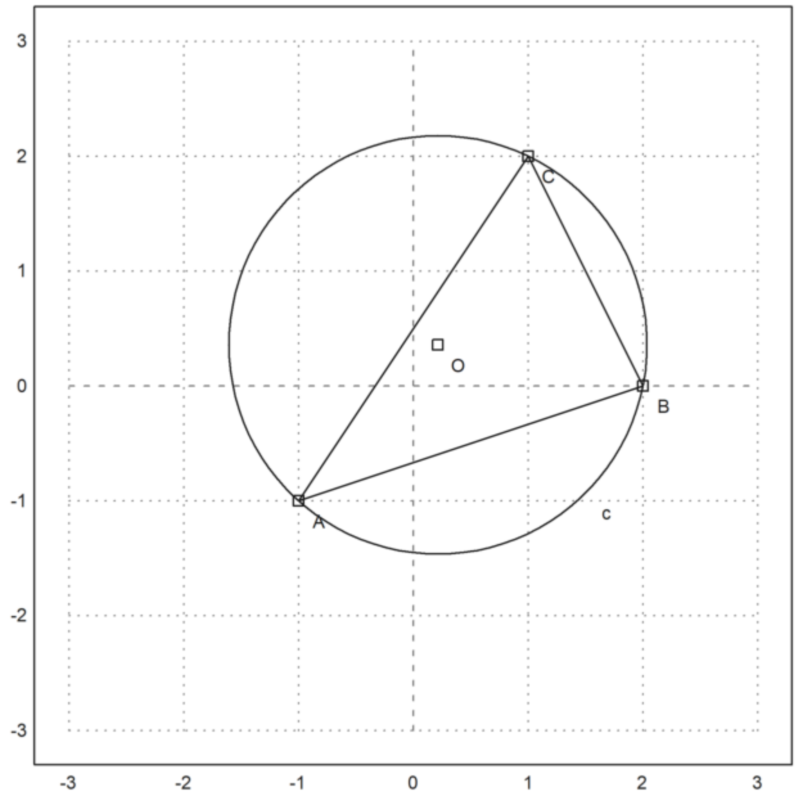
$$\left(y-\frac{5}{14}\right)^2+\left(x-\frac{3}{14}\right)^2=\frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14},\frac{5}{14}\right]$$

Plot lingkaran dan titikpusatnya. Cu dan U adalah simbolik. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```



Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (pusat ortosentrum) secara numerik dengan perintah berikut ini.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
>  perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[\frac{11}{7},\frac{2}{7}\right]$$

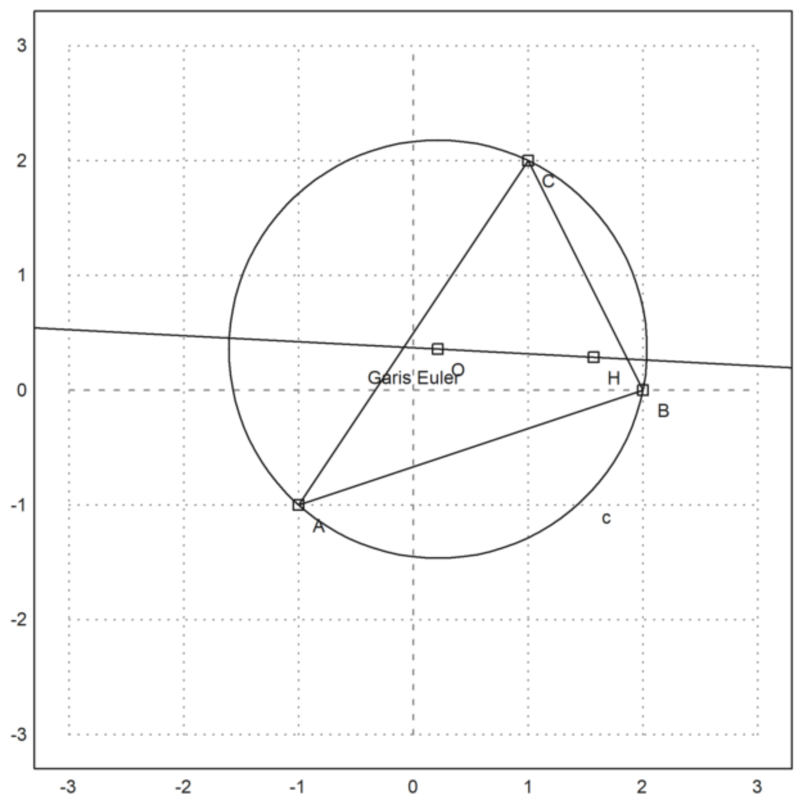
Sekarang kita dapat menghitung garis Euler dari segitiga tersebut.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{19\,y}{14}-\frac{x}{14}=-\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot kita.

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```

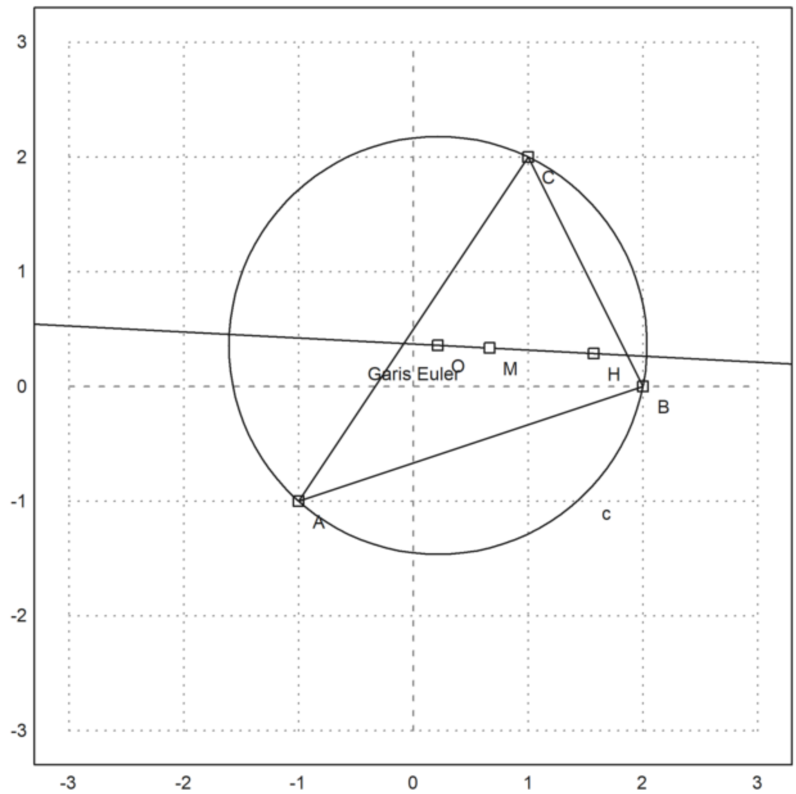


Pusat gravitasi harus berada pada garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```



Teori mengatakan bahwa MH = 2*MO. Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai hal ini.

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

$$2$$

Fungsi-fungsi ini juga mencakup fungsi untuk sudut.

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\,\sqrt{13}}\right)$$

```
60°15'18.43''
```

Persamaan untuk titik tengah lingkaran ini tidak begitu bagus.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $
```

$$\left[\frac{\left(2^{\frac{3}{2}}+1\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}-15\,\sqrt{2}+3}{14},\frac{\left(\sqrt{2}-3\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+5\,2^{\frac{3}{2}}+5}{14}\right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi untuk jari-jari lingkaran yang tertulis.

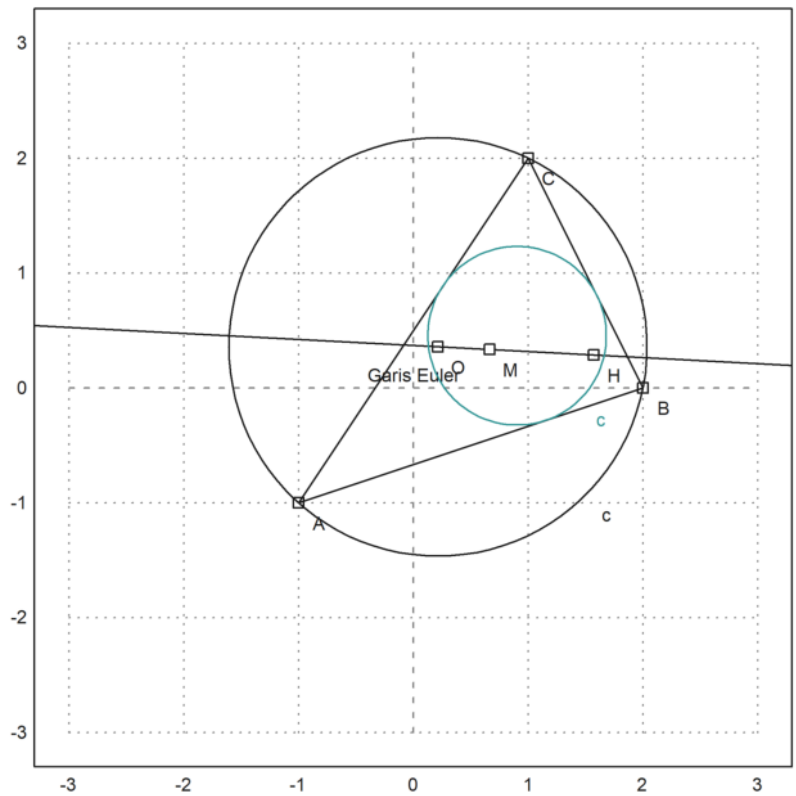
```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{\left(-41\sqrt{2}-31\right)\sqrt{5}\sqrt{13}+115\sqrt{2}+614}}{7\sqrt{2}}$$

```
>LD &=  circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ke dalam plot.

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```



Parabola

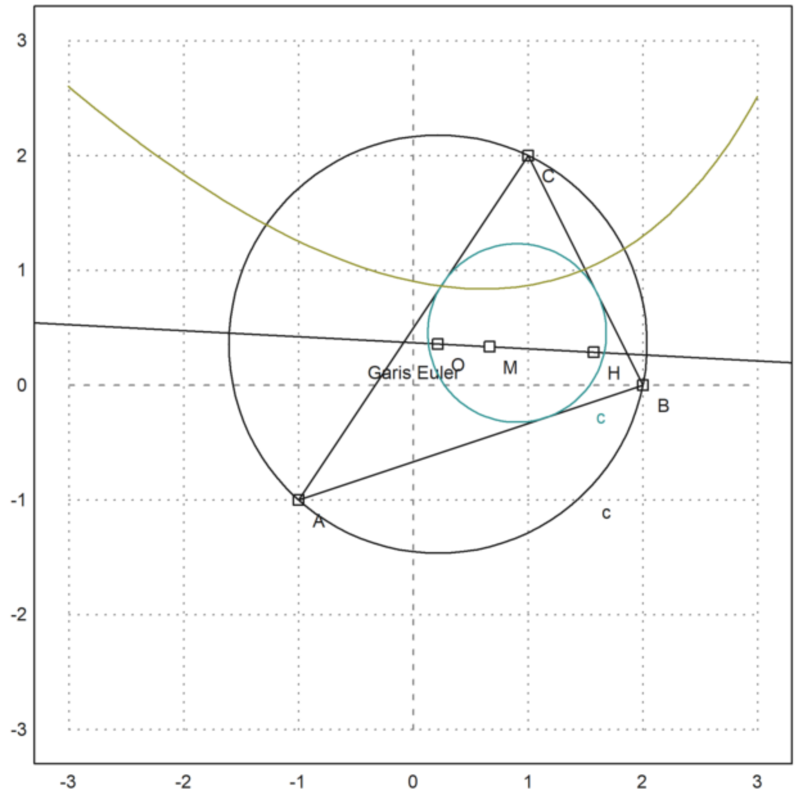
Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{3\,y-x+2}{\sqrt{10}}-\sqrt{\left(2-y\right)^2+\left(1-x\right)^2}=0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```



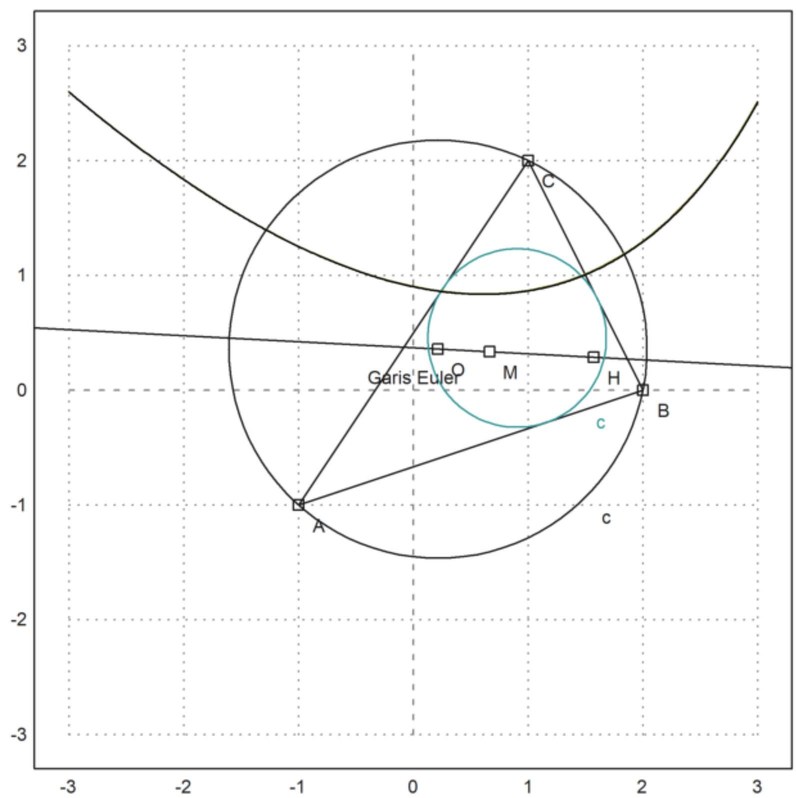
Ini seharusnya berupa suatu fungsi, tetapi solver default Maxima hanya dapat menemukan solusinya, jika kita mengkuadratkan persamaannya. Akibatnya, kita mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y
```

```
[y = - 3 x - sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26,
                          y = - 3 x + sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26]
```

Solusi pertama adalah
maxima: akar[1]
Dengan menambahkan solusi pertama ke dalam plot, menunjukkan bahwa itu memang jalur yang kita cari. Teori mengatakan bahwa itu adalah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```




```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan k
```

$$g\left(x\right)=-3\,x-\sqrt{70}\,\sqrt{9-2\,x}+26$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$$\sqrt{1503-54\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}$$

$$2.135605779339061$$

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[\frac{80-3\sqrt{11}\sqrt{70}}{10},\frac{20-\sqrt{11}\sqrt{70}}{10}\right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jatak T ke AB
```

$$\sqrt{1503-54\sqrt{11}\sqrt{70}}$$

$$2.135605779339061$$

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

Contoh 5: Trigonometri Rasional

Hal ini terinspirasi dari sebuah perkataan N.J. Wildberger. Dalam bukunya "Proporsi Ilahi", Wildberger mengusulkan untuk mengganti gagasan klasik tentang jarak dan sudut dengan quadrance dan spread. Dengan menggunakan ini, memang memungkinkan untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap "rasional".

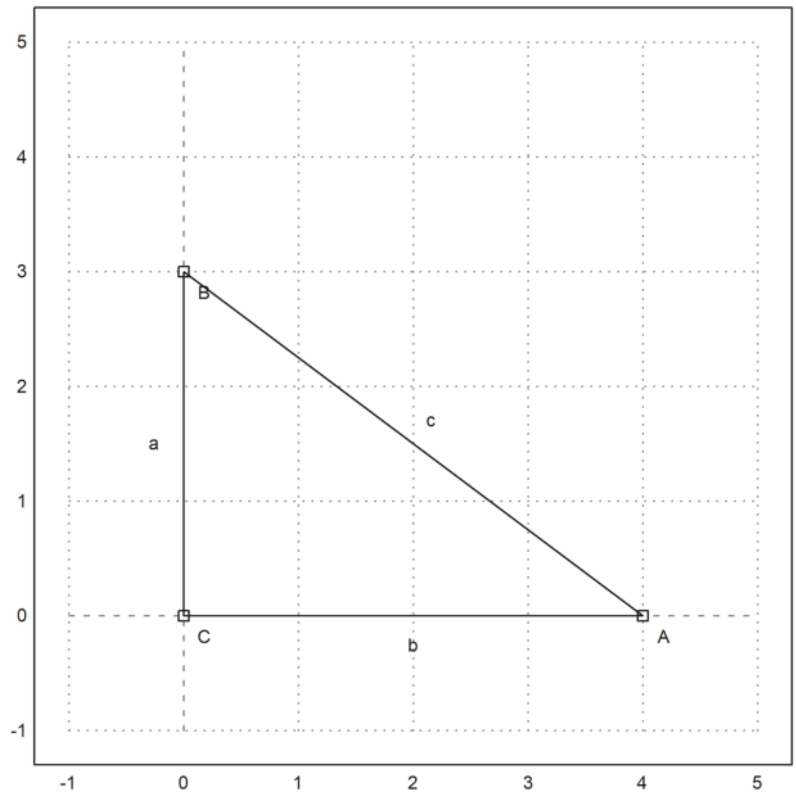
Berikut ini, saya akan memperkenalkan konsep-konsepnya, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan komputasi simbolis Maxima di sini, yang menyembunyikan keuntungan utama dari trigonometri rasional yang komputasinya dapat dilakukan dengan kertas dan pensil saja. Anda dipersilakan untuk memeriksa hasilnya tanpa komputer.

Intinya adalah bahwa komputasi rasional simbolis sering kali memberikan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang dievaluasi dengan perkiraan numerik saja.

