

Ş.L.dr.ing. Liviu Daniel **PÎRVULESCU**

Conf.dr.ing Mihai **HLUŞCU**

Ş.L.dr.ing. Anghel Vasile **CERNESCU**

FUNDAMENTE DE INGINERIE MECANICĂ

EDITURA POLITEHNICA
TIMIȘOARA – 2021

CUPRINS

PREFATĂ.....	7
1. MECANICA SOLIDULUI RIGID.....	8
1.1. Noțiuni fundamentale de mecanică.....	8
1.2. Noțiuni fundamentale de statică	9
1.2.1. Momentul unei forțe în raport cu un punct.....	10
1.2.2. Momentul unei forțe în raport cu o axă	11
1.2.3. Momentul unui cuplu de forțe	12
1.3. Reducerea sistemelor de forțe. Echilibrul solidului rigid	13
1.3.1. Reducerea unei forțe într-un punct. Torsorul de reducere	13
1.3.2. Reducerea unui sistem de forțe într-un punct	14
1.3.3. Echilibrul solidului rigid.....	15
1.4. Aplicație.....	16
2. STATICĂ FIRELOR.....	18
2.1. Noțiuni introductive.....	18
2.2. Echilibrul firului supus la forțe distribuite.....	18
2.3. Echilibrul firului omogen greu	21
2.4. Formula simplificată a ecuației lăncișorului.....	24
2.5. Echilibrul firului omogen greu foarte întins	26
2.6. Aplicație.....	26
3. INTRODUCERE ÎN REZISTENȚA MATERIELELOR	30
3.1. Obiectul și problemele rezistenței materialelor	30
3.2. Clasificarea corpurilor în rezistența materialelor.....	30
3.3. Forțe exterioare în rezistența materialelor	32
3.4. Ipoteze de bază în rezistența materialelor	34
4. DIGRAME DE EFORTURI ÎN BARE DREpte	35
4.1. Reazeme și reacții	35
4.2. Forțe interioare. Metoda secțiunilor.....	36
4.3. Eforturi. Convenții de semne	38
4.4. Relații diferențiale între eforturi la bare drepte.....	40
4.5. Construcția analitică a diagramelor de eforturi la bare drepte	41
4.6. Aplicație.....	42
5. TENSIUNI, DEPLASĂRI ȘI DEFORMAȚII SPECIFICE.....	46
5.1. Tensiunea.....	46
5.2. Starea de tensiune	47
5.3. Deplasări. Deformații specifice	49
5.3.1. Deplasări.....	49
5.3.2. Deformații.....	50

5.4. Caracteristici mecanice ale materialelor	51
5.4.1. Legea lui Hooke	51
5.4.2. Proprietățile mecanice ale materialelor	53
5.5. Coeficienți de siguranță. Tensiuni admisibile.....	53
6. CARACTERISTICI GEOMETRICE ALE SECȚIUNILOR PLANE...55	
6.1. Noțiuni introductive.....	55
6.2. Aria și momentul static al suprafețelor plane	56
6.3. Momente de inerție ale suprafețelor plane.....	57
6.4. Modulul de rezistență al suprafețelor plane	58
6.5. Variația momentelor de inerție față de axe paralele	59
6.6. Variația momentelor de inerție față de axe rotite.....	61
6.7. Direcții principale de inerție. Momente de inerție principale	63
6.8. Caracteristici geometrice pentru suprafețe plane simple	65
6.8.1. Secțiunea dreptunghiulară	65
6.8.2. Secțiunea circulară.....	66
6.8.3. Secțiunea inelară.....	68
6.9. Aplicație.....	69
7. ÎNTINDEREA ȘI COMPRESIUNEA MONOAXIALĂ A BARELOR DREPTE.....73	
7.1. Forță axială	73
7.2. Tensiuni și deformații	74
7.3. Probleme de rezistență la solicitări axiale.....	76
7.4. Contraction transversală.....	78
7.5. Bare cu variații de secțiune	78
7.6. Tensiuni și deformații ținând cont de greutatea proprie	79
7.7. Aplicație.....	82
8. ÎNCOVOIAREA BARELOR DREPTE	86
8.1. Noțiuni introductive.....	86
8.2. Tensiuni în barele drepte solicitate la încovoiere. Relația lui Navier	87
8.3. Dimensionarea barele drepte solicitate la încovoiere	90
8.4. Încovoierea cu forță tăietoare	91
8.4.1. Dualitatea tensiunilor tangențiale	91
8.4.2. Tensiuni tangențiale la încovoierea cu forță tăietoare	92
8.4.3. Relația lui Juravski	94
8.5. Variația tensiunilor tangențiale pentru secțiuni transversale simple.....	96
8.5.1. Secțiunea dreptunghiulară	96
8.5.2. Secțiunea circulară.....	98
8.5.3. Secțiunea de tip I dublu simetric	99
8.6. Aplicație.....	100
9. TORSIUNEA BARELOR DREPTE.....106	
9.1. Noțiuni introductive	106

9.2. Calculul momentului de torsiune	106
9.3. Starea de forfecare pură	107
9.4. Torsiunea barelor de secțiune circulară	109
9.5. Calculul arcurilor elicoidale cu pas mic.....	114
9.6. Aplicație.....	116
10. STABILITATEA ECHILIBRULUI ELASTIC	121
10.1. Noțiuni introductive. Flambajul.....	121
10.2. Pierderea stabilității barelor în domeniul de proporționalitate.....	122
10.2.1. Formula lui Euler.....	122
10.2.2. Influența modului de fixare a barei asupra flambajului	124
10.2.3. Tensiunea critică de flambaj.....	125
10.2.4. Limita de aplicare a formulei lui Euler.....	126
10.3. Flambajul în domeniul plastic.....	126
10.4. Aplicație.....	127
11. ELEMENTE DE TEHNOLOGIA MATERIALELOR	130
11.1. Noțiuni introductive	130
11.2. Materiale utilizate în tehnică.....	130
11.3. Obținerea semifabricatelor turnate.....	131
11.4. Prelucrarea prin deformare plastică	132
11.4.1. Laminarea	132
11.4.2. Tragerea	133
11.4.3. Forjarea.....	133
11.5. Prelucrarea prin aşchieri.....	135
11.6. Metode de realizare a conexiunilor electrice	136
11.6.1. Conexiunea prin lipire	136
11.6.2. Conexiunea prin wrapeare	137
11.6.3. Alte procedee de realizare a conexiunilor electrice	138
11.7. Sudarea metalelor	138
12. ELEMENTE DE ORGANE DE MAȘINI ȘI MECANISME	140
12.1. Noțiuni introductive	140
12.2. Osii și arbori	141
12.3. Elemente de calcul specifice arborilor și osiilor	143
12.4. Lagăre	146
12.4.1. Lagăre cu alunecare	147
12.4.2. Lagăre cu rostogolire	149
12.5. Elemente de asamblare ale organelor de mașini	151
12.5.1. Asamblarea prin nituire	151
12.5.2. Asamblări filetate	153
12.5.3. Asamblări prin pene.....	155
BIBLIOGRAFIE	157

PREFAȚĂ

Lucrarea de față reprezintă cursul cu aceeași denumire care se adresează studenților de la Facultate de Electrotehnica și Electroenergetică, domeniul Inginerie Energetică, specializarea Ingineria Sistemelor Electroenergetice.

În cadrul cursului se prezintă noțiuni fundamentale a patru discipline distințe: Mecanica, Rezistența Materialelor, Tehnologia Materialelor și Organe de Mașini. Cunoștințele înșușite în acest curs sunt utile atât în studiul disciplinelor de specialitate cât și în activitatea de proiectare și exploatare a mașinilor și utilajelor.

Mecanica studiază forma cea mai simplă de mișcare a materiei, care constă din deplasarea relativă a corpurilor sau a unumitor părți ale corpului, în raport cu un alt corp considerat ca reper, sau în raport cu un sistem de referință.

Problema fundamentală a mecanicii constă în stabilirea unor relații între forțele care acționează asupra unui sistem de coruri materiale și mișcarea mecanică realizată de acestea. Având în vedere cele două elemente de bază forța și mișcarea, mecanica are trei mari diviziuni: statica, cinematica și dinamica.

Rezistența materialelor este o disciplină tehnică generală care introduce în calcul, proprietatea corpurilor de a se deforma sub acțiunea solicitărilor. Obiectul de studiu al rezistenței materialelor este dimensionarea pieselor de mașini sau utilaje, pentru a rezista la solicitările aplicate sau, verificarea corpurilor la rupere pentru solicitările cunoscute. Având un caracter aplicativ, Rezistența materialelor stă la baza activităților de proiectare economică a structurilor.

Solicitările aplicate asupra unui corp, în mecanică sunt vectori alunecători iar în Rezistența Materialelor sunt vectori legați, având puncte de aplicație bine definite pentru a studia deformația acestuia.

Tehnologia materialelor este știința care se ocupă cu studiul, elaborarea și determinarea proceselor, metodelor și a procedurilor de prelucrare a materialelor pentru a asigura obținerea produselor în condițiile tehnice stabilite.

Domeniul materialelor și al tehnologiilor de prelucrare a materialelor este astăzi extrem de vast și complex. Specialiștii din industrie având, în momentul de față, foarte multe tipuri de materiale și numeroase procedee de prelucrare.

Organele de mașini se ocupă cu calculul, proiectarea și verificarea organelor din componența ansamblurilor de mașini ca piese distințe, ținând cont de forțele care acționează asupra ansamblului, condițiile de exploatare și posibilitățile tehnologice de execuție.

Studiul organelor de mașini urmărește obținerea pieselor de formă constructivă optimă, care să asigure buna funcționare în exploatare cât și, realizarea lor cu consum minim de material și costuri minime.

Autorii

Capitolul 1

MECANICA SOLIDULUI RIGID

1.1. Noțiuni fundamentale de mecanică

Mecanica reprezintă prima știință a naturii fundamentată de Isaac Newton (1642-1727). Mecanica studiază repausul și mișcarea corpurilor sau, în particular studiază echilibrul acestora.

La baza mecanicii stau cele patru legi fundamentale formulate de Newton:

I. Principiul inerției sau **Legea a I-a a lui Newton**: un corp punctiform (punct material) își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă atât timp cât asupra sa nu intervene o cauză exterioară care să-i schimbe această stare.

II. Principiul acțiunii forței sau **Legea a II-a a lui Newton**: dacă asupra unui corp punctiform acționează o forță \vec{F} , aceasta va imprima corpului o *accelerație* \vec{a} coliniară, în același sens și proporțională cu forța aplicată. Expresia analitică este:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (1.1.)$$

unde m reprezintă masa punctului material.

III. Principiul acțiunii și reacțiunii sau **Legea a III-a a lui Newton**: dacă asupra unui corp punctiform acționează un alt corp punctiform cu o forță, atunci și acesta va acționa asupra primului cu o forță coliniară, egală și de sens contrar cu forța inițială.

IV. Principiul paralelogramului (colorarul I): un corp punctiform sub acțiunea a două forțe concurente descrie diagonală unui paralelogram având ca laturi forțele, în același timp în care ar descrie laturile sub acțiunile separate ale forțelor, figura 1.1.

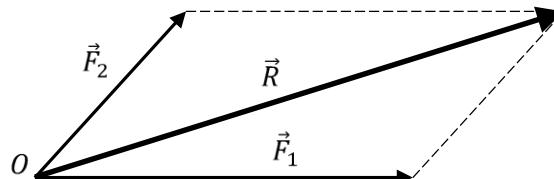


Figura 1.1. Regula paralelogramului

În figura 1.1., \vec{R} reprezintă forța obținută pe baza principiului paralelogramului, prin suma vectorială a celor două forțe \vec{F}_1 și \vec{F}_2 :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (1.2.)$$

Forțele se consideră concurente în punctul O și au același efect asupra punctului material O ca și forța \vec{R} numită **rezultanta forțelor**.

Mecanica studiază următoarele modele de coruri:

Punctul material (corpul punctiform). Modelul presupune că, întreaga masă a corpului poate fi concentrată într-un punct geometric fără dimensiuni (adimensional).

Sistemul de puncte materiale reprezintă o mulțime de puncte materiale în interacțiune mecanică.

Corpul material este un corp geometric în spațiu căruia î se atașează o masă sau, fiecare corp material poate fi privit ca o mulțime infinită de puncte materiale. În mecanica clasăcă, corpul solid poate fi asimilat cu noțiunea de **rigid** (distanța dintre două puncte oarecare este constantă).

Modelul solidului rigid. Acest model presupune că, oricât de mari ar fi forțele exterioare aplicate corpului, acesta nu se deformează. Mecanica studiază modelul solidului rigid, de aceea mecanica se mai numește **mecanica solidului rigid**.

Modelul solidului deformabil. Conform acestui model, în calcule se au în vedere deformațiile produse asupra corpului de către forțele exterioare aplicate.

Mecanica solidului rigid studiază trei părți:

➤ **Statica** se ocupă cu repausul punctului material (sistem de puncte materiale) în raport cu un sistem de referință, studiază echilibrul solidului rigid și analizează condițiile necesare pentru a fi în echilibru. **Repausul** corespunde stării de imobilitate a unui corp în raport cu un sistem de referință dat.

➤ **Cinematica** studiază mișcarea punctului material sau a sistemelor de puncte materiale, fără a ține cont de forțele care acționează asupra punctului material sau a sistemelor de puncte materiale.

➤ **Dinamica** studiază mișcarea punctului material sau a sistemelor de puncte materiale, ținând cont de forțele care acționează asupra lor sau, dinamica studiază mișcarea corpurilor rigide sub acțiunea forțelor exterioare aplicate acestora.

1.2. Noțiuni fundamentale de statică

În mecanică, corurile se consideră rigide adică, distanța dintre două puncte ale unui corp este constantă indiferent de forțele care acționează asupra corpului.

Există situații practice în care, aceleași forțe produc efecte diferite asupra unui solid rigid, figura 1.2.

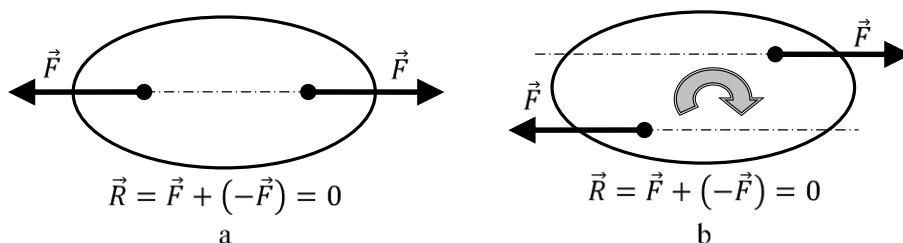


Figura 1.2. Efectul forțelor asupra unui solid rigid

Asupra aceluiași corp acționează două forțe egale, de sens contrar, dispuse diferit, figura 1.2., rezultanta celor două forțe este nulă. În cazul din figura 1.2.a, corpul

rămâne în echilibru (nu se deplasează), iar în cazul din figura 1.2.b, corpul nu este în echilibru, acesta se rotește sub acțiunea celor două forțe în sensul indicat de săgeată.

În consecință, două forțe egale și de sens contrar care acționează pe același suport al unui corp rigid în puncte diferite se află în echilibru. Deci, pentru a caracteriza efectele produse de cele două forțe asupra corpurilor sunt necesare și alte elemente mecanice de calcul în afară de rezultanta forțelor.

1.2.1. Momentul unei forțe în raport cu un punct

Se consideră solidul rigid (S) asupra căruia acționează forța \vec{F} aplicată în punctul A și O un punct din spațiu, figura 1.3.

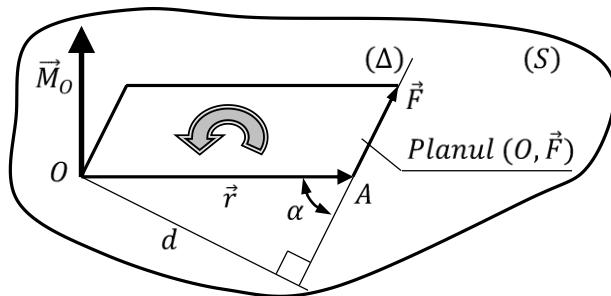


Figura 1.3. Momentul unei forțe în raport cu un punct

Momentul forței \vec{F} în raport cu punctul O este dat de produsul vectorial:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.3.)$$

unde, \vec{r} este vectorul de poziție al punctului A în raport cu punctul O .

Vectorul moment $\vec{M}_O(\vec{F})$ are următoarele elemente caracteristice:

a) **Modulul:** $M_0 = F \cdot r \cdot \sin \alpha = F \cdot d$, unde d reprezintă distanța de la punctul O la dreapta suport Δ a forței \vec{F} și se numește *brațul forței*;

b) **Direcția** este perpendiculară pe planul determinat de punctul O și suportul forței \vec{F} ;

c) **Sensul** este dat de regula burghiului drept;

d) **Punctul de aplicatie** al vectorului moment este punctul O .

Proprietățile momentului forței în raport cu un punct sunt:

➤ dacă forța se deplasează pe suportul ei, momentul forței în raport cu un punct este fix, adică nu se poate deplasa;

➤ momentul unei forțe în raport cu un punct nu se modifică dacă punctul față de care se calculează momentul se deplasează pe o dreaptă paralelă cu suportul forței;

➤ momentul unei forțe în raport cu un punct este nul dacă suportul forței trece prin punctul respectiv, în acest caz brațul forței este nul ($d = 0$).

Dacă vectorii \vec{r} și \vec{F} sunt raportați la un sistem de axe $Oxyz$ cu originea în punctul O , coordonatele punctului de aplicare a forței $A(x, y, z)$ iar proiecțiile forței \vec{F} pe același sistem de coordonate sunt $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ atunci, expresia analitică a momentului forței \vec{F} în raport cu punctul O , relația (1.3.) poate fi scrisă sub forma:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O(\vec{F}) &= \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= (y \cdot F_z - z \cdot F_y) \cdot \vec{i} + (z \cdot F_x - x \cdot F_z) \cdot \vec{j} + (x \cdot F_y - y \cdot F_x) \cdot \vec{k}\end{aligned}\quad (1.4.)$$

1.2.2. Momentul unei forțe în raport cu o axă

Se consideră un solid rigid asupra căruia acționează forța \vec{F} aplicată în punctul A și fie Δ o axă din spațiu, figura 1.4.

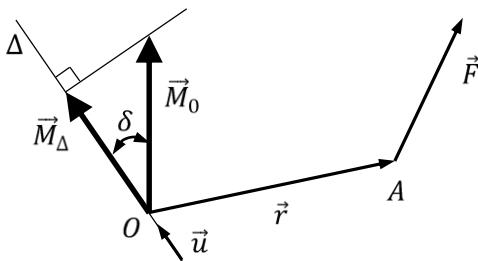


Figura 1.4. Momentul unei forțe în raport cu o axă

Se definește **momentul forței \vec{F} în raport cu axa Δ** , ca fiind proiecția pe axa Δ a momentului forței \vec{F} în raport cu un punct arbitrar de pe axa respectivă (O):

$$M_\Delta(\vec{F}) = |\vec{M}_O(\vec{F})| \cdot \cos \delta = \vec{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{u} \quad (1.5.)$$

unde, \vec{u} este vîsorul axei Δ .

