

Nama : Amalia Intan Arvitasari  
NIM : 22305144026  
Kelas: Matematika B

## Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

---

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

### Fungsi-fungsi Geometri

---

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

```
defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d  
setPlotrangle(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang
```

koordinat

```
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas
```

sumbu-x dan y adalah -r sd r

plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"  
plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label

"AB" sejauh d

plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d  
plotCircle (c,"c",v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"  
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi  
turnLeft(v): memutar vektor v ke kiri  
turnRight(v): memutar vektor v ke kanan  
normalize(v): normal vektor v  
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektor v dan w.  
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh.

$ax+by=c$ .

`lineWithDirection(A,v)`: garis melalui A searah vektor  $v$   
`getLineDirection(g)`: vektor arah (gradien) garis  $g$   
`getNormal(g)`: vektor normal (tegak lurus) garis  $g$   
`getPointOnLine(g)`: titik pada garis  $g$   
`perpendicular(A, g)`: garis melalui A tegak lurus garis  $g$   
`parallel (A, g)`: garis melalui A sejajar garis  $g$   
`lineIntersection(g, h)`: titik potong garis  $g$  dan  $h$   
`projectToLine(A, g)`: proyeksi titik A pada garis  $g$   
`distance(A, B)`: jarak titik A dan B  
`distanceSquared(A, B)`: kuadrat jarak A dan B  
`quadrance(A, B)`: kuadrat jarak A dan B  
`areaTriangle(A, B, C)`: luas segitiga ABC  
`computeAngle(A, B, C)`: besar sudut  $\angle ABC$   
`angleBisector(A, B, C)`: garis bagi sudut  $\angle ABC$   
`circleWithCenter (A, r)`: lingkaran dengan pusat A dan jari-jari  $r$   
`getCircleCenter(c)`: pusat lingkaran  $c$   
`getCircleRadius(c)`: jari-jari lingkaran  $c$   
`circleThrough(A,B,C)`: lingkaran melalui A, B, C  
`middlePerpendicular(A, B)`: titik tengah AB  
`lineCircleIntersections(g, c)`: titik potong garis  $g$  dan lingkaran  $c$   
`circleCircleIntersections (c1, c2)`: titik potong lingkaran  $c1$  dan

c2

`planeThrough(A, B, C)`: bidang melalui titik A, B, C

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

`getLineEquation (g,x,y)`: persamaan garis  $g$  dinyatakan dalam  $x$  dan  $y$   
`getHesseForm (g,x,y,A)`: bentuk Hesse garis  $g$  dinyatakan dalam  $x$  dan

y dengan titik A pada

sisi positif (kanan/atas) garis

quad(A,B): kuadrat jarak AB

spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni

$\sin(\alpha)^2$  dengan

$\alpha$  sudut yang menghadap sisi a.

crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga

dengan panjang sisi a, b, c.

triplespread(sa,sb,sc): persamaan 3 spread sa,sb,sc yang membentuk

suatu segitiga

doublespread(sa): Spread sudut rangkap Spread  $2\phi$ , dengan

$sa = \sin(\phi)^2$  spread a.

## Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

---

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang, tetapkan 3 titik dan plotkan.

```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik  
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");  
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
```

Kemudian tiga segmen.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB  
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC  
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

Fungsi geometri mencakup fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format untuk garis adalah  $[a,b,c]$ , yang merepresentasikan garis dengan persamaan  $ax+by=c$ .

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
[-1, 2, 2]
```

Hitung garis tegak lurus yang melalui A pada BC.

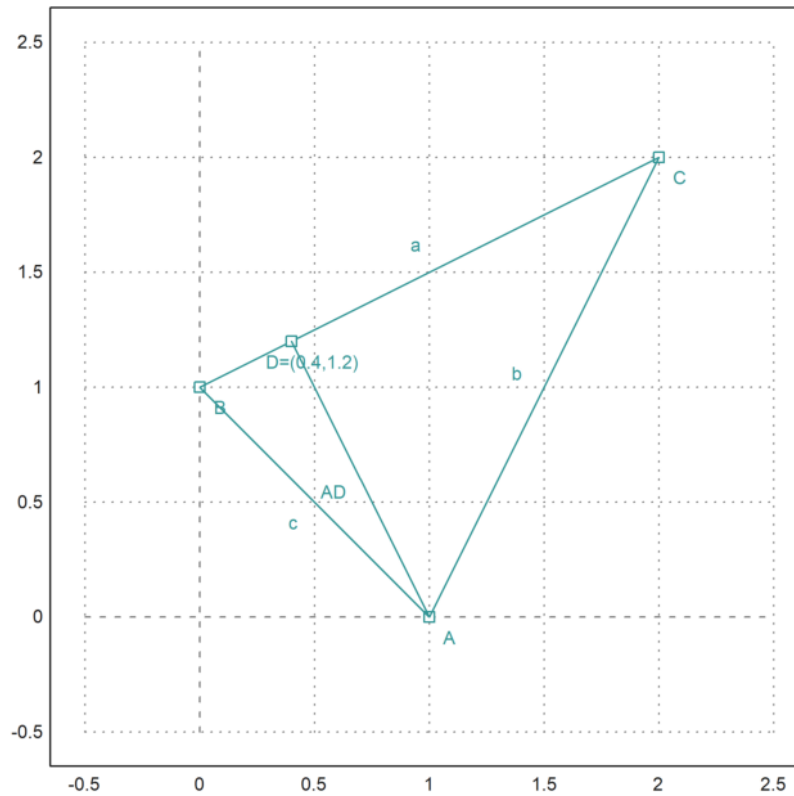
```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
```

Dan perpotongannya dengan BC.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
```

Plotkan.

```
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan  
>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```





Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D) , BC=norm(B-C)
```

1.5

Bandingkan dengan rumus determinan.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langsung dengan fungsi
```

1.5

Cara lain menghitung luas segitiga ABC:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

1.5

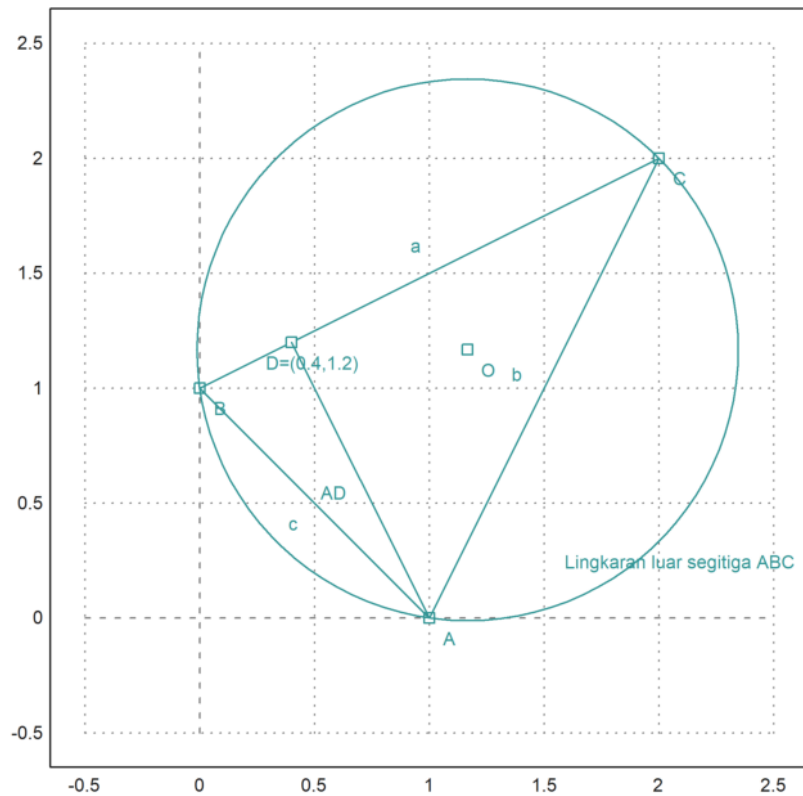
Sudut pada C.

```
>degprint(computeAngle(B,C,A))
```

36°52'11.63''

Sekarang, lingkarilah segitiga tersebut.

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC  
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar  
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c  
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"  
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

>0, R

```
[1.16667, 1.16667]  
1.17851130198
```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB  
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB  
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

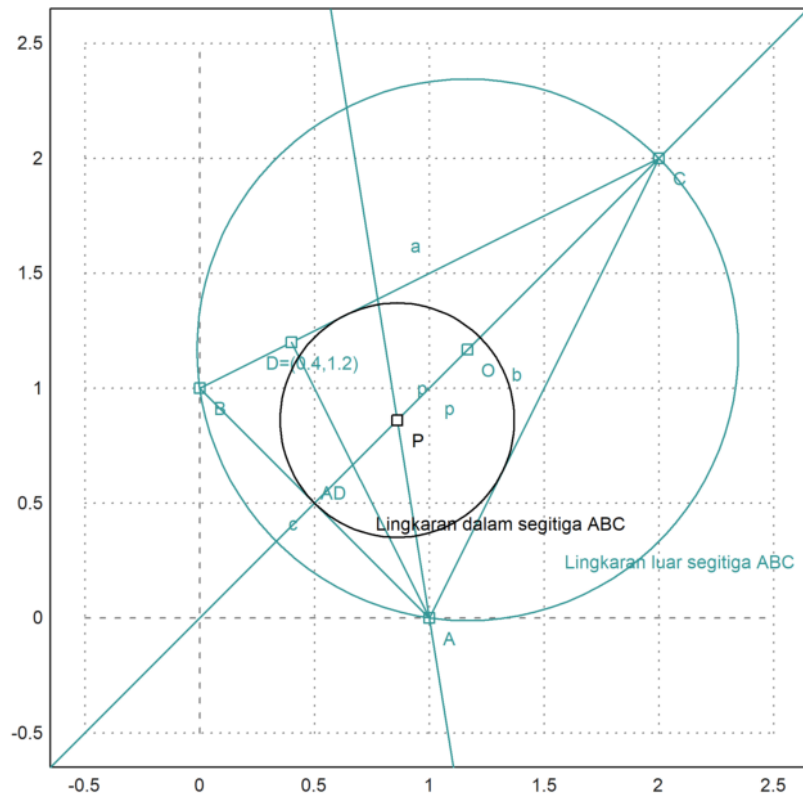
```
[0.86038, 0.86038]
```

Tambahkan semuanya ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut  
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya  
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
0.509653732104
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gambar lingkaran dalam
```



Latihan

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.
  2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Merupakan segitiga apakah itu?
  3. Hitung luas segitiga tersebut.
  4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.
  5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.
  6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?
- 

Jawab

1.

```
>setPlotRange(-0.5,7,-0.5,7);  
>O=[6,1]; plotPoint(O,"O");  
>P=[0,5]; plotPoint(P,"P");  
>Q=[5,6]; plotPoint(Q,"Q");
```

2.

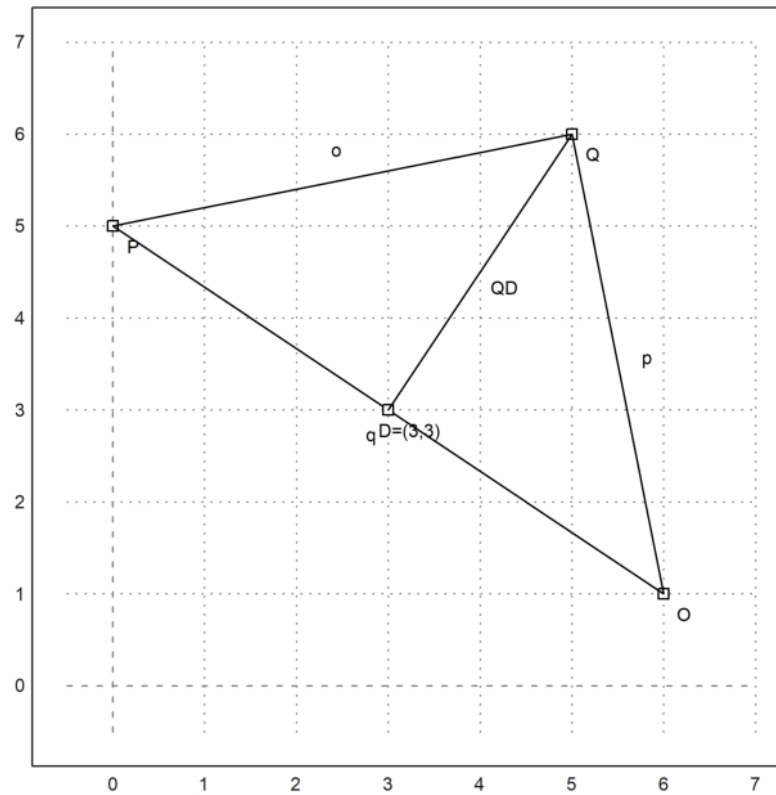
```
>plotSegment(O,P,"q");  
>plotSegment(P,Q,"o");  
>plotSegment(Q,O,"p");  
>lineThrough(O,P)
```

$[-4, -6, -30]$

```
>h=perpendicular(Q,lineThrough(O,P));
```

merupakan segitiga sama kaki

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(O,P));  
>plotPoint(D,value=1);  
>aspect(1); plotSegment(Q,D):
```



3. Akan ditentukan luas segitiga di atas

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot PR \cdot QD.$$



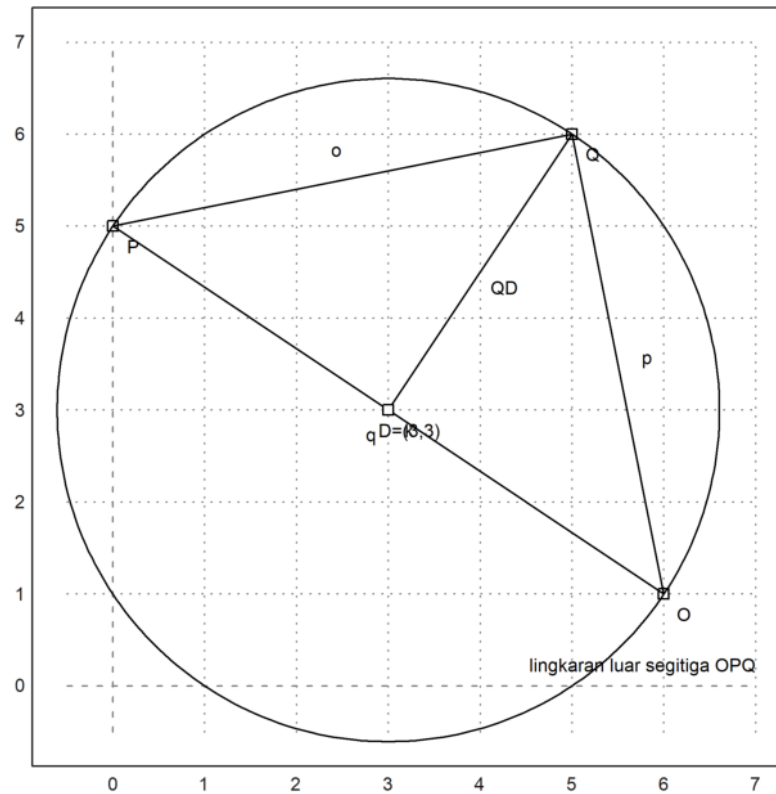
```
>norm(O-P)*norm(Q-D)/2
```

13

Jadi luas segitiga diatas adalah 13

4.

```
>c=circleThrough(O,P,Q);  
>L=getCircleRadius(c);  
>K=getCircleCenter(c);  
>plotPoint(K,"k");  
>plotCircle(c,"lingkaran luar segitiga OPQ"):
```



>K,L

[3, 3]  
 Space between commands expected!  
 Found: L (character 76)

```
You can disable this in the Options menu.  
Error in:  
K,L ...  
  ^
```

Jari-jari lingkaran luar segitiga adalah 3

```
>l=angleBisector(O,Q,P);  
>g=angleBisector(Q,O,P);  
>z=lineIntersection(l,g)
```

```
[3.82843,  4.24264]
```

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1);
```

5.

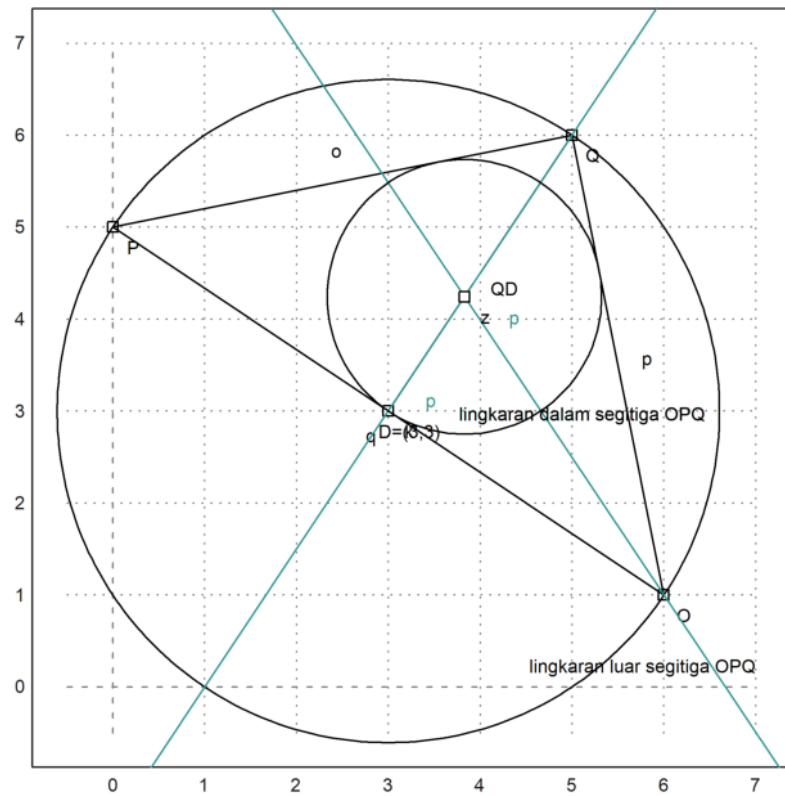
```
>plotPoint(z,"z");
```

Jari-jari lingkaran dalam segitiga adalah 1.49

```
>r=norm(z-projectToLine(z,lineThrough(O,P)))
```

```
1.49346823813
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(z,r),"lingkaran dalam segitiga OPQ"):
```



6.

Rumus luas lingkaran

$$\pi r^2$$

Luas lingkaran luar

$$\pi r^2, r = 3$$

sehingga

```
>pi
```

```
3.14159265359
```

```
>r:=3
```

```
3
```

```
>L=pi*r^2
```

```
28.2743338823
```

Luas lingkaran dalam

$$\pi r^2, r = 1.49346823813$$

sehingga

```
>pi
```

```
3.14159265359
```

```
>r=1.49346823813
```

```
1.49346823813
```

```
>L2=pi*r^2
```

```
7.0071570979
```

hubungan:

lingkaran dalam dan luas segitiga

jari-jari lingkaran dalam = luas segitiga dibagi setengah keliling segitiga

$$\frac{L_{\triangle OPQ}}{\frac{1}{2}K_{\triangle OPQ}} = r$$

## Contoh 2: Geometri Simbolik

---

Kita dapat menghitung geometri eksak dan simbolik menggunakan Maxima.

File `geometri.e` menyediakan fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, kita dapat menggunakan komputasi simbolik sekarang.

```
>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi untuk garis dan lingkaran bekerja seperti fungsi Euler, tetapi menyediakan komputasi simbolis.

```
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

$[-1, 2, 2]$



Kita bisa mendapatkan persamaan garis dengan mudah.