```
>load geometry;
```

Untuk pengenalan pertama, kita menggunakan segitiga persegi panjang dengan proporsi Mesir yang terkenal 3, 4, dan 5. Perintah berikut ini adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat pada file Euler "geometry.e".

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg(30);
```



Tentu,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

di mana wa adalah sudut di A. Cara biasa untuk menghitung sudut ini, adalah dengan mengambil kebalikan dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak kira-kira.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

```
36°52'11.63''
```

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.
Gagasan pertama trigonometri rasional adalah kuadrat, yang menggantikan jarak. Sebenarnya, ini hanyalah jarak yang dikuadratkan. Berikut ini, a, b, dan c menunjukkan kuadran sisi-sisinya.
Teorema Pythogoras menjadi a+b=c. Maka, teorema Pythogoras menjadi a+b=c.

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

$$25 = 25$$

Gagasan kedua dari trigonometri rasional adalah penyebaran. Penyebaran mengukur bukaan di antara garis-garis. Bernilai 0, jika garis-garisnya sejajar, dan bernilai 1, jika garis-garisnya persegi panjang. Ini adalah kuadrat dari sinus sudut antara kedua garis tersebut.
Penyebaran garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

di mana a dan c adalah kuadran dari segitiga persegi panjang dengan satu sudut di A.

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{9}{25}$$

Tentu saja, hal ini lebih mudah dihitung daripada sudut. Tetapi Anda kehilangan sifat bahwa sudut dapat ditambahkan dengan mudah.
Tentu saja kita bisa mengonversi nilai perkiraan kita untuk sudut wa ke sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

```
9/25
```

Hukum kosinus trgonometri klasik diterjemahkan ke dalam "crosslaw" berikut ini.

$$(c + b - a)^2 = 4bc\,(1 - s_a)$$

Di sini, a, b, dan c adalah kuadran dari sisi-sisi segitiga, dan sa adalah spread di sudut A. Sisi a, seperti biasa, berlawanan dengan sudut A.
Hukum-hukum ini diimplementasikan dalam file geometry.e yang kita muat ke dalam Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$\left[\left(bb - aa + \frac{7}{6}\right)^2, \left(bb - aa + \frac{7}{6}\right)^2, \left(bb - aa + \frac{5}{3\sqrt{2}}\right)^2\right] = \left[\frac{14\,bb\,(1 - saa)}{3}, \frac{14\,bb\,(1 - saa)}{3}, \frac{5\,2^{\frac{3}{2}}\,bb\,(1}{3}\right.$$

Dalam kasus kita, kita dapatkan

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024 = 1024$$

Mari kita gunakan crosslaw ini untuk mencari sebaran di A. Untuk melakukannya, kita buat crosslaw untuk kuadran a, b, dan c, dan selesaikan untuk sebaran sa yang tidak diketahui. Anda bisa melakukan ini dengan tangan dengan mudah, tetapi disini saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kami mendapatkan hasil yang sudah kami dapatkan.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

$$1024 = 1600\ (1 - x)$$

$$\left[x = \frac{9}{25}\right]$$

Kita sudah mengetahui hal ini. Definisi spread adalah kasus khusus dari crosslaw.
Kita juga dapat menyelesaikannya untuk a, b, c secara umum. Hasilnya adalah sebuah rumus yang menghitung penyebaran sudut segitiga dengan kuadran ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[\left[\frac{168\,bb\,x + 36\,bb^2 + (-72\,aa - 84)\ bb + 36\,aa^2 - 84\,aa + 49}{36}, \frac{168\,bb\,x + 36\,bb^2 + (-72\,aa - 84)\ bb + 36}{36}\right.\right.$$

Kita dapat membuat sebuah fungsi dari hasil tersebut. Fungsi seperti itu sudah didefinisikan dalam file geometry.e dari Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita dapat menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga dengan sisi

$$a, \quad a, \quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya rasional, hal ini tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat.

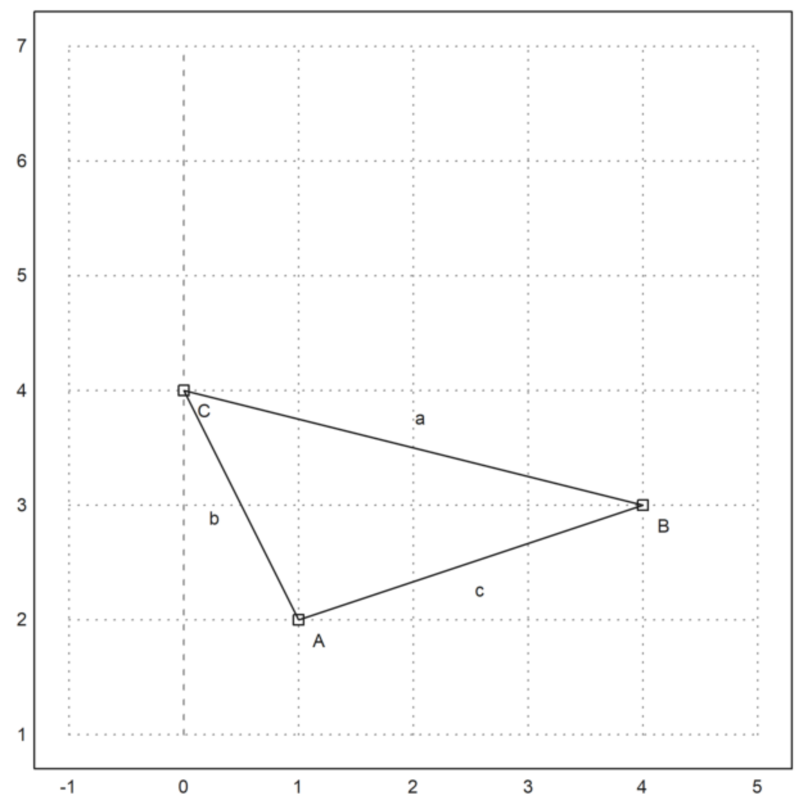
```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

```
67°47'32.44''
```

Contoh Lain

Sekarang, mari kita mencoba contoh lebih lanjut.
Kita tetapkan tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
>setPlotRange(-1,5,1,7); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Dengan menggunakan Pythogoras, dapat dengan mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Pertama-tama saya menggunakan jarak fungsi dari file Euler untuk geometri. Jarak fungsi menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga memiliki fungsi untuk kuadransi antara dua titik.
Pada contoh berikut, karena c+b bukan a, maka segitiga tersebut tidak berbentuk siku-siku.

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

$$10$$

$$5$$

$$17$$

Pertama, mari kita menghitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode yang biasa berdasarkan hasil kali titik dari dua vektor. Hasilnya adalah beberapa perkiraan titik mengambang.

$$A =< 1, 2 > \quad B =< 4, 3 >, \quad C =< 0, 4 >$$

$$\mathbf{a} = C - B =< -4, 1 >, \quad \mathbf{c} = A - B =< -3, -1 >, \quad \beta = \angle ABC$$

$$\mathbf{a.c} = |\mathbf{a}|.|\mathbf{c}| \cos \beta$$

$$\cos \angle ABC = \cos \beta = \frac{\mathbf{a.c}}{|\mathbf{a}|.|\mathbf{c}|} = \frac{12 - 1}{\sqrt{17}\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17}\sqrt{10}}$$

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10}\,\sqrt{17}}\right)$$

```
32.4711922908
```

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita dapat melakukan hal yang sama dengan cross law. Kita masukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan selesaikan untuk x.

$$A =< 1, 2 > \quad B =< 4, 3 >, \quad C =< 0, 4 >$$

$$\mathbf{a} = C - B =< -4, 1 >, \quad \mathbf{c} = A - B =< -3, -1 >, \quad \beta = \angle ABC$$

$$\mathbf{a.c} = |\mathbf{a}|.|\mathbf{c}| \cos \beta$$

$$\cos \angle ABC = \cos\beta = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{c}}{|\mathbf{a}|.|\mathbf{c}|} = \frac{12-1}{\sqrt{17}\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17}\sqrt{10}}$$

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x), //(b+c-a)^=4b.c(1-x)
```

$$4 = 200\,(1-x)$$

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

Itulah yang dilakukan oleh fungsi spread yang didefinisikan dalam "geometry.e".

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama dengan menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksakannya. Maxima menyelesaikan suku sin(arccos(...)) menjadi hasil pecahan. Sebagian besar siswa tidak dapat melakukan ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita memiliki penyebaran di B, kita dapat menghitung tinggi ha di sisi a. Ingatlah bahwa menurut definisi

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut ini telah dibuat dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadran dan penyebaran.
image: (20) Rational_Geometry_CaR.png
Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadrannya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita dapat menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita berurusan dengan kuadran!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus determinan yang biasa menghasilkan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus Heron

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue(a,b,c,sb,ha);
```

Pertama-tama kita menghitung luas di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita menghitung luas kuadrat ("quadrea"?), faktorkan dengan Maxima, dan kita dapatkan rumus Heron yang terkenal.
Memang, hal ini sulit dilakukan dengan menggunakan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{-c^4-\left(-2\,b^2-2\,a^2\right)\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}{4\,a^2\,c^2}$$

$$\frac{\left(-c+b+a\right)\,\left(c-b+a\right)\,\left(c+b-a\right)\,\left(c+b+a\right)}{16}$$

Aturan Triple Spread

Kekurangan dari spread adalah mereka tidak lagi hanya menambahkan seperti sudut. Namun, three spread dari sebuah segitiga memenuhi aturan "triple spread" berikut ini.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$\left(sc+sb+sa\right)^2=2\,\left(sc^2+sb^2+sa^2\right)+4\,sa\,sb\,sc$$

Aturan ini berlaku untuk tiga sudut yang berjumlah 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

Karena spread dari

$$\alpha,\pi-\alpha$$

sama, aturan triple spread juga benar, jika

$$\alpha+\beta=\gamma$$

Karena spread dari sudut negatif sama, aturan triple spread juga berlaku, jika

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

Contohnya, kita dapat menghitung spread dari sudut 60°. Hasilnya adalah 3/4. Namun, persamaan ini memiliki solusi kedua, di mana semua spread adalah 0

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[x=\frac{3}{4},x=0\right]$$

Penyebaran 90° jelas adalah 1. Jika dua sudut ditambahkan ke 90°, penyebarannya akan menyelesaikan persamaan penyebaran tiga dengan a, b, 1. Dengan perhitungan berikut, kita mendapatkan a + b = 1.

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$\left(y+x+1\right)^2=2\,\left(y^2+x^2+1\right)+4\,x\,y$$

$$\left[x=1-y\right]$$

Karena penyebaran 180°-t sama dengan penyebaran t, rumus triple spread juga berlaku, jika salah satu sudut adalah jumlah atau selisih dari dua sudut lainnya.
Jadi, kita dapat menemukan penyebaran sudut dua kali lipat. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kita jadikan ini sebuah fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]
```

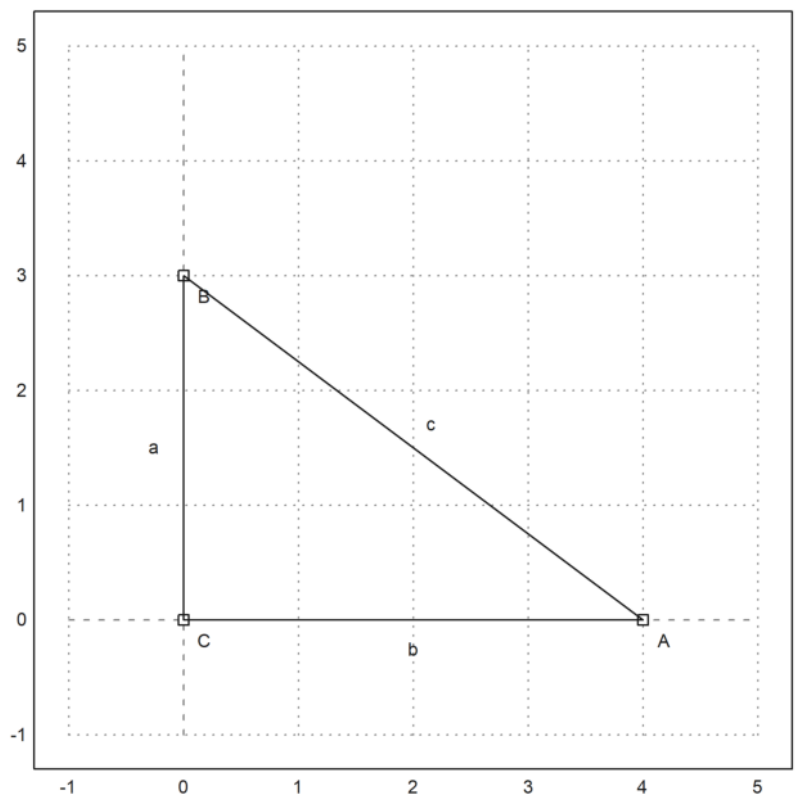
$$\left[x=4\,a-4\,a^2 , x=0\right]$$

```
- 4 (a - 1) a
```

Garis Bagi Sudut

Ini adalah situasi yang sudah kita ketahui.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```



Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Tetapi kita ingin menyelesaikannya untuk a, b, c secara umum.

```
>&remvalue(a,b,c);
```

Jadi, pertama-tama kita hitung penyebaran sudut yang dibelah dua di A, dengan menggunakan rumus triple spread.
Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Rumus ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih salah satu solusi yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut yang dibagi dua 180°-wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\left(2\,x+\frac{a}{b+a}\right)^2=2\,\left(2\,x^2+\frac{a^2}{\left(b+a\right)^2}\right)+\frac{4\,a\,x^2}{b+a}$$

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a} , x=\frac{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}\right]$$

$$\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

Mari kita cek rectangle Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

$$\frac{1}{10}$$

Kita bisa mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer spread ke radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

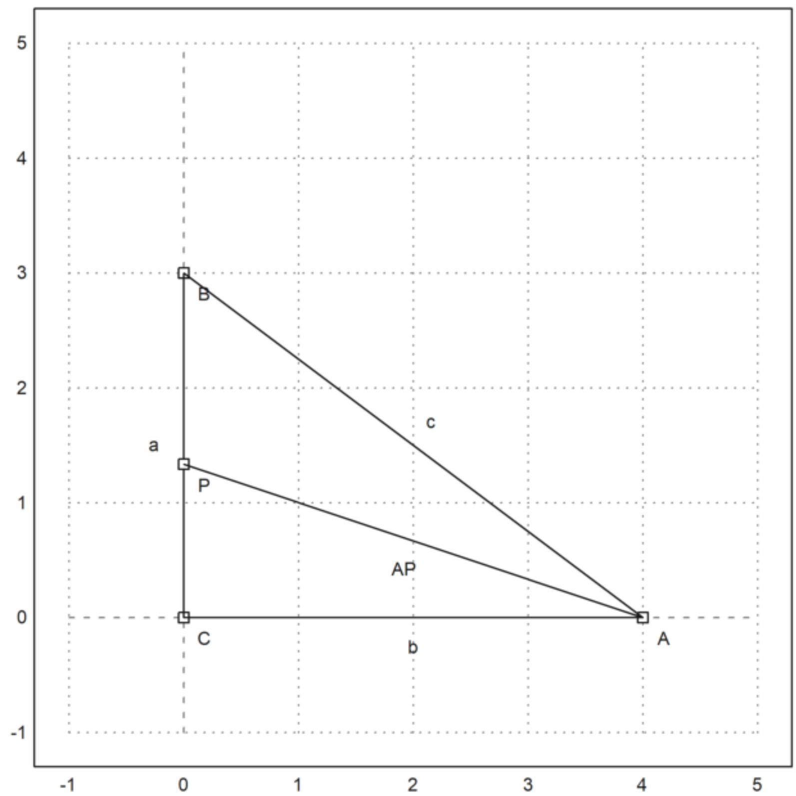
```
18°26'5.82''
```

Titik P adalah perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

```
[0,  1.33333]
```

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```



Mari kita cek sudut-sudutnya dalam contoh spesifik.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```

```
0.321750554397
0.321750554397
```

Sekarang kita hitung panjang garis bagi AP

Kami menggunakan teorema sinus dalam segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

berlaku dalam segitiga apa pun. Kuadratkan, ini diterjemahkan ke dalam apa yang disebut "spread law"

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

di mana a, b, c menunjukkan kuadrat jarak.
Karena spread CPA adalah 1-sa2, kita bisa mendapatkan bisa/1 = b/(1-sa2) dan dapat menghitung bisa (kuadrat jarak dari garis bagi sudut).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2\,b\,\left(b+a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai Mesir.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])")), distance(A,P)
```

```
4.21637021356
4.21637021356
```

Kita juga dapat menghitungg P menggunakan rumus spread.

```
>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b\,\left(\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}-b-a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.

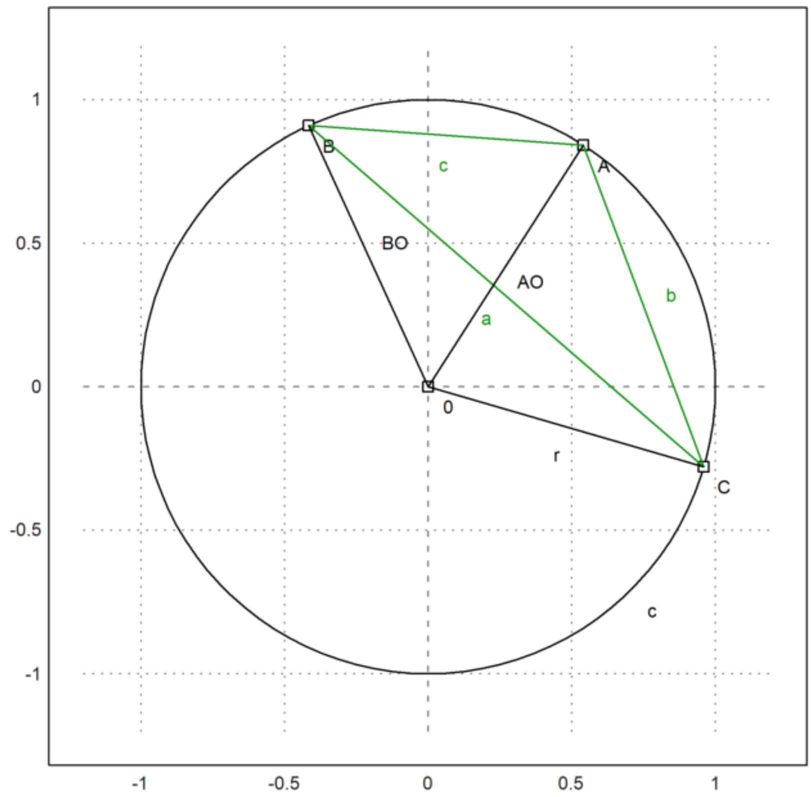
```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

```
1.33333333333
```

Chord Angle

Lihatlah situasi berikut ini.