Momentul forței în raport cu o axă este pozitiv dacă proiecția pe axă are sensul vîsorului \vec{u} și negativ dacă are sensul contrar. Momentul forței \vec{F} în raport cu punctul O se calculează relația (1.3.).

Proprietățile momentului forței în raport cu o axă sunt:

- nu depinde de poziția punctului O ales arbitrar pe axă.
- dacă forța \vec{F} se deplasează pe suportul ei, momentul forței în raport cu o axă nu se modifică.
- momentul unei forțe în raport cu o axă este nul dacă forța și axa sunt în același plan (dacă sunt paralele sau dacă suportul forței intersectează axa).

1.2.3. Momentul unui cuplu de forțe

Un sistem de două forțe egale în modul și de sensuri contrare situate pe suporturi paralele diferite se numește cuplu de forțe, figura 1.5.a.

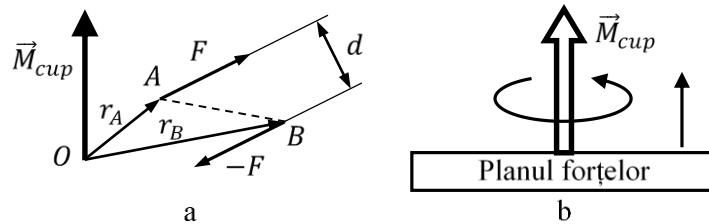


Figura 1.5. Momentul unui cuplu de forțe

Se definește momentul cuplului de forțe ca fiind suma momentelor celor două forțe în raport cu un punct arbitrar O din spațiu:

$$\vec{M}_{cup} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F} = \overrightarrow{BA} \times \vec{F} \quad (1.6.)$$

Din relația (1.6.) se observă că momentul cuplului este egal cu momentul unei forțe din cuplu în raport cu punctul de aplicație al celeilalte forțe din cuplu.

Momentul cuplului de forțe \vec{M}_{cup} are următoarele proprietăți:

a) **Modulul cuplului** este dat de relația:

$$M_{cup} = F \cdot d \quad (1.7.)$$

unde, d reprezintă distanța dintre suporturile celor două forțe și se numește **brațul cuplului**. Deci, momentul cuplului poate fi nul numai dacă brațul cuplului d este nul, adică cele două forțe au același suport;

b) **Direcția cuplului** este perpendiculară pe planul celor două forțe, figura 1.5.b;

c) **Sensul cuplului** este dat de regula burghiuilui drept.

Deoarece efectul unui cuplu de forțe este complet determinat de momentul său, rezultă că două cupluri de forțe care au același moment sunt **echivalente**.

Dacă asupra unui solid rigid acționează un sistem de cupluri de forțe având momentele \vec{M}_i , ($i = 1 \dots n$) atunci, acesta este echivalent cu un cuplu rezultant având momentul egal cu suma vectorială a momentelor cuplurilor de forțe:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i \quad (1.8.)$$

În cazul în care momentul cuplului rezultant este nul, sistemul de cupluri de forțe este în echilibru, adică nu are nici un efect asupra solidului rigid.

1.3. Reducerea sistemelor de forțe. Echilibrul solidului rigid

Dacă asupra unui solid rigid acționează un sistem complex de forțe, pentru simplificarea calculelor se urmărește înlocuirea acestuia cu cel mai simplu sistem posibil, care să producă același efect mecanic asupra corpului studiat ca și sistemul inițial de forțe, operație ce poartă numele de **reducerea sistemului de forțe**.

1.3.1. Reducerea unei forțe într-un punct. Torsorul de reducere

Reducerea unei forțe într-un punct înseamnă a înlocui forța respectivă cu cele mai simple elemente mecanice legate de punctul respectiv care, produc asupra corpului studiat același efect ca și forța inițială.

Se consideră forța \vec{F} aplicată în punctul A asupra unui solid rigid și O un punct din spațiu, figura 1.6. Se vor determina elementele mecanice corespunzătoare reducerii forței \vec{F} în punctul O .

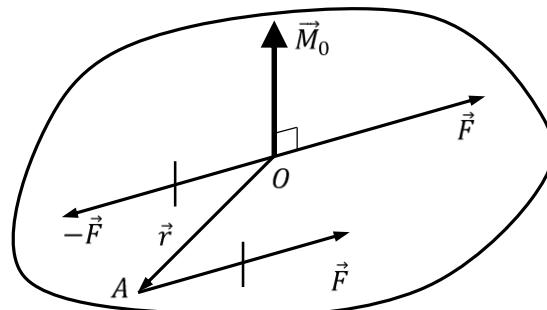


Figura 1.6. Reducerea unei forțe într-un punct

În punctul O se introduce un sistem de două forțe coliniare, egale cu \vec{F} și de sensuri contrare pe un suport paralel cu forța inițială, efectul acestor forțe asupra corpului este nul (operație de echivalență). Se formează un cuplu de forțe: forța \vec{F} din A și $(-\vec{F})$ din O , caracterizat prin momentul cuplului:

$$\vec{M}_{cup} = \vec{M}_0 = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.9.)$$

Deci, efectul forței \vec{F} din punctul A a fost înlocuit în punctul O cu două elemente mecanice: o forță identică cu \vec{F} aplicată în punctul O și momentul forței inițiale în raport cu punctul O . Ansamblul celor două elemente mecanice formează așa numitul **torsor de reducere al forței \vec{F} în punctul O** , torsor notat prin $\tau_O(\vec{F}, \vec{M}_0)$:

$$\tau_O(\vec{F}, \vec{M}_0) = \begin{cases} \vec{F} \\ \vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} \end{cases} \quad (1.10.)$$

Caracteristic pentru reducerea unei forțe într-un punct este faptul că cele două elemente ale torsorului de reducere \vec{F} și \vec{M}_O sunt perpendiculare.

1.3.2. Reducerea unui sistem de forțe într-un punct

Se consideră un solid rigid asupra căruia acționează un sistem de n forțe, \vec{F}_i aplicate în punctele $A_i, i = 1 \div n$ și fie $Oxyz$ un sistem de axe de coordonate având versorii axelor $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, figura 1.7.

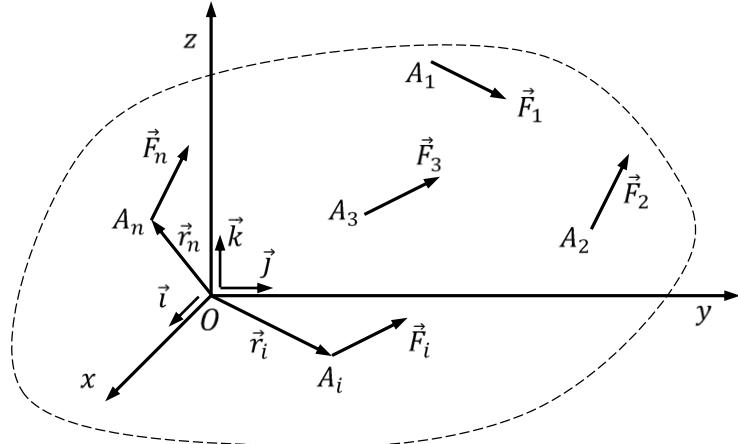


Figura 1.7. Reducerea unui sistem de forțe într-un punct

Reducerea sistemul de forțe în punctul O se realizează prin reducerea fiecărei forțe \vec{F}_i în punctul O (torsorul de reducere: forță \vec{F}_i și momentul $\vec{M}_{Oi} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$). După reducerea forțelor \vec{F}_i în punctul O se obține:

➤ o forță rezultantă:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_i + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (1.11.)$$

➤ un moment rezultant:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{O1} + \vec{M}_{O2} + \cdots + \vec{M}_{Oi} + \cdots + \vec{M}_{On} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{Oi} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (1.12.)$$

Prin urmare, un sistem de n forțe \vec{F}_i , aplicate în punctele A_i , care au vectorii de poziție \vec{r}_i , ($i = 1 \div n$) în raport cu punctul O , se reduc la **torsorul de reducere în punctul O** (\vec{R} și \vec{M}_O) al sistemului de forțe \vec{F}_i ($i = 1 \div n$) și are expresia:

$$\tau_O(\vec{F}_i, \vec{M}_{oi}) = \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \\ \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i \end{cases} \quad (1.13.)$$

care reprezintă o generalizare a torsorului de reducere dat de relația (1.10.).

Dacă ne raportăm la sistemul de referință $Oxyz$, având vesorii axelor $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ și originea în punctul de reducere O , punctele de aplicare a forțelor $A_i(x_i, y_i, z_i)$ iar forțele \vec{F}_i au proiecțiile pe axe (F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}) , componentele torsorului de reducere $\tau_O(\vec{F}_i, \vec{M}_{oi})$ au expresiile analitice:

➤ forță rezultantă:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \left(\sum_{i=1}^n F_{xi} \right) \cdot \vec{i} + \left(\sum_{i=1}^n F_{yi} \right) \cdot \vec{j} + \left(\sum_{i=1}^n F_{zi} \right) \cdot \vec{k} = \\ &= R_x \cdot \vec{i} + R_y \cdot \vec{j} + R_z \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (1.14.)$$

➤ momentul resultant:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \left(\sum_{i=1}^n M_{ox_i} \right) \cdot \vec{i} + \left(\sum_{i=1}^n M_{oy_i} \right) \cdot \vec{j} + \left(\sum_{i=1}^n M_{oz_i} \right) \cdot \vec{k} = \\ &= M_{ox} \cdot \vec{i} + M_{oy} \cdot \vec{j} + M_{oz} \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (1.15.)$$

Dacă se schimbă punctul de reducere, forță rezultantă \vec{R} rămâne aceeași, deci este un invariant al sistemului de forțe. Prin **invariant** se înțelege acea mărime care nu se modifică atunci când variază punctul de reducere.

1.3.3. Echilibrul solidului rigid

Echilibrul solidului rigid se definește față de un anumit reper (punct) în raport cu care solidul rigid rămâne în repaus. Torsorul de reducere al sistemului de forțe descrie mișcarea solidului rigid în spațiu sub acțiunea forțelor exterioare aplicate.

Torsorul de reducere conține o forță rezultantă \vec{R} având trei componente perpendiculare între ele $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ și un moment resultant având trei componente ortogonale perpendiculare $\vec{M}_x, \vec{M}_y, \vec{M}_z$, orientate după axele sistemului $Oxyz$. Cele trei componente ale rezultantei \vec{R} produc translații (deplasări liniare) ale corpului pe

direcțiile Ox , Oy și respectiv Oz . Componentele momentului resultant \vec{M}_0 produc rotiri (deplasări unghiulare) ale corpului în jurul axelor de coordonate Ox , Oy și respectiv Oz .

Pentru ca rigidul să fie în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe exterioare, este necesar și suficient ca torsorul de reducere al forțelor într-un punct să fie nul, adică:

$$\begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M}_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_i = 0 \\ \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0 \end{cases} \quad (1.16.)$$

În condițiile date de relațiile (1.16.) sistemul de forțe este în echilibru sau rigidul asupra căruia acționează este în echilibru. Pentru a cunoaște poziția unui corp rigid în raport cu un sistem de referință este necesară și suficientă cunoașterea pozițiilor a trei puncte necoliniare ale acestuia.

1.4. Aplicație

Să se determine mărimea și direcția forței rezultante pentru sistemul de forțe din figura 1.8.a, dacă se cunosc: $F_1 = 10 [N]$, $F_2 = 40\sqrt{2} [N]$ și $\alpha = 45^0$.

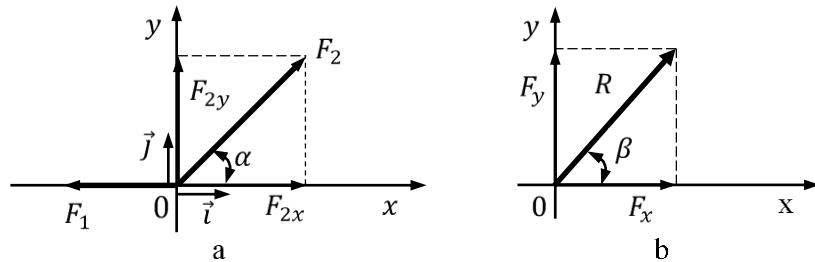


Figura 1.8. Aplicație

Rezolvare:

Se descopune forța înclinată \vec{F}_2 după cele două axe ale sistemului de coordonate:

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= F_{2x} \cdot \vec{i} + F_{2y} \cdot \vec{j} = (F_2 \cdot \cos 45^0) \cdot \vec{i} + (F_2 \cdot \sin 45^0) \cdot \vec{j} = \\ &= \left(40\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \vec{i} + \left(40\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \vec{j} = 40 \cdot \vec{i} + 40 \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

Pentru a stabili mărimea și direcție rezultantei sistemului de forțe din figura 1.8.a se procedează astfel:

- Se exprimă analitic forțele: $\vec{F}_i = F_{xi} \cdot \vec{i} + F_{yi} \cdot \vec{j}$, unde F_{xi} și F_{yi} sunt proiecțiile forței F_i pe axele Ox și Oy :

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = -10 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} \\ \vec{F}_2 = 40 \cdot \vec{i} + 40 \cdot \vec{j} \end{cases}$$

➤ Se determină rezultanta forțelor cu relația:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \left(\sum_{i=1}^2 F_{xi} \right) \cdot \vec{i} + \left(\sum_{i=1}^2 F_{yi} \right) \cdot \vec{j} = (F_{1x} + F_{2x}) \cdot \vec{i} + (F_{1y} + F_{2y}) \cdot \vec{j} = \\ &= (-10 + 40) \cdot \vec{i} + (0 + 40) \cdot \vec{j} = 30 \cdot \vec{i} + 40 \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

Astfel, rezultanta este:

$$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 [N]$$

➤ Se reprezintă grafic rezultanta R în sistemul de coordonate xOy , după care se calculează unghiul β pe care rezultanta îl face cu axa Ox , figura 1.8.b:

$$\sin \beta = \frac{F_y}{R} = \frac{40}{50} = 0,8 \Rightarrow \alpha = \arcsin(0,8) = 53,13^\circ$$

Problema se poate rezolva și sub formă tabelară:

Forța \vec{F}_i	Componenta F_{xi}	Componenta F_{yi}
\vec{F}_1	$F_{1x} = -10$	$F_{1y} = 0$
\vec{F}_2	$F_{2x} = F_2 \cdot \cos 45^\circ = 40$	$F_{2y} = F_2 \cdot \sin 45^\circ = 40$
$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$	$F_x = \sum F_{xi} = 30$	$F_y = \sum F_{yi} = 40$

După determinarea tabelară se determină rezultanta și unghiul pe care rezultanta îl face cu axa Ox (rezolvarea analitică).

Capitolul 2

STATICĂ FIRELOR

2.1. Noțiuni introductive

Prin **fir** se înțelege un corp flexibil și inextensibil care are secțiunea transversală mult mai mică comparativ cu lungimea.

Flexibilitatea este proprietatea firului de a nu opune rezistență la tendința de schimbare a formei acestuia. Firele sunt considerate perfect flexibile și inextensibile deci, nu se alungesc indiferent de magnitudinea forțelor de întindere la care sunt supuse.

În tehnică, drept fire se consideră cablurile mașinilor de ridicat, cablurile funicularelor, cablurile podurilor suspendate, cablurile electrice etc.

2.2. Echilibrul firului supus la forțe distribuite

Se consideră firul de lungime L , suspendat în punctele A și B , solicitat de o forță uniform distribuită (greutatea proprie, zăpadă, chiciură, presiunea vântului etc.) $\vec{p}(s)$, pe unitatea de lungime a firului.

Lungimea arcului de curbă ce reprezintă poziția de echilibru a firului se notează prin s și este măsurată din punctul A , considerat ca origine de măsurare, figura 2.1. Curba ce reprezintă firul în echilibru poartă numele de **curbă funiculară**.

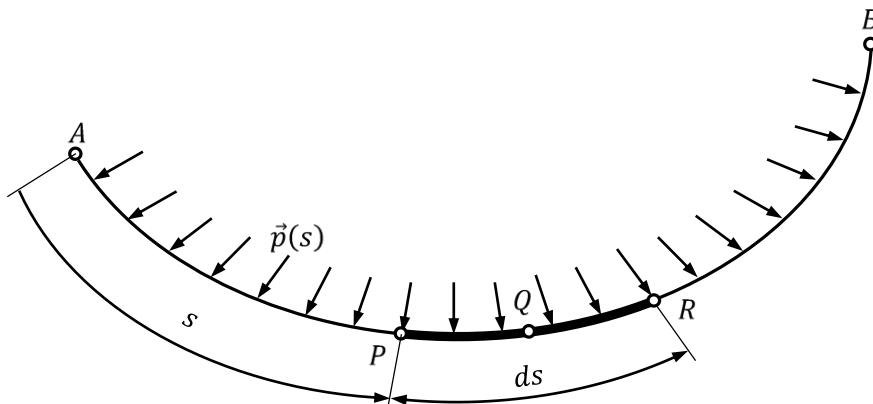


Figura 2.1. Echilibrul firului supus la forțe uniform distribuite

Se alege sensul pozitiv de parcursare al firului din punctul A în punctul B , caz în care, toate mărimele ce sunt întâlnite în acest sens de parcursare sunt pozitive iar cele în sens contrar sunt considerate negative.

Se va determina forma de echilibru a firului, adică ecuația curbei funiculare și legea de variație a tensiunii din fir $T = T(s)$. Pentru aceasta, se izolează un element de fir PR de lungime elementară ds , figura 2.2.

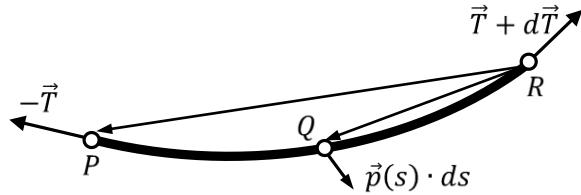


Figura 2.2. Element de fir de lungime elementară

Forța distribuită se consideră uniformă pe lungimea elementară ds astfel că, forța $[\vec{p}(s) \cdot ds]$ se poate considera concentrată la mijlocul arcului PR , în punctul Q .

Tensiunea din fir este de regulă variabilă pe lungimea acestuia, dar pe porțiunea elementară se consideră constantă în aşa fel încât, la capetele firului (punctele P și R) tensiunile sunt $(-\vec{T})$ și respectiv $(\vec{T} + d\vec{T})$ (parcurgând firul de la stânga la dreapta, deci tensiunea din punctul P este negativă).

Ecuatiile vectoriale de echilibru (momentele se calculează în raport cu punctul R) pentru elementul de fir sunt:

$$\begin{cases} \vec{p}(s) \cdot ds - \vec{T} + \vec{T} + d\vec{T} = 0 \\ \overrightarrow{RP} \cdot (-\vec{T}) + \overrightarrow{RQ} \cdot [\vec{p}(s) \cdot ds] = 0 \end{cases} \quad (2.1.)$$

unde, $RQ = ds/2$, punctul Q fiind la mijlocul lungimii elementare PR studiate.