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$2y - x = 2$$

$$\left[ y = \frac{x}{2} + 1 \right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough([x1,y1],[x2,y2]),x,y), $solve(%,y) // persamaan garis melalui(x1, y1)
```

$$x (y_1 - y_2) + (x_2 - x_1) y = x_1 (y_1 - y_2) + (x_2 - x_1) y_1$$

$$\left[ y = \frac{-(x_1 - x) y_2 - (x - x_2) y_1}{x_2 - x_1} \right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)
```

$$(x_1 - 1) y - x y_1 = -y_1$$

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

[2, 1, 2]

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ - & - \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

$$\left[\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3\sqrt{2}}\right]$$

```
>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$\frac{5}{3\sqrt{2}}$$

1.178511301977579

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB
```

$$y = x$$

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2 garis bagi s
```

$$\left[\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+2}{6}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}+2}{6}\right]$$

```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya
```

```
[0.86038, 0.86038]
```

## Perpotongan Garis dan Lingkaran

---

Tentu, kita juga dapat memotong garis dengan lingkaran dan lingkaran dengan lingkaran.

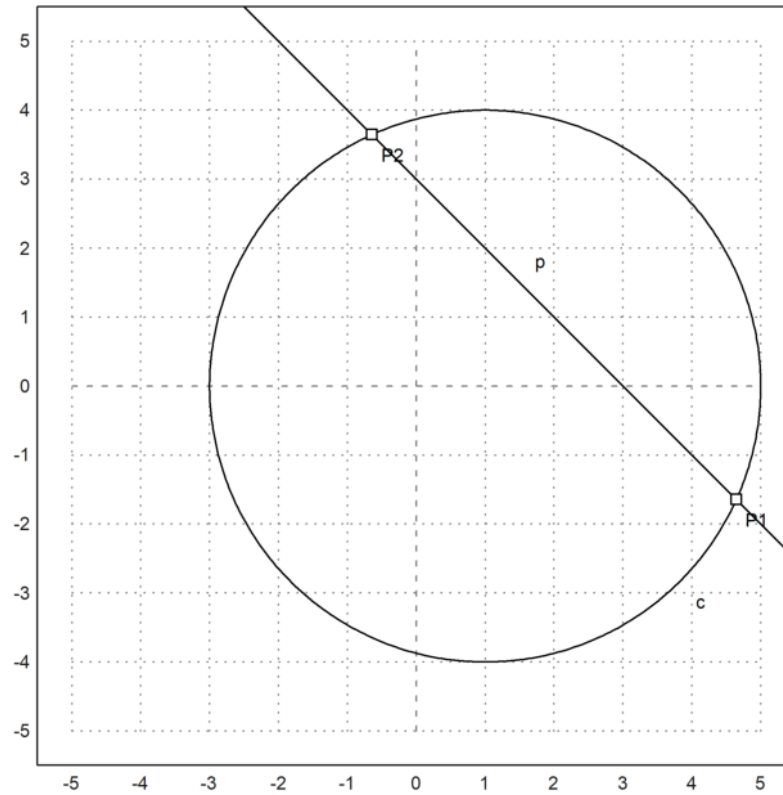
```
>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);  
>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);  
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
```

Perpotongan garis dengan lingkaran menghasilkan dua titik dan nilai titik perpotongannya.

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);  
>P1, P2, f
```

```
[4.64575, -1.64575]  
[-0.645751, 3.64575]  
2
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```



Hal yang sama pada Maxima.

```
>c := circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

[1, 0, 4]

```
>l := lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

[1, 1, 3]

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

$\left[ \left[ \sqrt{7} + 2, 1 - \sqrt{7} \right], \left[ 2 - \sqrt{7}, \sqrt{7} + 1 \right] \right]$

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap busur yang sama adalah sama besar.

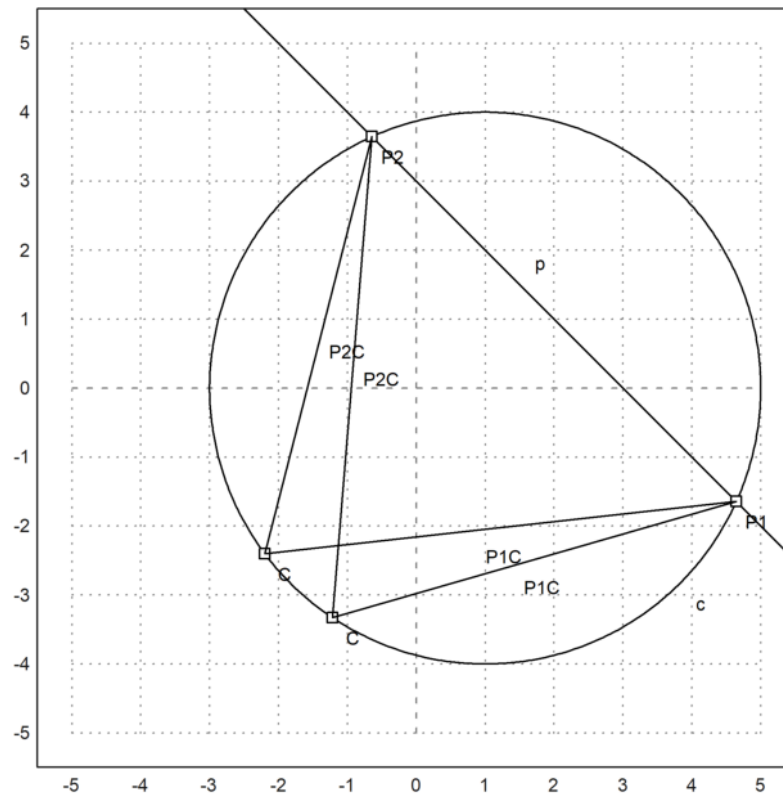
```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);  
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

69°17'42.68''

```
>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);  
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

69°17'42.68''

```
>insimg;
```



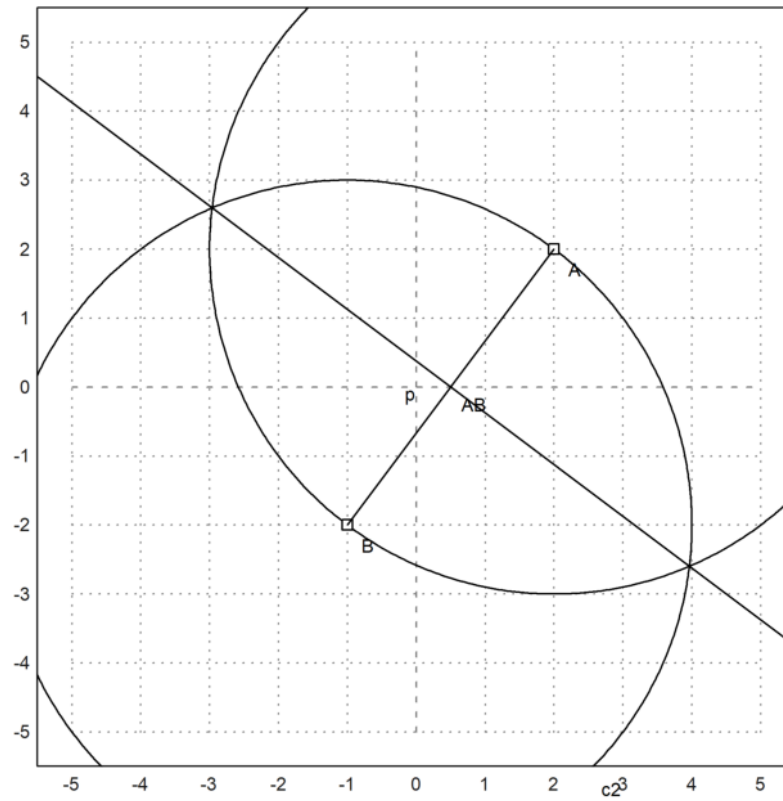
Garis Sumbu



Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:

1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melalui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];  
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));  
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));  
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);  
>l=lineThrough(P1,P2);  
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);  
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```



Selanjutnya, kita lakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
```

Persamaan untuk perpotongan cukup rumit. Tetapi kita dapat menyederhanakannya, jika kita menyelesaikan untuk y.

```
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[ y = \frac{-(2 b_1 - 2 a_1) x + b_2^2 + b_1^2 - a_2^2 - a_1^2}{2 b_2 - 2 a_2} \right]$$

Ini memang sama dengan tegak lurus tengah, yang dihitung dengan cara yang sangat berbeda.

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[ y = \frac{-(2 b_1 - 2 a_1) x + b_2^2 + b_1^2 - a_2^2 - a_1^2}{2 b_2 - 2 a_2} \right]$$

```
>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[ y = \frac{(b_2 - a_2) x - a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 - a_1} \right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1 - a_1)}{(b_2 - a_2)} \times \frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)} = -1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.

### Contoh 3: Rumus Heron

---

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi  $a$ ,  $b$  dan  $c$  adalah:

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dengan } s = (a+b+c)/2,$$

atau bisa ditulis dalam bentuk lain:

$$L = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

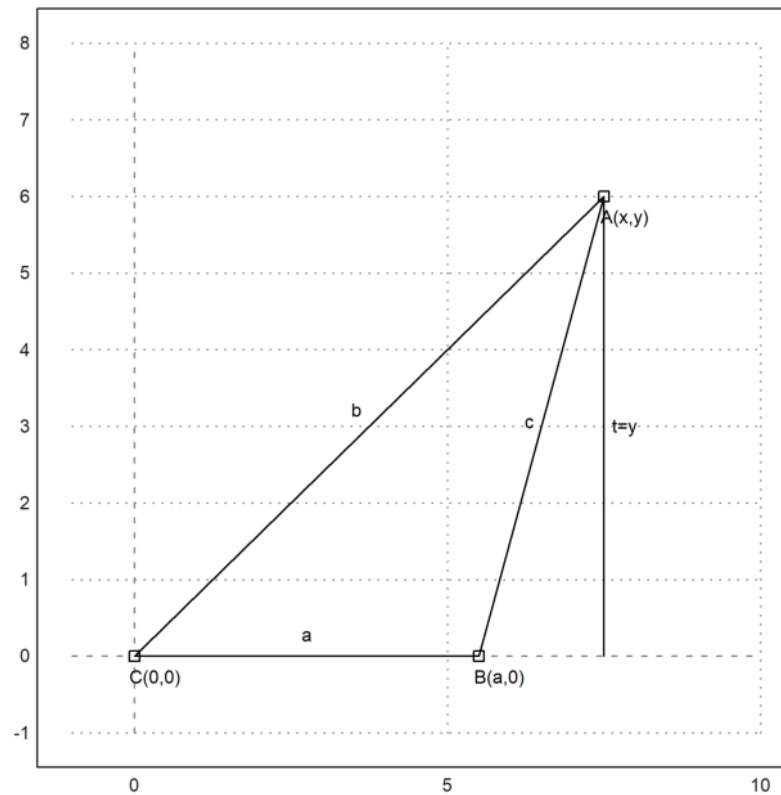
Untuk membuktikan hal ini kita misalkan  $C(0,0)$ ,  $B(a,0)$  dan  $A(x,y)$ ,  $b=AC$ ,  $c=AB$ . Luas segitiga  $ABC$  adalah

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \times y.$$

Nilai  $y$  didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad (x - a)^2 + y^2 = c^2.$$

```
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)"); ...  
> plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");  
>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6], "c",15); ...  
>plotSegment([0,0],[7.5,6], "b",25);  
>plotSegment([7.5,6],[7.5,0], "t=y",25):
```



```
>remvalue x,y,a,b,c
>&assume(a>0); sol &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

$$\begin{aligned}
 & \left[ x = \frac{-c + b + a}{2a}, y = \right. \\
 & \left. \frac{\sqrt{(-c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - b^4 + 2ab^2 - a^4)}}{2a} \right], \\
 & \left[ x = \frac{-c^2 + b^2 + a^2}{2a}, y = \right. \\
 & \left. \frac{\sqrt{(-c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - b^4 + 2ab^2 - a^4)}}{2a} \right]
 \end{aligned}$$

Ekstrak solusi y.

```
>ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2))
```

$$y = \frac{\sqrt{(-c+b+a)(c-b+a)(c+b-a)(c+b+a)}}{2a}$$



Kita dapatkan rumus Heron.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H(a,b,c) = \frac{\sqrt{(-c+b+a)(c-b+a)(c+b-a)(c+b+a)}}{4}$$

```
>$'Luas=H(2,5,6) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 2, 5, 6
```

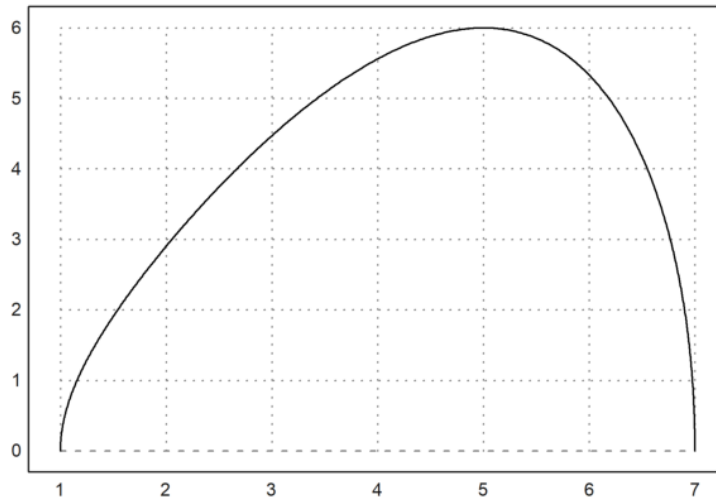
$$Luas = \frac{3\sqrt{39}}{4}$$

Tentu, setiap segitiga siku-siku merupakan kasus yang sering dijumpai.

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

Dan jelas bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan kedua sisinya 3 dan 4.

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x (1<= x <=7)
```



Kasus umum juga bisa digunakan.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

$$\left[ c = -\sqrt{b^2 + a^2}, c = \sqrt{b^2 + a^2}, c = 0 \right]$$

Sekarang, mari kita cari himpunan semua titik di mana  $b+c=d$  untuk suatu konstanta  $d$ . Sudah diketahui bahwa ini adalah sebuah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

$$\left[ x = \frac{(d-c)^2 - c^2 + a^2}{2a}, y = \frac{\sqrt{-(d-c)^4 + 2c^2(d-c)^2 + 2a^2(d-c)^2 - c^4 + 2a^2c^2 - a^4}}{2a} \right]$$

Dan buatlah fungsi-fungsi dari hal ini.

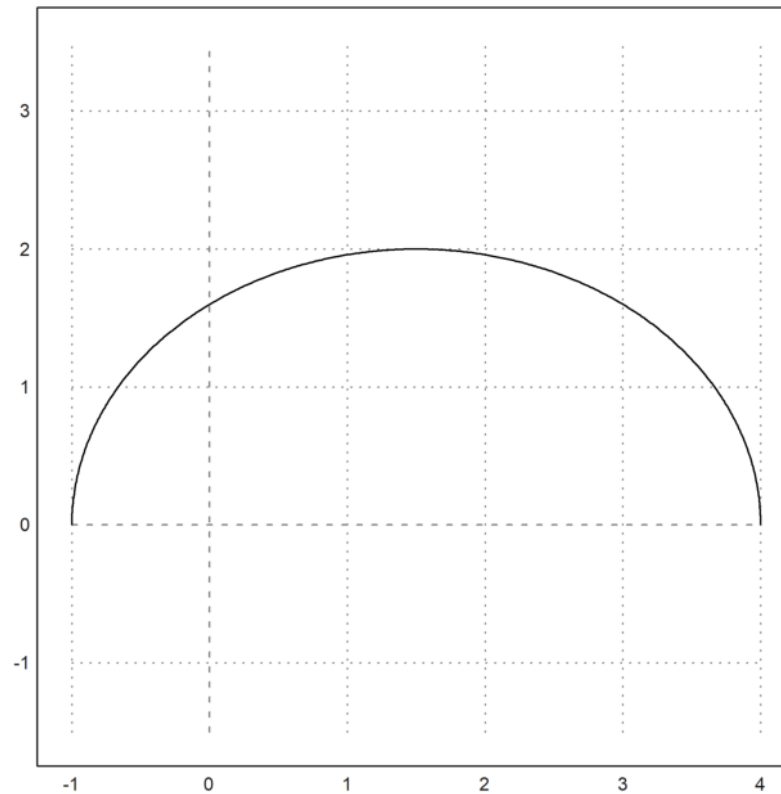
```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d)
```

$$\frac{(d-c)^2 - c^2 + a^2}{2a}$$

$$\frac{\sqrt{-(d-c)^4 + 2c^2(d-c)^2 + 2a^2(d-c)^2 - c^4 + 2a^2c^2 - a^4}}{2a}$$

Sekarang kita dapat menggambar himpunannya. Sisi  $b$  bervariasi dari 1 hingga 4. Sudah diketahui bahwa kita mendapatkan sebuah elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```



Kita dapat memeriksa persamaan umum untuk elips ini, yaitu

$$\frac{(x - x_m)^2}{u^2} + \frac{(y - y_m)^2}{v^2} = 1,$$

di mana  $(x_m, y_m)$  adalah titik pusat, serta  $u$  dan  $v$  adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

1

Kita lihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk  $x=0$ . Dengan demikian, luas segitiga dengan  $a+b+c=d$  adalah maksimal, jika segitiga tersebut sama sisi. Kita ingin membuktikannya secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

$$\left[ \frac{d(d-2a)(d-2b)}{8} - \frac{(-d+2b+2a)d(d-2b)}{8} = 0, \frac{d(d-2a)(d-2b)}{8} - \frac{(-d+2b+2a)d(d-2a)}{8} = 0 \right]$$

Kita mendapatkan beberapa minima, yang termasuk dalam segitiga dengan satu sisi 0, dan solusi  $a = b = c = d / 3$ .

```
>$solve(eqns,[a,b])
```

$$\left[ \left[ a = \frac{d}{3}, b = \frac{d}{3} \right], \left[ a = 0, b = \frac{d}{2} \right], \left[ a = \frac{d}{2}, b = 0 \right], \left[ a = \frac{d}{2}, b = \frac{d}{2} \right] \right]$$

Ada juga metode Lagrange, yang memaksimalkan  $H(a,b,c)^2$  sehubungan dengan  $a+b+c=d$ .

```
>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=1a,diff(H(a,b,c)^2,b)=1a, ...
> diff(H(a,b,c)^2,c)=1a,a+b+c=d],[a,b,c,1a])
```

$$\begin{aligned} & \left[ \left[ a = 0, b = \frac{d}{2}, c = \frac{d}{2}, 1a = 0 \right], \right. \\ & \left[ a = \frac{d}{2}, b = 0, c = \frac{d}{2}, 1a = 0 \right], \left[ a = \frac{d}{2}, b = \frac{d}{2}, c = 0, 1a = 0 \right], \\ & \left. \left[ a = \frac{d}{3}, b = \frac{d}{3}, c = \frac{d}{3}, 1a = \frac{d}{108} \right] \right] \end{aligned}$$

Kita bisa membuat plot situasi.

Pertama, tetapkan titik-titik di Maxima.