```
>setPlotRange(1.2); ...
>color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
>A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a")
>color(1); O:=[0,0];  plotPoint(O,"0"); ...
>plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
>insimg;
```



Kita dapat menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus triple spread untuk sudut-sudut di pusat O untuk r. Dengan demikian kita mendapatkan rumus untuk jari-jari kuadrat dari pericircle dalam hal kuadran sisisisinya.
Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa angka nol yang rumit, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),
```

$$-\frac{a\,b\,c}{c^2-2\,b\,c+a\,\left(-2\,c-2\,b\right)+b^2+a^2}$$

Kita dapat menjadikannya sebuah fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasilnya untuk titik A, B, C.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

Untuk radiusnya 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

1

Faktanya adalah, bahwa spread CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema chord angle.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Kenyataannya, spread adalah b/(4r), dan kita lihat bahwa sudut chord b adalah setengah dari sudut tengah.

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

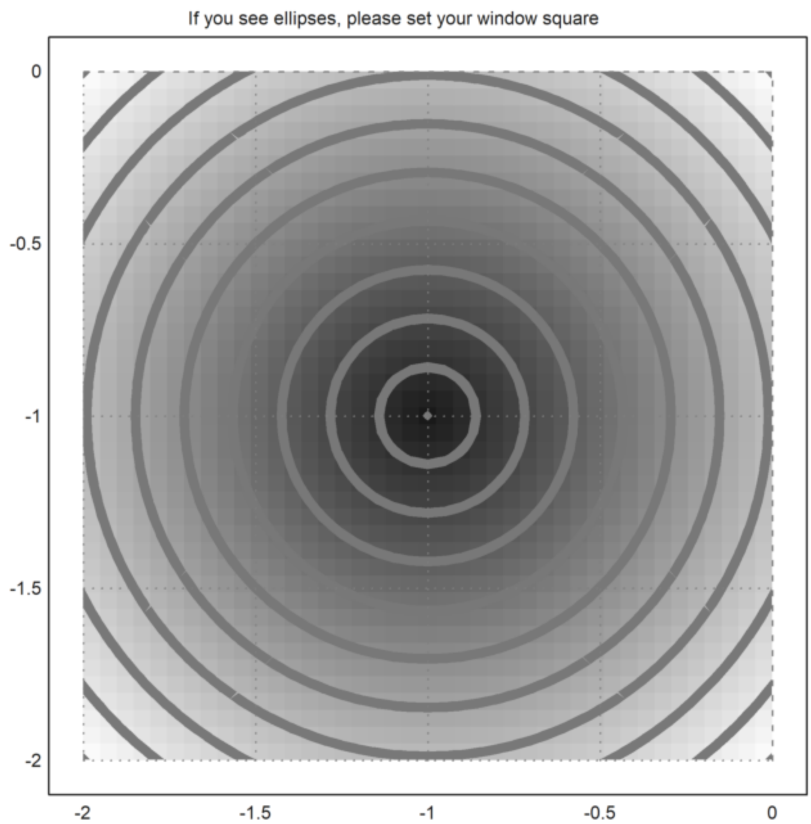
$$0$$

Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

Preliminary remark

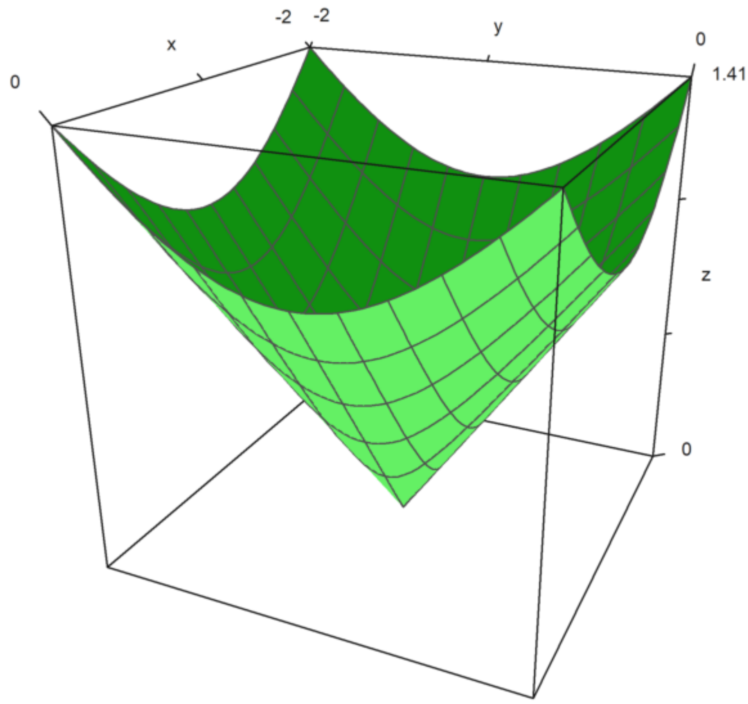
Fungsi pada sebuah titik M pada bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki garis-garis tingkat yang cukup sederhana: lingkaran yang berpusat di A.

```
>&remvalue();
>A=[-1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
>title="If you see ellipses, please set your window square"):
```



dan grafiknya juga cukup sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```

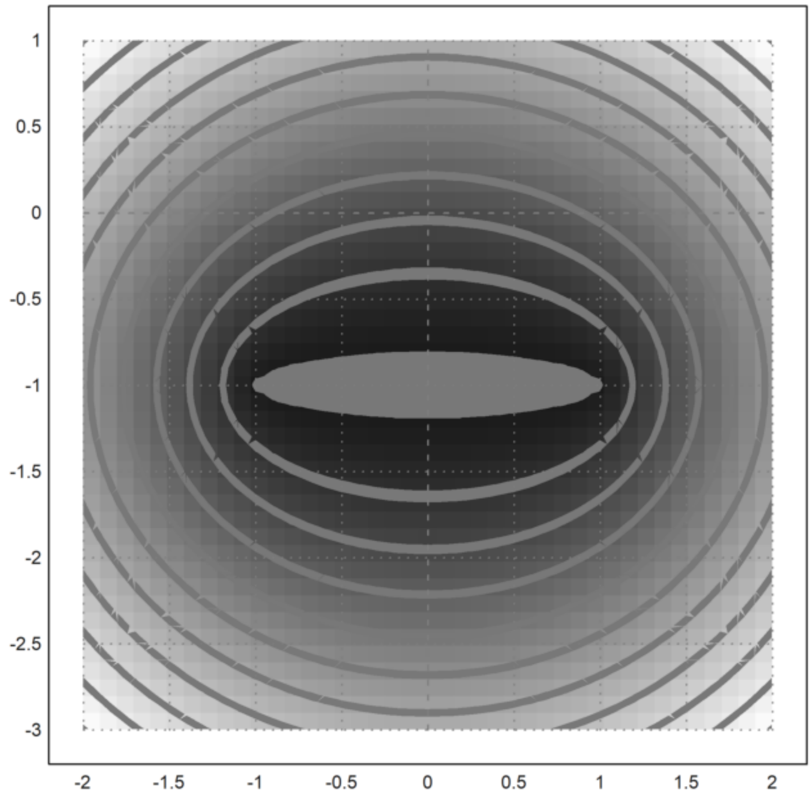


Tentu saja, nilai minimum 0 diperoleh di A.

Dua Titik

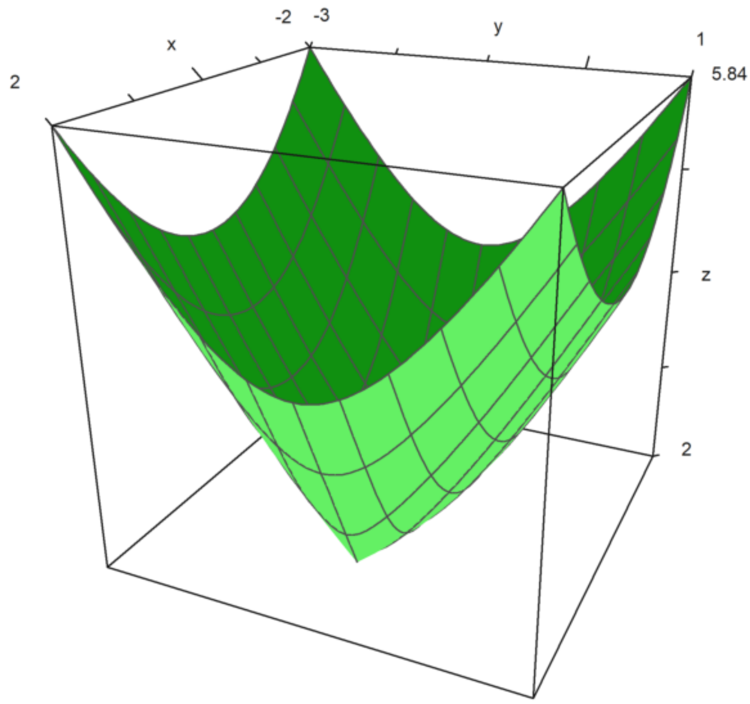
Sekarang kita lihat fungsi MA+MB di mana A dan B adalah dua titik (tetap). Ini adalah "well-known fact" bahwa kurva level adalah elips, titik fokusnya adalah A dan B; kecuali AB minimum yang konstan pada segmen [AB]:

```
>B=[1,-1];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



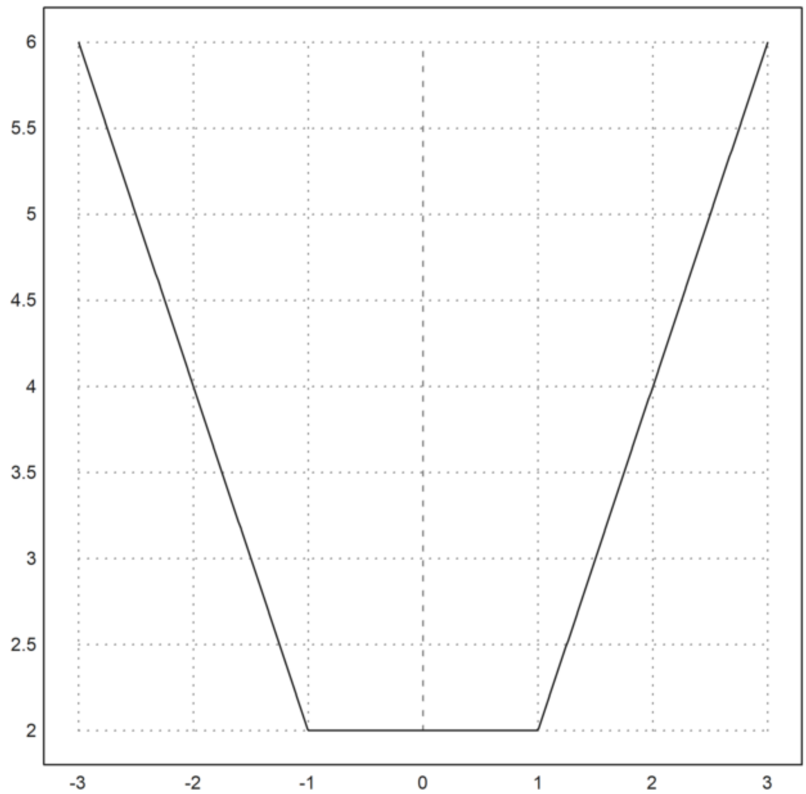
Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```



Pembatasan pada garis (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

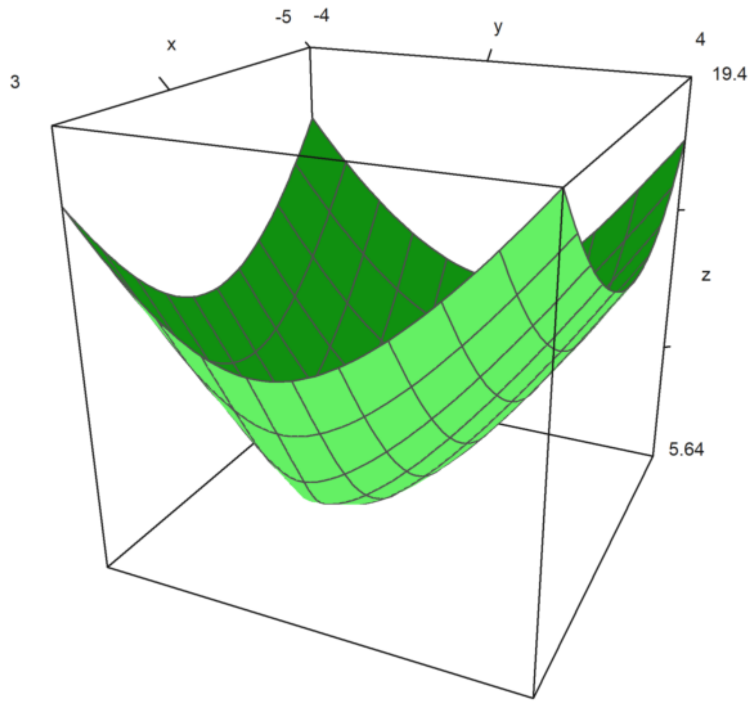


Tiga Titik

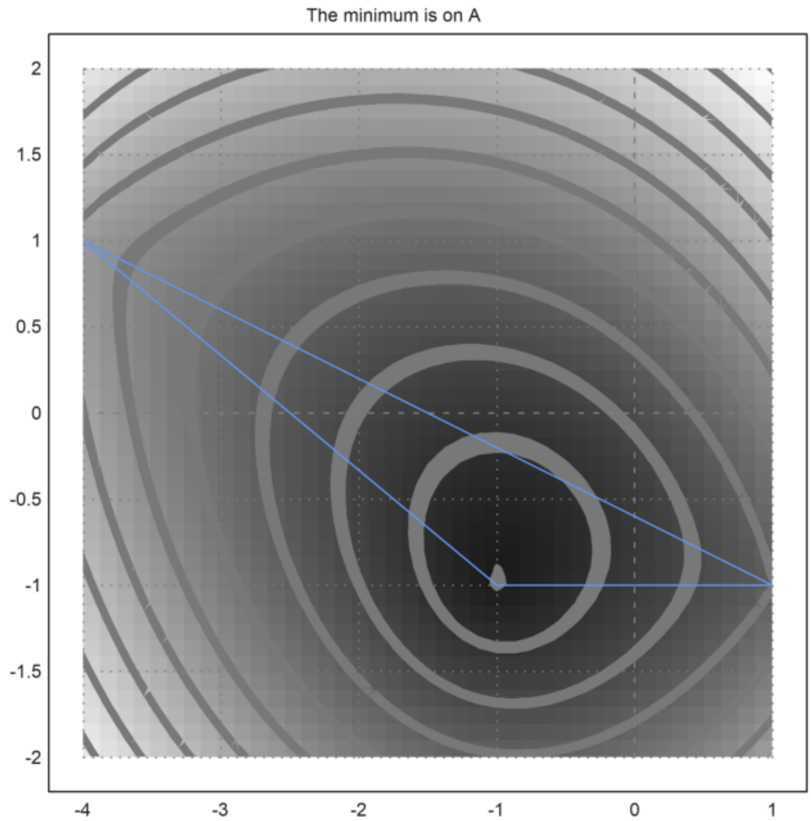
Sekarang, hal-hal menjadi kurang sederhana: Hal ini sedikit kurang dikenal bahwa MA+MB+MC mencapai titik minimum pada satu titik bidang, tetapi untuk menentukannya tidak sesederhana itu:

1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (katakanlah di A), maka sudut minimum dicapai pada titik ini (katakanlah AB+AC).
Contoh:

```
>C=[-4,1];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
```

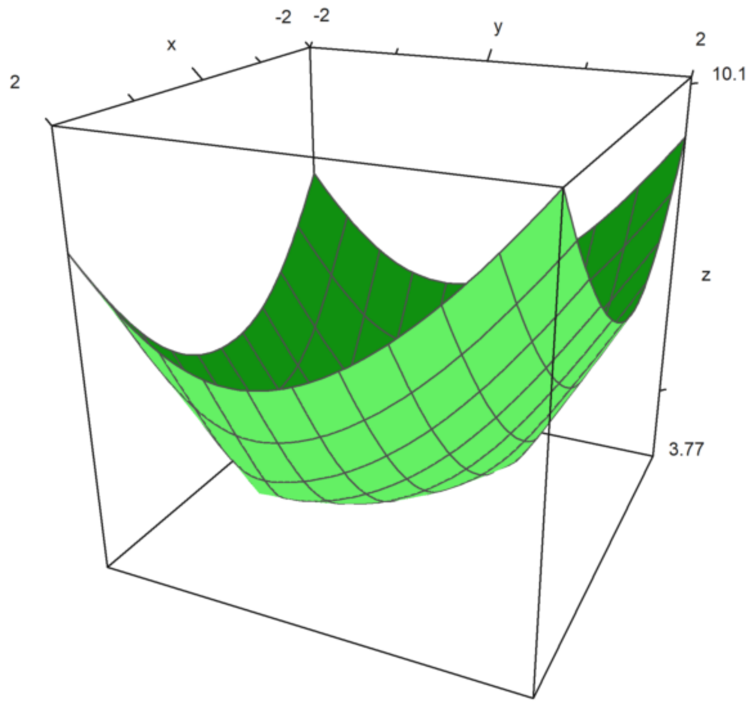