Astfel, termenul al doilea din ecuația de momente (2.1.) fiind proporțional cu $(ds)^2$ se poate neglija comparativ cu primul termen, ecuația de momente devine:

$$\overrightarrow{RP} \cdot (-\vec{T}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{RP} \cdot \vec{T} = 0 \quad (2.2.)$$

Din prima ecuație a sistemului (2.1.), prin împărțirea cu ds se obține:

$$\vec{p}(s) + \frac{d\vec{T}}{ds} = 0 \quad (2.3.)$$

Din relația (2.2.) se observă că tensiunea din fir \vec{T} este coliniară cu coarda PR , deoarece aceasta subîntinde un arc de curbă de lungime elementară ds , are direcția tangentei la fir în punctul P iar tensiunea din fir este tangentă la curba funiculară.

Se raportează ecuația (2.3.) la un sistem de axe cartezian și se notează cu α , β și γ unghiurile pe care le face tangentă la curbă cu sistemul de axe cartezian, cosinusurile fiind:

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}; \cos \beta = \frac{dy}{ds}; \cos \gamma = \frac{dz}{ds} \quad (2.4.)$$

Astfel, proiecțiile tensiunii din fir pe axele de coordonate sunt:

$$\begin{cases} T_x = T \cdot \cos \alpha = T \cdot \frac{dx}{ds} \\ T_y = T \cdot \cos \beta = T \cdot \frac{dy}{ds} \\ T_z = T \cdot \cos \gamma = T \cdot \frac{dz}{ds} \end{cases} \quad (2.5.)$$

Se ține cont de sistemul (2.5.) și se notează prin $p_x(s)$, $p_y(s)$ și $p_z(s)$ proiecțiile forței exterioare distribuite $\vec{p}(s)$ pe axele sistemului de coordonate. Prin proiectarea ecuației vectoriale (2.3.) pe axele sistemului de coordonate se obține sistemul:

$$\begin{cases} p_x(s) + \frac{d}{ds} \left(T \cdot \frac{dx}{ds} \right) = 0 \\ p_y(s) + \frac{d}{ds} \left(T \cdot \frac{dy}{ds} \right) = 0 \\ p_z(s) + \frac{d}{ds} \left(T \cdot \frac{dz}{ds} \right) = 0 \end{cases} \quad (2.6.)$$

Se calculează derivatele din sistemul (2.6.):

$$\begin{cases} p_x(s) + \frac{dT}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} + T \cdot \frac{d^2x}{ds^2} = 0 \\ p_y(s) + \frac{dT}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} + T \cdot \frac{d^2y}{ds^2} = 0 \\ p_z(s) + \frac{dT}{ds} \cdot \frac{dz}{ds} + T \cdot \frac{d^2z}{ds^2} = 0 \end{cases} \quad (2.7.)$$

Se înmulțește fiecare ecuație din sistemul (2.7.) pe rînd cu (dx/ds) , (dy/ds) și respectiv (dz/ds) . Prin adunarea și gruparea termenilor se obține:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{ds} \cdot [p_x(s) \cdot dx + p_y(s) \cdot dy + p_z(s) \cdot dz] + \\ & + \frac{dT}{ds} \cdot \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right] + \\ & + T \cdot \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.8.)$$

Se ține cont de expresia elementului arc de curbă:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \Leftrightarrow \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 \quad (2.9.)$$

Prin derivarea ecuației (2.9.) în raport cu variabila s se obține:

$$2 \cdot \frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{dx}{ds} + 2 \cdot \frac{d^2y}{ds^2} \cdot \frac{dy}{ds} + 2 \cdot \frac{d^2z}{ds^2} \cdot \frac{dz}{ds} = 0 \quad (2.10.)$$

Se ține cont de relațiile (2.9.) și (2.10.) relația (2.8.) devine:

$$\frac{p_x(s) \cdot dx + p_y(s) \cdot dy + p_z(s) \cdot dz}{ds} + \frac{dT}{ds} = 0 \quad (2.11.)$$

sau:

$$[p_x(s) \cdot dx + p_y(s) \cdot dy + p_z(s) \cdot dz] + dT = 0 \quad (2.12.)$$

Prin integrarea sistemului de ecuații format din (2.6.) și (2.12.) se obțin ecuațiile parametrice ale curbei funiculare și tensiunea din fir. Constantele de integrare se obțin din condițiile la limită, curba funiculară trebuie să treacă prin punctele A și B și să aibă lungimea L .

2.3. Echilibrul firului omogen greu

Prin **fir omogen greu** se înțelege firul supus doar la greutatea proprie considerată uniform distribuită.

Se consideră firul omogen având greutatea unității de lungime p . Deoarece forța $\vec{F} = \vec{p}$ are direcția verticală, poziția de echilibru a firului este situată într-un plan vertical, planul $x0y$, figura 2.3.

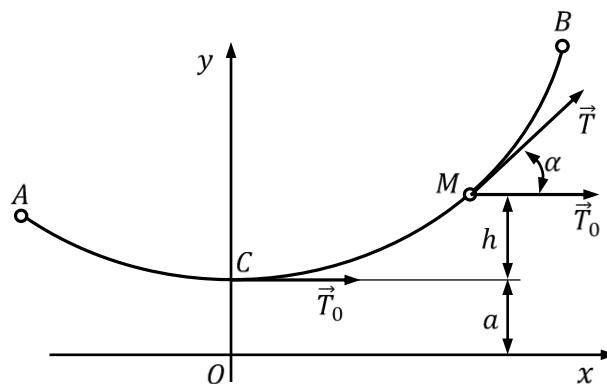


Figura 2.3. Echilibrul firului omogen greu

Planul vertical xOy are axa Ox orizontală cu originea O situată la distanță a față de punctul C reprezentând punctul cu cota minimă de pe curba funiculară.

Ecuatiile de echilibru în sistemul plan xOy devin:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left(T \cdot \frac{dx}{ds} \right) = 0 \\ \frac{d}{ds} \left(T \cdot \frac{dy}{ds} \right) - p = 0 \end{cases} \quad (2.13.)$$

Din prima ecuație se obține:

$$T \cdot \frac{dx}{ds} = T \cdot \cos \alpha = T_0 \quad (2.14.)$$

Din relația (2.14.) se observă că tensiunea din fir T este minimă pentru $\alpha = 0$, adică pentru cel mai de jos punct al curbei de echilibru unde tangenta este orizontală și are valoarea numerică T_0 . Valoarea maximă din fir se obține pentru α_{max} , punctul de prindere cel mai ridicat al firului.

Relația a doua a sistemului (2.13.) devine:

$$d \left(T \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \right) = p \cdot ds \quad (2.15.)$$

Se înlocuiește în relația (2.15.) tensiunea T prin relația:

$$T = T_0 \cdot \frac{ds}{dx} \quad (2.16.)$$

se obține:

$$d \left(T_0 \cdot \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \right) = p \cdot ds \Leftrightarrow d \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{p}{T_0} \cdot ds \quad (2.17.)$$

Se ține cont de expresia elementului arc de curbă în plan:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \cdot dx \quad (2.18.)$$

relația (2.17.) devine:

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{p}{T_0} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \Leftrightarrow \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{p}{T_0} \cdot dx \quad (2.19.)$$

Prin integrarea relației (2.19.) se obține:

$$\operatorname{arcsinh}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{p}{T_0} \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \sinh\left[\frac{p}{T_0} \cdot (x - x_0)\right] \quad (2.20.)$$

unde \sinh reprezintă sinusul hiperbolic iar x_0 este constantă de integrare.

Se integrează din nou relația (2.20.):

$$y - y_0 = \frac{T_0}{p} \cdot \cosh\left[\frac{p}{T_0} \cdot (x - x_0)\right] \quad (2.21)$$

unde \cosh reprezintă cosinusul hiperbolic iar y_0 este constantă de integrare.

Relația (2.21.) reprezintă ecuația *curbei funicularare a firului omogen greu* numită ***lăntișor*** și reprezintă forma de echilibru a firului omogen greu.

Constantele de integrare: T_0 , x_0 și y_0 se determină din condițiile ca punctele de suspensie $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ ale firului să fie situate pe curba funiculară (2.21.) iar lungimea firului L să fie cunoscută.

Aceste condiții ce se materializează prin relațiile:

$$\begin{cases} y_A - y_0 = \frac{T_0}{p} \cdot \cosh\left[\frac{p}{T_0} \cdot (x_A - x_0)\right] \\ y_B - y_0 = \frac{T_0}{p} \cdot \cosh\left[\frac{p}{T_0} \cdot (x_B - x_0)\right] \end{cases} \quad (2.22)$$

Pentru a determina lungimea firului L se exprimă arcul elementar ds din relația (2.18.) cu ajutorul relației (2.20.):

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \sqrt{1 + \sinh^2\left[\frac{p}{T_0} \cdot (x - x_0)\right]} \cdot dx \quad (2.23)$$

Se ține cont de relația funcțiilor hiperbolice:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \Rightarrow 1 + \sinh^2(x) = \cosh^2(x) \quad (2.24)$$

Se înlocuiește relația (2.23.) în relația (2.24.):

$$ds = \cosh \left[\frac{p}{T_0} \cdot (x - x_0) \right] \cdot dx \quad (2.25.)$$

Prin integrarea relației (2.25.) între punctele $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ se obține:

$$\begin{aligned} L &= \int_A^B ds = \int_A^B \cosh \left[\frac{p}{T_0} \cdot (x - x_0) \right] \cdot dx = \\ &= \frac{T_0}{p} \cdot \left\{ \sinh \left[\frac{p}{T_0} \cdot (x_B - x_0) \right] - \sinh \left[\frac{p}{T_0} \cdot (x_A - x_0) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.26.)$$

Ecuațiile (2.22.) și (2.26.) formează sistemul de ecuații pentru determinarea constantelor de ingrare x_0 , y_0 și T_0 .

Important este determinarea tensiunii T din fir și modul de variație de la valoarea minimă T_0 (punctul cel mai de jos) la valoarea maximă T_{max} (punctul cel mai superior).

Aplicând relația (2.12.) în plan se obține:

$$dT - p \cdot dy = 0 \Rightarrow dT = p \cdot dy \quad (2.27.)$$

Prin integrarea relației (2.27.) între punctul C și un punct oarecare M (figura 2.3.) de pe fir se obține:

$$T - T_0 = p \cdot h \quad (2.28.)$$

unde h reprezintă diferența de nivel dintre punctul C și M (figura 2.3.).

Astfel, se obține:

$$T = T_0 + p \cdot h \quad (2.29.)$$

Adică, tensiunea din fir într-un punct oarecare este egală cu tensiunea minimă din punctul cel mai de jos la care se adaugă greutatea unei porțiuni de fir de lungime egală cu diferența de nivel.

2.4. Formula simplificată a ecuației lăncișorului

Dacă se alege sistemul de axe convenabil, figura 2.4., pentru ecuația curbei funiculare și tensiunea din fir se vor obține forme simplificate.

Se alege sistemul de referință xOy astfel încât axa Oy să treacă prin punctul de minim C al curbei de echilibru, figura 2.4., situat la distanța a de originea sistemului de axe O , adică $y = a$ pentru $x = 0$ și $dy/dx = 0$.

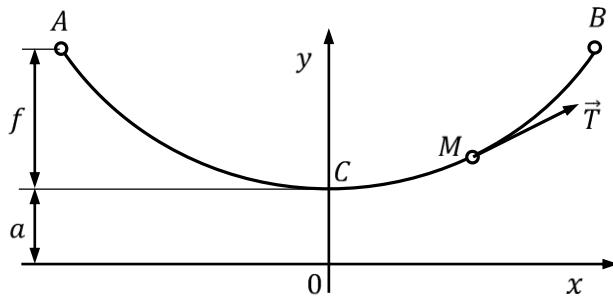


Figura 2.4. Echilibrul firului omogen greu într-un sistem de axe convenabil

Cu aceste simplificări se obține ecuația curbei funiculare în formă simplificată din relația (2.21):

$$y = \frac{T_0}{p} \cdot \cosh\left(\frac{p}{T_0} \cdot x\right) \quad (2.30.)$$

cunoscută sub numele de **ecuația lăncișorului**.

Tensiunea totală într-un punct oarecare $M(x, y)$ al firului se calculează pornind de la relația (2.16.):

$$\begin{aligned} T &= T_0 \cdot \frac{ds}{dx} = T_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \\ &= T_0 \cdot \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{p}{T_0} \cdot x\right)} = T_0 \cdot \cosh\left(\frac{p}{T_0} \cdot x\right) \end{aligned} \quad (2.31.)$$

Tensiunea din fir într-un punct M este egală cu greutatea unei porțiuni de fir de lungime egală cu distanța de la secțiunea considerată la axa Ox .

Dacă se consideră $y_A = y_B = a + f$, adică punctul de minim este situat la mijlocul firului $x_A = -x_B$, iar f reprezintă săgeata firului, conform figura 2.4. se obține lungimea firului:

$$\begin{aligned} L &= \frac{T_0}{a} \cdot \left\{ \sinh\left[\frac{p}{T_0} \cdot (x_B - x_0)\right] - \sinh\left[\frac{p}{T_0} \cdot (x_B - x_0)\right] \right\} = \\ &= 2 \cdot \frac{T_0}{p} \cdot \sinh\left(\frac{p}{T_0} \cdot x_B\right) \end{aligned} \quad (2.32.)$$

În relația (2.32.) $x_0 = 0$ și $\sinh(-x) = -\sinh x$.

2.5. Echilibrul firului omogen greu foarte întins

Dacă distanța dintre punctele A și B de susținere a firului este puțin mai mică decât lungimea L a firului, atunci firul este foarte întins. În acest caz, la capetele firului forțele sunt foarte mari și deci tensiunile din fir sunt mari, prin urmare tensiunea T_0 a firului este mult mai mare decât greutatea proprie a firului ($T_0 > p \cdot L$).

Deoarece $x_B - x_A \cong L$, raportul (x/a) este foarte mic și prin dezvoltarea în serie de puteri a funcției $\cosh(x/a)$, se obține:

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{p}{T_0} \cdot x\right) &\cong \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2 \cdot n)!} \cdot \left(\frac{p}{T_0} \cdot x\right)^{2n} = \\ &= 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{p}{T_0} \cdot x\right)^2 + \frac{1}{(2 \cdot 2)!} \cdot \left(\frac{p}{T_0} \cdot x\right)^4 + \dots \end{aligned} \quad (2.33.)$$

unde, s-a ținut cont de definiția: $0! = 1$.

Deoarece raportul x/a este mic, termenii având puteri mai mari de trei se vor neglija fiind infinit mici, cu această observație, relația (2.33.) devine:

$$\cosh\left(\frac{p}{T_0} \cdot x\right) \cong 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{p}{T_0} \cdot x\right)^2 = 1 + \frac{p^2}{2 \cdot T_0^2} \cdot x^2 \quad (2.34.)$$

Se introduce relația (2.34.) în ecuația lăncișorului (2.30.) și se obține ecuația de echilibru a firului omogen greu foarte întins:

$$y = \frac{T_0}{p} \cdot \cosh\left(\frac{p}{T_0} \cdot x\right) = \frac{T_0}{p} + \frac{p}{2 \cdot T_0} \cdot x^2 \quad (2.35.)$$

Din relația (2.35.) se constată că, expresia curbei de echilibru a firului omogen greu foarte întins este o parabolă, având axa de simetrie verticală.

Ținând cont de dezvoltarea în serie, tensiunea din fir (2.31.), devine:

$$T = T_0 \cdot \cosh\left(\frac{p}{T_0} \cdot x\right) = T_0 \cdot \left(1 + \frac{p^2}{2 \cdot T_0^2} \cdot x^2\right) \quad (2.36.)$$

Conductoarele telefonice și electrice pot fi considerate fire întinse, suspendate în două puncte situate la aceeași înălțime.

2.6. Aplicație

Se consideră firul suspendat între doi stâlpi situați la distanța $L = 100 \text{ m}$ unul față de altul și acționat de forțele verticale $F = 100 \text{ N}$ dispuse la distanța $a = 25 \text{ m}$,

figura 2.5. Dacă săgeata de la mijlocul firului este $f = 10\text{ m}$ să se determine: forma ecuației de echilibru a firului și tensiunile din fir pe porțiunile AC și CD .

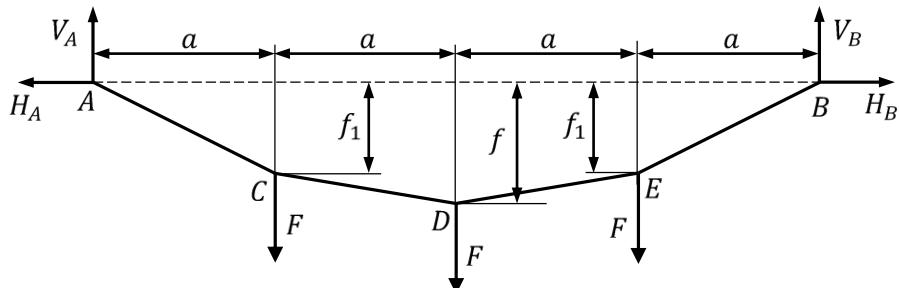


Figura 2.5. Aplicație

Rezolvare:

În punctele A și B în care firul este suspendat se dezvoltă reacțiunile H_A , V_A , H_B și V_B . Echilibrul firului, considerat ca un solid rigid, este dat de ecuațiile de echilibru:

$$\sum X = 0 \Leftrightarrow -H_A + H_B = 0$$

$$\sum Y = 0 \Leftrightarrow V_A + V_B - 3 \cdot F = 0 \Leftrightarrow V_A + V_B - 300 = 0$$

$$\left(\sum M_i \right)_A = 0 \Leftrightarrow F \cdot a + F \cdot 2a + F \cdot 3a - V_B \cdot 4a = 0 \Leftrightarrow 600 - 4 \cdot V_B = 0$$

Pentru a obține o ecuație suplimentară se va secționa firul pe porțiunea DE și se va scrie ecuație de momente în raport cu punctul D , figura 2.6.

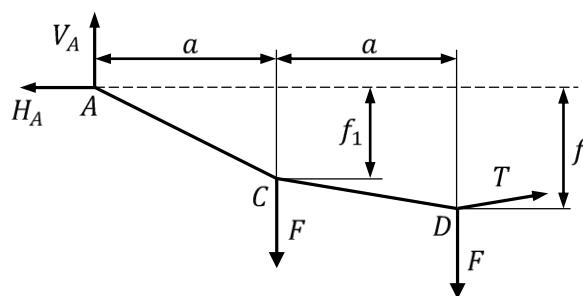


Figura 2.6. Secționarea firului

$$\left(\sum M_i \right)_D = 0 \Leftrightarrow H_A \cdot f + F \cdot a - V_A \cdot 2a = 0 \Leftrightarrow 10 \cdot H_A + 2500 - 50 \cdot V_A = 0$$

Această ecuație împreună cu cele trei ecuații de echilibru ale firului permit determinarea celor patru necunoscute:

$$\begin{cases} -H_A + H_B = 0 \\ V_A + V_B - 300 = 0 \\ 600 - 4 \cdot V_B = 0 \\ 10 \cdot H_A - 50 \cdot V_A + 2500 = 0 \end{cases}$$

Sistemul de mai sus conduce la soluțiile:

$$\begin{cases} H_A = H_B = 500 \text{ N} \\ V_A = V_B = 150 \text{ N} \end{cases}$$

Pentru a determina ecuația de echilibru a firului este suficient să determinăm săgeata f_1 a punctului C deoarece, din motive de simetrie, punctul E va avea aceeași săgeată. Se izolează porțiunea AC , figura 2.6. și se scrie ecuația de momente față de punctul C :

$$\left(\sum M_i \right)_C = 0 \Leftrightarrow H_A \cdot f_1 - V_A \cdot a = 0 \Leftrightarrow 500 \cdot f_1 - 3750 = 0$$

care ne conduce la săgeata $f_1 = 7,5 \text{ m}$.