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

$$\left[ \frac{-c^2 + b^2 + a^2}{2a}, \frac{\sqrt{-c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - b^4 + 2a^2b^2 - a^4}}{2a} \right]$$

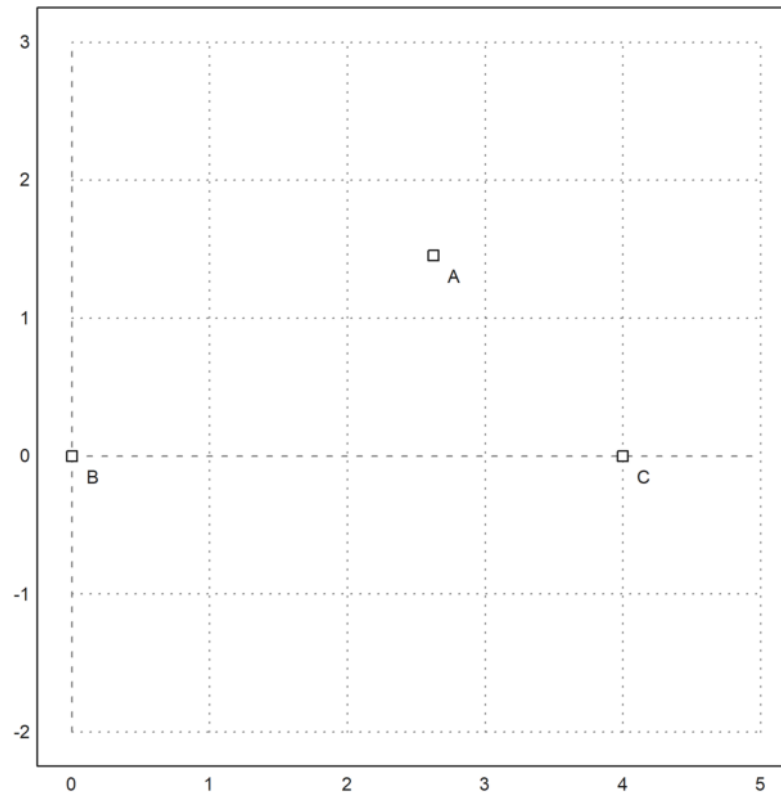
```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

[0,0]

[a,0]

Kemudian, tetapkan rentang plot, dan titik-titik plot.

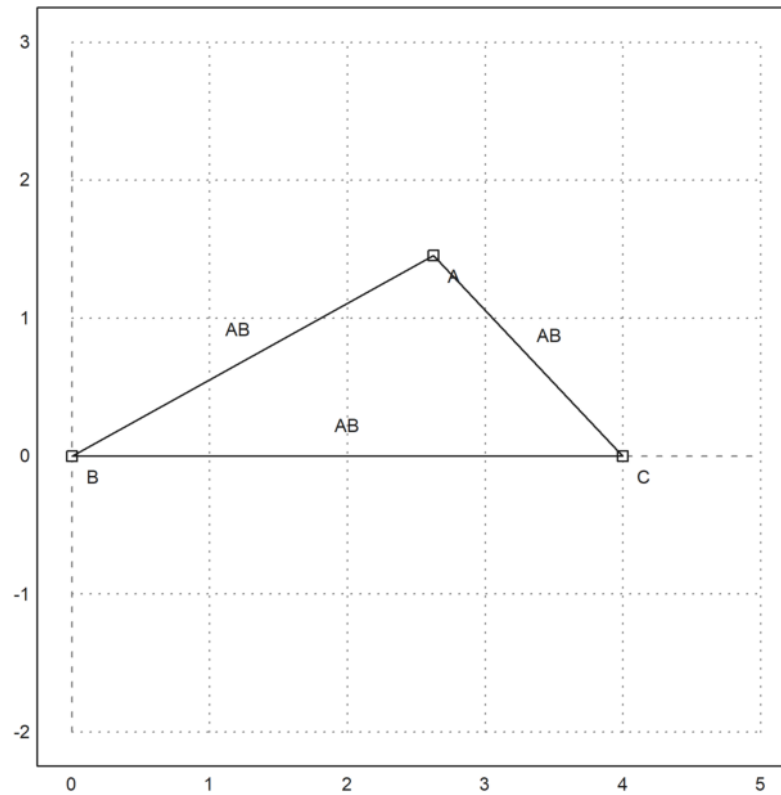
```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...  
>a=4; b=3; c=2; ...  
>plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...  
>plotPoint(mxmeval("A"),"A");
```



Plot segmen-segmen tersebut.

```
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...  
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...  
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):
```





Hitung garis tegak lurus tengah dalam Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan titik pusat lingkaran.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

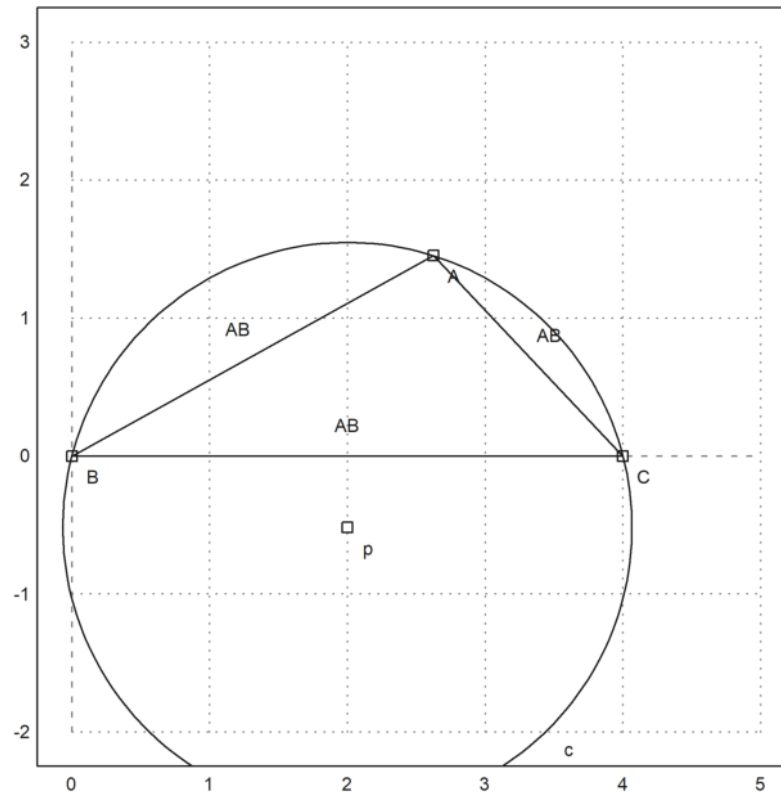
Kita peroleh rumus untuk jari-jari lingkaran.  
circle.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$\frac{iabc}{\sqrt{c-b-a}\sqrt{c-b+a}\sqrt{c+b-a}\sqrt{c+b+a}}$$

Mari kita tambahkan ke dalam plot.

```
>plotPoint(U()); ...  
>plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
```



Dengan menggunakan geometri, kami memperoleh rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$$

untuk radius. Kita bisa mengecek, apakah bernilai benar dengan Maxima. Maxima akan memperhitungkannya hanya jika kita mengkuadratkannya.

```
> $c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2 | factor
```

$$-\frac{4a^2b^2c^2}{(c-b-a)(c-b+a)(c+b-a)(c+b+a)}$$

**Contoh 4: Garis Euler dan Parabola**

---

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari segitiga apa pun yang tidak sama sisi. Garis ini merupakan garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, termasuk ortosentrum, circumcenter, centroid, titik Exeter, dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Sebagai demonstrasi, kami menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kita mendefinisikan sudut-sudut segitiga dalam Euler. Kita menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolis.

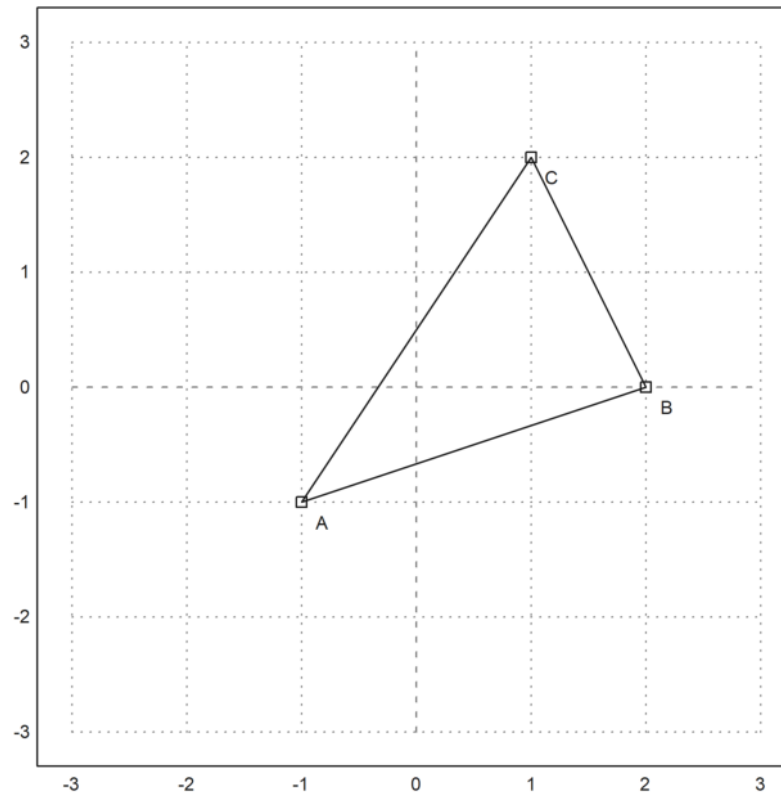
```
>A:=[-1,-1]; B:=[2,0]; C:=[1,2];
```

Untuk memplot objek geometris, kita menyiapkan area plot, dan menambahkan titik-titiknya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot tersebut.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

Kita juga bisa menambahkan sisi-sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```



Berikut ini adalah luas area segitiga, dengan menggunakan rumus determinan. Tentu, kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

$$[-1, 3, -2]$$

Dan juga mendapatkan formula untuk baris ini.  
menggunakan rumus determinan. Tentu, kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$3y - x = -2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan sebuah titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari bentuk Hesse. Dengan memasukkan titik tersebut akan dihasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%, [x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{3y - x + 2}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

Sekarang kita menghitung keliling ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

$$\left(y - \frac{5}{14}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{14}\right)^2 = \frac{325}{98}$$

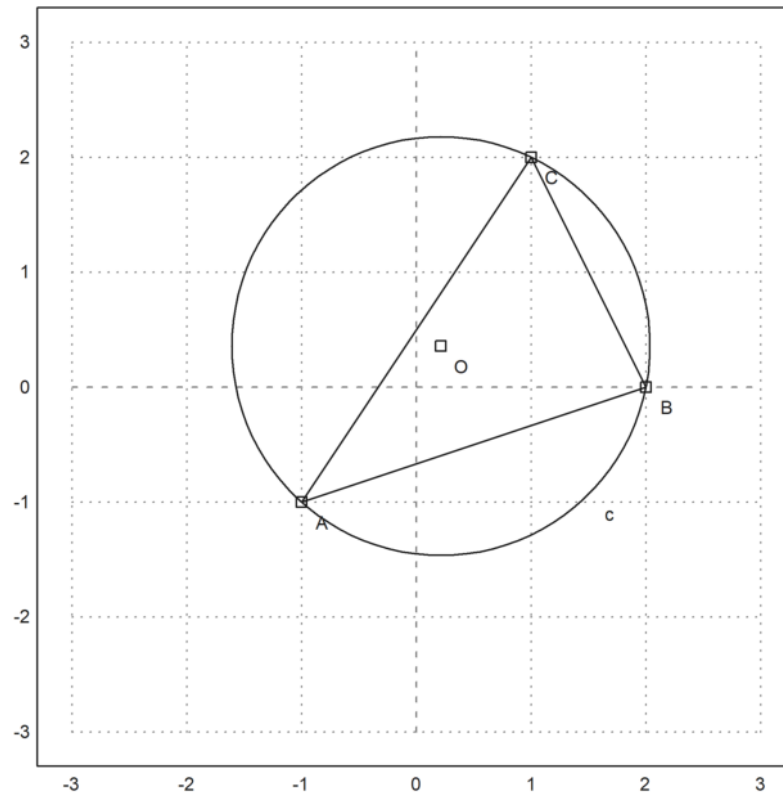
```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14}, \frac{5}{14}\right]$$



Plot lingkaran dan titikpusatnya. Cu dan U adalah simbolik. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```



Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (pusat ortosentrum) secara numerik dengan perintah berikut ini.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...  
> perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[ \frac{11}{7}, \frac{2}{7} \right]$$

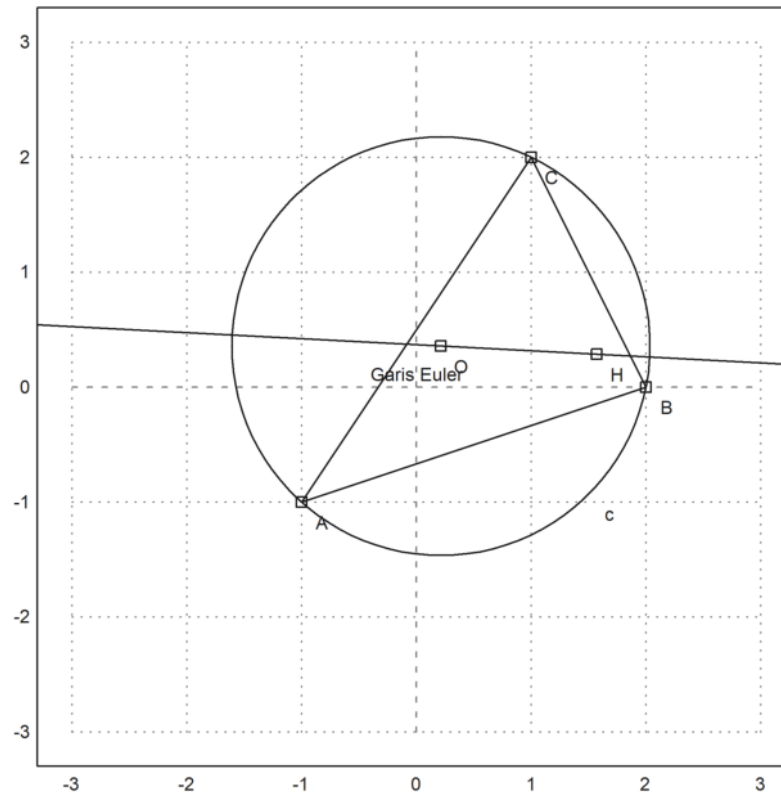
Sekarang kita dapat menghitung garis Euler dari segitiga tersebut.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{19y}{14} - \frac{x}{14} = -\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot kita.

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```

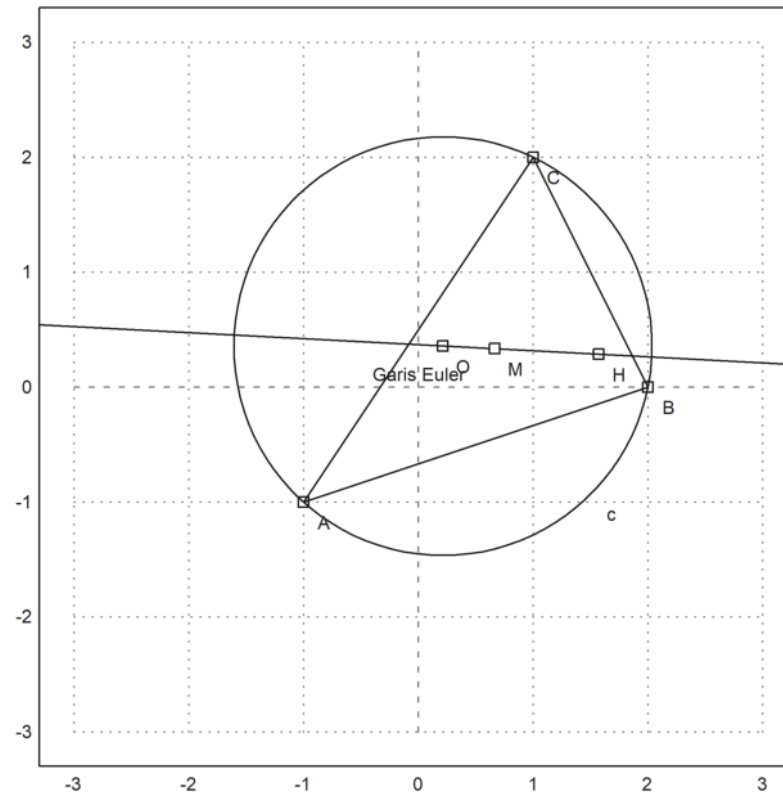


Pusat gravitasi harus berada pada garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(e1,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```



Teori mengatakan bahwa  $MH = 2 \cdot MO$ . Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai hal ini.

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

$$2$$

Fungsi-fungsi ini juga mencakup fungsi untuk sudut.

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{13}}\right)$$

$$60^{\circ}15'18.43''$$

Persamaan untuk titik tengah lingkaran ini tidak begitu bagus.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q
```

$$\left[ \frac{\left(2^{\frac{3}{2}} + 1\right) \sqrt{5} \sqrt{13} - 15 \sqrt{2} + 3}{14}, \frac{(\sqrt{2} - 3) \sqrt{5} \sqrt{13} + 5 \cdot 2^{\frac{3}{2}} + 5}{14} \right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi untuk jari-jari lingkaran yang tertulis.

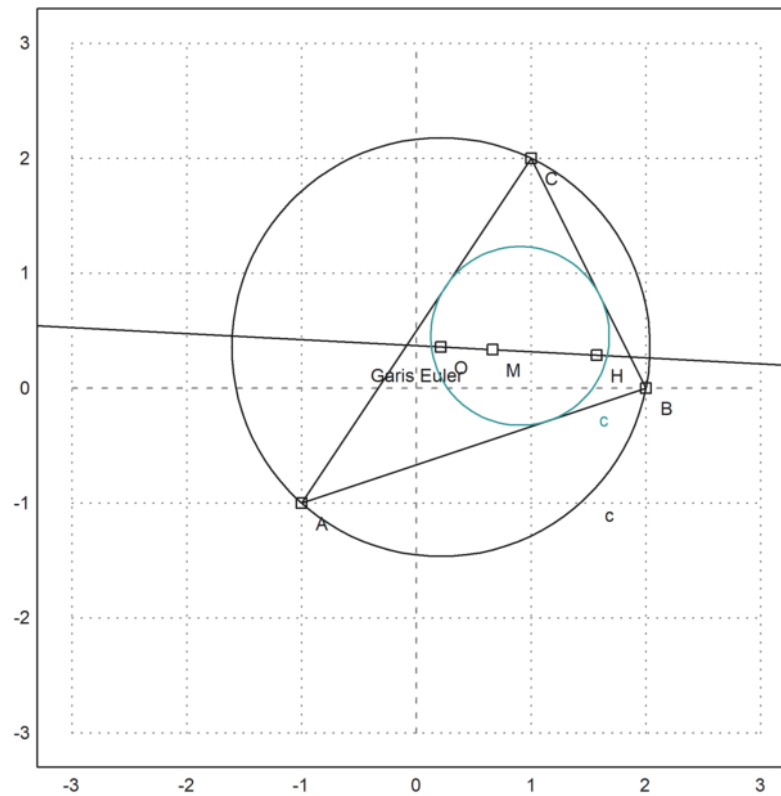
```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{(-41\sqrt{2}-31)\sqrt{5}\sqrt{13}+115\sqrt{2}+614}}{7\sqrt{2}}$$

```
>LD &= circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ke dalam plot.

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```



Parabola

Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

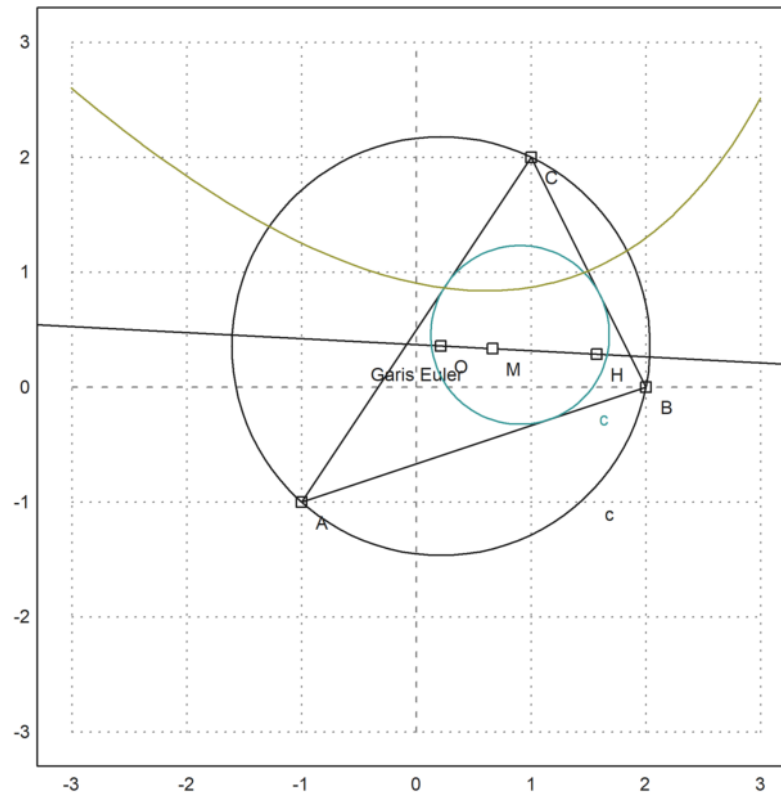
```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{3y - x + 2}{\sqrt{10}} - \sqrt{(2 - y)^2 + (1 - x)^2} = 0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```