```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

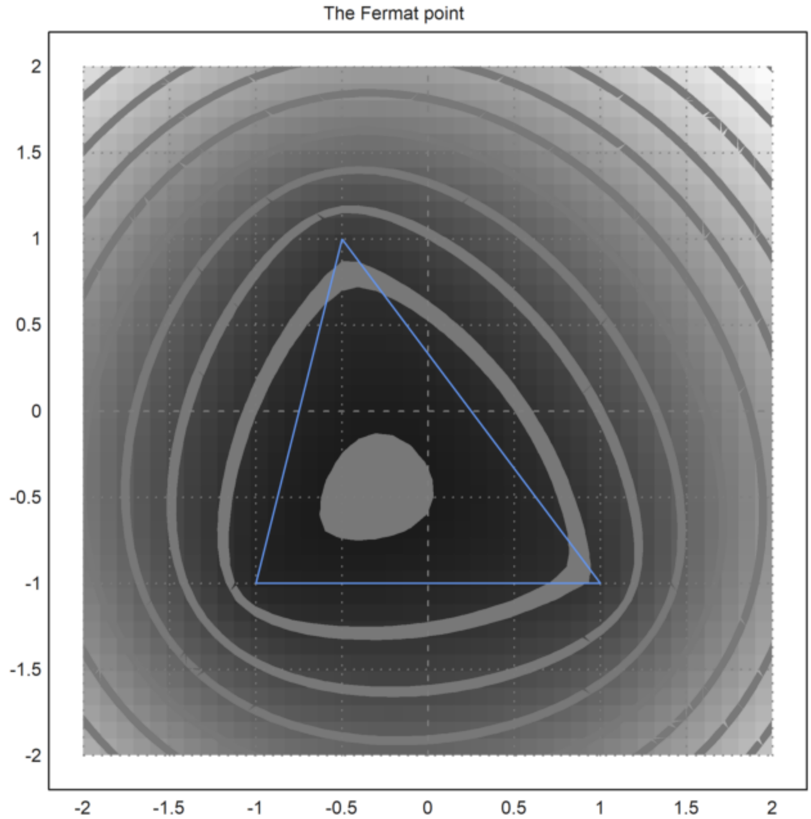


2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120°, minimumnya adalah pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (masing-masing 120°):

```
>C=[-0.5,1];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```




```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point"
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```



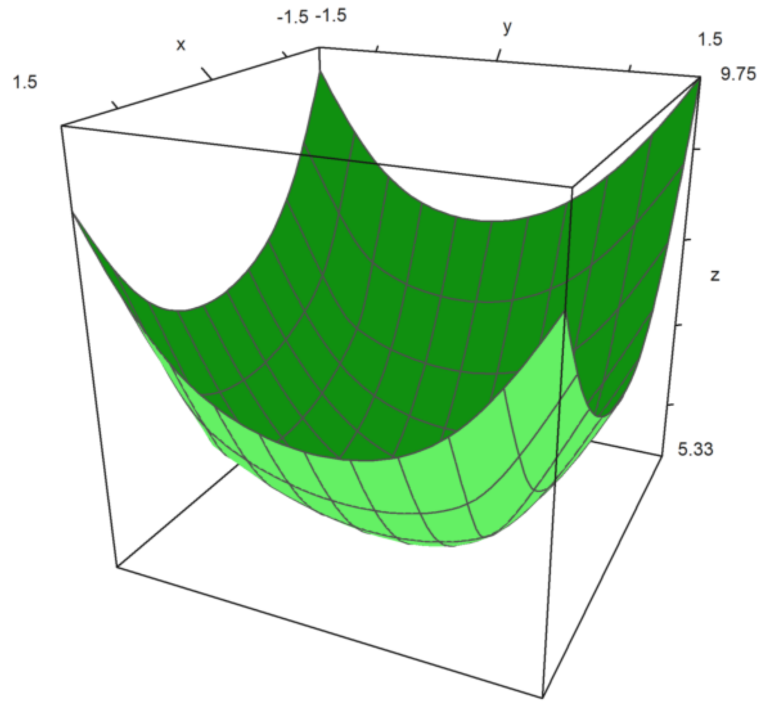
Ini menjadi kegiatan yang menarik untuk merealisasikan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; sebagai contoh, saya tahu sebuah perangkat lunak yang ditulis dalam bahasa Java yang memiliki instruksi "contour lines"...

Semua hal di atas telah ditemukan oleh seorang hakim Perancis bernama Pierre de Fermat; ia menulis surat kepada para ahli dilet lainnya seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di bagian pajak pendapatan. Jadi titik unik F sedemikian rupa sehingga FA+FB+FC minimal, disebut titik Fermat dari segitiga. Namun tampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torriccelli dari Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat menemukannya! Bagaimanapun juga, tradisi yang berlaku adalah mencatat titik F ini...

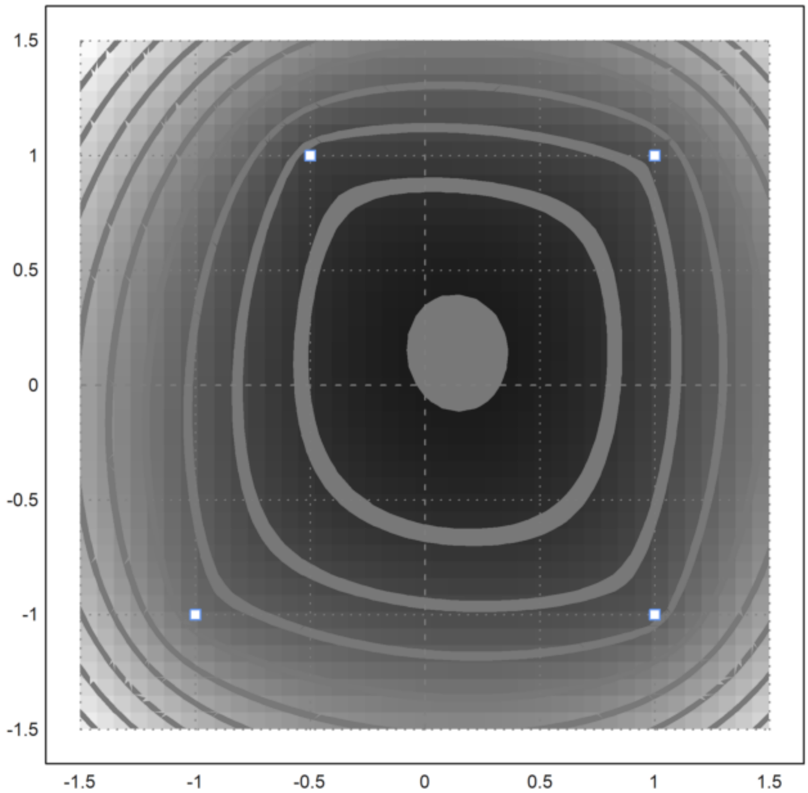
Empat Titik

Langkah selanjutnya adalah menambahkan titik ke-4 D dan mencoba meminimumkan MA+MB+MC+M misalkan Anda adalah operator TV kabel dan ingin menemukan di bidang mana Anda harus meletakkan antena sehingga Anda dapat mencakup empat desa dan menggunakan panjang kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```



Masih ada nilai minimum dan tidak ada vertice A, B, C, maupun D.

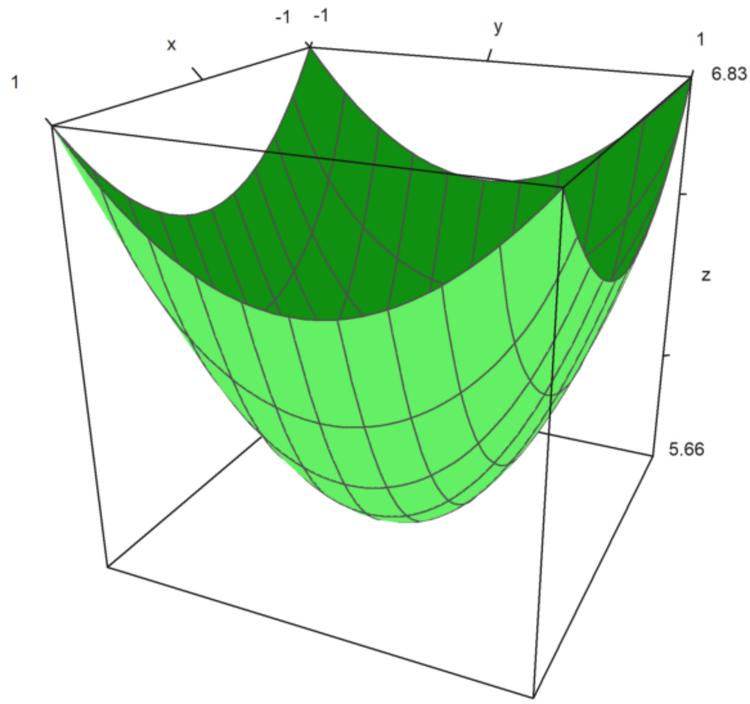
```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f",[0.2,0.2])
```

```
[0.142858,  0.142857]
```

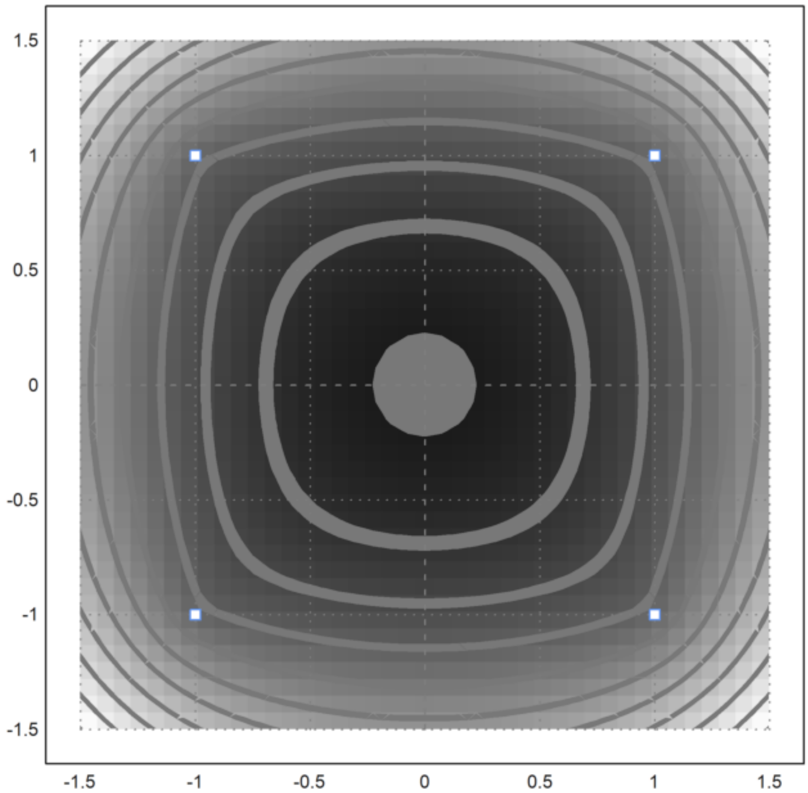
Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal adalah rasional atau mendekati rasional...

Karena ABCD adalah sebuah bujur sangkar, kita berharap bahwa titik optimalnya adalah pusat dari ABCD:

```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```



Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda telah menginstal Povray, dan pvengine.exe pada jalur program.
Pertama, kita menghitung jari-jari bola.
Jika Anda melihat gambar di bawah ini, Anda dapat melihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.
Kita gunakan file geometry.e dari Euler untuk ini.

```
>load geometry;
```

Pertama, dua garis yang membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

```
[- a, 1, 0]
```

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

[- a, - 1, 0]

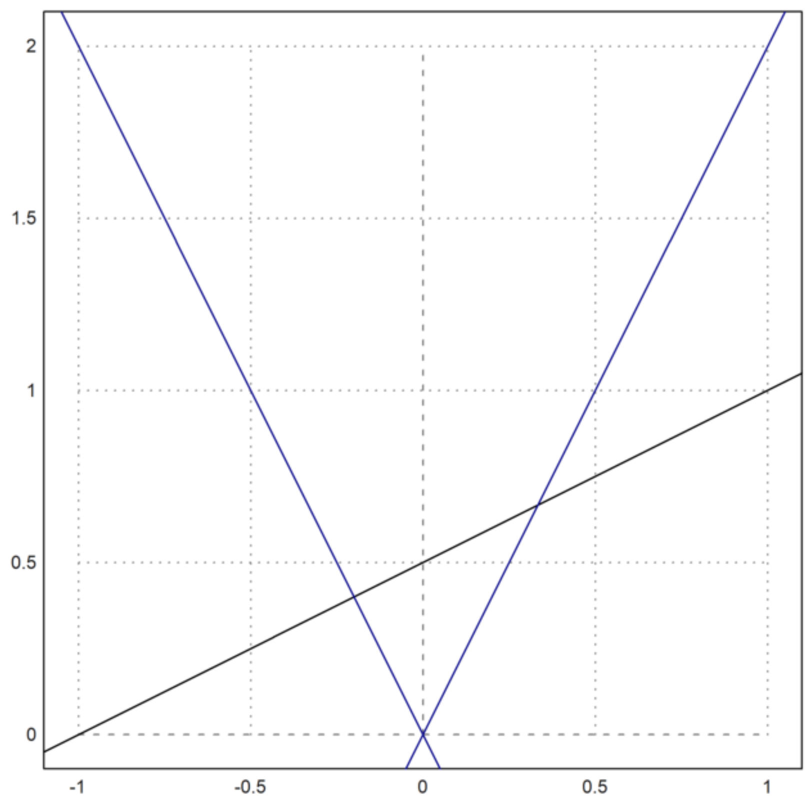
Kemudian baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

[- 1, 2, 1]

Kita plotkan semuanya sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);
>color(black); plotLine(g(),"")
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```



Sekarang, kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

```
[0, u]
```

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2\,u}{a^2+1}-u\right)^2+\frac{a^2\,u^2}{\left(a^2+1\right)^2}}$$

Compute the distance to g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5}-u\right)^2+\frac{\left(2\,u-1\right)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[u=\frac{-\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1} , u=\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1}\right]$$

Ada dua solusi.
Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

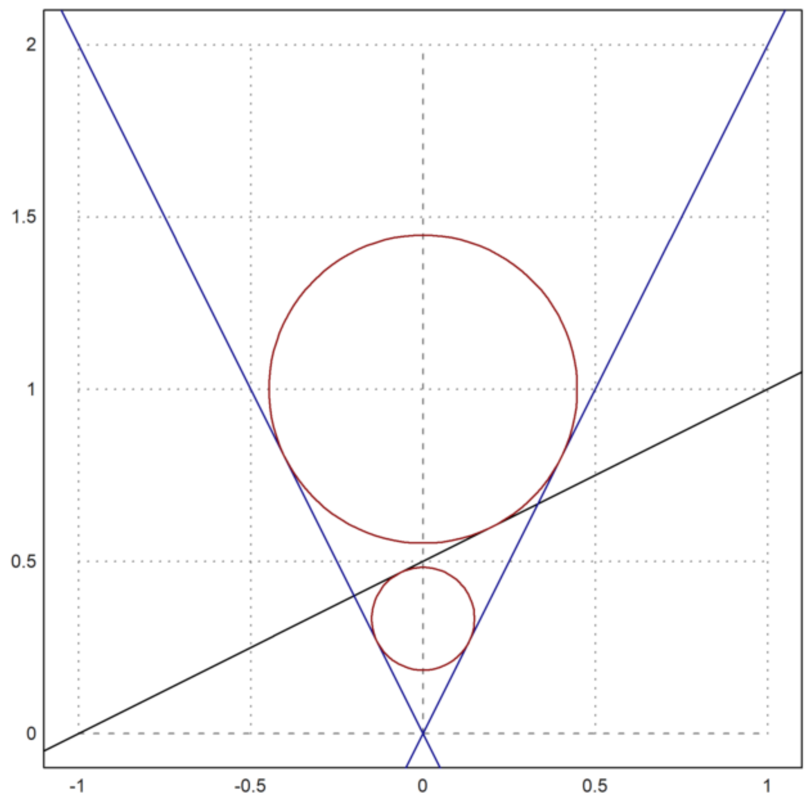
```
[0.333333,  1]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.149071,  0.447214]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimg;
```



Plot dengan Povray

Selanjutnya kita plotkan semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut ini, dan jalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return.
Pertama, kita memuat fungsi povray.

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kita siapkan scene dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya kita menulis dua bola ke file Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kecurut, tranparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kita menghasilkan bidang yang terbatas pada kerucut.

```
>gp=g();
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kita menghasilkan dua titik pada lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Kemudian, kita menghasilkan dua titik di mana bola-bola tersebut menyentuh bidang. Ini adalah fokus elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya kita menghitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kita menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.

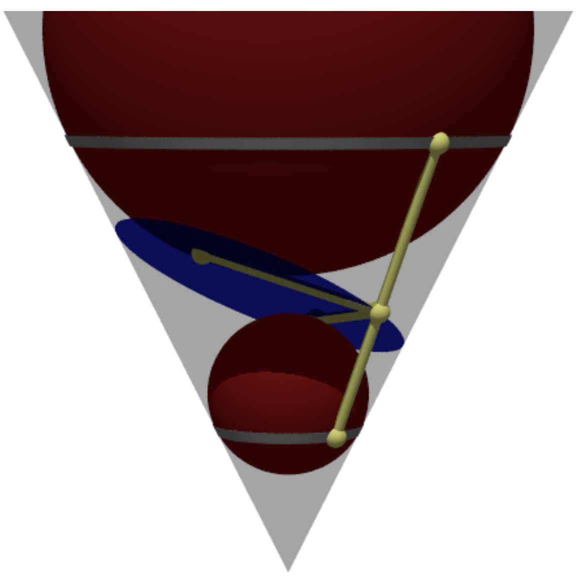
```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang, kita menghasilkan pita abu-abu, di mana bola-bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Mulai program Povray.