Pentru a determina tensiunile T_1 și T_2 pe porțiunile AC și CD se determină în prealabil componentele celor două tensiuni $T_1(T_{1x}, T_{1y})$ și $T_2(T_{2x}, T_{2y})$ prin scrierea ecuațiilor de proiecție pentru porțiunea de fir corespunzătoare, figura 2.7.

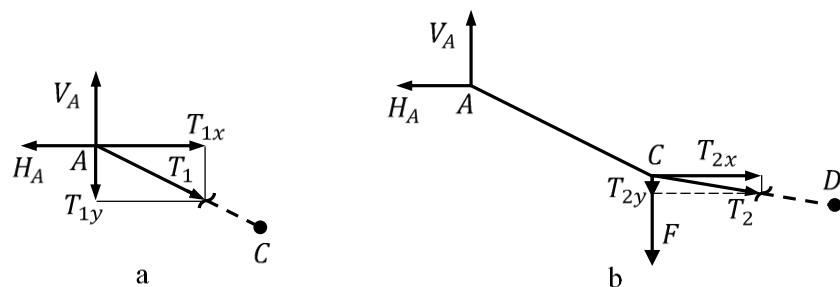


Figura 2.7. Secționarea firului

Pentru tensiunea T_1 , figura 2.7.a:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \Rightarrow T_{1x} - H_A = 0 \Rightarrow T_{1x} = H_A = 500 \text{ N} \\ \sum Y = 0 \Rightarrow T_{1y} - V_A = 0 \Rightarrow T_{1y} = V_A = 150 \text{ N} \end{cases}$$

Deci, tensiunea T_1 va fi:

$$T_1 = \sqrt{(T_{1x})^2 + (T_{1y})^2} = \sqrt{500^2 + 150^2} \cong 522 \text{ N}$$

Pentru tensiunea T_2 , figura 2.7.b:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \Rightarrow T_{2x} - H_A = 0 \Rightarrow T_{2x} = H_A = 500 \text{ N} \\ \sum Y = 0 \Rightarrow T_{2y} + F - V_A = 0 \Rightarrow T_{2y} = V_A - F = 150 - 100 = 50 \text{ N} \end{cases}$$

Deci, tensiunea T_2 va fi:

$$T_2 = \sqrt{(T_{2x})^2 + (T_{2y})^2} = \sqrt{500^2 + 50^2} \cong 502,5 \text{ N}$$

Din motive de simetrie, pe porțiunea EB tensiunea va fi T_1 (porțiunea AC) iar pe porțiunea DE tensiunea va fi T_2 (porțiunea CD).

Capitolul 3

INTRODUCERE ÎN REZIȘTEA MATERIELELOR

3.1. Obiectul și problemele rezistenței materialelor

Rezistența Materialelor este o disciplină de cultură tehnică care continuă și dezvoltă **Mecanica**, prin introducerea în calcule a proprietăților de deformabilitate ale corpurilor solide reale. În **Mecanică** corpul solid este considerat rigid, nedeformabil, iar vectorii forțelor de încărcare sunt considerați alunecători. În **Rezistența Materialelor** corpurile se consideră deformabile sub acțiunea forțelor exterioare adică, își schimbă forma geometrică (dimensiunile inițiale) și se distrug prin rupere.

Elementele de rezistență trebuie să îndeplinească următoarele **condiții de bază**:

- **condiția de rezistență**-forțele interioare din elementul de rezistență (piesă) să nu producă distrugerea acestuia prin rupere sau spargere în bucăți;
- **condiția de rigiditate**-valorile limită pentru deformații nu trebuie să depășească anumite mărimi admisibile;
- **condiția de stabilitate**-impune menținerea stării de echilibru stabil pentru o anumită stare de încărcare a elementelor de rezistență.

Rezistența Materialelor permite rezolvarea următoarelor probleme:

- **dimensionarea** prin care se stabilește configurația și dimensiunile optime ale elementelor de rezistență, în funcție de încărcările exterioare (forțe sau momente) și de caracteristicile mecanice ale materialului utilizat;
- **verificarea** stabilește dacă un element de rezistență, de formă și dimensiuni cunoscute, realizat dintr-un material cu caracteristici mecanice cunoscute reziste sau nu la solicitările la care este supus;
- **capacitatea de încărcare**, cunoscând forma, dimensiunile și caracteristicile mecanice se determină încărcarea maximă pe care o poate suporta elementul de rezistență.

În problemele de Rezistență Materialelor se disting trei aspecte:

- **aspectul static** prin care se calculează forțele de legătură (reacțiunile), forțele interioare suplimentare (eforturi) din diferite secțiuni ale elementului de rezistență și intensitatea solicitărilor (tensiunile);
- **aspectul geometric** prin care se studiază comportarea elementelor de rezistență din punctul de vedere al deformațiilor și modificării formei acestora;
- **aspectul fizic** prin care se stabilește legătura dintre proprietățile de rezistență și proprietățile de deformabilitate pe baza cercetărilor de laborator.

3.2. Clasificarea corpurilor în rezistența materialelor

Structurile ingineresti (ansamblu, mecanisme) sunt formate din elemente simple (organe de mașini) care, datorită funcțiilor pe care trebuie să le îndeplinească au o mare diversitate de forme geometrice (simple sau complexe). În **Rezistența Materialelor**, pentru simplificarea calculelor, corpurile se schematizează prin forme geometrice simple.

Astfel, se disting trei categorii de elemente de rezistență:

a) **Barele** au o dimensiune mult mai mare (lungimea) decât celelalte două (corpuri cu fibră medie). Elementele geometrice caracteristice barelor sunt: **axa longitudinală** și **secțiunea transversală**.

Barele se clasifică după mai multe criterii:

➤ După destinație și modul de solicitare barele poartă diferite denumiri:

- **tiranți**-bare solicitate la tracțiune (întindere), figura 3.1.a;
- **stâlpi sau coloane**-bare solicitate la compresiune, figura 3.1.b;
- **grinzi**-bare solicitate la încovoiere, figura 3.1.c;
- **arbori**-bare solicitate la torsiune (răsucire), figura 3.1.d;
- **fire, cabluri** care preiau numai forțe de întindere.

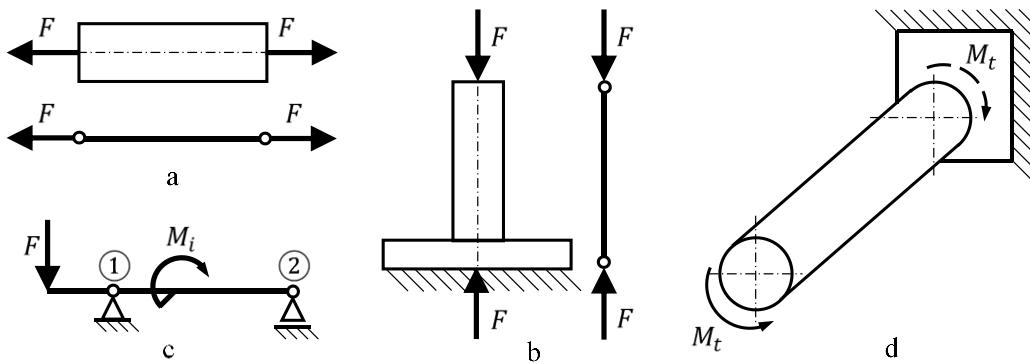


Figura 3.1. Denumirea barelor după modul de solicitare

➤ După modul de variație a secțiunii transversale în lungul axei, barele pot fi:

- **de secțiune constantă**, figura 3.2.a;
- **de secțiune variabilă**: continuă, figura 3.2.b, sau în trepte, figura 3.2.c.

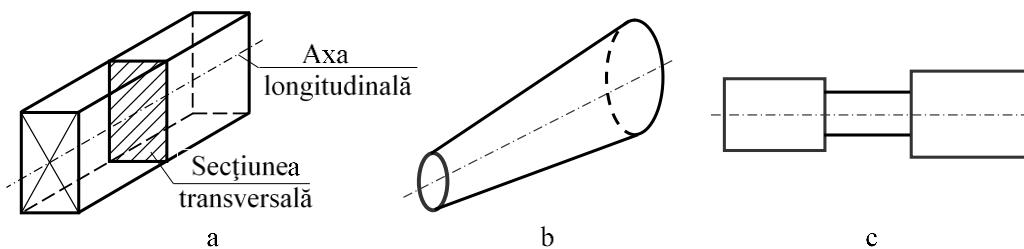


Figura 3.2. Denumirea barelor după secțiune

➤ După forma axei longitudinale, barele pot fi:

- **drepte**, figura 3.1.,
- **curbe** în plan sau în spațiu (axa geometrică este o curbă plană sau spațială);
- **cotite** în plan sau în spațiu (axa barei este o linie frântă în plan sau în spațiu).

b) Plăcile sunt corpuri cu două dimensiuni mult mai mari, în raport cu a treia (grosimea). Elementele geometrice ale unei plăci sunt **suprafața mediană** și **grosimea**. Plăcile se reprezintă schematic printr-o suprafață care imită forma și dimensiunile suprafeței mediane. Suprafața mediană reprezintă locul geometric al tuturor punctelor egal depărtate de cele două fețe ale plăcii, puncte aflate pe perpendicularele duse între cele două fețe, figura 3.3.

După forma suprafeței mediane se deosebesc:

- **plăci plane**, figura 3.3.b;
- **plăci curbe** (învelișuri) cu o singură curbură, figura 3.3.a sau având curbură dublă, figura 3.3.c.

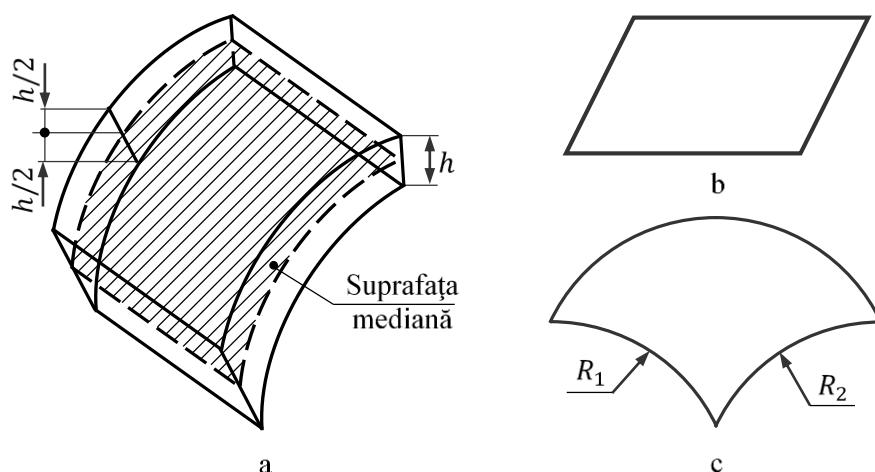


Figura 3.3. Tipuri de plăci plane

Plăcile cu grosime mare sunt denumite frecvent **dale**. O placă cu grosime mică, care nu poate prelua decât solicitări la întindere, poartă numele de **membrană**. Exemple de plăci: învelișuri, vasele de revoluție, discuri, tuburi etc.

c) **Corpuri masive** care au toate cele trei dimensiuni aproximativ de același ordin de mărime (batiuri, fundații, bile și role de rulmenți, tuburi cu pereti groși etc.).

Calculele de rezistență sunt mai simple în cazul barelor drepte și mai complicate la barele curbe, plăci sau blocuri.

3.3. Forțe exterioare în rezistența materialelor

Un corp își păstrează formă și dimensiunile datorită forțelor de atracție dintre particulele sale elementare (atomi) atâtă timp cât asupra sa nu acționează alte forțe aplicate din exterior care să-l deformeze. În construcția de mașini, elementele de rezistență preiau și transmit acțiunea unor eforturi exterioare (forțe și/sau momente), pe care le vom denumi generic: **forțe** sau **încărcări exterioare**.

Eforturile exterioare pot fi clasificate după următoarele criterii:

- a) după suprafața pe care acționează:
- **forțe concentrate** (F) aplicate teoretic într-un punct, figura 3.4.a;
 - **forțe distribuite uniform** ($p = ct.$), figura 3.4.b sau având o intensitate variabilă în lungul barei (p_x), figura 3.4.c;
 - **momente concentrate** (M) aplicate într-un punct, figura 3.4.d sau momente distribuite pe o anumită lungime (m), figura 3.4.e.

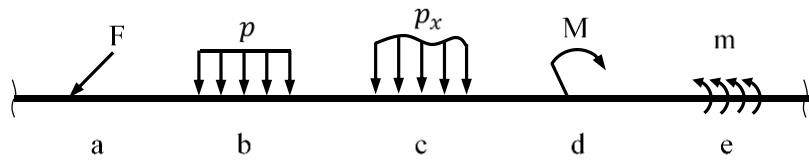


Figura 3.4. Tipuri de solicitări exterioare

- b) după locul în care se aplică:
- **forțe de suprafață** sau de contur care, sunt aplicate din exterior pe suprafața corpului și provin din interacțiunea cu piesele învecinate;
 - **forțe masice sau de volum**, distribuite în tot corpul (greutăți, forțe de inerție).
- c) după modul de acțiune în timp se disting:
- **forțe statice**, care se aplică lent și progresiv până la valoarea nominală și apoi rămân constante, figura 3.5.a;
 - **forțe dinamice**, care rezultă din:
 - aplicarea cu întreaga intensitate de la începutul perioadei de solicitare iar apoi forța se menține constantă timp îndelungat, figura 3.5.b, (forțe de inerție);
 - aplicarea bruscă a efortului asupra corpului, durata de acțiune a efortului fiind mică, figura 3.5.c (forțe de soc);
 - variația periodică în timp a intensității forței, figura 3.5.d (forțe de oboseală).

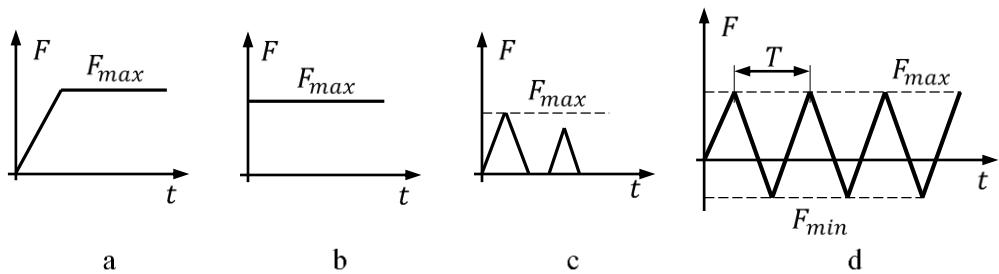


Figura 3.5. Tipuri de forțe exterioare după modul de acțiune

- d) după poziția în timp a forțelor, se disting:
- **forțe fixe**, ale căror puncte de aplicare sunt mereu aceleasi;
 - **forțe mobile**, ale căror puncte de aplicare se deplasează în timp. De exemplu eforturile produse de vehicule care circulă pe un pod, eforturile unei grinzi de pod rulant într-o hală etc.

3.4. Ipoteze de bază în rezistența materialelor

Deoarece solicitarea elementelor de rezistență este foarte complexă, în practică se ignoră anumite aspecte tehnice legate de comportarea acestora. Pentru a stabili relații de calcul simple, se admit anumite **ipoteze simplificatoare** în rezistența materialelor.

Cele mai importante ipoteze simplificatoare utilizate în teoria elasticității și în rezistența materialelor sunt:

➤ **ipoteza mediului continuu, omogen și izotrop** conform căreia, materialul din care este confecționat elementul de rezistență este **continuu**, nu prezintă goluri, fisuri microscopice și ocupă tot spațiul mărginit de conturul său.

Materialele elementelor de rezistență sunt considerate **omogene**, adică au aceleași proprietăți mecanice și fizice în orice punct din interiorul corpului sau, în fiecare volum elementar din corp. Deși nu corespunde realității, această ipoteză poate fi acceptată deoarece dimensiunile corpului sunt mult mai mari decât dimensiunile particulelor elementare.

Se adoptă ipoteza că, materialul elementului de rezistență este **izotrop sferic**, adică prezintă aceleași proprietăți mecanice în toate direcțiile (otel, aliaje, sticlă etc.). Materialele care au proprietăți mecanice diferite în funcție de direcția de solicitare se numesc materiale **anizotrope** sau **ortotrope** (lemnul).

➤ **ipoteza elasticității perfecte** consideră că atâtă timp cât solicitările nu depășesc anumite valori limită, elementul de rezistență revine la dimensiunile și forma inițială după încetarea solicitărilor, adică materialul este perfect elastic. În realitate, materialele nu au o elasticitate perfectă, după înlăturarea sarcinilor, se constată deformații remanente mici care se pot neglijă în calcule de proiectare.

➤ **ipoteza micilor deplasări**: deplasările datorate deformării corpurilor, sunt mult mai mici comparativ cu dimensiunile corpurilor și prin urmare pot fi neglijate produsele dintre două deplasări. Ipoteza micilor deplasări, nu poate fi acceptată pentru studiul problemelor de stabilitate sau pentru problemele la care nu pot fi îndeplinite condițiile de echilibru în starea nedeformată.

➤ **principiul efectului local** al acțiunii sarcinilor enunțat de **Barre de Saint-Venant**. Acest principiu este frecvent folosit și precizează că: *dacă se înlocuiesc forțele care acționează asupra unui element de suprafață al unui corp elastic, printr-un alt sistem de forțe echivalent din punct de vedere static cu primul, noua distribuție a forțelor produce la locul de aplicare diferențe semnificative față de prima, dar rămâne fără efect sau cu efect neglijabil, la distanțe mari de locul de aplicare al forțelor.*

➤ **ipoteza lui Bernoulli** sau **ipoteza secțiunilor plane** precizează că: *o secțiune plană și normală pe axa barei înainte de deformare, rămâne plană și normală pe axa barei și după deformare.*

➤ **ipoteza stării naturale a corpului** sau **ipoteza absenței tensiunilor** conform căreia, pentru un corp nesolicităt, starea de tensiune și deformație este nulă.

Perfecționarea mijloacelor de calcul și de investigare pot conduce la renunțarea unor ipoteze sau la introducerea altora noi, mai aproape de stările reale. De aici rezultă caracterul de continuă perfecționare a metodelor din Rezistența Materialelor.