Ini seharusnya berupa suatu fungsi, tetapi solver default Maxima hanya dapat menemukan solusinya, jika kita mengkuadratkan persamaannya. Akibatnya, kita mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

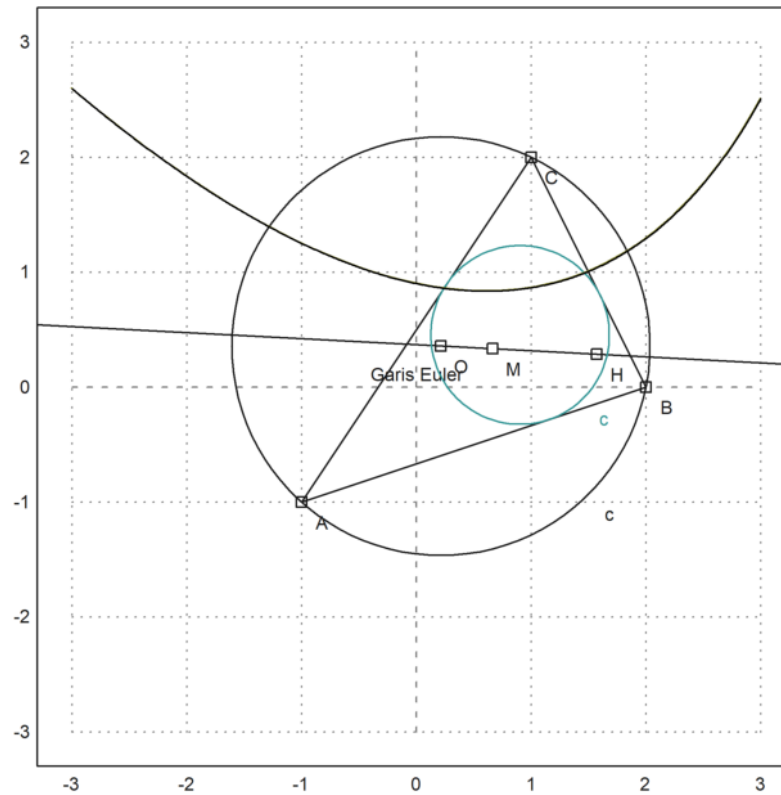
$$\begin{aligned} [y = -3x - \sqrt{70} \sqrt{9 - 2x} + 26, \\ y = -3x + \sqrt{70} \sqrt{9 - 2x} + 26] \end{aligned}$$

Solusi pertama adalah

maxima: akar[1]

Dengan menambahkan solusi pertama ke dalam plot, menunjukkan bahwa itu memang jalur yang kita cari. Teori mengatakan bahwa itu adalah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```



```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g(x) = -3x - \sqrt{70}\sqrt{9-2x} + 26$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$$\sqrt{1503 - 54\sqrt{11}\sqrt{70}}$$

2.135605779339061

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[ \frac{80 - 3\sqrt{11}\sqrt{70}}{10}, \frac{20 - \sqrt{11}\sqrt{70}}{10} \right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jarak T ke AB
```

$$\sqrt{1503 - 54\sqrt{11}\sqrt{70}}$$

2.135605779339061

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

## Contoh 5: Trigonometri Rasional

---

Hal ini terinspirasi dari sebuah perkataan N.J. Wildberger. Dalam bukunya "Proporsi Ilahi", Wildberger mengusulkan untuk mengganti gagasan klasik tentang jarak dan sudut dengan quadrance dan spread. Dengan menggunakan ini, memang memungkinkan untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap "rasional".

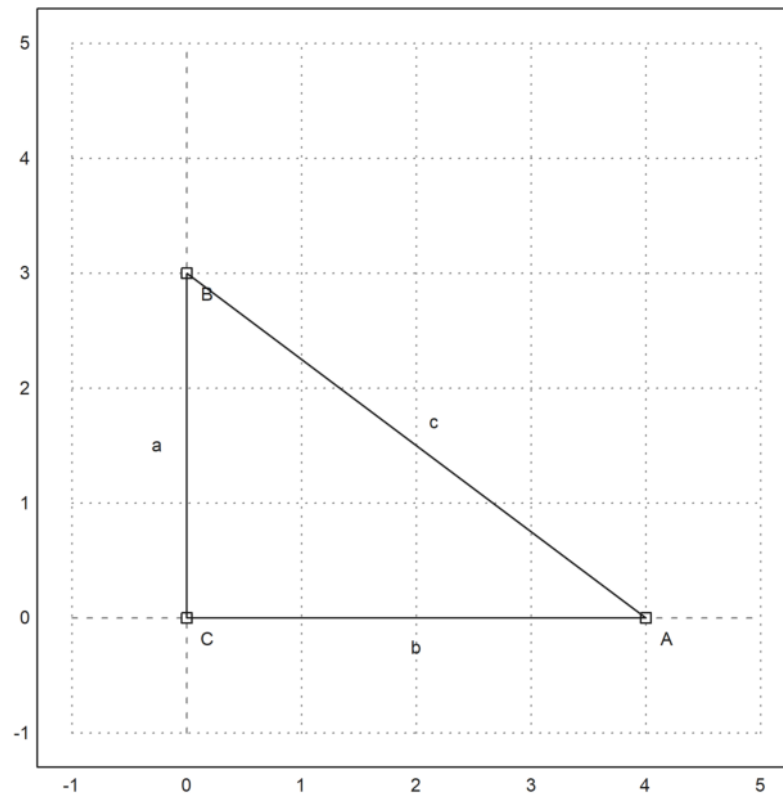
Berikut ini, saya akan memperkenalkan konsep-konsepnya, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan komputasi simbolis Maxima di sini, yang menyembunyikan keuntungan utama dari trigonometri rasional yang komputasinya dapat dilakukan dengan kertas dan pensil saja. Anda dipersilakan untuk memeriksa hasilnya tanpa komputer.

Intinya adalah bahwa komputasi rasional simbolis sering kali memberikan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang dievaluasi dengan perkiraan numerik saja.

```
>load geometry;
```

Untuk pengenalan pertama, kita menggunakan segitiga persegi panjang dengan proporsi Mesir yang terkenal 3, 4, dan 5. Perintah berikut ini adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat pada file Euler "geometry.e".

```
>C:=[0,0]; A:=[4,0]; B:=[0,3]; ...  
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...  
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...  
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...  
>insimg(30);
```



Tentu,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

di mana  $\alpha$  adalah sudut di A. Cara biasa untuk menghitung sudut ini, adalah dengan mengambil kebalikan dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak kira-kira.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

36°52'11.63''

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.

Gagasan pertama trigonometri rasional adalah kuadrat, yang menggantikan jarak. Sebenarnya, ini hanyalah jarak yang dikuadratkan. Berikut ini,  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  menunjukkan kuadrat sisi-sisinya.

Teorema Pythagoras menjadi  $a+b=c$ . Maka, teorema Pythagoras menjadi  $a+b=c$ .

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

25 = 25

Gagasan kedua dari trigonometri rasional adalah penyebaran. Penyebaran mengukur bukaan di antara garis-garis. Bernilai 0, jika garis-garisnya sejajar, dan bernilai 1, jika garis-garisnya persegi panjang. Ini adalah kuadrat dari sinus sudut antara kedua garis tersebut.

Penyebaran garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

di mana  $a$  dan  $c$  adalah kuadran dari segitiga persegi panjang dengan satu sudut di  $A$ .

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{9}{25}$$

Tentu saja, hal ini lebih mudah dihitung daripada sudut. Tetapi Anda kehilangan sifat bahwa sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja kita bisa mengonversi nilai perkiraan kita untuk sudut  $wa$  ke sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

$$9/25$$

Hukum kosinus trigonometri klasik diterjemahkan ke dalam "crosslaw" berikut ini.

$$(c + b - a)^2 = 4bc(1 - s_a)$$



Di sini, a, b, dan c adalah kuadran dari sisi-sisi segitiga, dan sa adalah spread di sudut A. Sisi a, seperti biasa, berlawanan dengan sudut A.

Hukum-hukum ini diimplementasikan dalam file geometry.e yang kita muat ke dalam Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$\left[ \left( bb - aa + \frac{7}{6} \right)^2, \left( bb - aa + \frac{7}{6} \right)^2, \left( bb - aa + \frac{5}{3\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \left[ \frac{14 bb (1 - saa)}{3}, \frac{14 bb (1 - saa)}{3}, \frac{5 \cdot 2^{\frac{3}{2}} bb (1 - saa)}{3} \right]$$

Dalam kasus kita, kita dapatkan

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024 = 1024$$

Mari kita gunakan crosslaw ini untuk mencari sebaran di A. Untuk melakukannya, kita buat crosslaw untuk kuadran a, b, dan c, dan selesaikan untuk sebaran sa yang tidak diketahui.

Anda bisa melakukan ini dengan tangan dengan mudah, tetapi disini saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kami mendapatkan hasil yang sudah kami dapatkan.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

$$1024 = 1600 (1 - x)$$

$$\left[ x = \frac{9}{25} \right]$$

Kita sudah mengetahui hal ini. Definisi spread adalah kasus khusus dari crosslaw.

Kita juga dapat menyelesaikannya untuk a, b, c secara umum. Hasilnya adalah sebuah rumus yang menghitung penyebaran sudut segitiga dengan kuadran ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[ \left[ \frac{168 \, bb \, x + 36 \, bb^2 + (-72 \, aa - 84) \, bb + 36 \, aa^2 - 84 \, aa + 49}{36}, \frac{168 \, bb \, x + 36 \, bb^2 + (-72 \, aa - 84) \, bb + 36 \, aa^2 - 84 \, aa + 49}{36} \right] \right]$$

Kita dapat membuat sebuah fungsi dari hasil tersebut. Fungsi seperti itu sudah didefinisikan dalam file geometry.e dari Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita dapat menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga dengan sisi

$$a, \quad a, \quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya rasional, hal ini tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat.

```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

67°47'32.44''

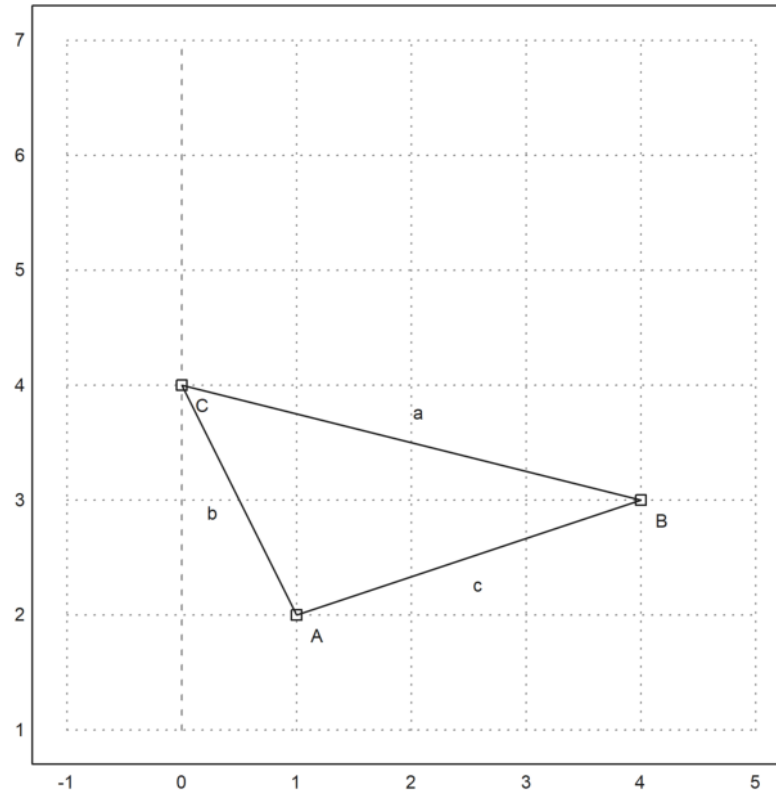
---

Contoh Lain

Sekarang, mari kita mencoba contoh lebih lanjut.

Kita tetapkan tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...  
>setPlotRange(-1,5,1,7); ...  
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...  
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...  
>insimg;
```



Dengan menggunakan Pythagoras, dapat dengan mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Pertama-tama saya menggunakan jarak fungsi dari file Euler untuk geometri. Jarak fungsi menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga memiliki fungsi untuk kuadransi antara dua titik.

Pada contoh berikut, karena c+b bukan a, maka segitiga tersebut tidak berbentuk siku-siku.

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

$$10$$

$$5$$

$$17$$

Pertama, mari kita menghitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode yang biasa berdasarkan hasil kali titik dari dua vektor. Hasilnya adalah beberapa perkiraan titik mengambang.

$$A = \langle 1, 2 \rangle \quad B = \langle 4, 3 \rangle, \quad C = \langle 0, 4 \rangle$$

$$\mathbf{a} = C - B = \langle -4, 1 \rangle, \quad \mathbf{c} = A - B = \langle -3, -1 \rangle, \quad \beta = \angle ABC$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}| \cos \beta$$

$$\cos \angle ABC = \cos \beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}|} = \frac{12 - 1}{\sqrt{17} \sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17} \sqrt{10}}$$

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10}\sqrt{17}}\right)$$

32.4711922908

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita dapat melakukan hal yang sama dengan cross law. Kita masukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan selesaikan untuk x.

$$A = \langle 1, 2 \rangle \quad B = \langle 4, 3 \rangle, \quad C = \langle 0, 4 \rangle$$

$$\mathbf{a} = C - B = \langle -4, 1 \rangle, \quad \mathbf{c} = A - B = \langle -3, -1 \rangle, \quad \beta = \angle ABC$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}| \cos \beta$$

$$\cos \angle ABC = \cos \beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}|} = \frac{12 - 1}{\sqrt{17}\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17}\sqrt{10}}$$

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x), //(b+c-a)^=4b.c(1-x)
```

$$4 = 200 (1 - x)$$

$$\left[ x = \frac{49}{50} \right]$$

Itulah yang dilakukan oleh fungsi spread yang didefinisikan dalam "geometry.e".

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama dengan menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksakannya. Maxima menyelesaikan suku  $\sin(\arccos(\dots))$  menjadi hasil pecahan. Sebagian besar siswa tidak dapat melakukan ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita memiliki penyebaran di B, kita dapat menghitung tinggi  $h_a$  di sisi a. Ingatlah bahwa menurut definisi

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$



```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut ini telah dibuat dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadran dan penyebaran.

image: (20) Rational\_Geometry\_CaR.png

Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadrannya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita dapat menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita berurusan dengan kuadran!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus determinan yang biasa menghasilkan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

## Rumus Heron

---

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue(a,b,c,sb,ha);
```

Pertama-tama kita menghitung luas di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita menghitung luas kuadrat ("quadrea"?), faktorkan dengan Maxima, dan kita dapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang, hal ini sulit dilakukan dengan menggunakan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{-c^4 - (-2b^2 - 2a^2)c^2 - b^4 + 2a^2b^2 - a^4}{4a^2c^2}$$

$$\frac{(-c+b+a)(c-b+a)(c+b-a)(c+b+a)}{16}$$

## Aturan Triple Spread

---

Kekurangan dari spread adalah mereka tidak lagi hanya menambahkan seperti sudut.

Namun, three spread dari sebuah segitiga memenuhi aturan "triple spread" berikut ini.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$(sc + sb + sa)^2 = 2(sc^2 + sb^2 + sa^2) + 4sa\,sb\,sc$$

Aturan ini berlaku untuk tiga sudut yang berjumlah  $180^\circ$ .

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Karena spread dari

$$\alpha, \pi - \alpha$$

sama, aturan triple spread juga benar, jika

$$\alpha + \beta = \gamma$$

Karena spread dari sudut negatif sama, aturan triple spread juga berlaku, jika

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

Contohnya, kita dapat menghitung spread dari sudut  $60^\circ$ . Hasilnya adalah  $3/4$ . Namun, persamaan ini memiliki solusi kedua, di mana semua spread adalah 0

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[ x = \frac{3}{4}, x = 0 \right]$$

Penyebaran  $90^\circ$  jelas adalah 1. Jika dua sudut ditambahkan ke  $90^\circ$ , penyebarannya akan menyelesaikan persamaan penyebaran tiga dengan a, b, 1. Dengan perhitungan berikut, kita mendapatkan  $a + b = 1$ .

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$(y + x + 1)^2 = 2 (y^2 + x^2 + 1) + 4 x y$$

$$[x = 1 - y]$$

Karena penyebaran  $180^\circ$ -t sama dengan penyebaran t, rumus triple spread juga berlaku, jika salah satu sudut adalah jumlah atau selisih dari dua sudut lainnya.

Jadi, kita dapat menemukan penyebaran sudut dua kali lipat. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kita jadikan ini sebuah fungsi.

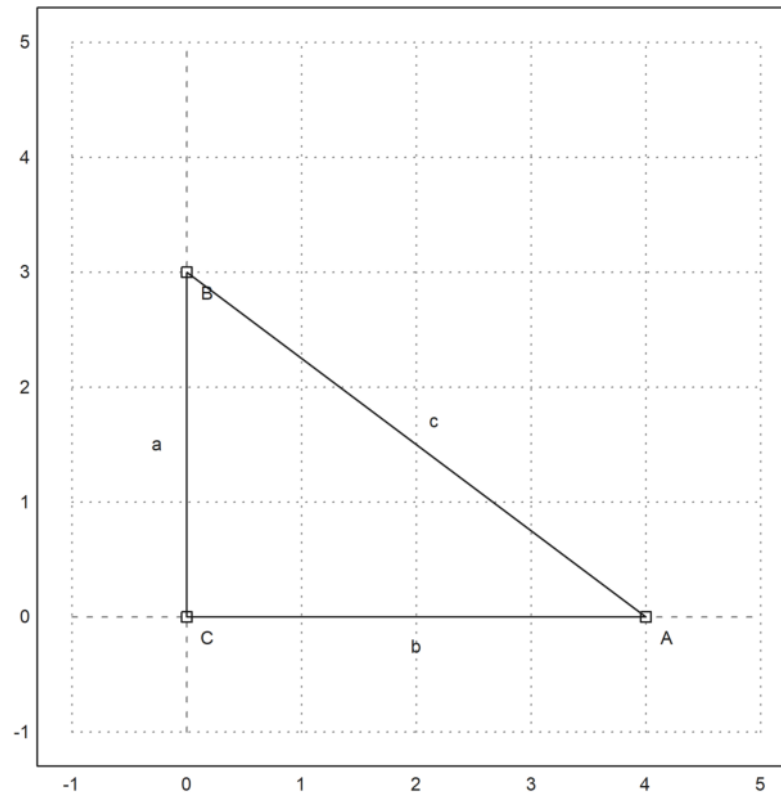
```
>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs( %[1] ))
```

$$[x = 4 a - 4 a^2, x = 0]$$

$$- 4 (a - 1) a$$

Ini adalah situasi yang sudah kita ketahui.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...  
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...  
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...  
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...  
>insimg;
```



Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Tetapi kita ingin menyelesaikannya untuk  $a$ ,  $b$ ,  $c$  secara umum.

```
>&remvalue(a,b,c);
```

Jadi, pertama-tama kita hitung penyebaran sudut yang dibelah dua di A, dengan menggunakan rumus triple spread.

Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Rumus ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih salah satu solusi yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut yang dibagi dua  $180^\circ$ -wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\left(2x + \frac{a}{b+a}\right)^2 = 2 \left(2x^2 + \frac{a^2}{(b+a)^2}\right) + \frac{4ax^2}{b+a}$$

$$\left[ x = \frac{-\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b + 2a}, x = \frac{\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b + 2a} \right]$$

$$\frac{-\sqrt{b}\sqrt{b+a} + b + a}{2b + 2a}$$

Mari kita cek rectangle Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

$$\frac{1}{10}$$



Kita bisa mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer spread ke radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

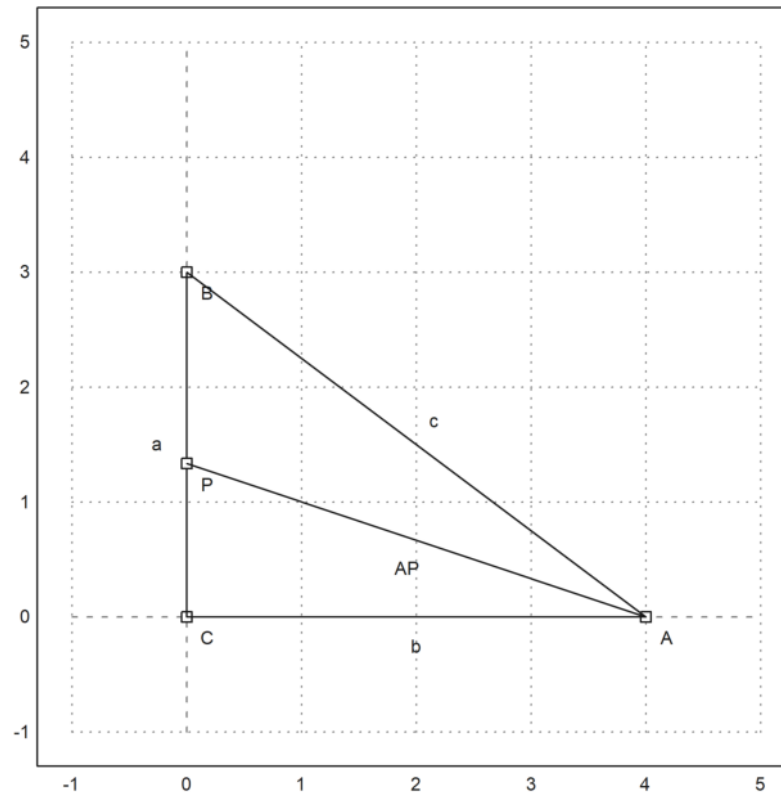
18°26'5.82''

Titik P adalah perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

[0, 1.33333]

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```



Mari kita cek sudut-sudutnya dalam contoh spesifik.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```

0.321750554397

0.321750554397

Sekarang kita hitung panjang garis bagi AP

Kami menggunakan teorema sinus dalam segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

berlaku dalam segitiga apa pun. Kuadratkan, ini diterjemahkan ke dalam apa yang disebut "spread law"

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_c}$$

di mana a, b, c menunjukkan kuadrat jarak.

Karena spread CPA adalah  $1-s_a^2$ , kita bisa mendapatkan  $b/a = b/(1-s_a^2)$  dan dapat menghitung bisa (kuadrat jarak dari garis bagi sudut).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2b(b+a)}{\sqrt{b}\sqrt{b+a}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai Mesir.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])")), distance(A,P)
```

4.21637021356

4.21637021356

Kita juga dapat menghitung P menggunakan rumus spread.

```
>py<=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b \left( \sqrt{b} \sqrt{b+a} - b - a \right)}{\sqrt{b} \sqrt{b+a} + b + a}$$

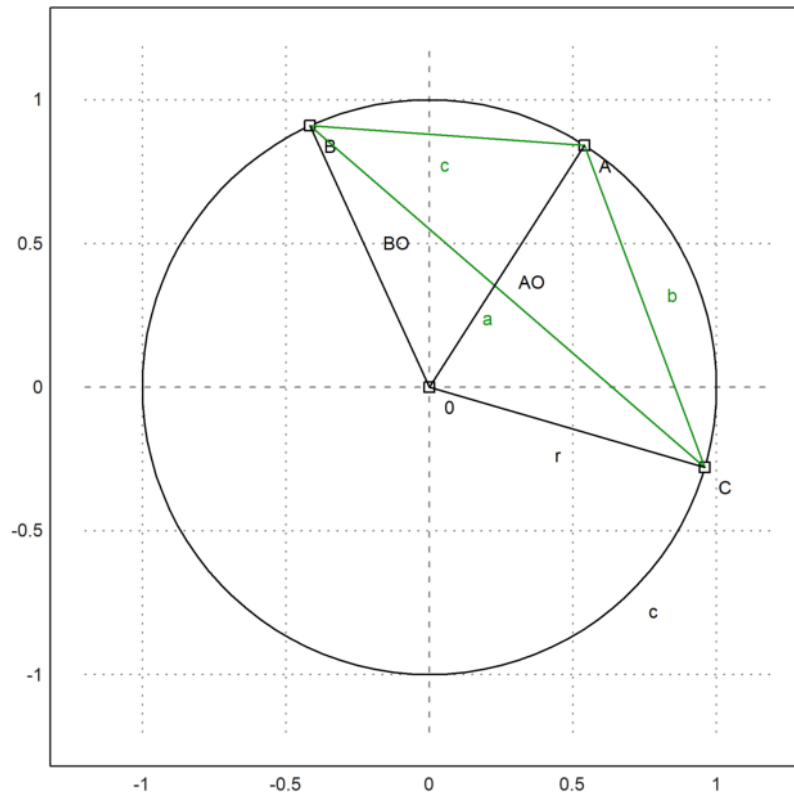
Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.

```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

1.33333333333

Lihatlah situasi berikut ini.

```
>setPlotRange(1.2); ...
>color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
>A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>color(1); O:=[0,0]; plotPoint(O,"O"); ...
>plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
>insimg;
```



Kita dapat menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus triple spread untuk sudut-sudut di pusat O untuk  $r$ . Dengan demikian kita mendapatkan rumus untuk jari-jari kuadrat dari pericircle dalam hal kuadran sisisisnya.

Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa angka nol yang rumit, yang kita abaikan.

```
>remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$-\frac{a b c}{c^2 - 2 b c + a (-2 c - 2 b) + b^2 + a^2}$$

Kita dapat menjadikannya sebuah fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasilnya untuk titik A, B, C.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

Untuk radiusnya 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

Faktanya adalah, bahwa spread CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema chord angle.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Kenyataannya, spread adalah  $b/(4r)$ , dan kita lihat bahwa sudut chord b adalah setengah dari sudut tengah.

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

$$0$$



## Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

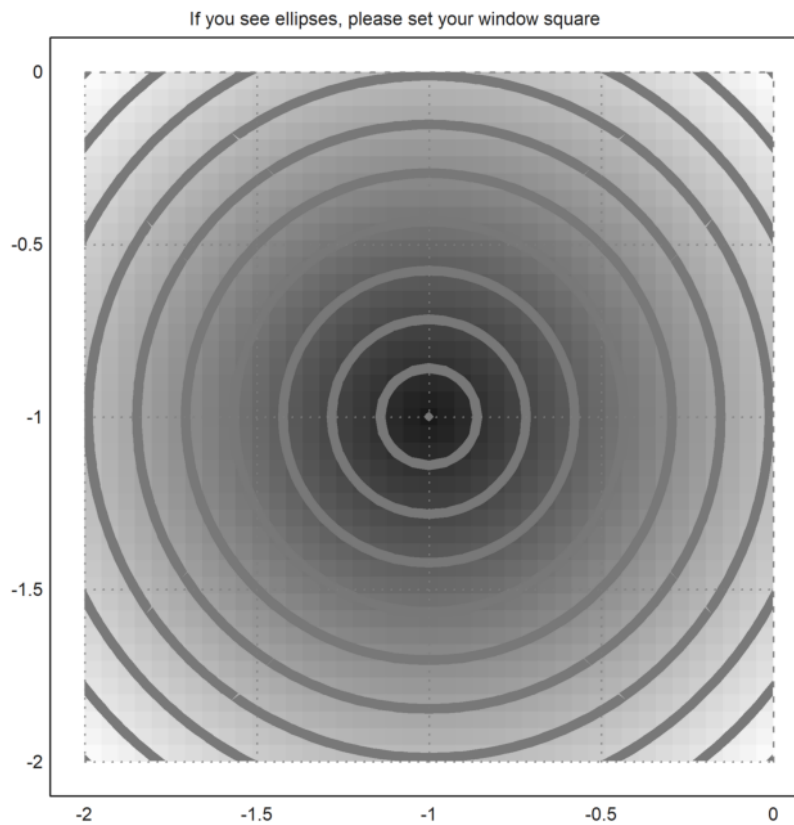
---

### Preliminary remark

---

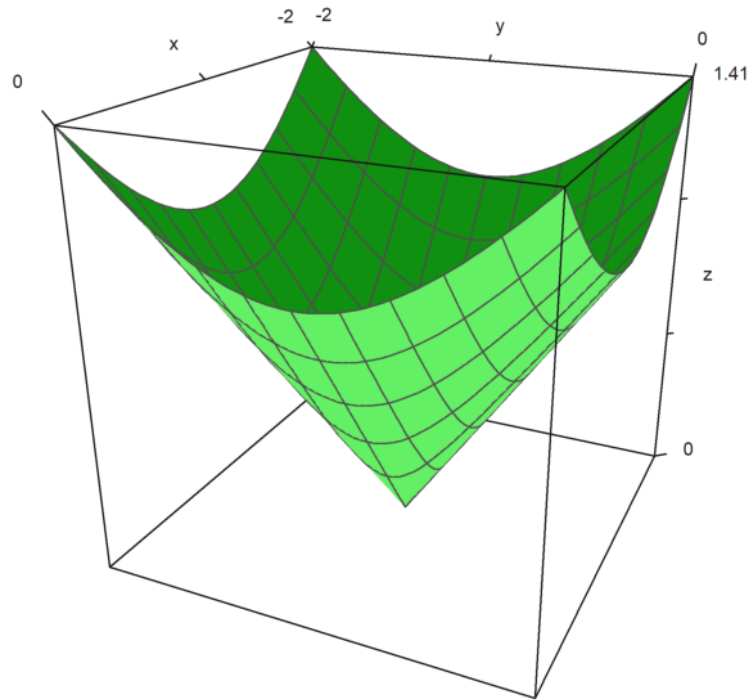
Fungsi pada sebuah titik  $M$  pada bidang, menetapkan jarak  $AM$  antara titik tetap  $A$  dan  $M$ , memiliki garis-garis tingkat yang cukup sederhana: lingkaran yang berpusat di  $A$ .

```
>remvalue();  
>A=[-1,-1];  
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)  
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...  
>title="If you see ellipses, please set your window square");
```



dan grafiknya juga cukup sederhana: bagian atas kerucut:

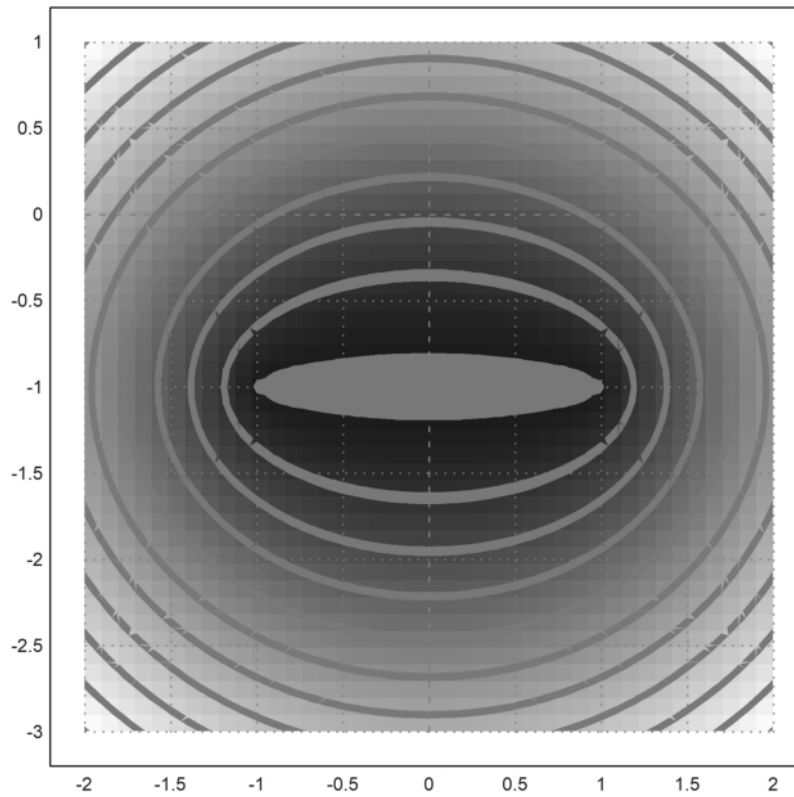
```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```



Tentu saja, nilai minimum 0 diperoleh di A.

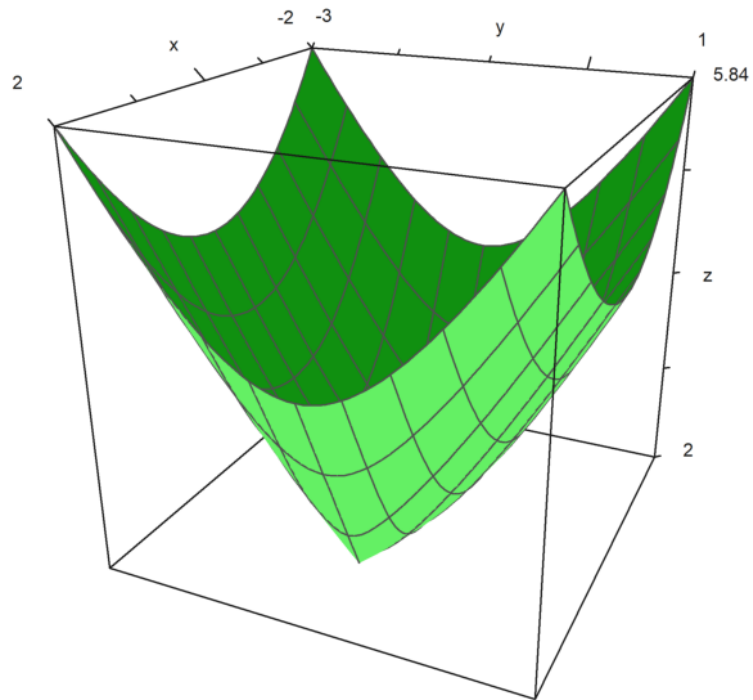
Sekarang kita lihat fungsi  $MA+MB$  di mana  $A$  dan  $B$  adalah dua titik (tetap). Ini adalah "well-known fact" bahwa kurva level adalah elips, titik fokusnya adalah  $A$  dan  $B$ ; kecuali  $AB$  minimum yang konstan pada segmen  $[AB]$ :

```
>B=[1,-1];  
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)  
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



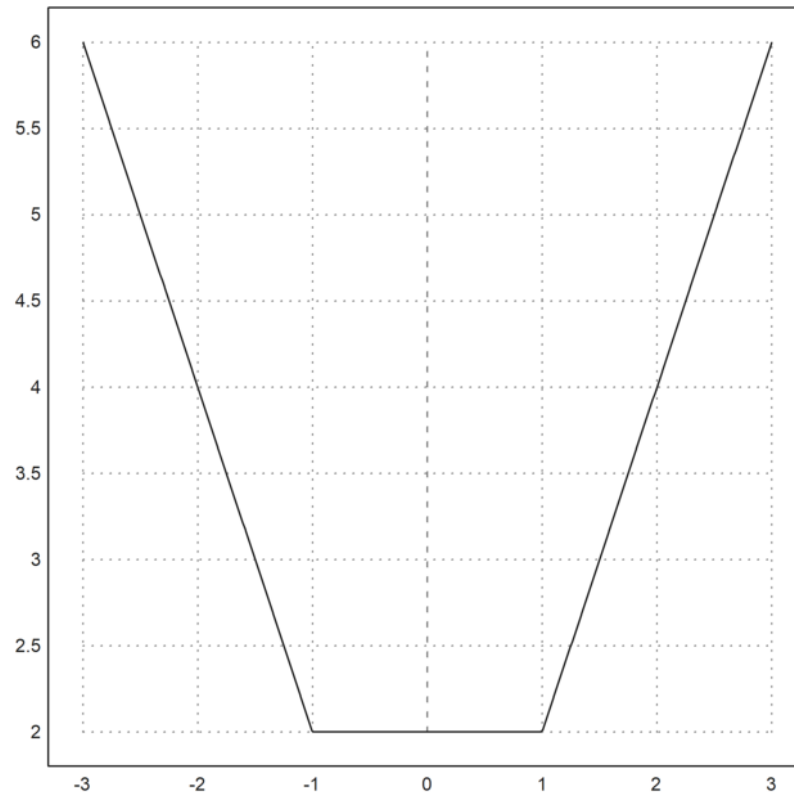
Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```



Pembatasan pada garis (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



---

Tiga Titik

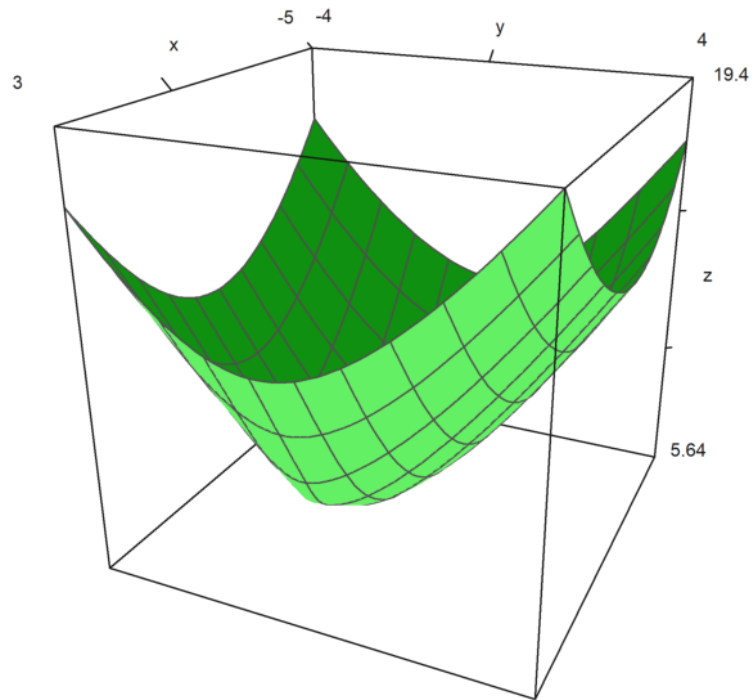
Sekarang, hal-hal menjadi kurang sederhana: Hal ini sedikit kurang dikenal bahwa  $MA+MB+MC$  mencapai titik minimum pada satu titik bidang, tetapi untuk menentukannya tidak sesederhana itu:

1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari  $120^\circ$  (katakanlah di A), maka sudut minimum dicapai pada titik ini (katakanlah AB+AC).