```
>povend();
```



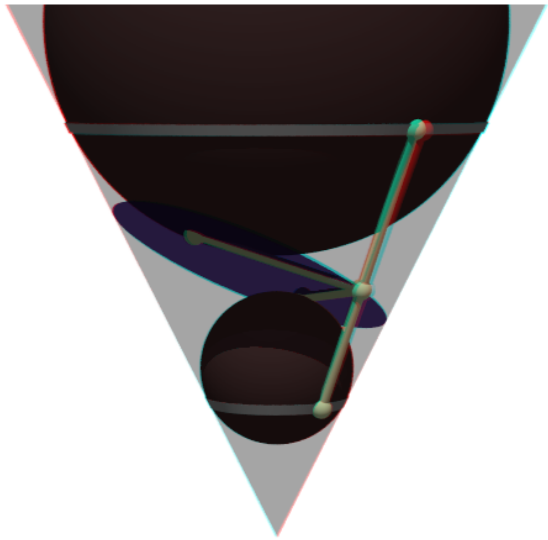
Untuk mendapatkan Anaglyph ini, kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali nanti.

```
>function scene () ...
```

```
global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsiz
writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsiz
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction
```

Anda memerlukan kacamata merah/cyan untuk mengapresiasi efek berikut ini.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```



Contoh 8: Geometri Bumi

Dalam buku catatan ini, kita ingin melakukan beberapa komputasi bola. Fungsi-fungsi tersebut terdapat pada file "spherical.e" di dalam folder examples. Kita perlu memuat file tersebut terlebih dahulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kita menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut ini adalah koordinat untuk Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
[-0.13569,  1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (spherical position print).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
S 7°46.467' E 110°23.050'
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,2
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama, kita menghitung vektor dari satu titik ke titik lainnya pada bola ideal. Vektor ini adalah [heading, distance] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7°.

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan
```

```
65°20'26.60''
53.8945384608
```

This is a good approximation. The following routines use even better approximations. On such a short distance the result is almost the same.
Ini adalah aproksimasi yang baik. Rutinitas berikut ini menggunakan aproksimasi yang lebih baik lagi. Pada jarak yang pendek, hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found:  // perkiraan jarak FMIPA-Semarang (character 32)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semaran ...
                             ^
```

Terdapat fungsi untuk heading, dengan mempertimbangkan bentuk elips bumi. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

```
     65.34°
```

Sudut segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,
```

```
180°0'10.77''
```

Ini bisa digunakan untuk menghitung luas area segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, cara ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->"km^2", // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Sem
```

```
2116.02948749km^2
```

Ada sebuah fungsi untuk hal ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata segitiga untuk menghitung radius bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi
```

```
2123.64310526 km^2
```

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Sebuah vektor berisi heading dan distance, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan sebuah vektor, kita menggunakan svector. Untuk menambahkan sebuah vektor ke sebuah posisi, kita menggunakan saddvector.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333’ E 110°49.683’
S 7°34.333’ E 110°49.683’
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola yang ideal. Hal yang sama di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(So
```

```
S 7°34.333’ E 110°49.683’
S 7°34.333’ E 110°49.683’
```

Mari kita beralih ke contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998’ E 110°21.966’
S 6°10.500’ E 106°48.717’
```

Menurut Google Earth, jaraknya adalah 429,66 km. Kami mendapatkan aproksimasi yang bagus.

```
>esdist(Tugu,Monas)->"km", // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

```
431.565659488km
```

Judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
294°17’2.85’’
```

Namun demikian, kita tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat, jika kita menambahkan arah dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi, karena kita tidak menghitung fungsi inversi secara tepat, tetapi mengambil perkiraan radius bumi di sepanjang jalur.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
S 6°10.500’ E 106°48.717’
```

Namun demikian, kesalahannya tidak begitu besar.

```
>sposprint(Monas),
```

```
S 6°10.500’ E 106°48.717’
```

Tentu saja, kita tidak bisa berlayar dengan arah yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika kita ingin mengambil jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang ke arah NE mulai dari titik mana pun di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan!
Perhitungan berikut ini menunjukkan bahwa kita melenceng jauh dari tujuan yang benar, jika kita menggunakan arah yang sama selama perjalanan.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambahkan 10 kali sepersepuluh dari jarak tersebut, dengan menggunakan arah ke Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya jauh berbeda.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
S 6°11.250’ E 106°48.372’
     1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada garis lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran lintang 30°, tetapi jalur yang lebih pendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

```
79.69°
```

Namun, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi, kita harus menyesuaikan arah kita di sepanjang jalan. Untuk tujuan kasar, kita sesuaikan pada 1/10 dari jarak total.

```
>p=P1;  dist=esdist(P1,P2); ...
>  loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); e
```

```
79.69°
81.67°
83.71°
85.78°
87.89°
90.00°
92.12°
94.22°
96.29°
98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan, jika kita mengikuti arah yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

```
0.203km
```

Kita mendapatkan aproksimasi yang baik, jika kita menyesuaikan arah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
>  loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
0.000km
```

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS di sepanjang Bundaran HI menuju Monas dengan fungsi navigate.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
>  loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 7°37.422' E 110°0.573'
S 7°27.829' E 109°39.196'
S 7°18.219' E 109°17.834'
S 7°8.592' E 108°56.488'
S 6°58.948' E 108°35.157'
S 6°49.289' E 108°13.841'
S 6°39.614' E 107°52.539'
S 6°29.924' E 107°31.251'
S 6°20.219' E 107°9.977'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

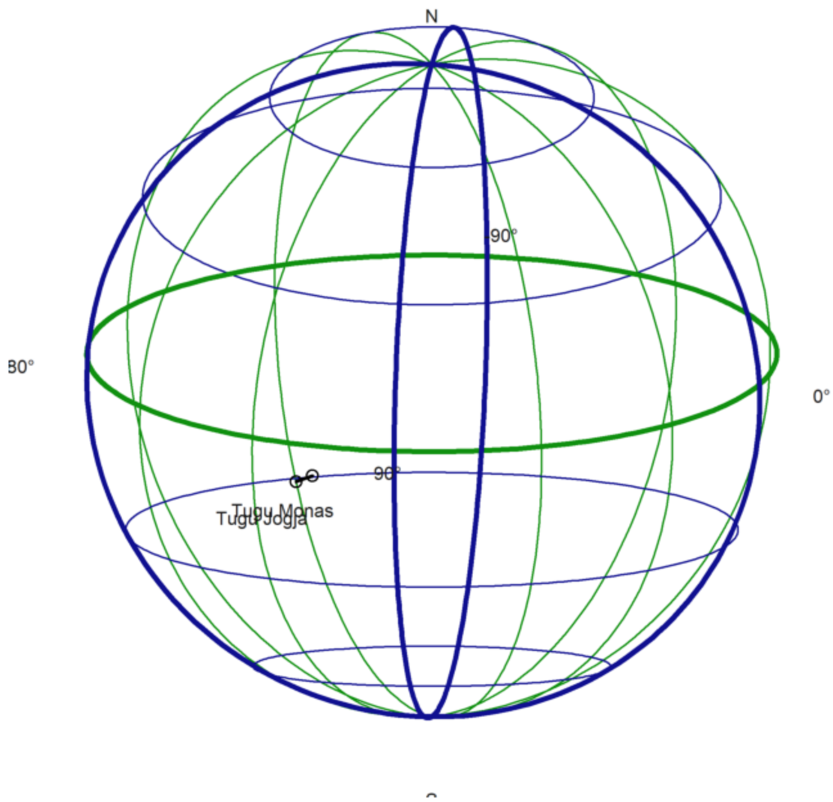
Kita menulis sebuah fungsi, yang memetakan bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
```

```
useglobal;
plotearth;
plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");
plotposline(v);
endfunction
```

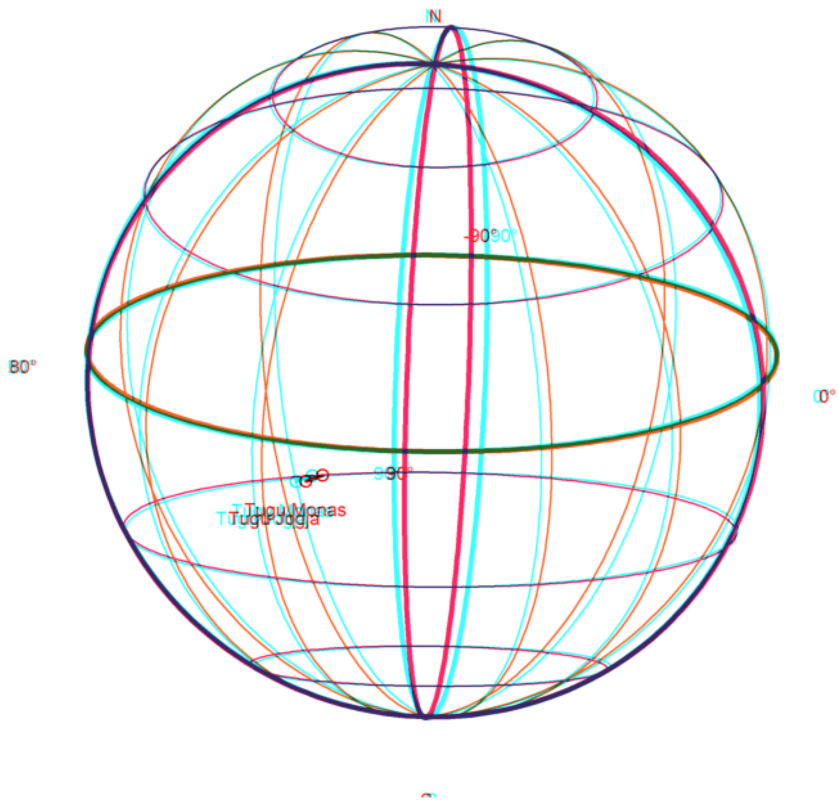
Sekarang, plotkan semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):
```



Atau gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglyph. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah/cyan.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```



Latihan

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n), r.
Petunjuk:
- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah (360/n).
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan (360/n).
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.
2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.
Petunjuk:
- Misalkan persamaan parabolanya y= ax^2+bx+c.
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c.
3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

```
  - Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung
```

(sisinya-sisintya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).

```
- Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat
```

garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.

```
- Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar
```

lingkaran dalamnya.

```
- Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis
```

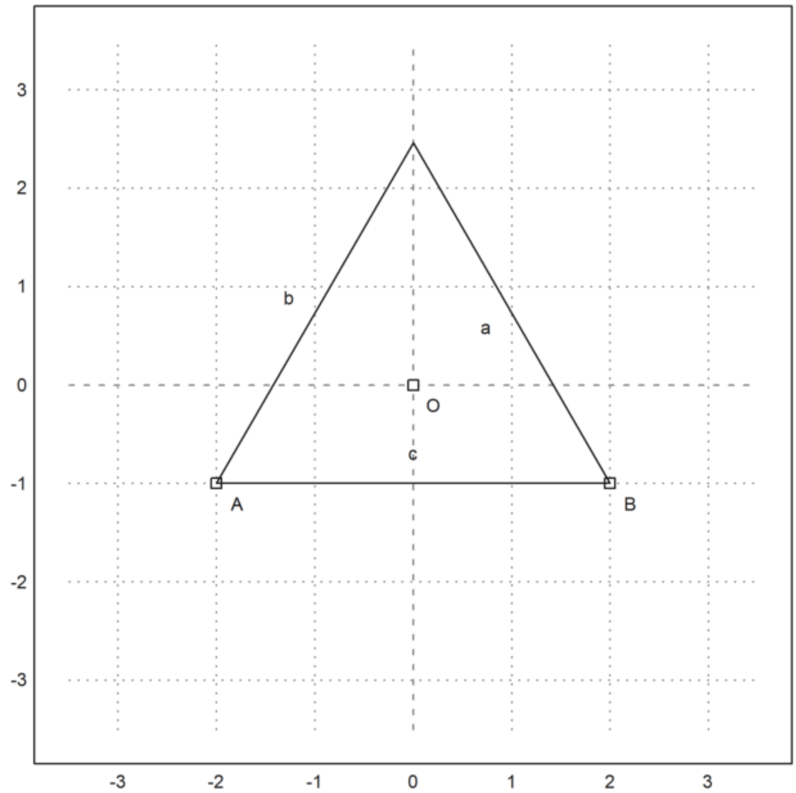
singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.
4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).
5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

Jawab:
1.

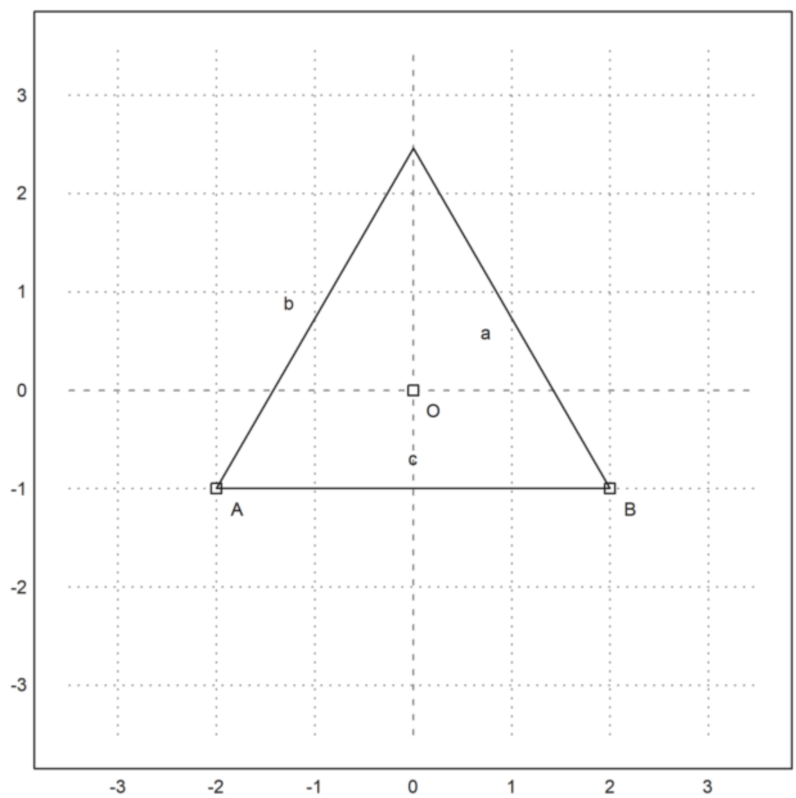
```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-3.5,3.5,-3.5,3.5);
>O=[0,0]; plotPoint(O,"O");
>A=[-2,-1]; plotPoint(A,"A");
>B=[2,-1]; plotPoint(B,"B");
>C=[0,2*3^0.5-1]; plotPoint(A,"A");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(A,C,"b");
>aspect(1):
```



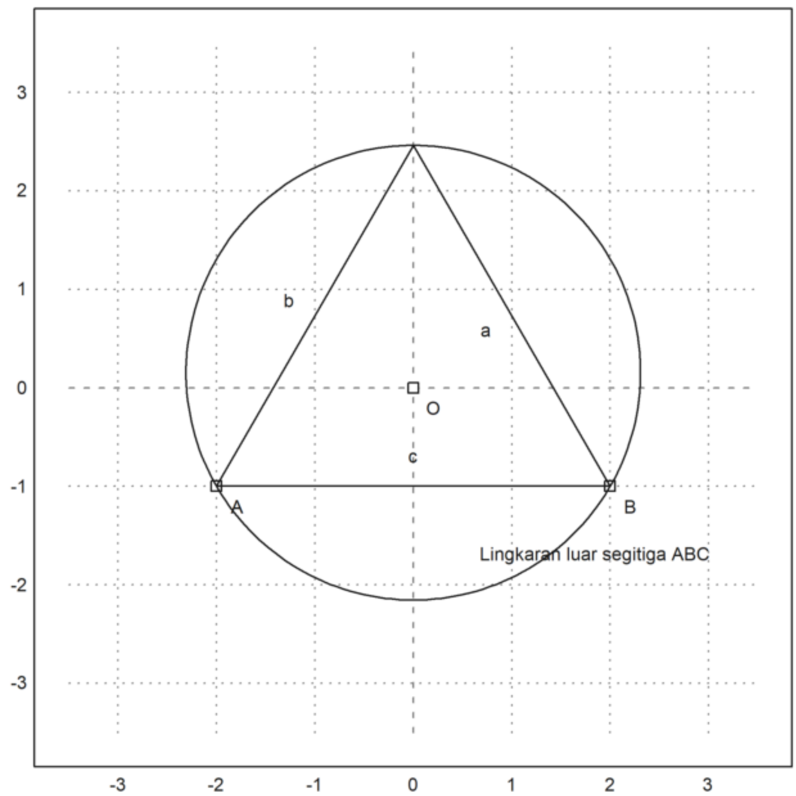