Capitolul 4

DIGRAME DE EFORTURI ÎN BARE DREPTE

4.1. Reazeme și reacțiuni

Pentru preluarea și transmiterea eforturilor exterioare, elementele de rezistență din componența unei structuri sunt fixate între ele prin **legături exterioare** numite **reazeme**. Aceste legături au drept scop împiedicarea anumitor mișcări (deplasări sau rotiri) ale corpului pe direcțiile pe care acestea nu trebuie să se producă.

Pentru o structură de rezistență spațială, într-un punct oarecare, sunt posibile **șase deplasări**: trei deplasări liniare (după direcțiile axelor unui sistem ortogonal) și trei rotiri (deplasări unghiulare) în jurul acelorași axe. Prin urmare sunt posibil de realizat maxim **șase tipuri de reazeme**.

Pentru un element de rezistență plan, încărcat cu eforturi cuprinse în planul elementului, în orice punct sunt posibile **trei găde de libertate**, două deplasări liniare și o rotire. Prin urmare, în cazul unei bare plane se întâlnesc următoarele tipuri de reazeme:

1. Reazemul simplu sau **reazemul mobil** împiedică deplasarea pe direcția normală pe suprafața de rezemare, permitând deplasarea pe o direcție paralelă cu suprafața de rezemare și rotirea barei în jurul unei axe perpendiculare pe plan, în punctul de rezemare, figura 4.1.

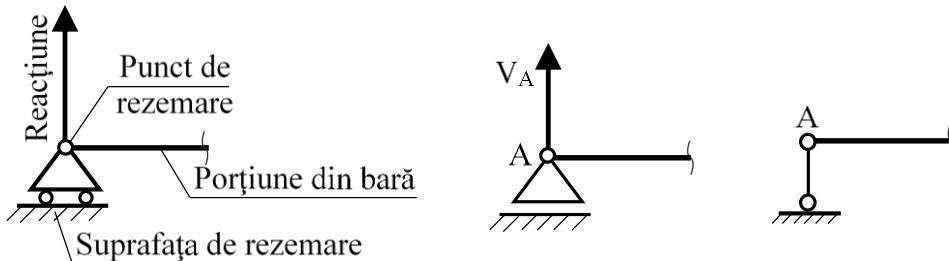


Figura 4.1. Reazem simplu (mobil)

2. Reazemul fix sau **articulația fixă** împiedică deplasările liniare după toate direcțiile din planul barei, permitând doar rotirea barei în jurul unei axe perpendiculare pe plan și care trece prin punctul de rezemare, figura 4.2.

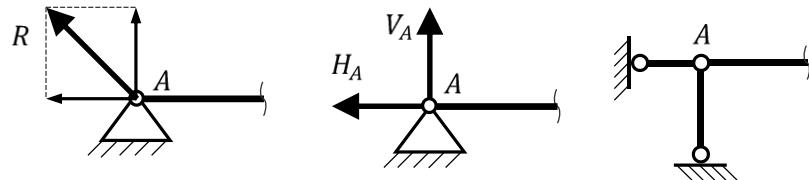


Figura 4.2. Reazem fix (articulația fixă)

Se preferă ca în locul reacțunii R , având direcția oarecare în plan necunoscută, să se introducă două forțe H_A și V_A , la care se cunoaște direcția și pentru care se vor determina modulul ca valoare din condițiile de echilibru static.

3. Încastrarea sau întepenirea anulează toate gradele de libertate la capătul unei bare, împiedicând deplasarea liniară după orice direcție din plan și rotirea barei în jurul unei axe perpendiculare pe plan și care trece prin punctul din încastrare, figura 4.3.

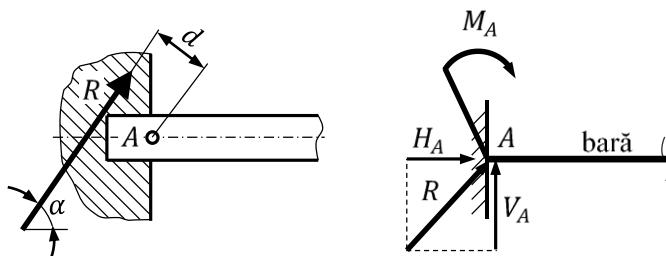


Figura 4.3. Încastrarea (întepenirea)

Sub acțiunea forțelor exterioare un sistem este în echilibru. Valoarea reacțiilor se determină din condiția de echilibru a sistemului solicitat. Pentru calculul reacțiilor se înlocuiesc reazemele prin forțele de legătură, adică prin reacții (forțe și momente).

4.2. Forțe interioare. Metoda secțiunilor

Prin aplicarea sarcinilor exterioare asupra unui corp, în interiorul acestuia iau neștere forțe suplimentare de interacțiune între particulele corpului numite **forțe interioare**. Aceste forțe interioare se manifestă ca o reacție a materialului față de tendință de deformare produsă de sarcinile exterioare.

Pentru **calculul de rezistență, rigiditate și stabilitate** a barelor sau a sistemelor de bare este necesară determinarea forțelor și momentelor interioare ce apar în secțiunile transversale ale acestora datorate încărcărilor exterioare.

Forțele interioare se pot pune în evidență prin **metoda secțiunilor** care este un procedeu de raționament imaginär, propus de Cauchy, echivalent cu teoria echilibrului părților.

Se consideră un corp solid deformabil aflat în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe exterioare: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$. Se secționează corpul cu un plan transversal Q perpendicular pe axa longitudinală, figura 4.4.a. În urma secționării fictive (imaginare), corpul se separă în două părți (partea din stânga I și partea din dreapta II), figura 4.4.b.

Pe partea din dreapta (notată cu II), delimitată de secțiunea de arie A_d , sunt aplicate forțele exterioare $\vec{F}_i, \dots, \vec{F}_{n-1}, \vec{F}_n$ și, un sistem de forțe interioare la care nu se cunoaște decât efectul, același cu cel al forțelor $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ de pe partea secțiunii din stânga (notată cu I și delimitată de secțiunea de arie A_s), figura 4.4.b.

Prin metoda secțiunilor s-a pus în evidență existența forțelor interioare care sunt trecute în categoria forțelor exterioare la care se pot aplica relațiile de echivalență și de echilibru cunoscute din statică.

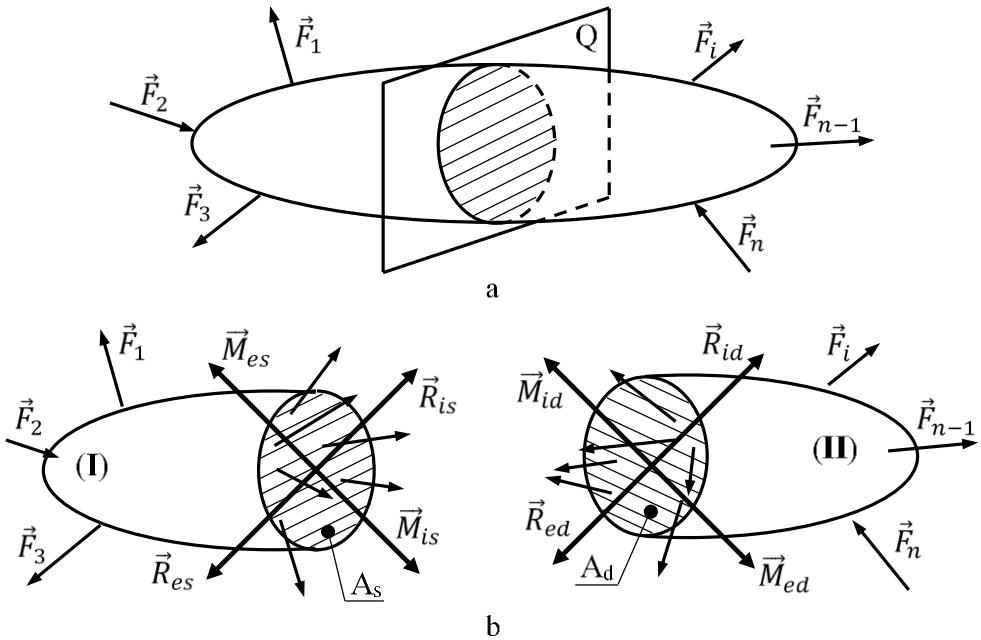


Figura 4.4. Forțe interioare

Sub acțiunea forțelor, portiunile (secțiunile) din figura 4.4.b (A_s și A_d) nu mai sunt în echilibru. Prin reducerea forțelor interioare care acționează pe fiecare față a corpului secționat în centru de greutate al secțiunii la un torsor de reducere se obține:

- față din stânga A_s : R_{is} (forță rezultantă) și M_{is} (momentul rezultant),
- față din dreapta A_d : R_{id} (forță rezultantă) și M_{id} (momentul rezultant).

În mod analog pentru forțele exterioare, torsorul de reducere va fi:

- față din stânga A_s : R_{es} (forță rezultantă) și M_{es} (momentul rezultant),
- față din dreapta A_d : R_{ed} (forță rezultantă) și M_{ed} (momentul rezultant).

Conform **teoriei echilibrului părților**, dacă un corp solid este în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe, atunci orice parte ocupată din corp este în echilibru.

Din acest principiu derivă relațiile:

$$\begin{aligned} \vec{R}_{id} &= -\vec{R}_{is} ; \vec{M}_{id} = -\vec{M}_{is} ; \vec{R}_{es} = -\vec{R}_{is} ; \vec{M}_{es} = -\vec{M}_{is} \\ \vec{R}_{is} &= -\vec{R}_{id} ; \vec{M}_{is} = -\vec{M}_{id} ; \vec{R}_{ed} = -\vec{R}_{id} ; \vec{M}_{ed} = -\vec{M}_{is} \end{aligned} \quad (4.1.)$$

Din relațiile de mai sus (4.1.) se obține:

$$\begin{aligned} \vec{R}_{id} &= \vec{R}_{es} ; \vec{M}_{id} = \vec{M}_{es} \\ \vec{R}_{is} &= \vec{R}_{ed} ; \vec{M}_{is} = \vec{M}_{ed} \end{aligned} \quad (4.2.)$$

4.3. Eforturi. Convenții de semne

Prin metoda secțiunilor s-a pus în evidență existența forțelor interioare și modul de determinare a componentelor torsorului de reducere al forțelor interioare (\vec{R}_{id} , \vec{M}_{id}) pe fața din dreapta secțiunii (A_d) și respectiv (\vec{R}_{is} , \vec{M}_{is}) pe fața din stânga (A_s).

În cazul cel mai general eforturile R și M au direcții oarecare față de secțiune. Aceste eforturi pot fi descompuse în componente pe normală la planul secțiunii (axa longitudinală a barei) și în planul secțiunii, figura 4.5., obținând:

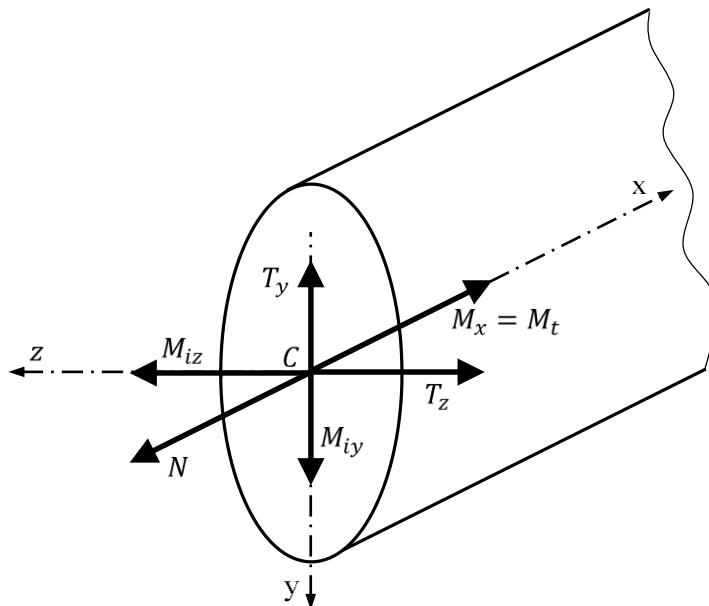


Figura 4.5. Descompunerea eforturilor

➤ Rezultanta R are o componentă orientată după normală la secțiune numită **forță normală sau forță axială** notată prin N și o componentă orientată în planul secțiunii numită **forță tăietoare** notată prin T ;

➤ Momentul M se descompune în **momentul de torsion (răsucire)** notat prin M_t orientat după normală la secțiune și în **momentul încovoiotor** conținut în planul secțiunii notat prin M_i .

Mărimele N, T, M_i, M_t se numesc eforturi, fiecare dintre aceste eforturi produc asupra unei bare (corp) o anumită solicitare:

► forță axială N dacă este orientată din figura 4.5. (iasă din secțiune) produce solicitarea de **tracțiune (întindere)** iar dacă are sens contrar produce solicitarea de **compreziune**;

► forță tăietoare T produce solicitarea de **forfecare (tăiere)**;

► momentul de torsion M_t produce solicitarea de **torsiune (răsucire)**;

► momentul încovoiotor M_i produce solicitarea de **încovoiere**.

Dacă în secțiunea transversală a barei se întâlnesc simultan mai multe solicitări simple în acea secțiune există o **solicitare compusă**.

În secțiunea transversală a unui element de rezistență există șase componente de eforturi, fiecare din aceste eforturi produc o solicitare simplă, figura 4.6.:

➤ **forță axială** N în secțiunea unei bare este egală cu suma algebrică a proiecțiilor pe axa barei a tuturor forțelor exterioare date și de legătură (reacțiuni) care acționează pe partea parcursă, considerată îndepărtată. Forță axială se consideră pozitivă dacă este orientată după normală la suprafața secțiunii (întinde porțiunea rămasă) și negativă în sens contrar, figura 4.6.

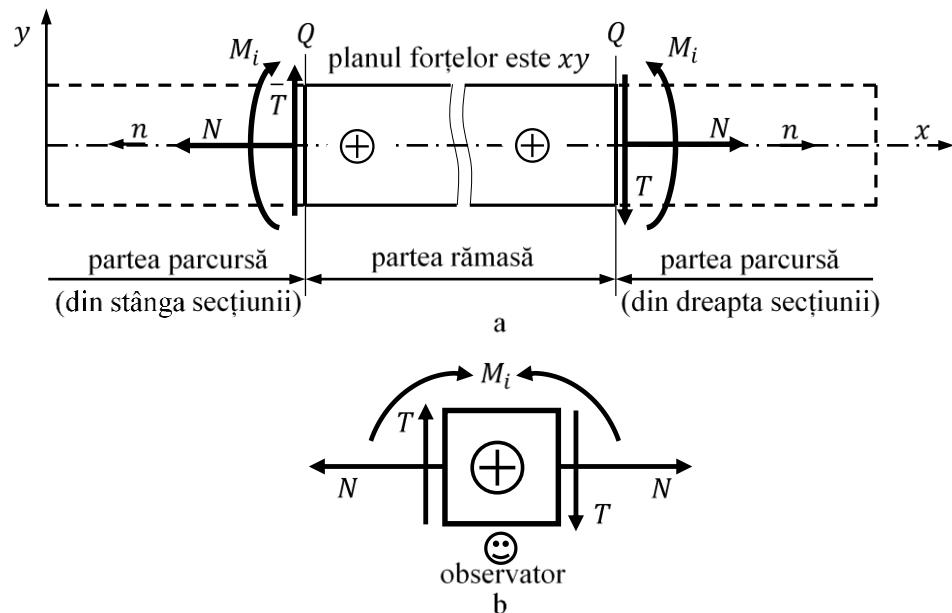


Figura 4.6. Convenția de semne a eforturilor

Forță tăietoare T într-o secțiune este egală cu suma algebrică a proiecțiilor pe normală la axa barei a tuturor forțelor date și de legătură (reacțiuni) care acționează pe partea parcursă și îndepărtată. Forță tăietoare este pozitivă dacă tinde să producă rotația porțiunii rămase în sensul de rotație al acelor de ceasornic (sensul orar), figura 4.6.

Momentul încovoiotor M_i este componenta momentului resultant M , situată în planul secțiunii. Într-o secțiune transversală a unei grinzi, momentul încovoiotor este egal cu suma algebrică a momentelor tuturor forțelor și a cuplurilor exterioare date, precum și a forțelor de legătură (reacțiuni) care acționează pe partea parcursă, considerată îndepărtată, momente ce se calculează în raport cu centrul de greutate al secțiunii, figura 4.6. Momentul încovoiotor M_i se consideră pozitiv dacă întinde fibrele grinzi dinspre un observator care, la bare drepte cu axa longitudinală orizontală se consideră aşezat sub porțiunea rămasă a grinzi, figura 4.6. De regulă pe diagramele care reprezintă variația momentului încovoiotor nu se pun semne, diagramele momentelor încovoiotoare se reprezintă pe partea fibrei întinse.

Momentul de torsiune (răsucire) $M_x \equiv M_t$ într-o secțiune este egal cu suma algebrică a momentelor de torsiune a tuturor forțelor exterioare aplicate și a momentelor de torsiune exterioare (inclusiv reacțiunile) care acionează pe partea considerată îndepărtată. Momentul de torsiune are ca efect o rotație a secțiunii și acționează în jurul axei longitudinale. Convențional, momentul de torsiune se consideră pozitiv dacă vectorul moment de torsiune are aceeași orientare ca și sensul pozitiv ales pentru axa longitudinală a barei.

4.4. Relații diferențiale între eforturi la bare drepte

Reprezentarea corectă a eforturilor și verificarea diagramele de eforturi necesită cunoașterea relațiilor care există între sarcinile aplicate și eforturile din secțiune.

Se consideră bara dreaptă rezemată, figura 4.7., încărcată cu sarcina verticală p distribuită după o lege oarecare, figura 4.7.a. Din această bară, se decupează un element de lungime infinit mic dx , figura 4.7.b.

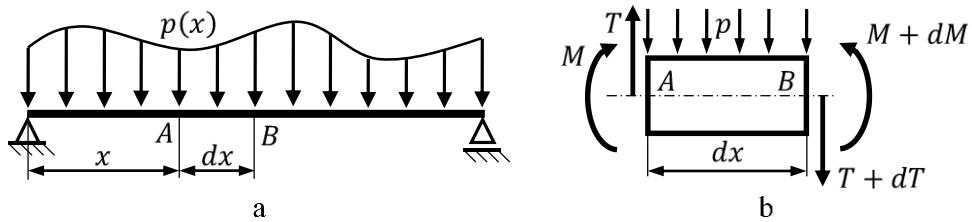


Figura 4.7. Bară dreaptă încărcată

Eforturile variază în lungul barei, astfel că în secțiunea A , aflată la distanța x de rezemul din stânga, apar eforturile T și M , iar în secțiunea B aflată la distanța $x + dx$, apar eforturile $T + dT$ și $M + dM$, în centrul secțiunii din dreapta elementului. Pe lungimea dx , sarcina p se poate considera uniformă (dx fiind foarte mic).

Ecuatiile de echilibru pentru elementul infinit mic din figura 4.7.b, conduc la stabilirea următoarelor relații (proiecții pe verticală și momente în raport cu punctul B):

- ecuația de proiecții pe direcția perpendiculară pe axei barei:

$$T - p \cdot dx - (T + dT) = 0 \quad (4.3.)$$

din care se obține:

$$\frac{dT}{dx} = -p \quad (4.4.)$$

adică: „derivata funcției forță tăietoare $T(x)$ în raport cu abscisa secțiunii (variabila x) este egală cu sarcina verticală, luată cu semn schimbat”.