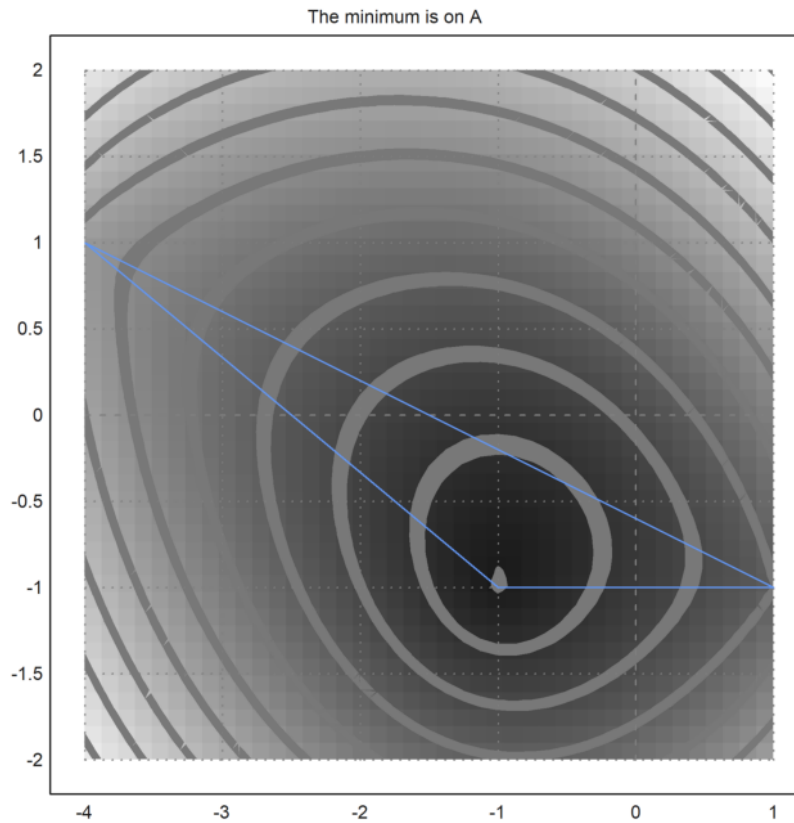
Contoh:

```
>C=[-4,1];  
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)  
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);  
>insimg;
```



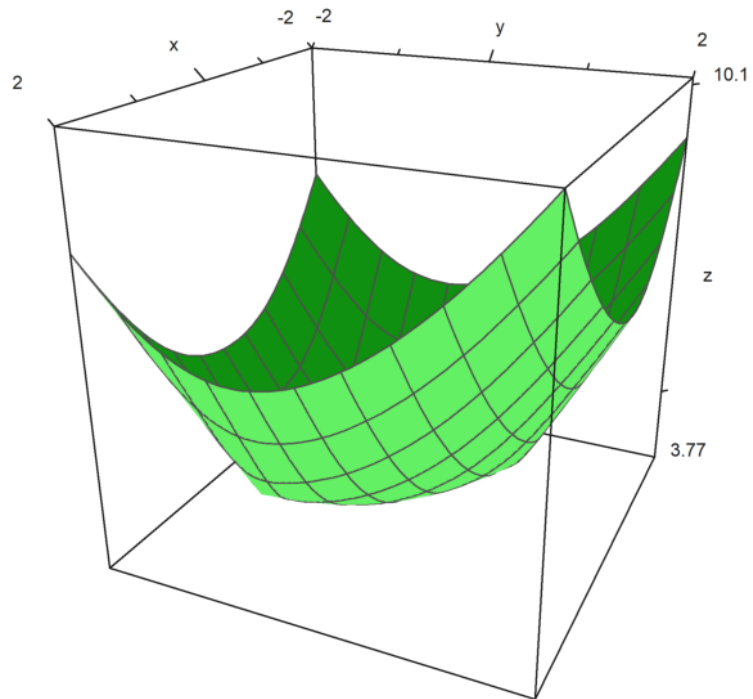


```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

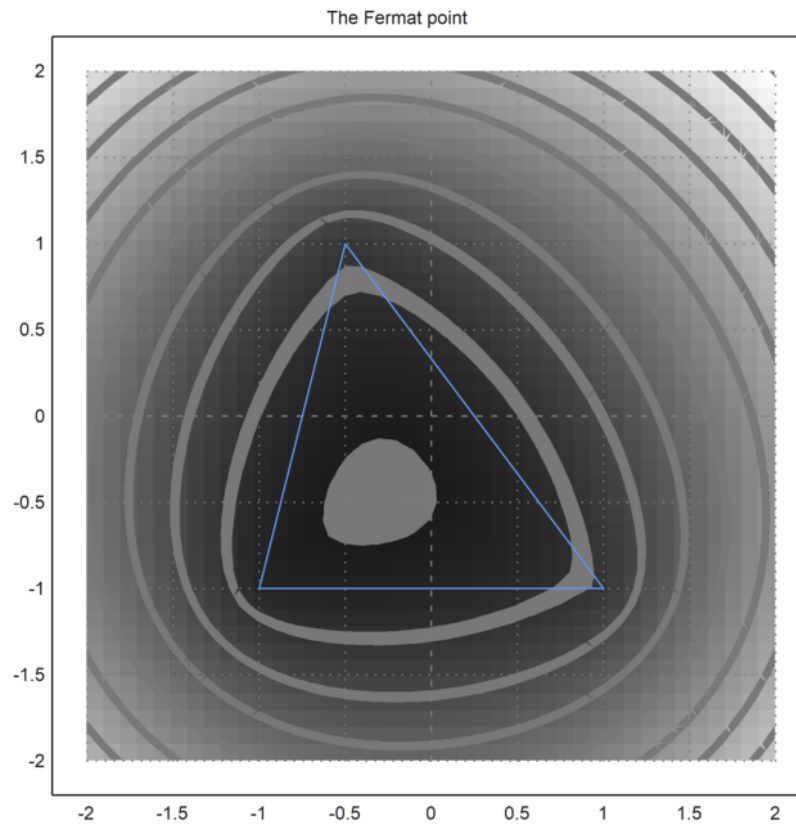


2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari  $120^\circ$ , minimumnya adalah pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (masing-masing  $120^\circ$ ):

```
>C=[-0.5,1];  
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```



```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");  
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);  
>insimg;
```



Ini menjadi kegiatan yang menarik untuk merealisasikan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; sebagai contoh, saya tahu sebuah perangkat lunak yang ditulis dalam bahasa Java yang memiliki instruksi "contour lines"...

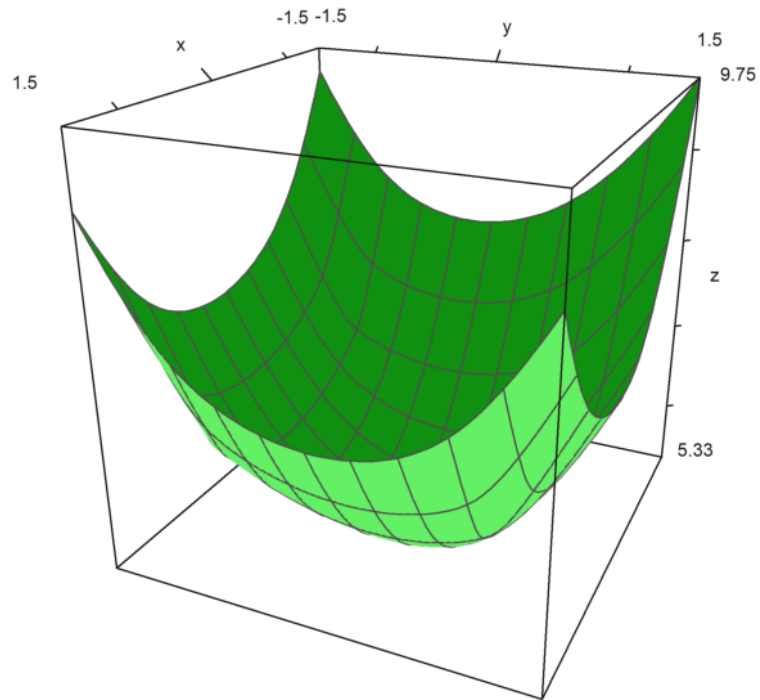
Semua hal di atas telah ditemukan oleh seorang hakim Perancis bernama Pierre de Fermat; ia menulis surat kepada para ahli di lain-lainnya seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di bagian pajak pendapatan. Jadi titik unik F sedemikian rupa sehingga  $FA+FB+FC$  minimal, disebut titik Fermat dari segitiga. Namun tampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torricelli dari Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat menemukannya! Bagaimanapun juga, tradisi yang berlaku adalah mencatat titik F ini...

## Empat Titik

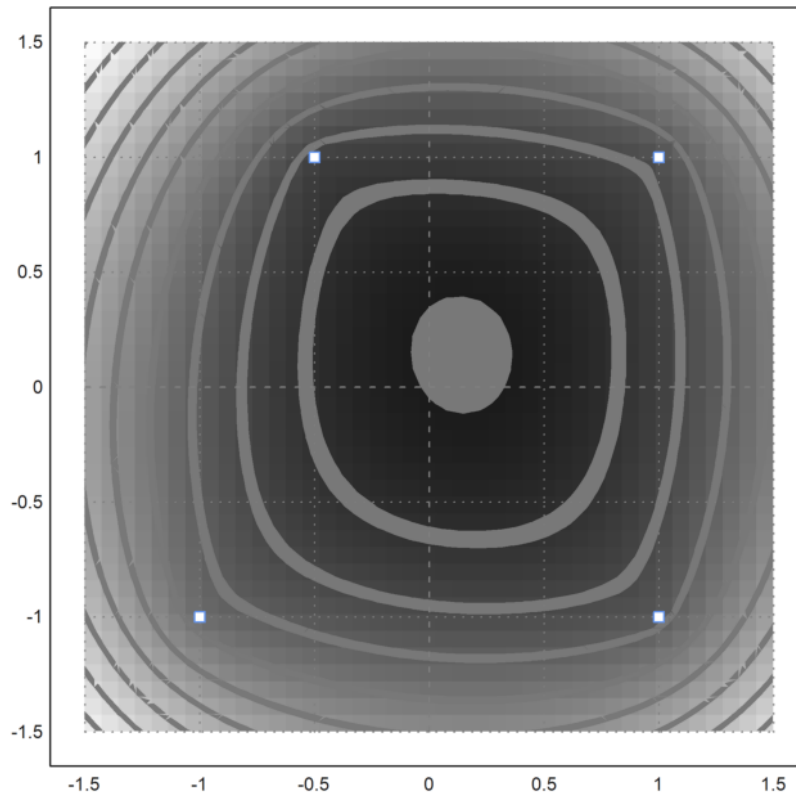
---

Langkah selanjutnya adalah menambahkan titik ke-4 D dan mencoba meminimumkan  $MA+MB+MC+MD$ ; misalkan Anda adalah operator TV kabel dan ingin menemukan di bidang mana Anda harus meletakkan antenna sehingga Anda dapat mencakup empat desa dan menggunakan panjang kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[1,1];  
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)  
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```



```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);  
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);  
>insimg;
```



Masih ada nilai minimum dan tidak ada vertice A, B, C, maupun D.

```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])  
>neldermin("f",[0.2,0.2])
```

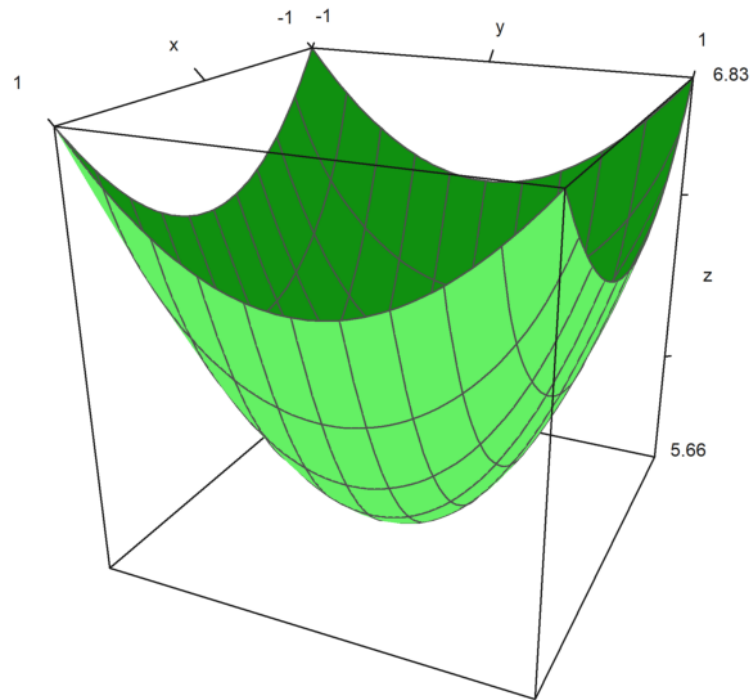
[0.142858, 0.142857]

Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal adalah rasional atau mendekati rasional...

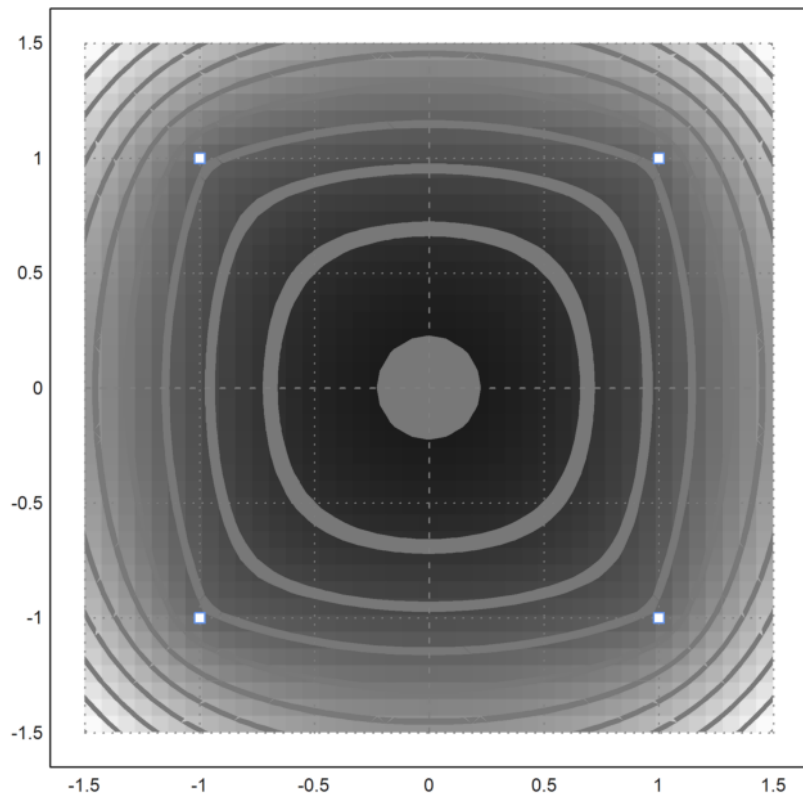
Karena ABCD adalah sebuah bujur sangkar, kita berharap bahwa titik optimalnya adalah pusat dari ABCD:

```
>C=[-1,1];  
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```





```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);  
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);  
>insimg;
```



## Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

---

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda telah menginstal Povray, dan pviewer.exe pada jalur program.

Pertama, kita menghitung jari-jari bola.

Jika Anda melihat gambar di bawah ini, Anda dapat melihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

Kita gunakan file geometry.e dari Euler untuk ini.

```
>load geometry;
```

Pertama, dua garis yang membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

$$[-a, 1, 0]$$

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

$[-a, -1, 0]$

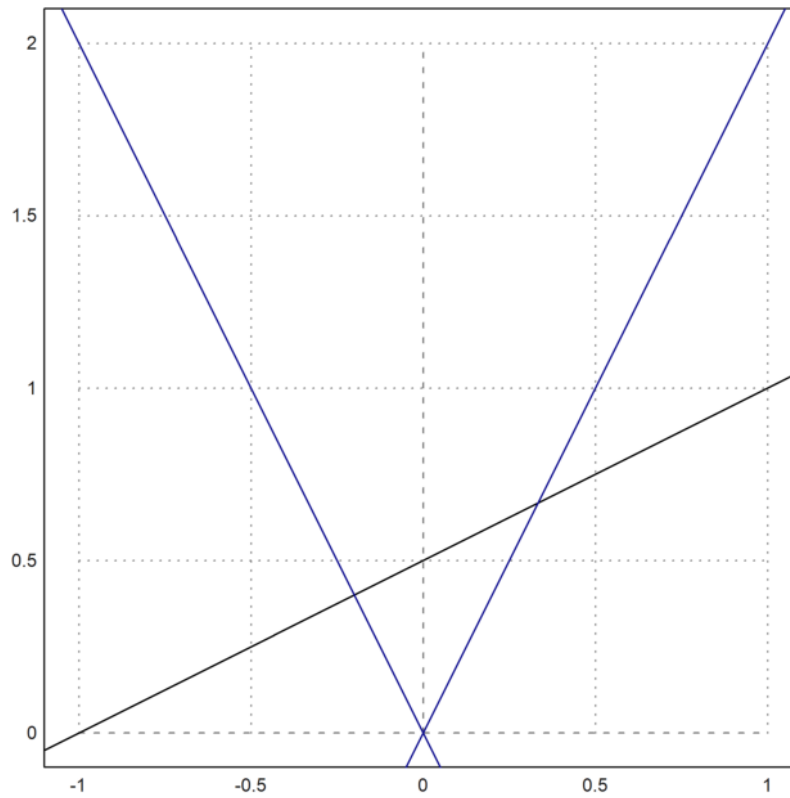
Kemudian baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

$[-1, 2, 1]$

Kita plotkan semuanya sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);  
>color(black); plotLine(g(),"")  
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```



Sekarang, kita ambil titik umum pada sumbu y.

$y \in [0, u]$

[0, u]

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2 u}{a^2 + 1} - u\right)^2 + \frac{a^2 u^2}{(a^2 + 1)^2}}$$

Compute the distance to g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u + 2}{5} - u\right)^2 + \frac{(2u - 1)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[ u = \frac{-\sqrt{5} \sqrt{a^2 + 1} + 2a^2 + 2}{4a^2 - 1}, u = \frac{\sqrt{5} \sqrt{a^2 + 1} + 2a^2 + 2}{4a^2 - 1} \right]$$

Ada dua solusi.

Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

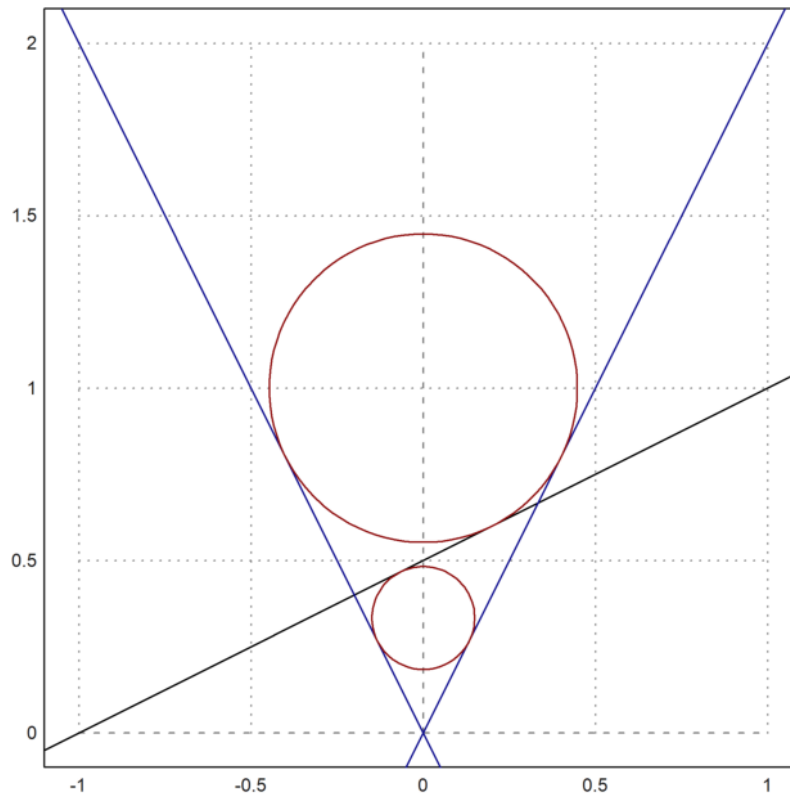
```
[0.333333, 1]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.149071, 0.447214]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);  
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");  
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");  
>insimg;
```



Plot dengan Povray

---



Selanjutnya kita plotkan semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut ini, dan jalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return.

Pertama, kita memuat fungsi povray.