```
>c=circleThrough(A,B,C):
```



```
>R=getCircleRadius(c);
>O=getCircleCenter(c)
```

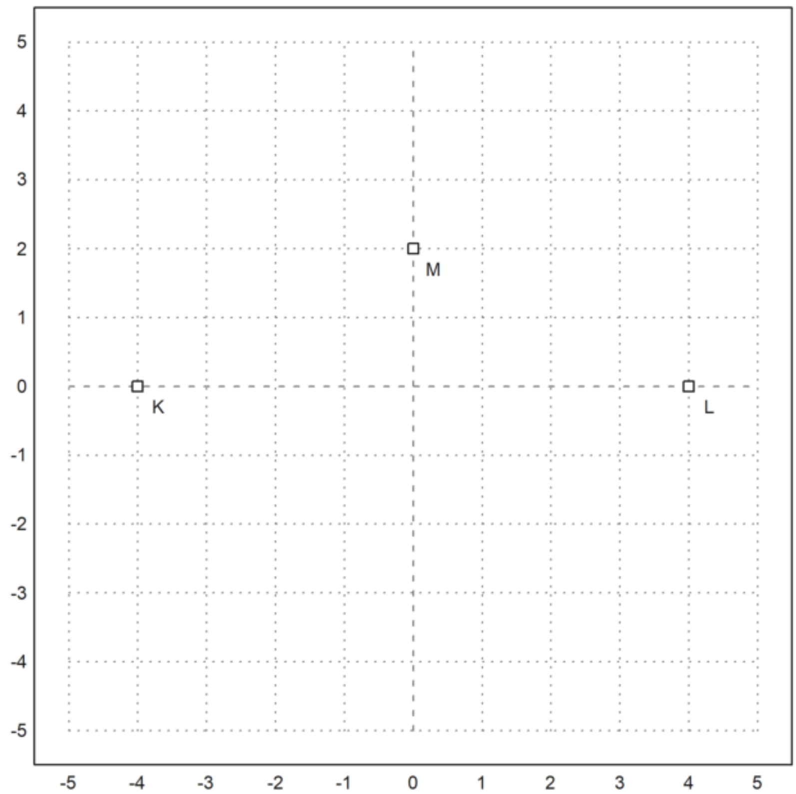
```
[0,  0.154701]
```

```
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



2.

```
>setPlotRange(5);
>K=[-4,0];  L=[4,0] ; M=[0,2];
>plotPoint(K,"K"); plotPoint(L,"L"); plotPoint(M,"M"):
```



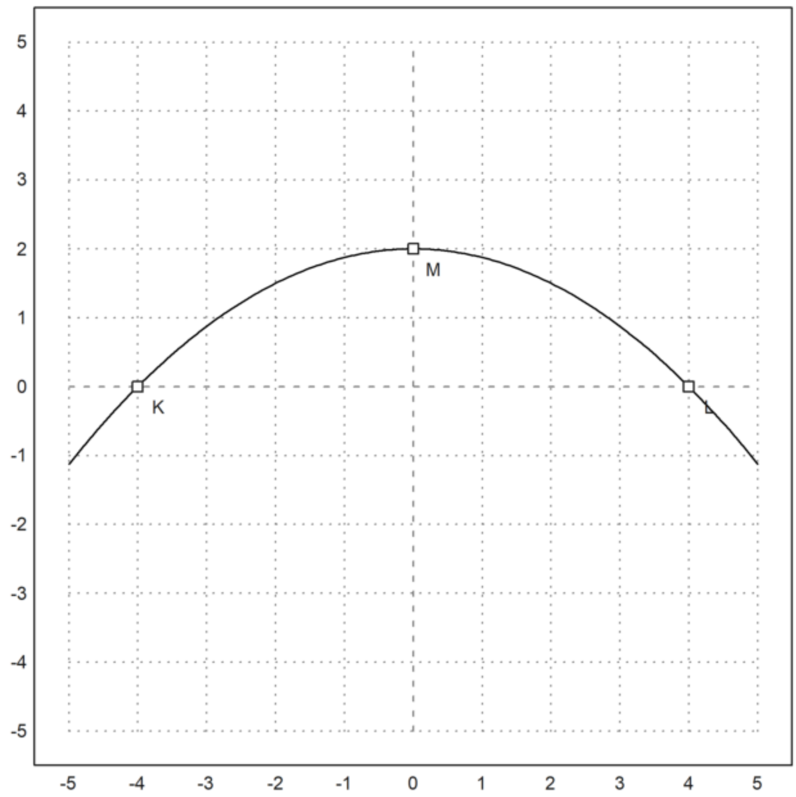

```
>sol &= solve([16*a+8*b=-c,16*a-8*b=-c,c=2],[a,b,c])
```

```
                              1
                    [[a = - -, b = 0, c = 2]]
                              8
```

```
>function y&=-1/8*(x^2)-0*x+2
```

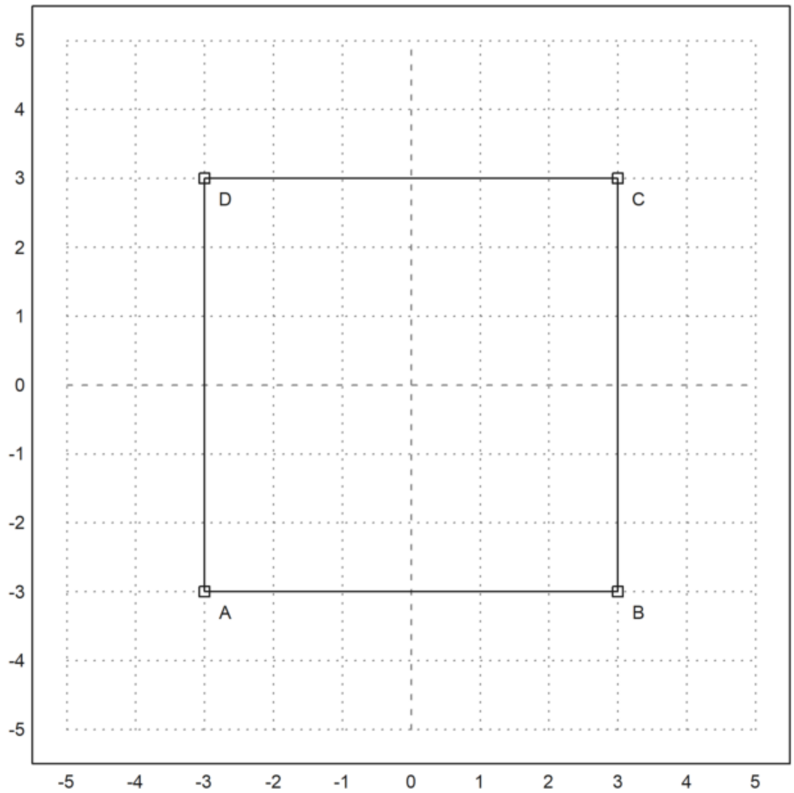
```
                                    2
                                   x
                               2 - --
                                   8
```

```
>plot2d("-1/8*(x^2)-0*x+2",-5,5,-5,5); ...
>plotPoint(K,"K"); plotPoint(L,"L"); plotPoint(M,"M"):
```



3

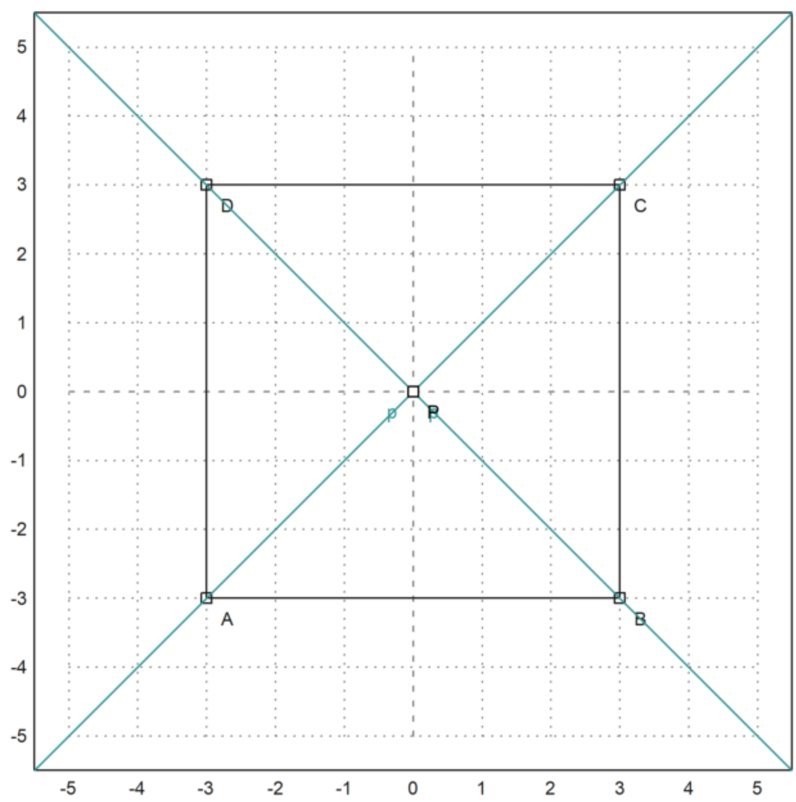
```
>setPlotRange(5);
>A=[-3,-3];  B=[3,-3] ; C=[3,3]; D=[-3,3];
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); plotPoint(D,"D");
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,D,""); plotSegment
```




```
>l=angleBisector(A,B,C);
>g=angleBisector(B,C,D);
>P=lineIntersection(l,g)
```

```
[0,   0]
```

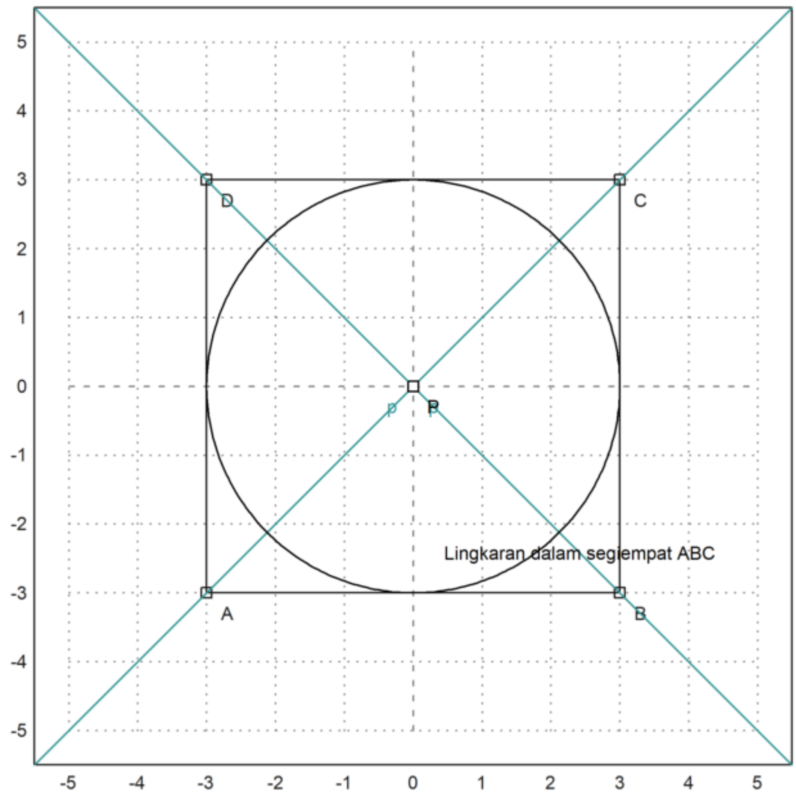
```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1);
>plotPoint(P,"P"):
```




```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))
```

3

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segiempat ABC"):
```



Dari gambar di atas, terlihat bahwa sisi-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yaitu lingkaran dalam segiempat.
Kemudian akan ditunjukkan bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

```
>AB=norm(A-B) // panjang sisi AB
```

6

```
>BC=norm(B-C) // panjang sisi ABC
```

6

```
>CD=norm(C-D) // panjang sisi CD
```

6

```
>DA=norm(D-A) // panjang sisi DA
```

6

```
>AB.CD
```

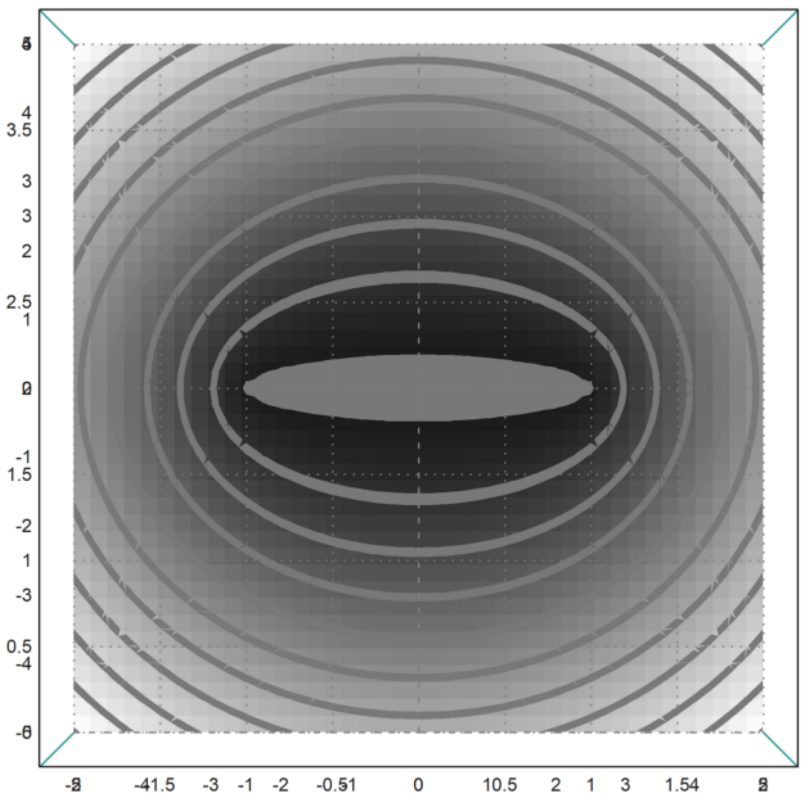
36

```
>DA.BC
```

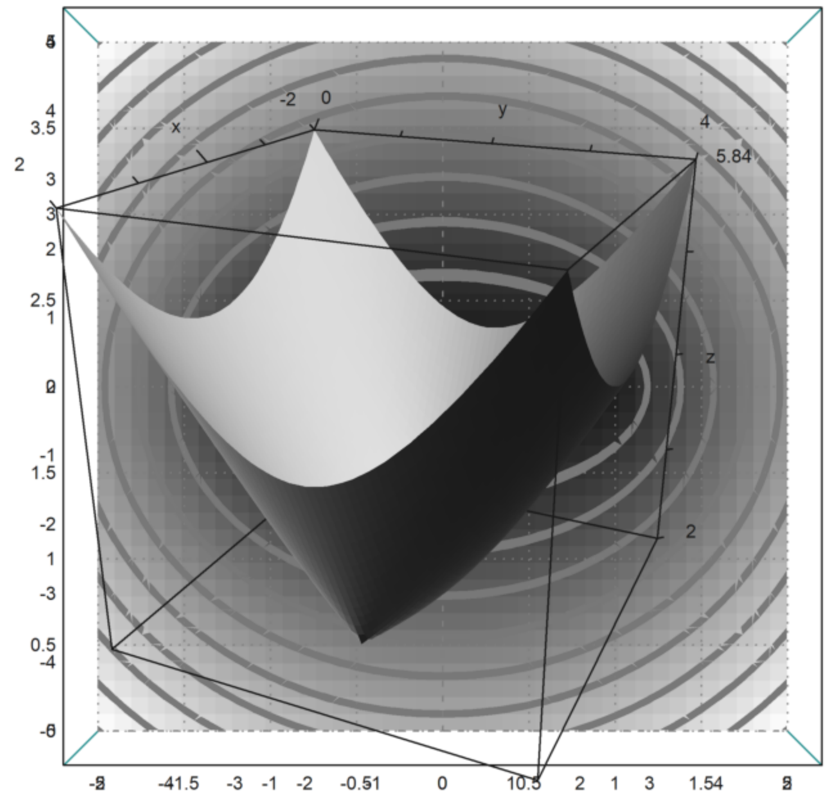
36

4.