- ecuația de momente în raport cu punctul B :

$$M - (M + dM) + T \cdot dx - p \cdot \frac{dx^2}{2} = 0 \quad (4.5.)$$

ultimul termen al relației (4.5.) se negligează fiind infinit mic de ordinul doi comparativ cu ceilalți termeni:

$$\frac{dM}{dx} = T \quad (4.6.)$$

adică: „derivata funcției moment încovoietor $M(x)$, în raport cu abscisa secțiunii (variabila x), este egală cu forța tăietoare din secțiunea considerată”.

Din ultimele două relații se obține:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -p \quad (4.7.)$$

Observații:

- semnele din relațiile (4.4.), (4.6) și (4.7.) corespund parcurgerii elementului de rezistență de la stânga la dreapta, dacă sensul se schimbă se schimbă și semnele;
- din relația (4.4.) se observă că pe porțiunea de bară unde $p = 0$ forța tăietoare este constantă iar momentul încovoietor variază liniar;
- din relația (4.7.) pe porțiunea de bară unde $p = \text{const.}$ forța tăietoare variază liniar iar momentul încovoietor variază parabolic;

4.5. Construcția analitică a diagrameelor de eforturi la bare drepte

Definițiile și regulile de semne prezentate anterior permit stabilirea expresiilor analitice pentru eforturile $N(x)$, $T(x)$ și $M_i(x)$.

Deoarece funcțiile care definesc eforturile $N(x)$, $T(x)$ și $M_i(x)$ depind de poziția secțiunii (variabila x), este posibilă reprezentarea lor grafică pe toată lungimea barei prin **diagrame de eforturi**.

Diagramele de eforturi oferă date importante necesare calculului de rezistență:

- valorile maxime ale eforturilor;
- secțiunile în care se produc solicitările maxime (secțiuni periculoase);
- analiza relațiilor diferențiale între eforturi și sarcini, permit verificarea construirii corecte a diagrameelor de eforturi.

Pentru trasarea diagrameelor de eforturi se parcurg următoarele etape:

- ▶ se alege un sens de parcurs al barei, de creștere a variabilei x , de regulă de la stânga la dreapta, sau invers;
- ▶ se stabilesc intervalele (tronsoanele) pe care funcțiile de efort au legi unice de variație, notând (cu numere și/sau litere) toate secțiunile acestor intervale (tronsoane);
- ▶ se scriu ecuațiile funcțiilor de efort pentru $N(x)$, $T_y(x)$ și $M_i(x)$, ținând cont de regulile de semne apoi, se calculează valorile la limitele intervalelor (domeniilor);

- se alege o linie de referință paralelă cu axa barei și se reprezintă la scară, ordonatele eforturilor în funcție de legile lor de variație;
- se reprezintă grafic, la o anumită scară, funcțiile de eforturi în funcție de variabila x ;

Pentru reprezentarea funcțiilor de efort $N(x)$, $T_y(x)$ și $M_i(x)$ axele pozitive ale ordonatelor lor, perpendiculare pe linia de referință, pentru barele drepte orizontale se aleg astfel:

- forța axială N și forța tăietoare T au axa pozitivă deasupra liniei de referință;
- momentul încovoiotor M_i are, prin convenție, axa pozitivă sub linia de referință, pentru a reprezenta momentul încovoiotor M_i pe **fibra întinsă**, în acest fel nu mai este obligatorie indicarea semnului pe diagramele $M_i(x)$.

4.6. Aplicație

Pentru grinda dreaptă din figura 4.8., se cere:

- să se calculeze și să se verifice reacțiunile;
- să se stabilească legile de variație ale funcțiilor de efort $N(x)$, $T_y(x)$, $M_{iz}(x)$ și să se traseze diagramele de variație ale acestor eforturi;

Date numerice: $F = 16\sqrt{2}$ [kN], $M_0 = 10$ [kN · m], $a = 2,5$ [m], $\alpha = 45^\circ$.

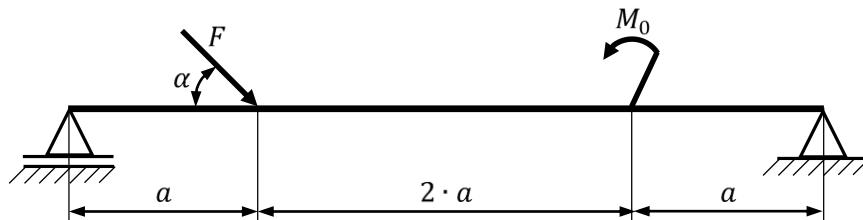


Figura 4.8. Aplicație

Rezolvare:

- Forța înclinată F se descompune după direcțiile orizontală și verticală:

$$F_V = F \cdot \sin \alpha = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16 \text{ [kN]}$$

$$F_H = F \cdot \cos \alpha = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16 \text{ [kN]}$$

- în reazemele A și B se introduc reacțiunile V_A , respectiv H_B și V_B , figura 4.9. Pentru calculul reacțiunilor se utilizează ecuațiile de echilibru static al grinzi:

$$\sum X = 0 \Leftrightarrow F_H + H_B = 0 \Rightarrow H_B = -F_H = -16 \text{ [kN]}$$

$$\left(\sum M_i\right)_A = 0 \Leftrightarrow F_V \cdot a - M_0 - V_B \cdot 4a = 0 \Rightarrow V_B = \frac{F_V \cdot a - M_0}{4 \cdot a} = 3 [kN]$$

$$\left(\sum M_i\right)_B = 0 \Leftrightarrow V_A \cdot 4a - F_V \cdot 3a - M_0 = 0 \Rightarrow V_A = \frac{F_V \cdot 3 \cdot a + M_0}{4 \cdot a} = 13 [kN]$$

Se verifică reacțiunile calculate:

$$\sum Y = 0 \Leftrightarrow V_A - F_V + V_B = 0 \Leftrightarrow 13 - 16 + 3 = 0$$

b). Grinda prezentată în figura 4.9., are trei domenii de variație pentru funcțiile de eforturi, după cum urmează: ($A - 1$), ($B - 2$) și ($1 - 2$).

Domeniul ($A - 1$), $x_1 \in [0; a = 2,5 m]$

Portiunea parcursă și considerată îndepărtată este de coordonată x_1 , pe care acționează reacțunea V_A .

Funcția forță axială N are expresia:

$$N(x_1) = N_{A-1} = 0 [kN] = const.$$

Funcția forță tăietoare T_y are expresia:

$$T_y(x_1) = T_{A-1} = V_A = 13 [kN] = const.$$

Funcția moment încovoiator M_{iz} are expresia:

$$M_{iz}(x_1) = M_{iz,1-A} = V_A \cdot x_1 = 13 \cdot x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{iz}(x_1 = 0) = M_A = 13 \cdot 0 = 0 [kN \cdot m] \\ M_{iz}(x_1 = a = 2,5 m) = M_1 = 13 \cdot 2,5 = 32,5 [kN \cdot m] \end{cases}$$

Domeniul ($B - 2$), $x_2 \in [0; a = 2,5 m]$

Portiunea din grindă parcursă și considerată îndepărtată este de coordonată x_2 , pe care acționează reacțiunile H_B și V_B .

Funcția forță axială N , are expresia:

$$N(x_2) = N_{B-2} = H_B = -16 [kN] = const.$$

Funcția forță tăietoare T_y , are expresia:

$$T_y(x_2) = T_{B-2} = -V_B = -3 \text{ [kN]} = \text{const.}$$

Funcția moment încovoietor M_{iz} are expresia:

$$\begin{aligned} M_{iz}(x_2) &= M_{iz,B-2} = V_B \cdot x_2 = 3 \cdot x_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow &\begin{cases} M_{iz}(x_2 = 0) = M_B = 3 \cdot 0 = 0 \text{ [kN} \cdot \text{m]} \\ M_{iz}(x_2 = a = 2,5 \text{ m}) = M_2 = 3 \cdot 2,5 = 7,5 \text{ [kN} \cdot \text{m]} \end{cases} \end{aligned}$$

Domeniul (1 – 2), $x_3 \in [0; 2a = 2 \cdot 2,5 = 5 \text{ m}]$

Pe acest domeniu, se acceptă parcurgerea grinzii de la stânga la dreapta, adică se consideră îndepărțată partea din dreapta secțiunii fictive.

Funcția forță axială N are expresia:

$$N(x_3) = N_{1-2} = -F_H = -16 \text{ [kN]} = \text{const.}$$

Funcția forță tăietoare T_y are expresia:

$$T_y(x_3) = T_{1-2} = V_A - F_V = 13 - 16 = -3 \text{ [kN]} = \text{const.}$$

Funcția moment încovoietor M_{iz} are expresia:

$$\begin{aligned} M_{iz}(x_3) &= M_{iz,1-2} = V_A \cdot (a + x_3) - F_V \cdot x_3 = 13 \cdot (2,5 + x_3) - 16 \cdot x_3 = \\ &= 32,5 - 3 \cdot x_3 \Rightarrow \\ \Rightarrow &\begin{cases} M_{iz}(x_3 = 0) = M_1 = 32,5 - 3 \cdot 0 = 32,5 \text{ [kN} \cdot \text{m]} \\ M_{iz}(x_3 = 2 \cdot a = 5 \text{ m}) = M_2 = 32,5 - 3 \cdot 5 = 17,5 \text{ [kN} \cdot \text{m]} \end{cases} \end{aligned}$$

Diagramele de eforturi sunt prezentate în figura 4.9.

Relațiile diferențiale dintre eforturi și sarcini se analizează pe baza diagramelor de eforturi, după cum urmează:

➤ pe toate domeniile grinzii $(A - 1), (B - 2)$ și $(1 - 2)$, deoarece nu avem sarcină uniform distribuită ($p = 0$), forță tăietoare T_y este constantă, iar momentul încovoietor M_{iz} variază liniar;

➤ din relația (4.6.), pe domeniile unde $T_y > 0$ momentul încovoietor M_{iz} este monoton crescător iar pe domeniile unde $T_y < 0$ momentul încovoietor M_{iz} este monoton descrescător;

➤ în diagrama forței tăietoare, discontinuitățile (salturile) se produc în secțiunile în care acționează V_A , V_B și F_V , iar în diagrama momentului încovoiotor se produce un singur salt în secțiunea în care este aplicat momentul M_0 ;

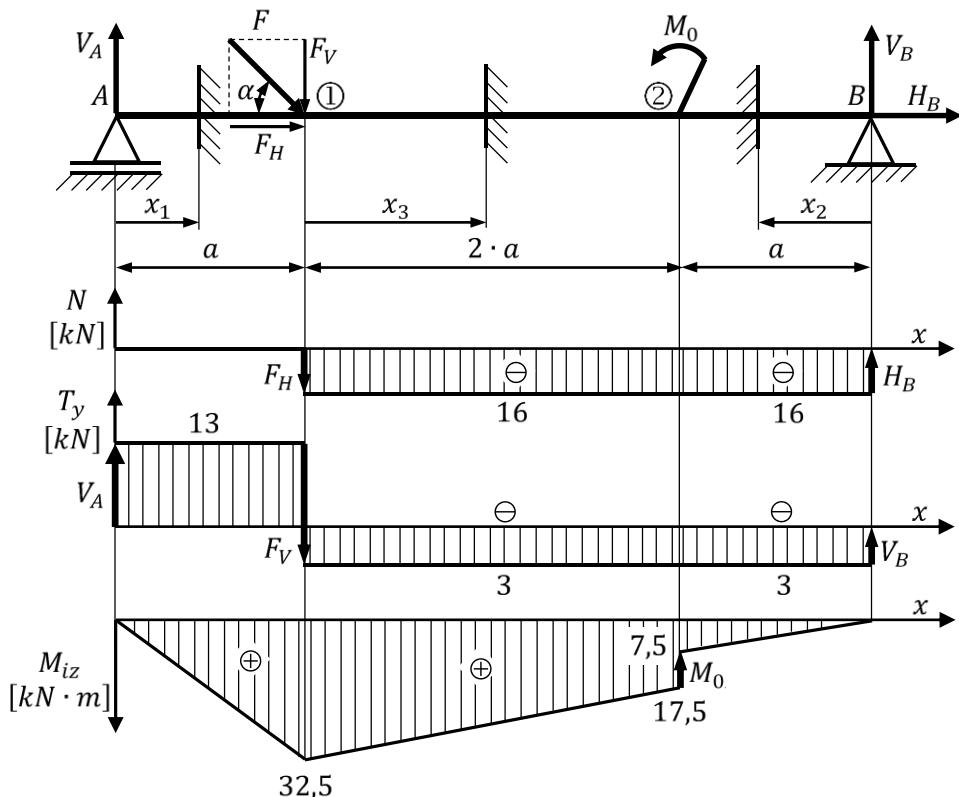


Figura 4.9. Diagrame de eforturi

➤ parcurgând grinda de la stânga la dreapta, pe domeniul ($A - 1$):

$$M_1 = \text{suprafața diagramei } T_y \Big|_0^a = 13 \cdot a = 13 \cdot 2,5 = 32,5 \text{ [kN} \cdot \text{m]}$$

sau, parcurgând grinda de la dreapta la stânga, pe domeniul ($B - 2$):

$$M_2 = \text{suprafața diagramei } T_y \Big|_0^a = 3 \cdot 2,5 = 7,5 \text{ [kN]}$$

Toate aspectele analizate teoretic, referitoare la relațiile diferențiale dintre eforturi și sarcini, se regăsesc în diagramele de eforturi din figura 4.9., ceea ce înseamnă că diagramele au fost reprezentate corect.

Capitolul 5

TENSIUNI, DEPLASĂRI ȘI DEFORMAȚII SPECIFICE

5.1. Tensiunea

Eforturile obținute în urma reducerii forțelor interioare în centrul de greutate al secțiunii, nu pot da informații asupra solicitării fiecărui punct al secțiunii respective. Este necesar să se cunoască modul cum se distribuie forțele interioare în fiecare punct al secțiunii pentru a cunoaște care este intensitatea maximă a solicitării.

Se consideră un element de arie infinit mic dA din suprafața secțiunii unei bare în care a fost determinat torsorul de reducere al forțelor. Elementul de arie infinit mic dA este caracterizat de normala n la elementul de arie. Dacă elementul de arie este suficient de mic, efortul care acționează poate fi considerat uniform pe suprafața lui iar rezultanta $d\vec{F}$ poate fi aplicată în centrul de greutate, figura 5.1.a.

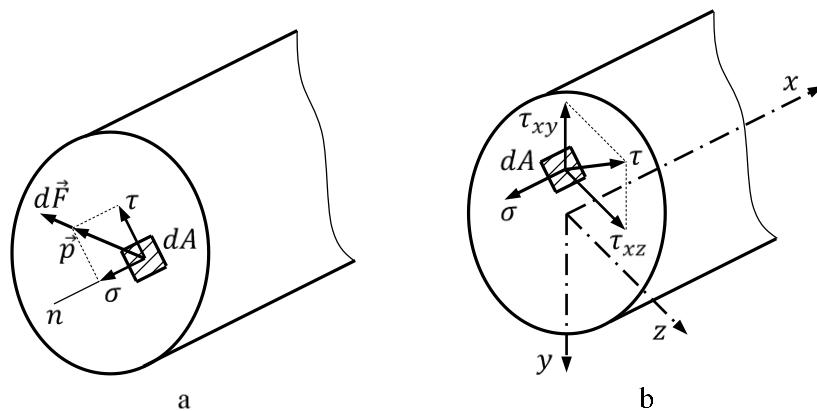


Figura 5.1. Tensiuni în secțiunea unei bare

Prin definiție, **tensiunea totală** data de raportul:

$$\vec{p} = \frac{d\vec{F}}{dA} \quad (5.1.)$$

se numește **vectorul tensiune totală medie**.

Tensiunea este una dintre mărimile fundamentale din Rezistența Materialelor. Tensiunea \vec{p} are aceeași direcție cu forța elementară $d\vec{F}$. Mărimea ei este determinată atât de mărimea forței $d\vec{F}$ cât și de orientarea suprafeței dA față de direcția forței.

Tensiunea \vec{p} poate fi descompusă într-o componentă orientată după direcția normalei la secțiune, **tensiunea normală** notată cu σ , și o componentă în planul secțiunii, **tensiunea tangențială** notată cu τ , figura 5.1.b:

$$\vec{p} = \vec{\sigma} + \vec{\tau} \quad (5.2.)$$

La rândul ei, tensiunea tangențială τ , poate fi descompusă după direcțiile axelor de coordonate y și z :

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{xy} + \vec{\tau}_{xz} \quad (5.3.)$$

Între componentele tensiunii totale, care acționează pe elementul de arie dA este valabilă relația, figura 5.1.a:

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (5.4.)$$

După sensul pe care îl are, tensiunea normală σ poate avea efect de **întindere** sau de **compreziune**, exercitat de către partea de corp înălțurată asupra părții rămase. Analog, tensiunea tangențială τ poate avea efect de **tăiere, forfecare** sau **alunecare**. Pentru componentele tensiunii tangențiale τ_{xy}, τ_{xz} , primul indice indică axa pe care tensiunea este normală, iar cel de-al doilea indice indică axa cu care aceasta este paralel.

5.2. Starea de tensiune

Se consideră un element de volum paralelipipedic solicitat de tensiuni normale și tangențiale. În cazul cel mai general, pe fețele sale vor acționa tensiunile normale: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ și tensiunile tangențiale: $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$, figura 5.2. Aceste tensiuni definesc starea de tensiune într-un punct deci, tensorul tensiune are **nouă componentă**.

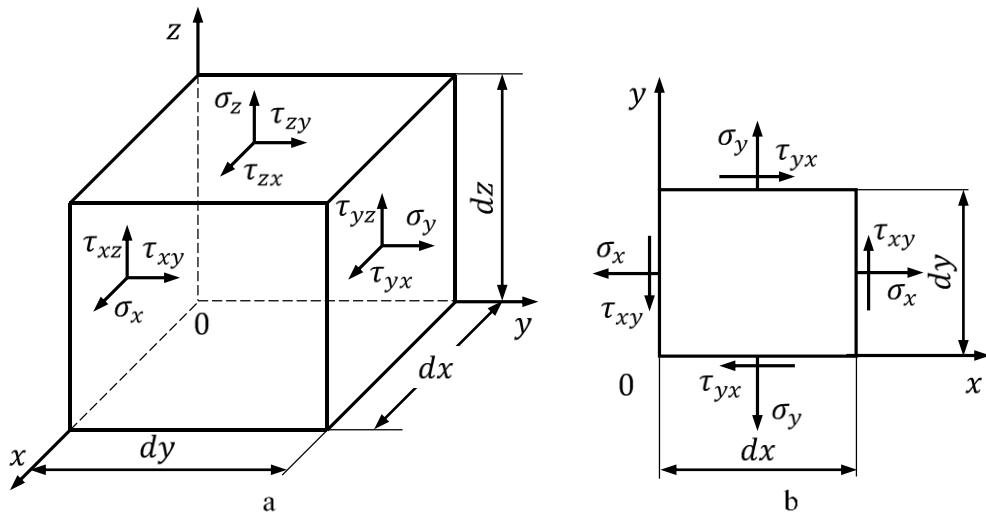


Figura 5.2. Starea de tensiune
a-starea spațială de tensiune, b-starea plană de tensiune

Din condiția de echilibru a elementului de volum, figura 5.2.b, se obține:

$$2 \cdot \tau_{xy} \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} = 2 \cdot \tau_{yx} \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (5.5.)$$

În mod analog, din ecuațiile de echilibru pentru elementul de volum situat în alte plane se obține:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (5.6.)$$

Relațiile (5.5.) și (5.6.): $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$ definesc **principiul dualității tensiunilor tangențiale**.