```
>load povray;  
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kita siapkan scene dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya kita menulis dua bola ke file Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));  
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kecurut, tranparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kita menghasilkan bidang yang terbatas pada kerucut.

```
>gp=g();  
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");  
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];  
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kita menghasilkan dua titik pada lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]  
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);  
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));  
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);  
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Kemudian, kita menghasilkan dua titik di mana bola-bola tersebut menyentuh bidang. Ini adalah fokus elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya kita menghitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kita menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.

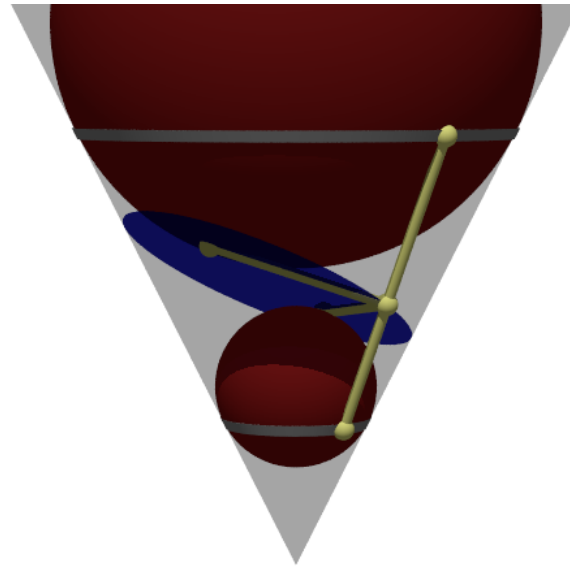
```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang, kita menghasilkan pita abu-abu, di mana bola-bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);  
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);  
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));  
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);  
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Mulai program Povray.

```
>povend();
```



Untuk mendapatkan Anaglyph ini, kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali nanti.

```
>function scene () ...
```

```
global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
```

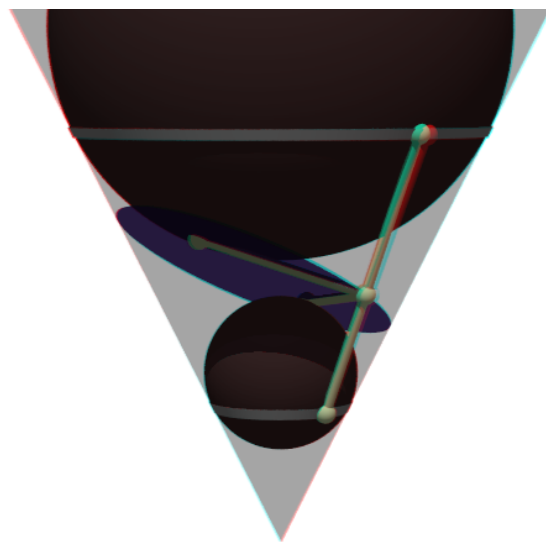
```

writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction

```

Anda memerlukan kacamata merah/cyan untuk mengapresiasi efek berikut ini.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```



## Contoh 8: Geometri Bumi

---

Dalam buku catatan ini, kita ingin melakukan beberapa komputasi bola. Fungsi-fungsi tersebut terdapat pada file "spherical.e" di dalam folder examples. Kita perlu memuat file tersebut terlebih dahulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kita menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut ini adalah koordinat untuk Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
[-0.13569,  1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (spherical position print).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
S 7°46.467' E 110°23.050'
```



Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];  
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'  
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama, kita menghitung vektor dari satu titik ke titik lainnya pada bola ideal. Vektor ini adalah [heading, distance] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang  $7^\circ$ .

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-Solo
```

```
65°20'26.60''  
53.8945384608
```

This is a good approximation. The following routines use even better approximations. On such a short distance the result is almost the same.

Ini adalah aproksimasi yang baik. Rutinitas berikut ini menggunakan aproksimasi yang lebih baik lagi. Pada jarak yang pendek, hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!  
Found: // perkiraan jarak FMIPA-Semarang (character 32)  
You can disable this in the Options menu.  
Error in:  
esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semaran ...  
^
```

Terdapat fungsi untuk heading, dengan mempertimbangkan bentuk elips bumi. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

65.34°

Sudut segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo); degprint(
```

180°0'10.77''

Ini bisa digunakan untuk menghitung luas area segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, cara ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->"km^2", // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang
```

```
2116.02948749km^2
```

Ada sebuah fungsi untuk hal ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata segitiga untuk menghitung radius bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

```
2123.64310526 km^2
```

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Sebuah vektor berisi heading dan distance, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan sebuah vektor, kita menggunakan svector. Untuk menambahkan sebuah vektor ke sebuah posisi, kita menggunakan saddvector.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola yang ideal. Hal yang sama di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'  
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita beralih ke contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];  
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'  
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya adalah 429,66 km. Kami mendapatkan aproksimasi yang bagus.

```
>esdist(Tugu,Monas)->"km", // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

```
431.565659488km
```

Judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

294°17'2.85''

Namun demikian, kita tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat, jika kita menambahkan arah dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi, karena kita tidak menghitung fungsi inversi secara tepat, tetapi mengambil perkiraan radius bumi di sepanjang jalur.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

S 6°10.500' E 106°48.717'

Namun demikian, kesalahannya tidak begitu besar.

```
>sposprint(Monas),
```

S 6°10.500' E 106°48.717'

Tentu saja, kita tidak bisa berlayar dengan arah yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika kita ingin mengambil jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang ke arah NE mulai dari titik mana pun di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan!

Perhitungan berikut ini menunjukkan bahwa kita melenceng jauh dari tujuan yang benar, jika kita menggunakan arah yang sama selama perjalanan.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambahkan 10 kali sepersepuluh dari jarak tersebut, dengan menggunakan arah ke Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya jauh berbeda.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

S 6°11.250' E 106°48.372'  
1.529km

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada garis lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran lintang 30°, tetapi jalur yang lebih pendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

79.69°

Namun, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi, kita harus menyesuaikan arah kita di sepanjang jalan. Untuk tujuan kasar, kita sesuaikan pada 1/10 dari jarak total.

```
>p=P1; dist=esdist(P1,P2); ...  
> loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

79.69°  
81.67°  
83.71°  
85.78°  
87.89°  
90.00°

92.12°  
94.22°  
96.29°  
98.33°

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan, jika kita mengikuti arah yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

0.203km

Kita mendapatkan aproksimasi yang baik, jika kita menyesuaikan arah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...  
> loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;  
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

0.000km

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS di sepanjang Bundaran HI menuju Monas dengan fungsi navigate.



```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...  
> loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'  
S 7°37.422' E 110°0.573'  
S 7°27.829' E 109°39.196'  
S 7°18.219' E 109°17.834'  
S 7°8.592' E 108°56.488'  
S 6°58.948' E 108°35.157'  
S 6°49.289' E 108°13.841'  
S 6°39.614' E 107°52.539'  
S 6°29.924' E 107°31.251'  
S 6°20.219' E 107°9.977'  
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

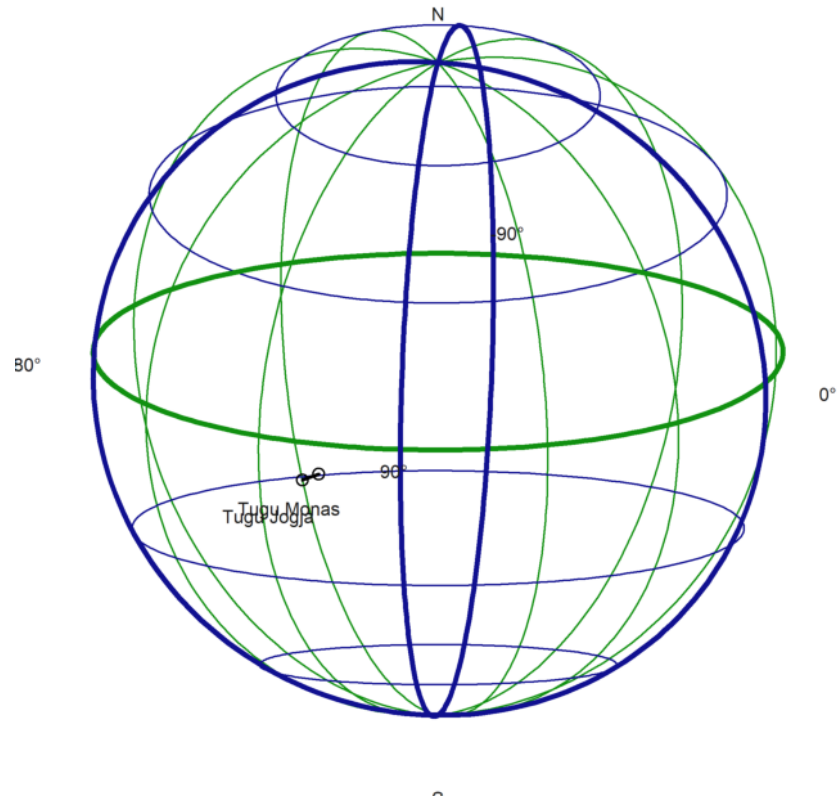
Kita menulis sebuah fungsi, yang memetakan bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
```

```
useglobal;  
plotearth;  
plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");  
plotposline(v);  
endfunction
```

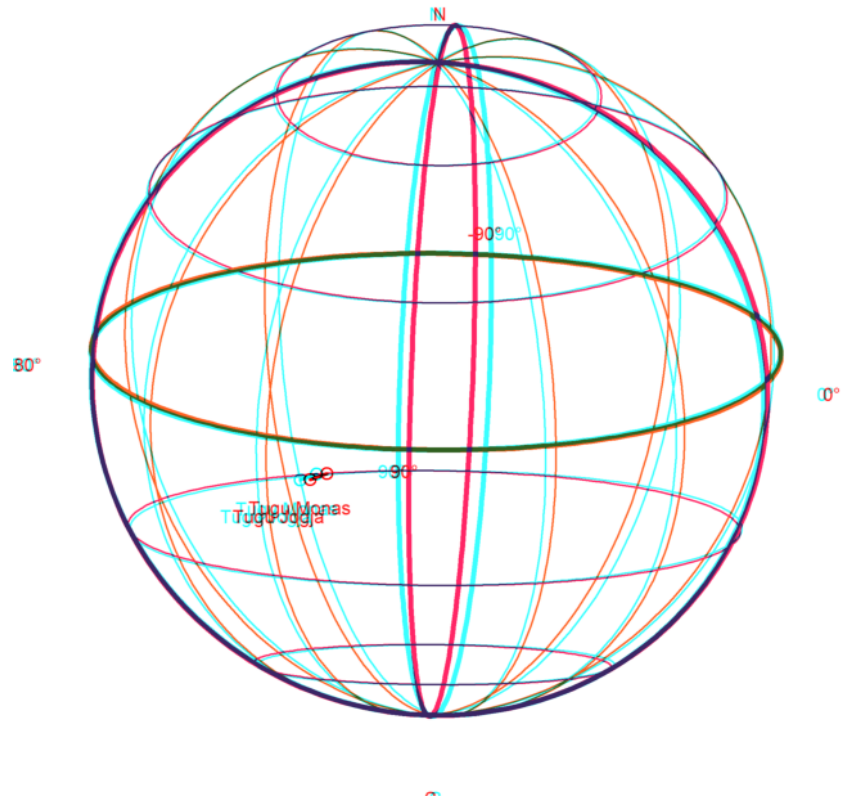
Sekarang, plotkan semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):
```



Atau gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglyph. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah/cyan.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```



1. Gambarlah segi- $n$  beraturan jika diketahui titik pusat  $O$ ,  $n$ , dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi- $n$  tersebut (jari-jari lingkaran luar segi- $n$ ),  $r$ .

Petunjuk:

- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi- $n$  adalah  $(360/n)$ .
- Titik-titik sudut segi- $n$  merupakan perpotongan lingkaran luar segi- $n$  dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan  $(360/n)$ .
- Untuk  $n$  ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk  $n$  genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:

- Misalkan persamaan parabolanya  $y = ax^2 + bx + c$ .
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .

- Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung

(sisinya-sisintya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).

- Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat

garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.

- Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar

lingkaran dalamnya.

- Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis

singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

---

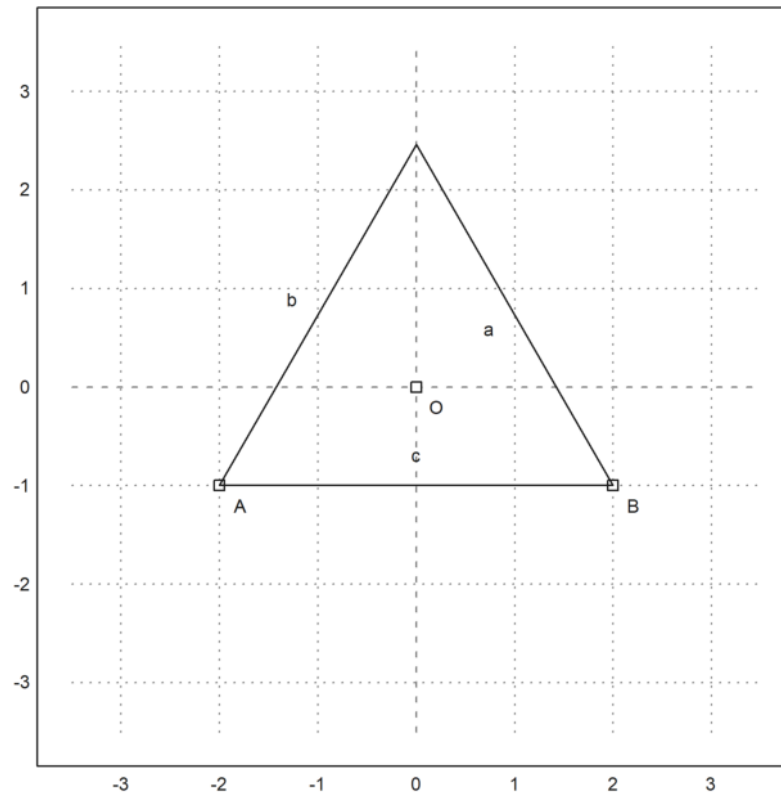
Jawab:

1.

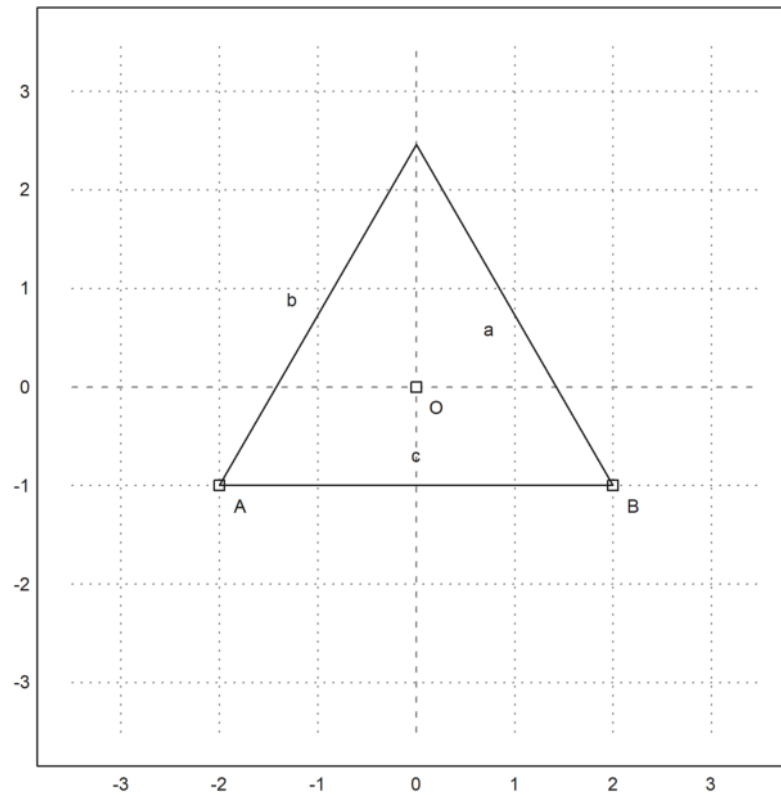
```
>load geometry
```

Numerical and symbolic geometry.

```
>setPlotRange(-3.5,3.5,-3.5,3.5);  
>O=[0,0]; plotPoint(O,"O");  
>A=[-2,-1]; plotPoint(A,"A");  
>B=[2,-1]; plotPoint(B,"B");  
>C=[0,2*3^0.5-1]; plotPoint(A,"A");  
>plotSegment(A,B,"c");  
>plotSegment(B,C,"a");  
>plotSegment(A,C,"b");  
>aspect(1):
```



```
>c=circleThrough(A,B,C):
```

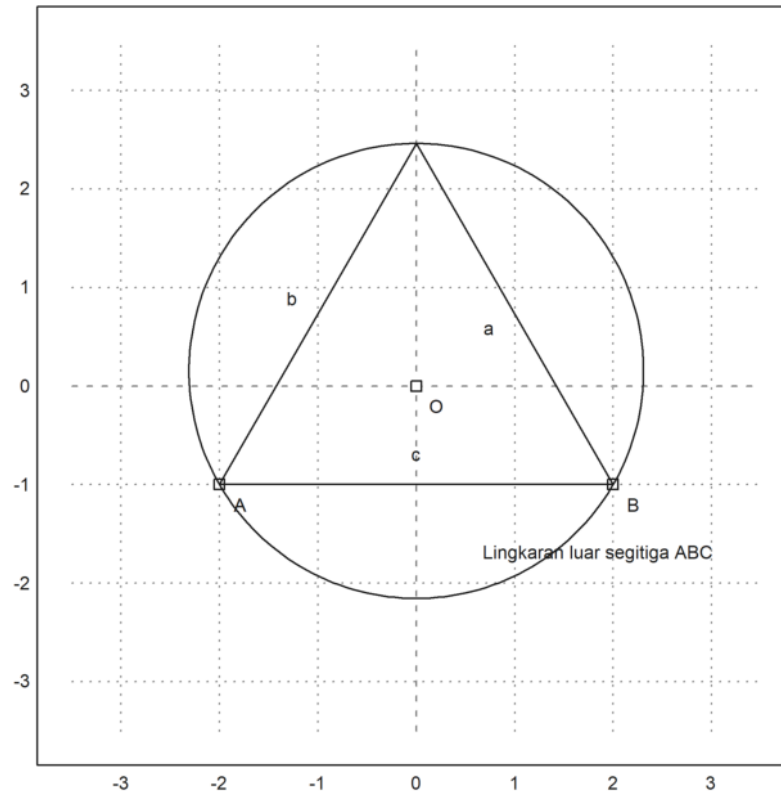


```
>R=getCircleRadius(c);  
>O=getCircleCenter(c)
```

[0, 0.154701]

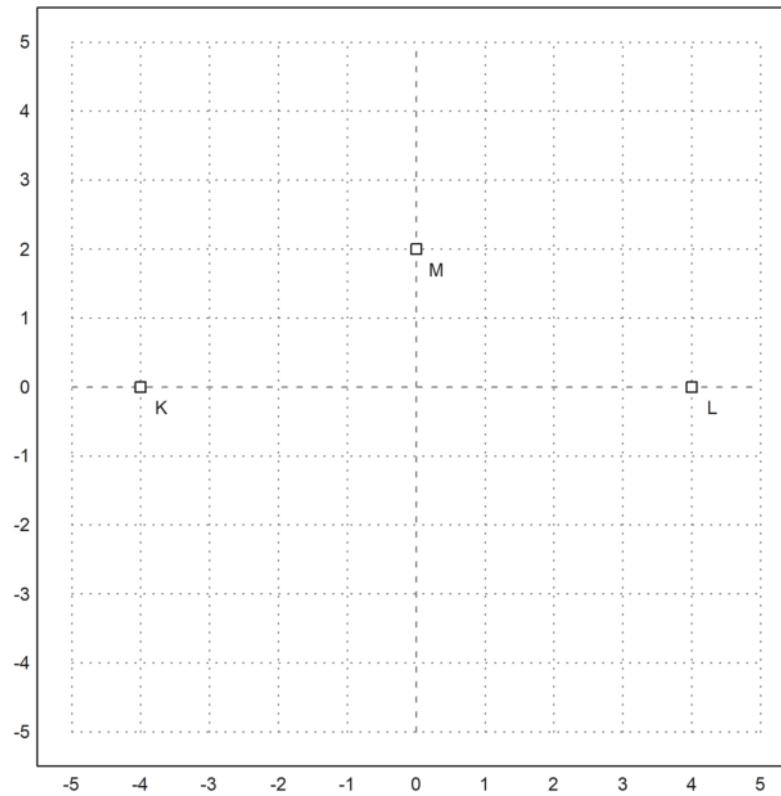


```
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



2.