```
>P=[-1,2]; Q=[1,2];
>function d1(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-Q[1])^2+(y-Q[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=0,ymax=4,hue=1):
```

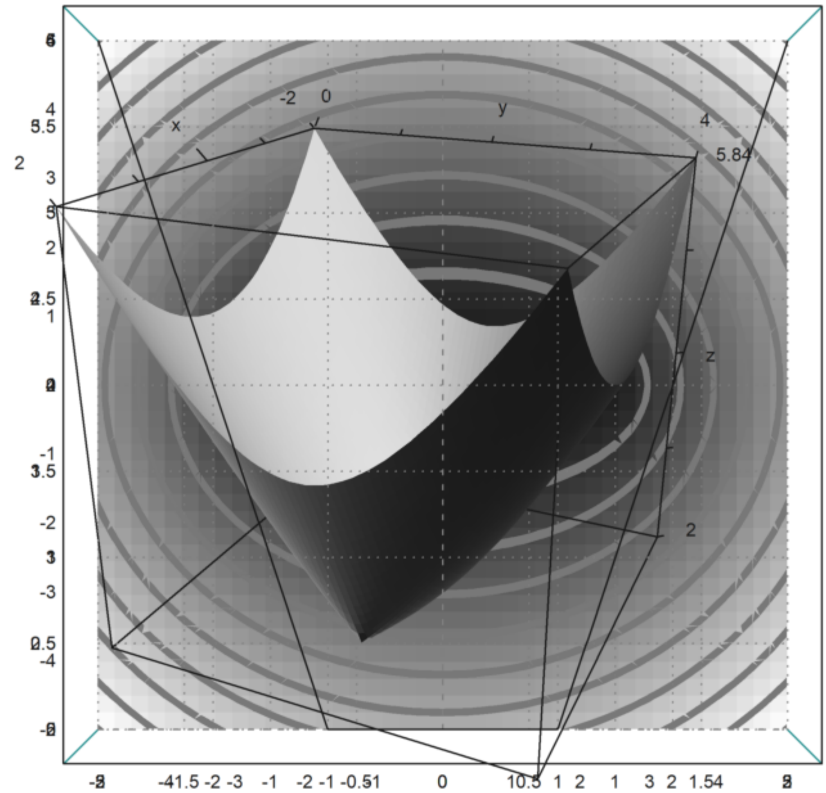


```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=0,ymax=4,hue=1):
```



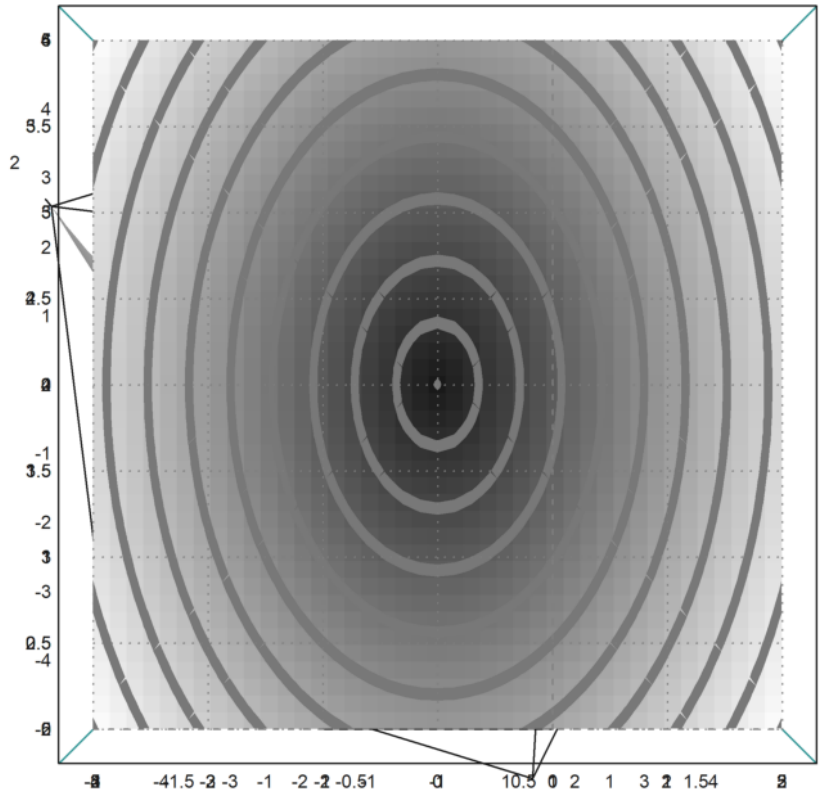
Batasan garis PQ

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

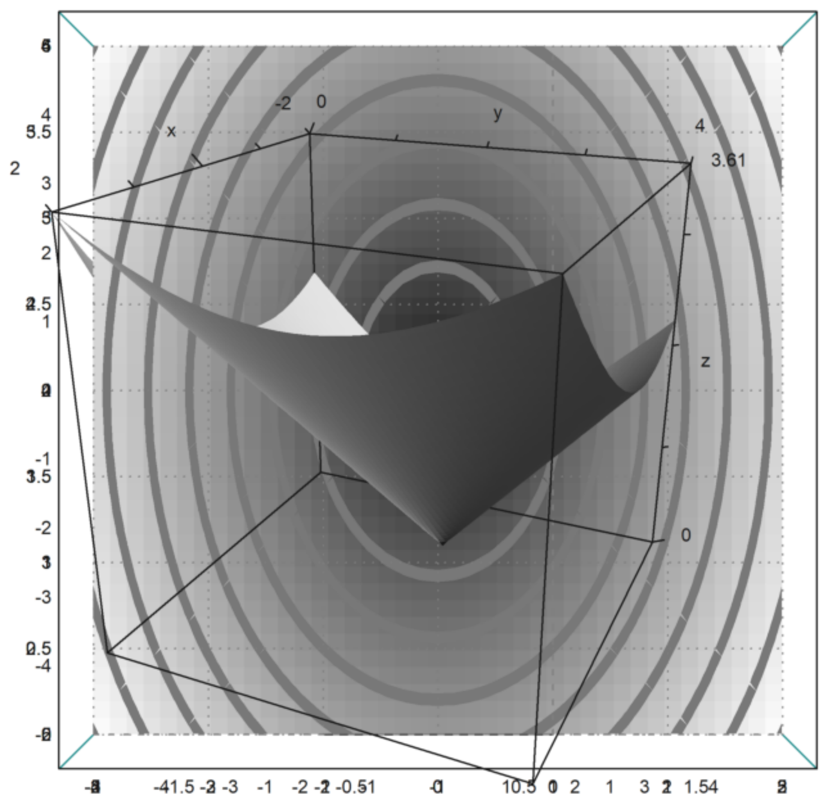


5.

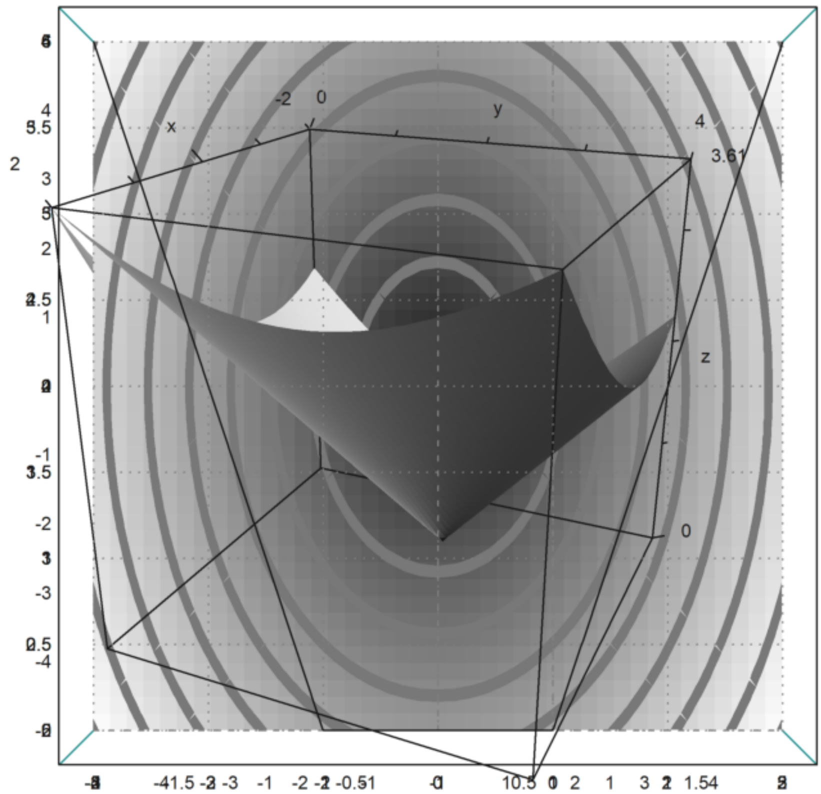
```
>P=[-1,2]; Q=[1,2];
>function d3(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-Q[1])^2+(y-Q[2])^2
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=2,ymin=0,ymax=4,hue=1):
```



```
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=0,ymax=4,hue=1):
```



```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



BAB 6

EMT Untuk Statistika

Nama : Amalia Intan Arvitasari
Kelas: Matematika B
NIM : 22305144026

Sub Topik 5 : Perhitungan Analisis Data Statistika Deskriptif

Pada sub topik 5 part 1 ini akan dibahas mengenai:
1. Penjelasan umum mengenai statistika deskriptif
2. Ruang lingkup kajian pada analisis statistika deskriptif yang meliputi distribusi frekuensi, mean, median, dan modus.

Penjelasan Umum Mengenai statistika Deskriptif

Statistika deskriptif yaitu statistik yang mempelajari tata cara mengumpulkan, menyusun, menyajikan, dan menganalisis data yang berwujud angka agar dapat memberikan gambaran yang teratur, ringkas, dan jelas mengenai suatu gejala atau keadaan peristiwa. Analisis ini hanya berupa akumulasi data dasar dalam bentuk deskripsi semata dalam arti tidak mencari atau menerangkan saling hubungan, menguji hipotesis, membuat ramalan atau melakukan penarikan kesimpulan. Analisis data yang tergolong statistik deskriptif terdiri dari distribusi frekuensi, ukuran pemusatan data(mean,median,modus), ukuran letak(kuartil,desil,pers
ukuran dispersi(jangkauan atau rentang,varians,simpangan baku), dan teknis statistik lain yang bertujuan hanya untuk mengetahui gambaran atau kecenderungan data tanpa bermaksud melakukan generalisasi.

Distribusi Frekuensi

Distribusi frekuensi merupakan ruang lingkup kajian pada analisis statistik deskriptif. Distribusi frekuensi adalah alat penyajian data berbentuk kolom dan lajur (tabel)yang di dalamnya dibuat angka yang menggambarkan pancaran frekuensi dari variabel yang sedang menjadi objek. Unsur-unsur distribusi frekuensi yaitu kelas(kelompok nilai data yang ditulis dalam bentuk interval),batas bawah(jangkauan terendah dari kelas),batas atas(jangkauan tertinggi dari kelas),tepi bawah kelas(batas bawah dikurangi ketelitian data),tepi atas ke-

las(batas atas kelas ditambah ketelitian data),banyak kelas(1+3,3 log n),dan panjang kelas.
Dalam statistik terdapat berbagai macam distribusi frekuensi, diantaranya:
1. Distribusi frekuensi biasa

Distribusi frekuensi biasa adalah distribusi frekuensi yang berisikan jumlah frekuensi dari setiap kelompok data atau kelas.

2. Distribusi frekuensi relatif

Distribusi frekuensi relatif adalah distribusi frekuensi yang dinyatakan dalam bentuk persentase atau desimal. Besarnya frekuensi relatif yaitu frekuensi absolut setiap kelas dibagi total frekuensi dikali 100%.

3. Distribusi frekuensi kumulatif

Menunjukkan seberapa besar jumlah frekuensi pada tingkat kelas tertentu yang diperoleh dengan menjumlahkan atau mengurangkan frekuensi pada kelas tertentu dengan frekuensi kelas sebelumnya. Distribusi frekuensi kumulatif terdiri dari 2 macam yaitu distribusi kumulatif kurang dari dan distribusi kumulatif lebih dari.

Contoh Soal 1:
1.Disajikan data urut yaitu 45,48,49,50,52,52,52,53,53,54,54,54,54,54,56,56, 56,56,57,57,58,58,58,58,58,58,5
62,62,62,63,63,64,64,65,67,68,69,70,70,71,73,74.
Buatlah distribusi frekuensi berdasarkan data diatas!
Penyeleaian:

```
- Menentukan range
  range= nilai maks-nilai min
       = 74-45
       = 29
- Menentukan banyak kelas dengan aturan
  struges.
  = 1+3,3 log n, n banyaknya data
  = 1+3,3 log 48
  = 6,64
  = 7
- Menentukan panjang kelas
```

$$p = \frac{range}{banyakkelas}$$
$$p = \frac{29}{7}$$
$$p = 4.14 = 5$$

Berdasarkan pertimbangan beberapa unsur dalam data urut diatas yaitu nilai minimum 45, nilai maksimum 74, banyak kelas yaitu 7, dan panjang kelas yaitu 5 maka dapat dibuat tabel distribusi frekuensi dengan batas bawah kelas pertama yaitu 43 dan batas atas kelas ketujuh yaitu 77. Sehingga dapat ditentukan tepi bawah kelas pertama yaitu 43-0.5=42.5 dan tepi atas kelas ketujuh yaitu 77+0.5=77.5.

```
>r=42.5:5:77.5; v=[1,6,13,15,6,5,2];
>T:=r[1:7]' | r[2:8]' | v'; writetable(T,labc=["TB","TA","Frek"])
```

```
       TB        TA      Frek
     42.5      47.5         1
     47.5      52.5         6
     52.5      57.5        13
     57.5      62.5        15
     62.5      67.5         6
     67.5      72.5         5
     72.5      77.5         2
```

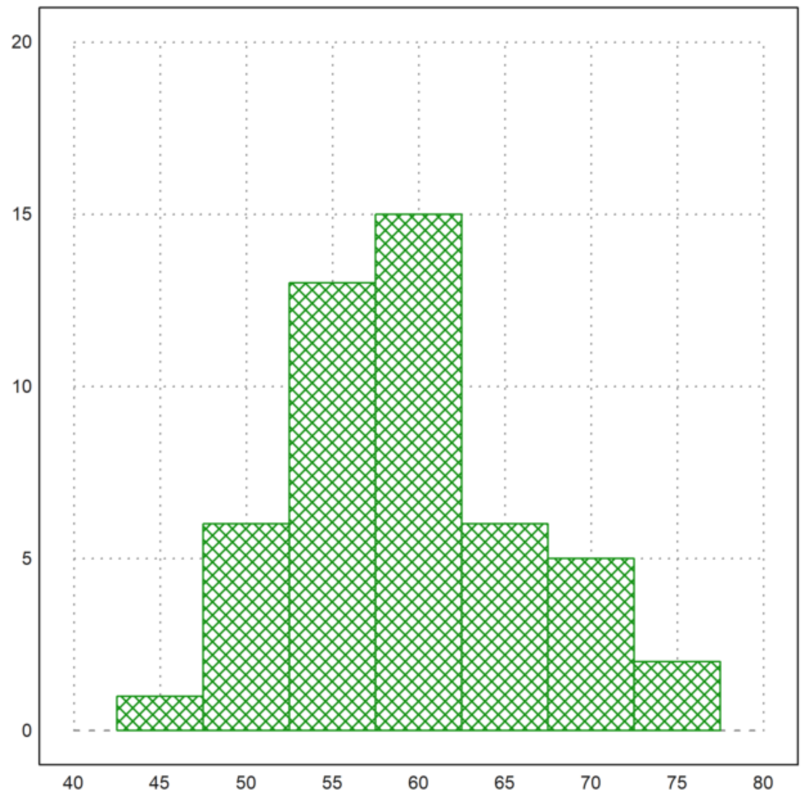
Mencari titik tengah

```
>(T[,1]+T[,2])/2 // the midpoint of each interval
```

```
           45
           50
           55
           60
           65
           70
           75
```

Sajian dalam bentuk histogram

```
>plot2d(r,v,a=40,b=80,c=0,d=20,bar=1,style="\/"):
```



Rata-Rata Hitung(Mean)

Rata-Rata hitung biasa juga disebut sebagai rerata atau mean merupakan ruang lingkup kajian pada analisis statistika deskriptif yang termasuk dalam ukuran pemusatan data.

$$\text{Rata-Rata hitung ini disimbolkan dengan } \mu \text{ untuk data populasi } dan$$

$$\bar{X} \text{ untuk data sampel .}$$

Rata-rata hitung atau mean merupakan nilai yang menunjukkan pusat dari nilai data dan dapat mewakili keterpusatan data. Mean dapat diperoleh dengan membagi jumlah nilai-nilai data dengan jumlah individu(cacah data). Perhitungan mean dibagi dua yaitu mean data tunggal dan mean data kelompok.

1. Perhitungan mean pada data tunggal

Pada data tunggal, perhitungannya yaitu dengan cara menjumlahkan semua nilai dan dibagi banyak data. Rumus yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N}$$

Keterangan:

$$\bar{X} = \text{ Rata-Rata hitung atau mean untuk data sampel}$$

$$\mu = \text{ Rata-Rata hitung atau mean untuk data populasi}$$

$$\sum x_i = \text{ jumlah dari nilai data ke-i}$$

```
n = banyaknya data dalam sampel
N - banyaknya data dalam populasi
```

Data tunggal juga dapat disajikan dalam tabel distribusi.
Misalnya diberikan data

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

yang memiliki frekuensi berturut-turut

$$f_1, f_2, ..., f_n$$

maka rataan hitung sampel atau rataan hitung populasi dari data yang disajikan dalam daftar distribusi itu ditentukan dengan rumus:
Untuk rata-rata hitung sampel,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Untuk rata-rata hitung populasi,

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Kita dapat mengetahui nilai rata-rata hitung(mean)pada data tunggal dengan menggunakan perintah EMT yaitu 'mean(x)' dan 'mean(x,f)'.
Contoh Soal 1:
1. Seorang pelatih tembak ingin mengevaluasi nilai ketangkasan delapan anak buahnya jenis senapan yang dipakai M-16 dengan jarak 300 meter dan masing-masing mendapat nilai 76,85,70,65,40,70,50,dan 80. Berapakah rata-rata nilai ketangkasan delapan anak tersebut?
Penyelesain:

```
>x=[76,85,70,65,40,70,50,80]; mean(x),
```

```
67
```

Diketahui:

$$\sum x_i = 76 + 85 + 70 + 65 + 40 + 70 + 80 = 536$$

```
n = 8
```

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{536}{8}$$

$$\bar{X} = 67$$

Sehingga rata-rata nilai ketangkasan delapan anak tersebut adalah 67
Contoh Soal 2:
Banyaknya pegawai di 5 apotik adalah 3,5,6,4,dan 6. Dengan memandang data itu sebagai data populasi, hitunglah nilai rata-rata banyaknya pegawai di 5 apotik tersebut!
Penyelesaian:

```
>x=[3,5,6,4,6]; mean(x),
```

```
4.8
```

Diketahui:

$$\sum x_i = 3 + 5 + 6 + 4 + 6 = 24$$

```
N = 5
```

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N}$$

$$\mu = \frac{24}{5}$$

$$\mu = 4.8$$

Sehingga nilai rata-rata banyaknya pegawai di 5 apotik tersebut adalah 4.8
Contoh Soal 3:
Diberikan data berat kambing di suatu peternakan yang memelihara 50 kambing. kambing dengan berat 45kg terdapat 5 ekor, kambing dengan berat 46kg terdapat 10 ekor, kambing dengan berat 47kg terdapat 6 ekor, kambing dengan berat 48kg terdapat 9 ekor, kambing dengan berat 49kg terdapat 7 ekor, dan kambing dengan berat 50kg terdapat 13 ekor. Tentukan rata-rata berat kambing di peternakan tersebut.
Penyelesaian:

```
>x=[45,46,47,48,49,50], f=[5,10,6,9,7,13]      //Mendeskripsikan data dan f
```

```
[45,  46,  47,  48,  49,  50]
[5,  10,  6,  9,  7,  13]
```

```
>mean(x,f)    //Menghitung rata-rata
```

```
47.84
```