Definirea tensorului tensiune este posibilă dacă se cunosc cele **sase componente** independente aflate în trei plane perpendiculare ce trec prin punctul respectiv:

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (5.7.)$$

În funcție de forma tensorului tensiune, starea de tensiune poate fi:

- starea spațială (triaxială) de tensiune, având tensorul de tensiune dat de relația generală (5.7.), reprezentată în figura 5.2.a;
- starea plană (biaxială) de tensiune, reprezentată în figura 5.2.b, având tensorul tensiunilor dat de relația:

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (5.8.)$$

- starea monoaxială de tensiune, având tensorul tensiunilor dat de relația:

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (5.9.)$$

Observații:

- Tensiunile se măsoară în: $[N/m^2]$ sau în $[MPa]$:

$$\left(1 MPa = 10^6 Pa = 10^6 \frac{N}{m^2}; 1 MPa = 1 \frac{N}{mm^2} \right)$$

- Starea de tensiune dintr-un punct este cunoscută dacă se cunosc tensiunile care acționează pe infinitatea de elemente de suprafață ce trec prin punctul considerat;

➤ Starea de tensiune a unui corp se consideră cunoscută dacă se cunosc stările de tensiune de pe infinitatea de puncte ale corpului considerat.

5.3. Deplasări. Deformații specifice

5.3.1. Deplasări

Sub acțiunea încărcărilor corpul solid deformabil se deplasează, deplasările corpului depind de natura și numărul legăturilor:

- **deplasări cinematicice** se produc când legăturile permit mișcări mecanice, corpul își modifică poziția în spațiu dar forma și dimensiunile inițiale rămân nemodificate. Aceste deplasări sunt studiate de Mecanica Teoretică și de Teoria Mechanismelor.

- **deplasări datorate deformării corpului** se produc când, sub acțiunea eforturilor exterioare, variațiilor de temperatură etc., corpul își schimbă formă și dimensiunile inițiale pe care le-a avut în starea nesolicitată. Aceste deplasări (de regulă elastice și de valori mici) sunt studiate de Rezistența Materialelor.

Spre exemplu, bara în consolă din figura 5.3., sub acțiunea forței F , tronsonul de bară AB se deformează în timp ce tronsonul de bară BC , deși punctele sale au deplasări, rămâne nedeformat (fiind nesolicitat). Toate punctele de pe axa barei, cu excepția celor din încastrare, (secțiunea A), au deplasări liniare.

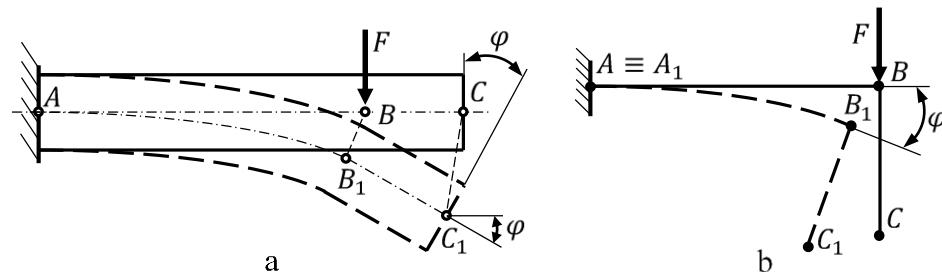


Figura 5.3. Deformațiile unei grinzi

Drumul parcurs de un punct al unui corp, din poziția inițială corespunzătoare unui corp neîncărcat în poziția finală după solicitare se numește **deplasare**. Deplasările măsoară schimbarea poziției unui punct al corpului față de un reper considerat fix.

Deplasările pot fi: liniare sau unghiulare.

Prin **deplasare liniară** a unui punct se înțelege drumul parcurs de acest punct, în decursul procesului de deformare, după o dreaptă suport (exemplu dreapta BB_1 din figura 5.3.a).

Prin **deplasare unghiulară** se înțelege rotirea dintre segmentele de dreaptă determinate de două puncte ale corpului înainte și după deformarea acestuia, unghiul φ dintre segmentele BC și B_1C_1 , din figura 5.3.a, b.

5.3.2. Deformații

Prin **deformație** se înțelege orice schimbare de formă a unui corp. Deformațiile depind de forma și dimensiunea elementului de rezistență, mărimea și modul de aplicare al solicitărilor. Ca și deplasările, deformațiile pot fi: liniare și unghiulare.

a) Deformația liniară. Se consideră bara dreaptă din figura 5.4., solicitată la întindere de forțele F . Fie l_0 lungimea inițială a barei nedeformate iar l_1 lungimea finală a barei după acțiunea forțelor și deformarea corpului.

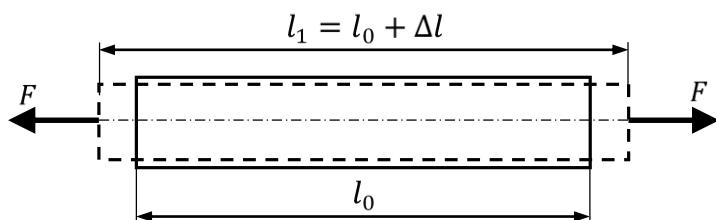


Figura 5.4. Deformația liniară

Dacă $l_1 > l_0$, atunci diferența:

$$\Delta l = l_1 - l_0 \quad (5.10.)$$

este pozitivă și portă numele de **lungirea barei**. Dacă $l_1 < l_0$ atunci Δl este negativă și prezintă o **scurtare a barei**.

Raportul dintre deformația Δl a barei și lungimea inițială l_0 a barei poartă numele de **lungire specifică, alungire sau deformația liniară specifică**:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \quad (5.11.)$$

Dacă solicitarea barei este de compresiune, mărurile Δl și ε sunt negative și se numesc **scurtarea** și respectiv **scurtarea specifică**.

Deformațiile specifice liniare sunt mărimi adimensionale. Adesea se folosesc sub formă procentuală:

$$\varepsilon [\%] = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 100 \quad (5.12.)$$

b) Deformații unghiulare. În general, dacă se modifică lungimea laturilor, se modifică și unghurile drepte ale barei. Se consideră un corp deformabil, un element de volum de formă paralelipipedică, de lățime unitară. Pe cele patru fețe perpendiculare pe planul desenului acționează tensiunile tangențiale τ , egale și având

sensurile indicate în figura 5.5. Sub acțiunea tensiunilor τ , elementul de volum se deformează, față superioară va lungea paralel cu ea însăși.

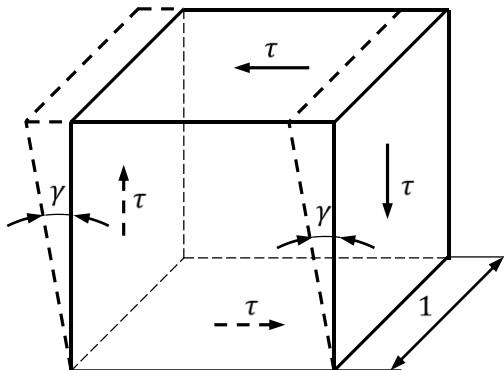


Figura 5.5. Deformația unghiulară

Mărimea lunecării este dată de variația unghiului drept, notată prin γ , figura 5.5., măsurat în radiani și care se numește **lunecare specifică** sau **deformație unghiulară specifică**.

În mod convențional, lunecarea specifică este pozitivă dacă unghiul drept se micșorează și negativă în caz contrar. Starea de deformare dintr-un corp, este definită atunci când se cunosc atât alungirile cât și lunecările specifice din orice punct din corp.

Deformațiile: ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} , constituie cele **șase componente** independente ale **tensorului deformațiilor specifice** care pot fi scrise de forma:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (5.13.)$$

Deci, **lungirea specifică și lunecarea specifică, sunt elemente de bază pentru studiul deformațiilor, după cum tensiunile normale și cele tangențiale sunt elemente de bază în studiul tensiunilor.**

5.4. Caracteristici mecanice ale materialelor

Alegerea materialului pentru confecționarea unei anumite piese se face și pe baza acesta numitelor **caracteristici mecanice** pe care le prezintă materialul. Cunoașterea acestor caracteristici mecanice, are loc numai pe baza unor **încercări mecanice**, care evidențiază comportarea materialului în condiții de solicitare.

5.4.1. Legea lui Hooke

Ipoteza elasticității perfecte dintre tensiuni și deformații este una din ipotezele de bază din teoria elasticității. Reprezentând variația tensiunii normale σ în funcție de

deformația specifică ε în cadrul încercării la tracțiune a unui anumit material se obține curba caracteristică convențională a materialului respectiv.

Dacă tensiunea σ nu depășește o anumită valoare critică σ_c numită limită de proporționalitate (σ_p), deformarea specifică ε crește proporțional cu tensiunea, figura 5.6.

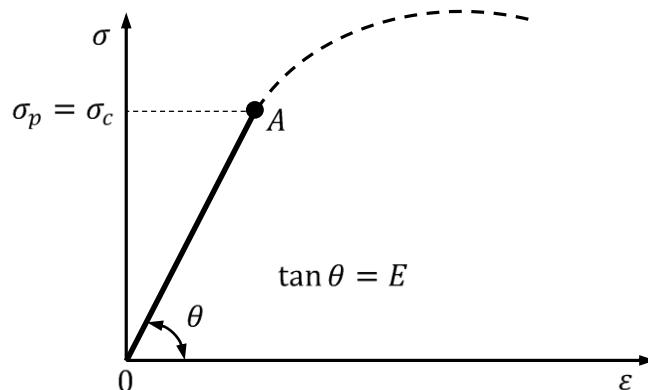


Figura 5.6. Zona liniar-elastică a curbei caracteristice la tracțiune

Având în vedere ipoteza elasticității perfecte dintre tensiuni și deformații, ecuația porțiunii OA din figura 5.6. este de forma:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (5.14.)$$

care arată că: *până la limita de proporționalitate, lungirile specifice sunt proporționale cu eforturile unitare*. Aceasta este legea lui Hooke și este legea fundamentală a teoriei elasticității și a rezistenței materialelor.

Deoarece deformarea specifică ε este o mărime adimensională, constanta E , numită **modul de elasticitate longitudinal** sau **modulul lui Young** se măsoară în [MPa].

La solicitarea de forfecare, legea lui Hooke între tensiunea tangențială τ și deformarea specifică unghiulară γ , are expresia:

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (5.15.)$$

unde G reprezintă **modulul de elasticitate transversal**.

Între modulul de elasticitate longitudinal E , modulul de elasticitate transversal G și coeficientul de contracție transversală ν , există relația de legătură:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (5.16.)$$

Pentru oțel $E = 2,1 \cdot 10^5$ [MPa] și $\nu = 0,3$ se poate determina modulul de elasticitate transversal:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{2,1 \cdot 10^5}{2 \cdot (1 + 0,3)} \cong 8,1 \cdot 10^4 [MPa] \quad (5.17.)$$

5.4.2. Proprietățile mecanice ale materialelor

Proprietățile mecanice ale materialelor arată modul de comportare a materialului sub acțiunea eforturilor ce le solicită. Aceste proprietăți mecanice conduc la o clasificare a materialelor după diferite criterii:

1) după reversibilitatea deformației, materialele se clasifică în:

➤ **materiale elastice** - revin la forma și dimensiunile inițiale după îndepărarea sarcinilor exterioare care au produs deformarea lor. Deci, elasticitatea este proprietatea materialelor de a reveni la forma și dimensiunile inițiale după suprimarea acțiunilor care au dus la aceste deformații;

➤ **materiale plastice** - nu mai revin la forma și dimensiunile inițiale după îndepărarea sarcinilor exterioare care au produs deformarea lor;

➤ **materiale elasto-plastice** - se deformează parțial elastic și parțial plastic. Deci, după îndepărarea sarcinilor sub acțiunea cărora s-au deformat nu mai revin integral la forma sau dimensiunile inițiale și prezintă anumite deformații permanente. Majoritatea materialelor utilizate în tehnică sunt elasto-plastice.

2) după mărimea deformațiilor produse înainte de rupere materialele pot fi:

➤ **materiale fragile (casante)** - ruperea se produce brusc, fără zona de gătire (fontă, sticlă, materiale ceramice, materiale de construcții etc.);

➤ **materiale tenace (ductile)** - se constată deformații plastice importante înainte de rupere (cupru, aluminiu, alama, plumb, zinc etc.).

3) După valorile constantelor elastice E , G și ν , măsurate pe diferite direcții, materialele sunt:

➤ **materiale izotrope** - prezintă aceleași valori ale constantelor elastice pe toate direcțiile. Exemple de materiale izotrope: sticlă, otelul.

➤ **materiale anizotrope** - prezintă valori diferite ale constantelor elastice pe direcții diferite (lemnul, rocile sedimentare etc.).

În marea majoritate a aplicațiilor tehnice din rezistență materialelor se folosesc materiale izotrope.

5.5. Coeficienți de siguranță. Tensiuni admisibile

Un element de rezistență corespunde din punct de vedere tehnic dacă tensiunile care iau naștere în interiorul piesei datorită încărcărilor aplicate, nu depășesc anumite valori limită stabilite convențional.

Tensiunea limită utilizată în calcule de rezistență este cunoscută sub denumirea de **tensiune admisibilă** sau **rezistență admisibilă**. **Rezistență admisibilă**, reprezintă valoarea convențională aleasă în calcul, pe baza practică, pentru tensiunea maximă care poate să apară într-o piesă, în condiții date de material și solicitare.

Rezistența admisibilă (σ_a sau τ_a), poate fi definită față de o **stare limită periculoasă**, stare care trebuie evitată, deoarece poate conduce la distrugere:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{lim}}{c} ; \quad \tau_a = \frac{\tau_{lim}}{c} \quad (5.18.)$$

unde:

- σ_{lim} reprezintă tensiunea corespunzătoare unei stări limită periculoase;
- c este întotdeauna supraunitar ($c > 1$) și reprezintă coeficientul de siguranță față de starea limită periculoasă considerată.

Alegerea unor valori inferioare pentru rezistența admisibilă față de tensiunea corespunzătoare stării limită periculoase este necesară deoarece:

- cunoașterea încărcărilor este de cele mai multe ori aproximativă și o depășire a acestora este foarte posibilă;
- caracteristicile mecanice ale materialelor variază în limite destul de largi, ele fiind influențate de foarte mulți factori;
- schema aleasă pentru calcul (aplicarea eforturilor, schematizarea structurii, ipotezele de calcul etc.) depărtează modelul față de cel real;
- la stabilirea relațiilor de calcul se presupune că materialele sunt izotrope, omogene și perfect elastice, ceea ce nu este adevărat pentru materialele tehnice din care sunt confectionate elementele de rezistență.

Pentru tensiunile normale se definesc următoarele rezistențe admisibile:

- pentru materiale tenace, se consideră stare limită, apariția curgerii sau depășirea limitei de elasticitate:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_c}{c_c} ; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_e}{c_c} \quad (5.19.)$$

- pentru materiale casante (fragile) care nu au limită de curgere, referirea se face față de rezistență la rupere:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_r}{c_r} \quad (5.20.)$$

Mărimele c_c și c_r sunt numere supraunitare și se numesc *coeficienți de siguranță*, raportați la limita de curgere σ_c (de elasticitate σ_e) sau la limita de rupere σ_r .

Valorile coeficientilor de siguranță și ale rezistențelor admisibile, sunt prezentate în literatura tehnică de specialitate și se aleg în funcție de mai mulți factori.

Capitolul 6

CARACTERISTICI GEOMETRICE ALE SECȚIUNILOR PLANE

6.1. Noțiuni introductive

Forma și dimensiunile secțiunilor transversale ale elementelor de rezistență de tip bară sunt foarte importante în calcule de rezistență. La solicitarea de tracțiune, compresiune și forfecare secțiunea transversală intervine prin aria sa pentru a calcula tensiunile și deformațiile. În acest caz forma secțiunii nu este importantă.

La alte solicitări (torsiune, încovoiere) valoarea tensiunii și a deformației depinde de aria secțiunii transversale și de forma și poziția pe care o are secțiunea în raport cu solicitarea. Forma secțiunii transversale este descrisă prin **caracteristicile geometrice ale secțiunii**. Aria secțiunii depinde doar de dimensiunile geometrice ale acesteia.

Se consideră grinda solicitată de forța F , așezată în două poziții față de planul forței, figura 6.1. În urma aplicării forței, deși avem aceeași grindă (aria secțiunii transversale) și aceeași forță, se constată că: pentru varianta din figura 6.1.b deformațiile sunt mai mari, adică rezistența la încovoiere a grinzelor din figura 6.1.a este mai mare decât în cazul grinzelor din figura 6.1.b. Comportarea diferită se explică prin schimbarea poziției secțiunii transversale față de planul forțelor.

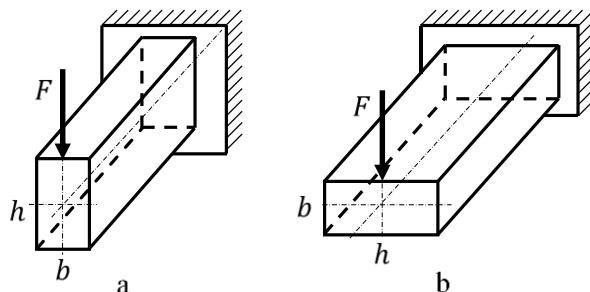


Figura 6.1. Poziția secțiunii în raport cu planul forței F

Caracteristicile geometrice ale secțiunii transversale sunt:

- aria secțiunii, notată prin A ;
- momentul static în raport cu o axă, notat S_z și respectiv S_y ;
- momentul de inerție, care poate fi:
 - axial, notat I_z și respectiv I_y ,
 - centrifugal, notat I_{zy} ,
 - polar, notat I_p ,
 - raza de inerție (girătie), notată i_z și respectiv i_y ;
 - modulul de rezistență care poate fi:
- axial, notat W_z și respectiv W_y ,
- polar, notat W_p .

6.2. Aria și momentul static al suprafețelor plane

Se consideră suprafața plană de arie A raportată la un sistem de axe rectangulare zOy , figura 6.2. Se notează prin G centrul de greutate al suprafeței A și cu dA un element de suprafață. Poziția elementului de suprafață dA față de același sistem de coordonate zOy este dată de: abscisa z , ordonata y și raza polară ρ .