```
>setPlotRange(5);  
>K=[-4,0]; L=[4,0] ; M=[0,2];  
>plotPoint(K,"K"); plotPoint(L,"L"); plotPoint(M,"M"):
```



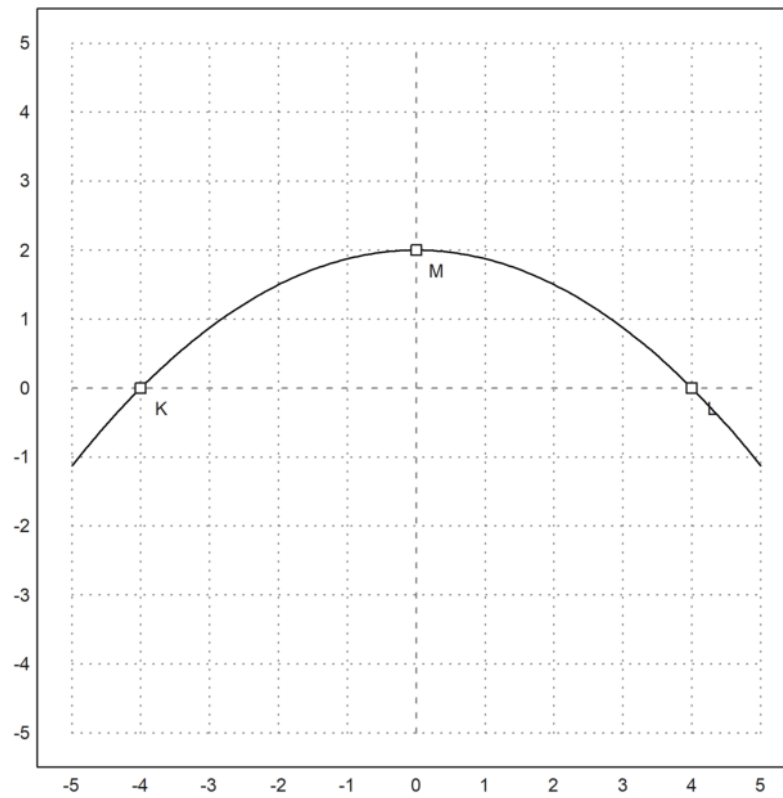
```
>sol &= solve([16*a+8*b=-c,16*a-8*b=-c,c=2],[a,b,c])
```

$$[[a = -\frac{1}{8}, b = 0, c = 2]]$$

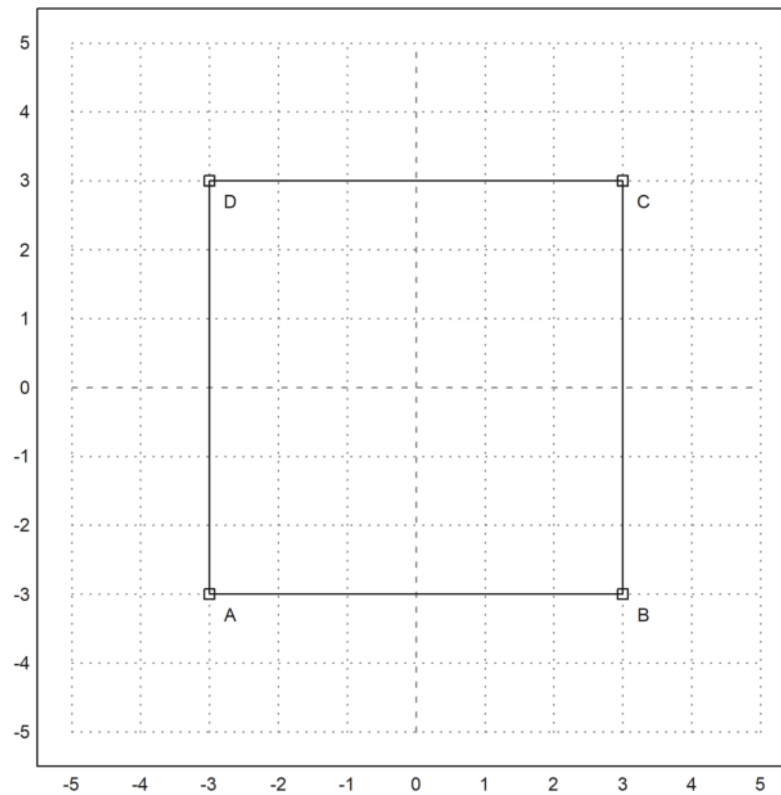
```
>function y&=-1/8*(x^2)-0*x+2
```

$$2 - \frac{x^2}{8}$$

```
>plot2d("-1/8*(x^2)-0*x+2",-5,5,-5,5); ...
>plotPoint(K,"K"); plotPoint(L,"L"); plotPoint(M,"M");
```



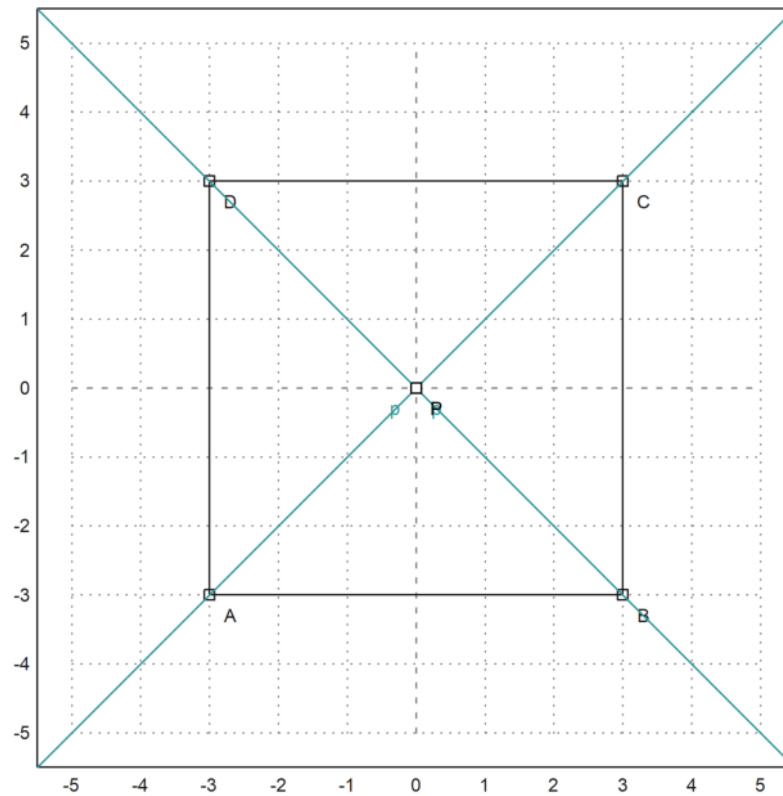
```
>setPlotRange(5);  
>A=[-3,-3]; B=[3,-3] ; C=[3,3]; D=[-3,3];  
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); plotPoint(D,"D");  
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,D,""); plotSegment(D,A,""):
```



```
>l=angleBisector(A,B,C);  
>g=angleBisector(B,C,D);  
>P=lineIntersection(l,g)
```

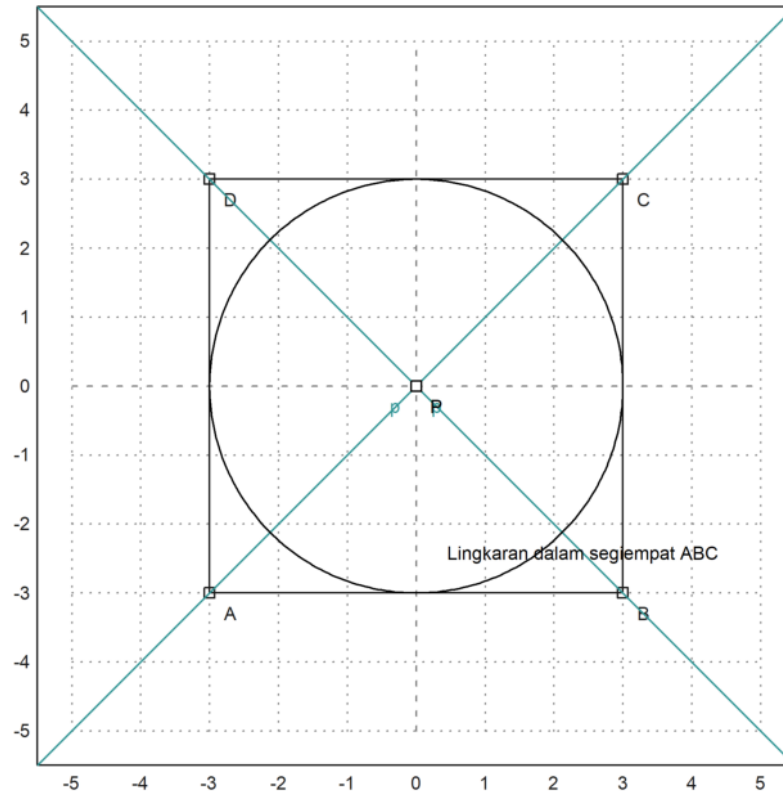
[0, 0]

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1);  
>plotPoint(P,"P"):
```



```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segiempat ABC"):
```





Dari gambar di atas, terlihat bahwa sisi-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yaitu lingkaran dalam segiempat.

Kemudian akan ditunjukkan bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

```
>AB=norm(A-B) // panjang sisi AB
```

6

```
>BC=norm(B-C) // panjang sisi ABC
```

6

```
>CD=norm(C-D) // panjang sisi CD
```

6

```
>DA=norm(D-A) // panjang sisi DA
```

6

```
>AB.CD
```

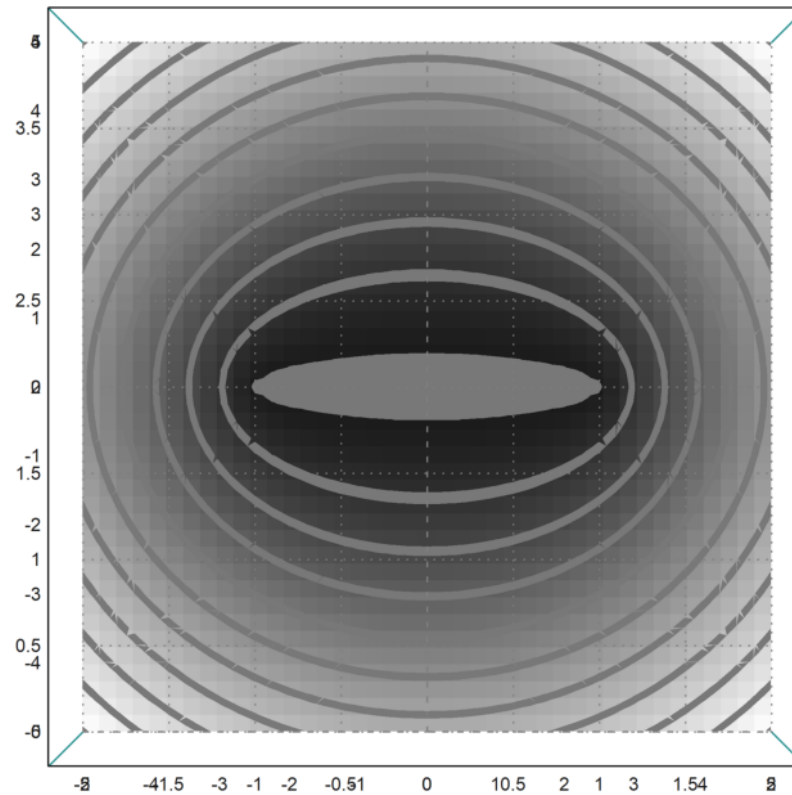
36

```
>DA.BC
```

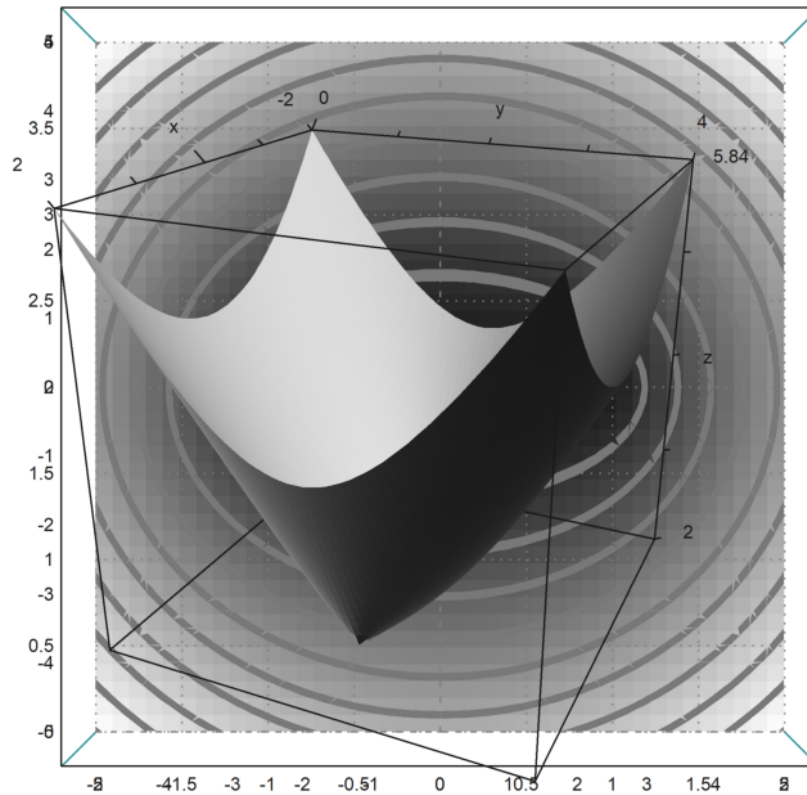
36

4.

```
>P=[-1,2]; Q=[1,2];  
>function d1(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)  
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-Q[1])^2+(y-Q[2])^2)  
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=0,ymax=4,hue=1):
```

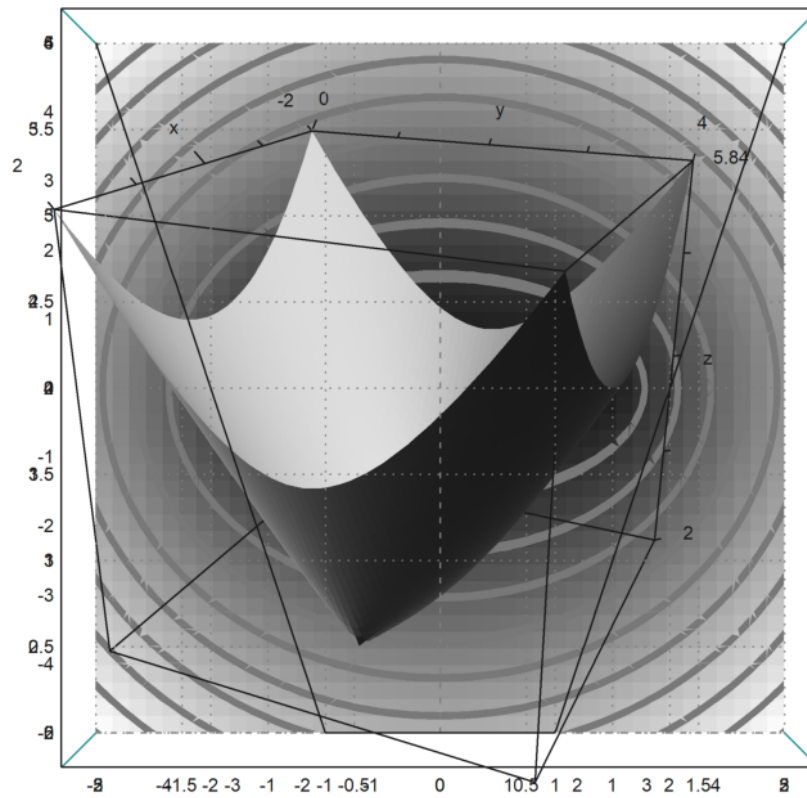


```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=0,ymax=4,hue=1):
```



Batasan garis PQ

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

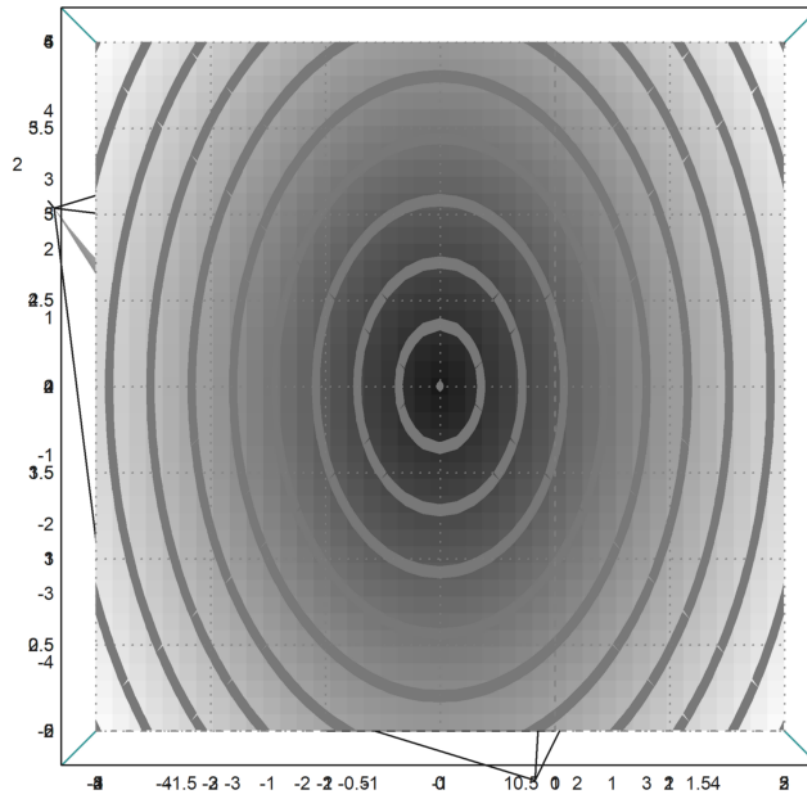


5.

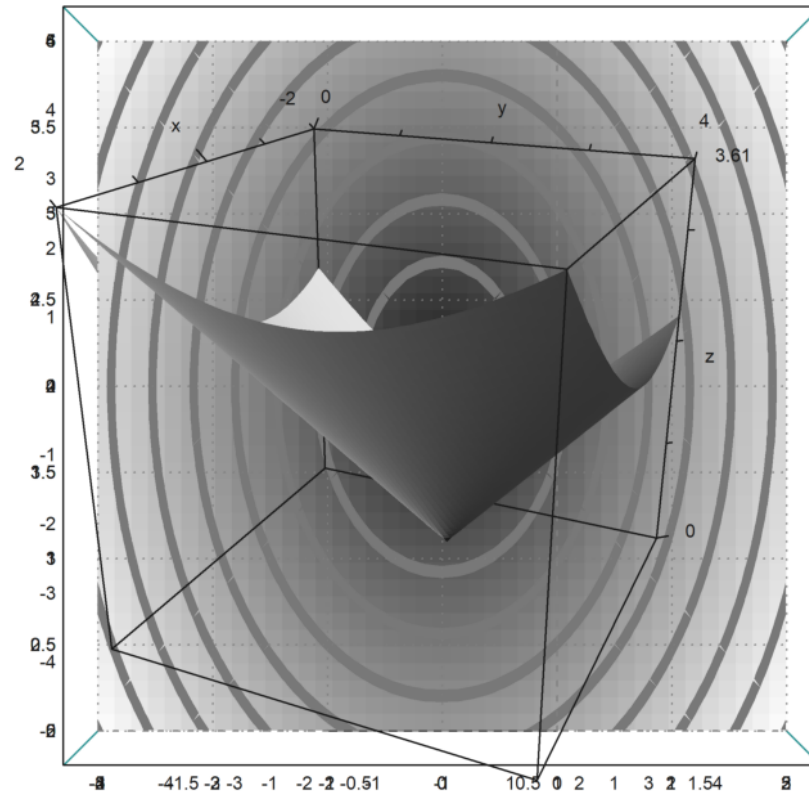
```

>P=[-1,2]; Q=[1,2];
>function d3(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-Q[1])^2+(y-Q[2])^2)
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=2,ymin=0,ymax=4,hue=1):

```



```
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=0,ymax=4,hue=1):
```



```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