Jadi, rata-rata berat kambing di peternakan tersebut adalah 47.84 kg

2. Perhitungan mean pada data kelompok

Jika data yang sudah dikelompokkan dalam hitungan distribusi frekuensi maka data tersebut akan berbaur sehingga keaslian data itu akan hilang bercampur dengan data lain menurut kelasnya, hanya dalam perhitungan mean pada data kelompok diambil titik tengahnya untuk mewakili setiap kelas interval. Adapun rumus yang digunakan untuk menghitung mean pada data kelompok yaitu:

$$\bar{X} = \frac{\sum t_i f_i}{\sum f_i}$$

```
Keterangan:
```

$$\sum t_i f_i = \text{jumlah dari perkalian antara titik tengah tiap kelas dan frekuensi tiap kelas}$$

$$\sum f_i = \text{jumlah dari frekuensi tiap kelas}$$

Kita dapat mengetahui nilai rata-rata hitung(mean) pada data kelompok dengan menggunakan perintah EMT yaitu 'mean(t,v)'dimana t menunjukkan titik tengah dan v menunjukkan frekuensi.
Misalkan suatu data berkelompok terdiri dari n kelas dengan nilai tengah masing-masing kelas secara berturut-turut adalah

$$t_1, t_2, ..., t_n$$

dan masing-masing frekuensinya adalah

$$f_1, f_2, ..., f_n$$

maka untuk menghitung rata-rata data tabel distribusi seperti ini di EMT, dapat dilakukan dengan cara berikut:
1. Menentukan tepi bawah kelas (Tb), panjang kelas (P), dan tepi atas kelas (Ta) dengan rumus :

$$T_b = a - 0,5$$

$$P = (b - a) + 1$$

$$P = \frac{range}{banyakkelas}$$

$$T_a = b + 0.5$$

dengan a = batas bawah kelas dan b = batas atas kelas
2. Mendeskripsikan data dalam bentuk tabel, dengan perintah
> r=tepi bawah terkecil:panjang kelas:tepi atas terbesar; v=[frekuensi];
> T:=r[1:jumlah kelas]' | r[2:jumlah kelas + 1]' | v'; writetable(T,labc=["tepi bawah","tepi atas","frekuensi"])
3. Menghitung nilai tengah kelas, dengan perintah
> (T[,1]+T[,2])/2
4. Mengubah baris menjadi kolom
> t=fold(r,[0.5,0.5])
5. Menghitung rata-rata, dengan perintah
> mean(t,v)
Contoh Soal:
1. Data berikut menunjukkan nilai yang diperoleh 50 siswa SMP 1 Playen pada Ujian Nasional mata pelajaran matematika.
Siswa yang mendapat nilai dalam rentang 61-65 sebanyak 2 orang, dalam rentang 66-70 sebanyak 5 orang, dalam rentang 71-75 sebanyak 8 orang, dalam rentang 76-80 sebanyak 10 orang, dalam rentang 81-85 sebanyak 12 orang, dalam rentang 86-90 sebanyak 9 orang, dan dalam rentang 91-95 sebanyak 4 orang.
Tentukan rata-rata nilai yang diperoleh 50 siswa tersebut!
Penyelesaian:
Menentukan tepi bawah kelas yang terkecil

```
>61-0.5
```

```
60.5
```

Menentukan panjang kelas

```
>(65-61)+1
```

```
5
```

Menentukan tepi atas kelas yang terbesar

```
>95+0.5
```

```
95.5
```

```
>r=60.5:5:95.5; v=[2,5,8,10,12,9,4];
>T:=r[1:7]' | r[2:8]' | v'; writetable(T,labc=["TB","TA","Frek"])
```

TB	TA	Frek
60.5	65.5	2
65.5	70.5	5
70.5	75.5	8
75.5	80.5	10
80.5	85.5	12
85.5	90.5	9
90.5	95.5	4

Menentukan titik tengah

```
>(T[,1]+T[,2])/2 // the midpoint of each interval
```

```
          63
          68
          73
          78
          83
          88
          93
```

```
>t=fold(r,[0.5,0.5])
```

```
[63,  68,  73,  78,  83,  88,  93]
```

Menentukan mean(rata-rata)

```
>mean(t,v)
```

```
79.8
```

Diketahui:

$$\sum t_i f_i = (2)(63) + (5)(68) + (8)(73) + (10)(78) + (12)(83) + (9)(88) + (4)(93) = 3.990$$

$$\sum f_i = 2 + 5 + 8 + 10 + 12 + 9 + 4 = 50$$

$$\bar{X} = \frac{\sum t_i f_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{X} = \frac{3.990}{50}$$

$$\bar{X} = 79,8$$

Jadi rata-rata nilai yang diperoleh 50 siswa tersebut adalah 79,8

3. Perhitungan Rata-Rata dari file yang tersimpan dalam direktori

Dalam perhitungan rata-rata hitung(mean), kita dapat menggunakan file yang tersimpan dalam direktori.
Contoh 1:
Misalnya kita akan menghitung nilai rata-rata(mean) yang terdapat dalam file "test.dat"

```
>filename="test.dat"; ...
>V=random(3,3); writematrix(V,filename);
>printfile(filename),
```

```
0.6554163483485531,0.2009951854518572,0.8936223876466522
0.2818865431288053,0.5250003829714993,0.3141267749950177
0.4446156782993733,0.2994744556282315,0.2826898577756425
```

```
>readmatrix(filename)
```

```
0.655416      0.200995      0.893622
0.281887         0.525      0.314127
0.444616      0.299474       0.28269
```

```
>mean(V),
```

```
0.583345
0.373671
 0.34226
```

Contoh 2:
Misalnya akan dihitung nilai rata-rata dari file 'mtcars.csv'

```
>filename="mtcars.csv";  ...
>V=random(4,4); writematrix(V,filename);
>printfile(filename)
```

```
0.8832274852666707,0.2709059757306277,0.7044190158488305,0.21769338543710
0.4453627564273003,0.3084110353211584,0.9145409086421026,0.19358547798114
0.4633868194128757,0.0951529788263157,0.5950170162024192,0.43118378131213
0.7286804774486648,0.4651641815616542,0.3230318624794988,0.52518358856467
```

```
>readmatrix(filename)
```

```
    0.883227      0.270906      0.704419      0.217693
    0.445363      0.308411      0.914541      0.193585
    0.463387      0.095153      0.595017      0.431184
     0.72868      0.465164      0.323032      0.525184
```

```
>mean(V[1])
```

```
0.519061465571
```

```
>mean(V[2])
```

```
0.465475044593
```

```
>mean(V[3])
```

```
0.396185148938
```

```
>mean(V[4])
```

```
0.510515027514
```

```
>mean(V)
```

```
0.519061
0.465475
0.396185
0.510515
```

Median

Median merupakah ruang lingkup kajian pada analisis statistika deskriptif yang termasuk dalam ukuran pemusatan data. Median adalah suatu nilai yang berada di tengah data setelah diurutkan dari data yang terkecil sampai yang terbesar atau sebaliknya. Dalam perhitungan statistik, median dibagi menjadi 2 bagian yaitu median untuk data tunggal dan median untuk data kelompok.

1. Median data tunggal

Jika jumlah suatu data(n) berjumlah ganjil maka nilai mediannya adalah sama dengan data yang memiliki nilai di urutan paling tengah yang memiliki nomor urut k, dimana untuk menentukan nilai k dapat dihitung menggunakan rumus:

$$k = \frac{n+1}{2}$$

Jika jumlah suatu data(n) berjumlah genap,maka untuk menghitung mediannya dengan menggunakan rumus:

$$k = \frac{n}{2}$$

$$Me = \frac{1}{2}(X_k + X_{k+1})$$

Kita dapat mengetahui nilai median pada data tunggal dengan menggunakan perintah EMT yaitu 'median(data)'
Contoh Soal 1:
Diketahui sebuah data hasil nilai Ujian Akhir Semester mata kuliah Filsafat Ilmu 11 mahasiswa sebagai berikut: 85,90,80,95,50,75,30,60,65,40,70.
Tentukan nilai median dari data tersebut!
Penyelesaian:

```
>data=[85,90,80,95,50,75,30,60,65,40,70];
>urut=sort(data)
```

```
[30,  40,  50,  60,  65,  70,  75,  80,  85,  90,  95]
```

Dalam menentukan median, langkah pertama yang harus dilakukan adalah dengan mengurutkan data tersebut dari yang terkecil sampai yang terbesar dengan fungsi sort(data). Fungsi sort(data) dalam EMT digunakan untuk mengurutkan elemen-elemen dalam suatu vektor atau matriks(dari nilai terkecil ke nilai terbesar).

```
>median(data)
```

```
70
```

Diketahui bahwa kasus ini merupakan data yang berjumlah ganjil, sehingga nilai median untuk kasus ini adalah sama dengan data yang memiliki nilai di urutan paling tengah yang memiliki nomor urut k.

$$k = \frac{n+1}{2}$$

$$k = \frac{11+1}{2}$$

$$k = 6$$

$$Me = X_6 = 70$$

Jadi nilai median dari data hasil Ujian Akhir Semester(UAS) mata kuliah Filsafat Ilmu 11 mahasiswa adalah 70
Contoh Soal 2:
Data upah dari 8 karyawan yang dinyatakan dalam rupiah adalah sebagai berikut:
20,80,75,60,50,85,45,90.
Tentukan nilai median dari data tersebut!
Penyelesaian:

```
>data=[20,80,75,60,50,85,45,90];
>urut=sort(data)
```

```
[20,  45,  50,  60,  75,  80,  85,  90]
```

```
>median(data)
```

```
67.5
```

Diketahui bahwa kasus ini merupakan data yang berjumlah genap, sehingga nilai median untuk kasus ini adalah terletak pada data ke-k dan data ke-(k+1).

$$k = \frac{n}{2}$$

$$k = \frac{8}{2}$$

$$k = 4$$

$$Me = \frac{1}{2}(X_k + X_{k+1})$$

$$Me = \frac{1}{2}(X_4 + X_5)$$

$$Me = \frac{1}{2}(60 + 75)$$

$$Me = 67.5$$

Jadi nilai median pada data upah 8 karyawan adalah 67.5

2. Median data kelompok

Untuk menghitung median pada data kelompok, dapat menggunakan rumus di bawah ini:

$$Me = Tb + \frac{\frac{1}{2}n - f_{ks}}{f_m}.p$$

```
Keterangan:
   Tb = Tepi bawah kelas median
    n = Total frekuensi
  fks = Frekuensi kumulatif sebelum median
   fm = frekuensi median
    p = panjang kelas
```

Untuk menghitung median data berkelompok di EMT, dapat dilakukan dengan cara berikut:
1. Menentukan tepi bawah kelas (Tb), panjang kelas (P), dan tepi atas kelas (Ta) dengan rumus :

$$T_b = a - 0,5$$

$$P = (b - a) + 1$$

$$T_a = b + 0.5$$

dengan a = batas bawah kelas dan b = batas atas kelas
2. Mendeskripsikan data dalam bentuk tabel, dengan perintah
> r=tepi bawah terkecil:panjang kelas:tepi atas terbesar; v=[frekuensi];
> T:=r[1:jumlah kelas]' | r[2:jumlah kelas + 1]' | v'; writetable(T,labc=["tepi bawah","tepi atas","frekuensi"]))

3. Mendeskripsikan tepi bawah kelas median, panjang kelas median, banyak data,frekuensi kumulatif sebelum median, frekuensi kelas median

> Tb=(tepi bawah kelas median), p=(panjang kelas median), n=(Total frekuensi), Fks=(frekuensi kumulatif sebelum median), fm=(frekuensi kelas median)

4. Menghitung median data dengan perintah:

> Tb+p*(1/2*n-Fks)/fm

Contoh Soal:

1. Berikut adalah data hasil dari pengukuran berat badan 50 siswa SD Negeri Tambakrejo. Dari ke 50 siswa, mayoritas siswa memiliki berat badan yang ideal. Siswa yang mempunyai berat badan dalam rentang 21-26 kg sebanyak 5 orang, yang mempunyai berat badan dalam rentang 27-32 kg sebanyak 10 orang, yang mempunyai berat badan dalam rentang 33-38 kg sebanyak 12 orang, yang mempunyai berat badan dalam rentang 39-44 kg sebanyak 14 orang, yang mempunyai berat badan dalam rentang 45-50 kg sebanyak 7 orang, dan yang mempunyai berat badan 51-56 kg sebanyak 2 orang. Tentukan median dari data hasil pengukuran berat badan 50 siswa di SD tersebut!

Penyelesaian:

Menentukan tepi bawah kelas yang terkecil

```
>21-0.5
```

```
20.5
```

Menentukan panjang kelas

```
>(26-21)+1
```

```
6
```

Menentukan tepi atas kelas yang terbesar

```
>56+0.5
```

```
56.5
```

```
>r=20.5:6:56.5; v=[5,10,12,14,7,2];
>T:=r[1:6]' | r[2:7]' | v'; writetable(T,labc=["TB","TA","frek"])
```

```
        TB          TA        frek
      20.5        26.5           5
      26.5        32.5          10
      32.5        38.5          12
      38.5        44.5          14
      44.5        50.5           7
      50.5        56.5           2
```

Berdasarkan data, median berada pada urutan ke 25, maka median berada pada kelas 32.5-38.5.

```
>Tb=32.5, p=6, n=50, Fks=15, fm=12
```

```
32.5
6
50
15
12
```

```
>Tb+p*(1/2*n-Fks)/fm
```

```
37.5
```

Diketahui bahwa median berada di data ke 25

$$Me = Tb + \frac{\frac{1}{2}n - f_{ks}}{f_m}.p$$

$$Me = 32.5 + \frac{\frac{1}{2}(50) - 15}{12}.6$$

$$Me = 32.5 + 5$$

$$Me = 37.5$$

Jadi median dari data hasil pengukuran berat badan 50 siswa SD Tambakrejo adalah 37.5

Modus

Modus merupakan ruang lingkup kajian pada analisis statistika deskriptif yang termasuk dalam ukuran pemusatan data. Modus adalah nilai yang sering muncul diantara sebaran data atau nilai yang memiliki frekuensi tertinggi dalam distribusi data. Modus terdiri dari 2 jenis yaitu modus untuk data tunggal dan modus untuk data kelompok.
1. Modus data tunggal

```
Cara menentukan modus untuk data tunggal
terbilang cukup mudah yaitu dengan
mengurutkan data dari yang terkecil ke yang
terbesar sehingga data-data yang memiliki
nilai yang sama akan berdekatan satu sama
lain, lalu mencari frekuensi dari masing-
masing data dan pilih data dengan frekuensi
tertinggi.
```

2. Modus data kelompok

```
Jika data telah dikelompokkan, maka telah
disajikan dalam bentuk distribusi frekuensi.
Berikut rumus untuk mencari modus data
kelompok:
```

$$Mo = Tb + \frac{d_1}{d_1 + d_2}.c$$

```
Keterangan:
  Tb = Tepi bawah
  d1 = selisih f modus dengan f sebelumnya
  d2 = selisih f modus dengan f sesudahnya
   c = panjang kelas
```

Untuk menghitung modus data berkelompok di EMT, dapat dilakukan dengan cara berikut:
1. Menentukan tepi bawah kelas (Tb), panjang kelas (P), dan tepi atas kelas (Ta) dengan rumus :

$$T_b = a - 0,5$$

$$P = (b - a) + 1$$

$$T_a = b + 0.5$$

dengan a = batas bawah kelas dan b = batas atas kelas
2. Mendeskripsikan data dalam bentuk tabel, dengan perintah
> r=tepi bawah terkecil:panjang kelas:tepi atas terbesar; v=[frekuensi];
> T:=r[1:jumlah kelas]' | r[2:jumlah kelas + 1]' | v'; writetable(T,labc=["tepi bawah","tepi atas","frekuensi"]))
3. Mendeskripsikan tepi bawah kelas modus, panjang kelas modus,selisih frekuensi modus dengan frekuensi sebelumnya, selisih frekuensi modus dengan frekuensi sesudahnya
> Tb=(tepi bawah kelas modus), p=(panjang kelas modus), d1=(selisih frekuensi modus dengan frekunsi sebelumnya), d2=(selisih frekuensi modus dengan frekuensi sesudahnya)
4. Menghitung modus dengan perintah:
> Tb+p*d1/(d1+d2)
Contoh Soal:
1. Berikut adalah data hasil dari pengukuran berat badan 30 siswa SD Negeri Tambakrejo. Dari ke 30 siswa, mayoritas siswa memiliki berat badan yang ideal. Siswa yang mempunyai berat badan dalam rentang 21-25 kg sebanyak 2 orang, yang mempunyai berat badan dalam rentang 26-30 kg sebanyak 8 orang, yang mempunyai berat badan dalam rentang 31-35 kg sebanyak 9 orang, yang mempunyai berat badan dalam rentang 36-40 kg sebanyak 6 orang, yang mempunyai berat badan dalam rentang 41-45 kg sebanyak 3 orang, dan yang mempunyai berat badan 46-50 kg sebanyak 2 orang. Tentukan modus dari data hasil pengukuran berat badan 30 siswa di SD tersebut!

Penyelesaian:
Menentukan tepi bawah kelas yang terkecil

```
>21-0.5
```

```
20.5
```

Menentukan panjang kelas

```
>(25-21)+1
```

```
5
```

Menentukan tepi atas yang terbesar

```
>50+0.5
```

```
50.5
```

```
>r=20.5:5:50.5; v=[2,8,9,6,3,2];
>T:=r[1:6]' | r[2:7]' | v'; writetable(T,labc=["TB","TA","frek"])
```

```
        TB        TA      frek
      20.5      25.5         2
      25.5      30.5         8
      30.5      35.5         9
      35.5      40.5         6
      40.5      45.5         3
      45.5      50.5         2
```

Berdasarkan data, modus berada pada kelas 30.5-35.5.

```
>Tb=30.5, p=5, d1=1, d2=3
```

```
30.5
5
1
3
```

```
>Tb+p*d1/(d1+d2)
```

```
31.75
```

Jadi modus dari data hasil pengukuran berat badan 30 siswa di SD Tambakrejo adalah 31.75