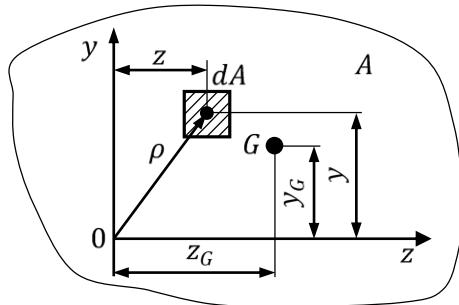


Figura 6.2. Definirea momentului static și aria

Aria suprafeței A , figura 6.2., se definește prin relația:

$$A = \int_A dA \quad (6.1.)$$

Aria suprafeței este întotdeauna pozitivă și se măsoară în $[mm^2]$.

Prin definiție, **momentul static** al suprafeței de arie A , în raport cu axele Oz și respectiv Oy , figura 6.2., care nu trec prin centrul de greutate G al secțiunii, sunt date de relațiile:

$$S_z = \int_A y \cdot dA ; \quad S_y = \int_A z \cdot dA \quad (6.2.)$$

unde, y și z sunt coordonatele elementului de arie dA față de sistemul de axe zOy iar A este aria totală a secțiunii.

Momentul static al suprafeței de arie A , poate fi *pozitiv, negativ sau nul* și se măsoară în $[mm^3]$.

Coordonatele centrului de greutate al suprafeței de arie A se determină cu relațiile:

$$z_G = \frac{S_y}{A} = \frac{1}{A} \cdot \int_A z \cdot dA ; \quad y_G = \frac{S_z}{A} = \frac{1}{A} \cdot \int_A y \cdot dA \quad (6.3.)$$

Dacă se cunosc coordonatele z_G și y_G ale centrului de greutate G a secțiunii A atunci, momentele statice se pot determina cu relațiile:

$$S_z = \int_A y \cdot dA = y_G \cdot dA ; \quad S_y = \int_A z \cdot dA = z_G \cdot dA \quad (6.4.)$$

Adică: *momentul static al unei suprafețe în raport cu o axă este egal cu produsul dintre aria suprafeței și distanța de la centrul de greutate al secțiunii la axa respectivă.*

Dacă suprafața se descompune în n suprafețe simple, la care se cunosc ariile $(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n)$ și pozițiile centrelor de greutate G_i față de sistemul de referință, expresiile momentelor statice vor avea următoarea formă:

$$S_z = \sum_{i=1}^n y_{G_i} \cdot A_i = y_G \cdot A ; \quad S_y = \sum_{i=1}^n z_{G_i} \cdot A_i = z_G \cdot A \quad (6.5.)$$

Din relațiile (6.5.), se observă că poziția centrului de greutate G al unei suprafețe compuse se determină cu relațiile:

$$z_G = \frac{1}{A} \cdot \left(\sum_{i=1}^n z_{G_i} \cdot A_i \right) ; \quad y_G = \frac{1}{A} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_{G_i} \cdot A_i \right) \quad (6.6.)$$

În relațiile (6.5.) și respectiv (6.6.) z_{G_i} și respectiv y_{G_i} , reprezintă coordonatele centrelor de greutate G_i ale fiecărei suprafețe simple A_i în raport cu sistemul de axe zOy , iar A este aria totală a secțiunii elementului de rezistență.

Dacă axele sistemului de referință trec prin centrul de greutate al secțiunii ($y_G = z_G = 0$), momentele statice ale suprafeței sunt nule. Axele în raport cu care momentele statice sunt nule și trec prin centrul de greutate al suprafeței se numesc **axe centrale**.

Dacă secțiunea compusă are o axă de simetrie, centrul de greutate al secțiunii se găsește pe acea axă iar dacă secțiunea este dublu simetrică, poziția centrului de greutate al secțiunii se găsește la intersecția axelor de simetrie.

6.3. Momente de inerție ale suprafețelor plane

Momentele de inerție axiale ale unei suprafețe plane, se calculează în raport cu axele sistemului de coordonate Oz și respectiv Oy , figura 6.2. Se determină cu relațiile:

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA ; \quad I_y = \int_A z^2 \cdot dA \quad (6.7.)$$

unde, y și z sunt coordonatele elementului de arie dA față de sistemul de axe zOy .

Momentele de inerție axiale se măsoară în $[mm^4]$ și sunt întotdeauna pozitive.

Momentele de inerție axiale se calculează de regulă pentru axele centrale (care trec prin centrul secțiunii), deoarece în raport cu aceste axe I_z și I_y au valori minime.

Momentul de inerție centrifugal calculat față ambele axe ale sistemului de referință zOy , este definit de relația:

$$I_{zy} = \int_A z \cdot y \cdot dA \quad (6.8.)$$

Momentul de inerție centrifugal se măsoară în $[mm^4]$ și poate fi *pozitiv, negativ sau nul*. Momentul de inerție centrifugal este nul $I_{zy} = 0$, dacă cel puțin una din axele de coordonate Oz sau Oy este axă de simetrie pentru secțiune.

Momentul de inerție polar al unei suprafețe în raport cu un pol O , figura 6.2., este definit prin relația:

$$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_A (y^2 + z^2) \cdot dA = \int_A z^2 \cdot dA + \int_A y^2 \cdot dA = I_z + I_y \quad (6.9.)$$

unde ρ este distanța de la polul O la elementul de arie dA , figura 6.2. Momentul de inerție polar se măsoară în $[mm^4]$ și este întotdeauna pozitiv.

Momentul de inerție polar este egal cu suma momentelor de inerție față de două axe perpendiculare oarecare și care trec prin polul considerat.

Raza de girozitate (inerție) a suprafeței de arie A , sunt mărimi calculate în raport cu axele secțiunii Oz și respectiv Oy , fiind definite cu ajutorul relațiilor:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} ; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (6.10.)$$

Razele de girozitate (inerție) se exprimă în $[mm]$ și sunt întotdeauna pozitive.

6.4. Modulul de rezistență al suprafețelor plane

Se numește modulul de rezistență al unei suprafețe de arie dA în raport cu o axă sau în raport cu un pol, figura 6.2., raportul dintre momentul de inerție și distanța maximă de la marginea secțiunii la axa respectivă. Modulul de rezistență poate fi: axial (W_z sau W_y) și polar (W_p). Modulul de rezistență se determină cu relațiile:

$$W_{z_{min}} = \frac{I_z}{|y_{max}|} ; \quad W_{z_{max}} = \frac{I_z}{|y_{min}|} \quad (6.11.)$$

$$W_{y_{min}} = \frac{I_y}{|z_{max}|}; \quad W_{y_{max}} = \frac{I_y}{|z_{min}|} \quad (6.12.)$$

$$W_p = \frac{I_p}{|\rho_{max}|} \quad (6.13.)$$

unde:

- y_{max}, y_{min} reprezintă distanța de la axa Gz la punctele extreme cele mai depărtate, respectiv cele mai apropiate ale suprafeței de această axă (Gz);
- z_{max}, z_{min} reprezintă distanța de la axa Gy la punctele extreme cele mai depărtate, respectiv cele mai apropiate ale suprafeței de această axă (Gy);
- ρ_{max} reprezintă distanța maximă de la polul O la punctul secțiunii cel mai îndepărtat de acesta.

Modulele de rezistență se exprimă în $[mm^3]$ și sunt întotdeauna pozitive. În cazul suprafețelor compuse, modulul de rezistență **nu** se calculează prin însumarea algebrică a modulelor de rezistență ale suprafețelor simple.

6.5. Variația momentelor de inerție față de axe paralele

Se consideră suprafața de arie A cu elementul de arie dA . Fie sistemul de axe central zGy față de care se cunosc momentele de inerție ale suprafeței în raport cu axele centrale (I_z, I_y, I_{zy}) și un sistem de axe (z_1Oy_1) paralel cu sistemul central, figura 6.3.

Se vor determina momentele de inerție $I_{z_1}, I_{y_1}, I_{z_1y_1}$ față de sistemul de axe paralel (z_1Oy_1) cu sistemul central (zOy), axe aflate la distanțele $y_G = c$ și $z_G = d$.

Pe baza relațiilor de definiție (6.7.) și a notărilor din figura 6.3., pentru momentele de inerție axiale față de axele Oz_1 și respectiv Oy_1 se poate scrie:

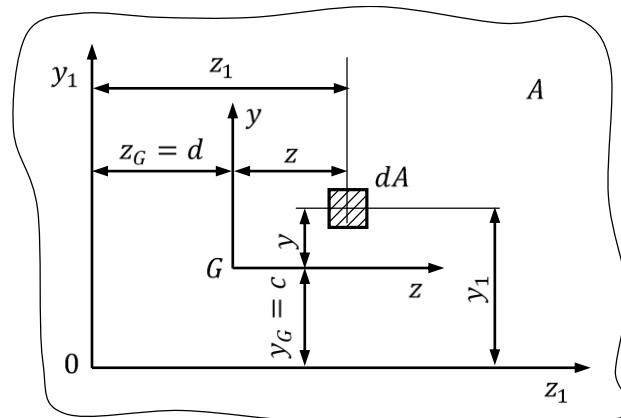


Figura 6.3. Variația momentelor de inerție față de axe paralele

- pentru momentul de inerție axial în raport cu axa Oz_1 :

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 \cdot dA = \int_A (y + c)^2 \cdot dA = \int_A y^2 \cdot dA + 2 \cdot c \cdot \int_A y \cdot dA + \\ + c^2 \cdot \int_A dA = I_z + 2 \cdot c \cdot S_z + c^2 \cdot A \Leftrightarrow I_{z_1} = I_z + c^2 \cdot A \quad (6.14.)$$

$$+c^2 \cdot \int_A dA = I_z + 2 \cdot c \cdot S_z + c^2 \cdot A \Leftrightarrow I_{z_1} = I_z + c^2 \cdot A$$

• pentru momentul de inerție axial în raport cu axa Oy_1 :

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 \cdot dA = \int_A (z + d)^2 \cdot dA = \int_A z^2 \cdot dA + 2 \cdot d \cdot \int_A z \cdot dA + \\ + d^2 \cdot \int_A dA = I_y + 2 \cdot d \cdot S_y + d^2 \cdot A \Leftrightarrow I_{y_1} = I_y + d^2 \cdot A \quad (6.15.)$$

$$+d^2 \cdot \int_A dA = I_y + 2 \cdot d \cdot S_y + d^2 \cdot A \Leftrightarrow I_{y_1} = I_y + d^2 \cdot A$$

• pentru momentul de inerție centrifugal $I_{z_1y_1}$, se obține:

$$I_{z_1y_1} = \int_A y_1 \cdot z_1 \cdot dA = \int_A (y + c) \cdot (z + d) \cdot dA = \\ = \int_A y \cdot z \cdot dA + c \cdot \int_A z \cdot dA + d \cdot \int_A y \cdot dA + c \cdot d \cdot \int_A dA = \\ = I_{zy} + c \cdot S_y + d \cdot S_z + c \cdot d \cdot A \Leftrightarrow I_{z_1y_1} = I_{zy} + c \cdot d \cdot A \quad (6.16.)$$

În relațiile de mai sus, s-a ținut cont de:

$$\int_A z \cdot dA = S_y = 0; \int_A y \cdot dA = S_z = 0; \int_A y \cdot z \cdot dA = I_{zy}; \int_A dA = A$$

În literatura de specialitate, relațiile (6.14.), (6.15.) și (6.16.) sunt cunoscute sub numele de **relațiile lui Steiner** sau **teoremele lui Huygens**.

Observații:

➤ momentele de inerție minime se obțin pentru $c = 0$ și $d = 0$:

$$I_{z_1,min} = I_z; I_{y_1,min} = I_y; I_{z_1y_1,min} = I_{zy} \quad (6.17.)$$

➤ pentru o secțiune cu suprafață complexă, se descompune suprafața complexă în suprafețe simple pentru care se cunosc momentele de inerție axiale.

Relațiile de calcul pentru momentele de inerție centrale sunt:

$$\begin{aligned} I_z &= \sum_{i=1}^n (I_{z_i} + c_i^2 \cdot A_i) \\ I_y &= \sum_{i=1}^n (I_{y_i} + d_i^2 \cdot A_i) \\ I_{zy} &= \sum_{i=1}^n (I_{z_i y_i} + c_i \cdot d_i \cdot A_i) \end{aligned} \quad (6.18.)$$

unde:

- I_z, I_y, I_{zy} , reprezintă momentele de inerție centrale pentru suprafața simplă;
- c_i, d_i , sunt distanțele dintre axele centrale proprii fiecărei suprafețe simple și axele z și respectiv y ale sistemului central de axe al suprafeței complexe:
➤ pentru secțiunea formată din goluri și plinuri, se consideră **conventional** semnul minus pentru caracteristicile geometrice ale suprafețelor „vide” (goluri).

6.6. Variația momentelor de inerție față de axe rotite

Se consideră suprafața plană din figura 6.4. de arie A , cu suprafața elementară de arie dA . Pentru sistemul de axe zOy , se cunosc momentele de inerție I_z, I_y, I_{zy} și se vor determina relațiile de calcul pentru momentele de inerție aferente unui sistem de axe z_1Oy_1 rotit cu un unghi α față de sistemul central.

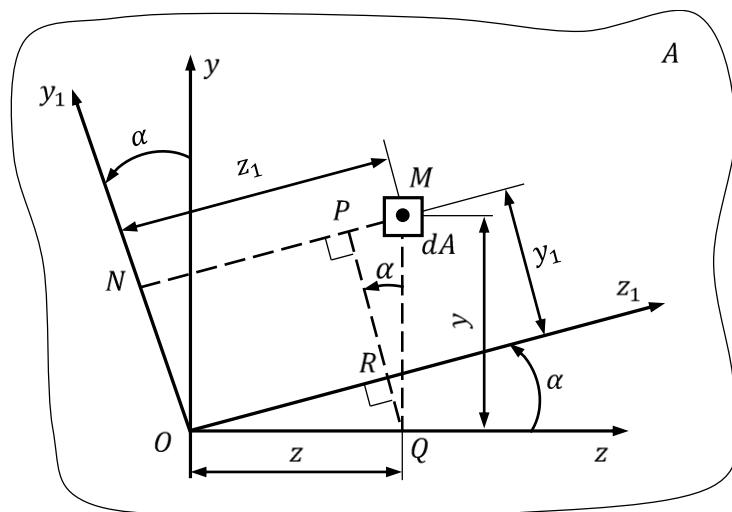


Figura 6.4. Variația momentelor de inerție față de axe rotite

Față de sistemul de axe z_1Oy_1 , elementul de arie dA , are coordonatele:

$$\begin{aligned} y_1 &= PR = PQ - RQ = y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha \\ z_1 &= NM = NP + PM = z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad (6.19.)$$

Folosind relațiile de calcul ale momentului de inerție axial (6.7.) și centrifugal (6.8.), notațiile din figura 6.4. și relațiile (6.19.), momentele de inerție față de sistemul de axe rotit z_1Oy_1 , sunt:

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= \int_A y_1^2 \cdot dA = \int_A (y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha)^2 \cdot dA = \\ &= \int_A (y^2 \cdot \cos^2 \alpha - 2 \cdot y \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + z^2 \cdot \sin^2 \alpha) \cdot dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= \int_A z_1^2 \cdot dA = \int_A (z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)^2 \cdot dA = \\ &= \int_A (z^2 \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot y \cdot z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + y^2 \cdot \sin^2 \alpha) \cdot dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{z_1y_1} &= \int_A y_1 \cdot z_1 \cdot dA = \int_A (y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha) \cdot (z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha) \cdot dA = \\ &= \int_A (y \cdot z \cdot \cos^2 \alpha - z^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + y^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - y \cdot z \cdot \sin^2 \alpha) \cdot dA \end{aligned}$$

Se ține cont de relațiile:

$$\int_A y^2 \cdot dA = I_z; \quad \int_A z^2 \cdot dA = I_y; \quad \int_A y \cdot z \cdot dA = I_{zy}$$

expresiile momentelor de inerție axial și centrifugal față de noile axe devin:

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= I_z \cdot \cos^2 \alpha - I_{zy} \cdot \sin 2\alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha \\ I_{y_1} &= I_z \cdot \sin^2 \alpha + I_{zy} \cdot \sin 2\alpha + I_y \cdot \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (6.20.)$$

Dacă în relațiile (6.20) se înlocuiesc $\sin^2 \alpha$ și $\cos^2 \alpha$ cu relațiile:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

se obțin relațiile aferente momentelor de inerție față de sistemul de axe rotit:

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - I_{zy} \cdot \sin 2\alpha \\ I_{y_1} &= \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \cos 2\alpha + I_{zy} \cdot \sin 2\alpha \\ I_{z_1 y_1} &= \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{zy} \cdot \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (6.21.)$$

Din relațiile (6.21.), se observă că:

$$I_{z_1} + I_{y_1} = I_z + I_y = I_p \quad (6.22.)$$

adică, suma momentelor de inerție axiale în raport cu orice pereche de axe ortogonale care trec printr-un pol dat, este o constantă și este egală cu momentul de inerție polar.

6.7. Direcții principale de inerție. Momente de inerție principale

Momentele de inerție axiale date de relațiile (6.21.) sunt funcții de unghiul 2α . Axele în raport cu care momentele de inerție axiale au valori extreme se numesc **axe principale de inerție** iar momentele de inerție se numesc **momente de inerție principale**.

Unghiul α se obține prin anularea derivatei funcției I_{z_1} în raport cu unghiul 2α :

$$\begin{aligned} \frac{dI_{z_1}}{d(2\alpha)} &= \frac{d}{d(2\alpha)} \left(\frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - I_{zy} \cdot \sin 2\alpha \right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot (I_z - I_y) \cdot \sin 2\alpha - I_{zy} \cdot \cos 2\alpha &= 0 \Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{2 \cdot I_{zy}}{I_z - I_y} \end{aligned}$$

deci, unghiul care anulează derivata este:

$$\tan 2\alpha = -\frac{2 \cdot I_{zy}}{I_z - I_y} = \frac{2 \cdot I_{zy}}{I_y - I_z} \quad (6.23.)$$

Unghiul α_1 pentru care momentele de inerție prezintă valori extreme este:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(-\frac{2 \cdot I_{zy}}{I_z - I_y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{2 \cdot I_{zy}}{I_y - I_z} \right) \quad (6.24.)$$

Pozitia celeilalte direcții este perpendiculară pe cea dată de unghiul α_1 :

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2} \quad (6.25.)$$

Față de direcțiile rotite pentru care momentul de inerție axial are valori extreme, momentul de inerție centrifugal este nul ($I_{z_1y_1} = 0$). Se poate afirma că: *momentele de inerție axiale au valori extreme în raport cu direcțiile față de care momentul de inerție centrifugal este nul*. Aceste direcții se numesc **direcții principale**, iar momentele de inerție față de aceste direcții poartă numele de **momente de inerție principale**.

Direcțiile principale de inerție se notează cu **1** și **2**. Axa principală 1 corespunde direcției în care momentul de inerție principal are valoarea maximă, iar axa principală 2 pentru direcția față de care momentul de inerție principal are valoarea minimă.

Momentele de inerție principale se notează cu litera I , la care se adaugă indicele 1 sau 2, după cum valoarea acestuia este maximă sau minimă.

Pentru a calcula expresiile momentelor de inerție principale, se calculează $\sin 2\alpha$ și $\cos 2\alpha$ din relația (6.23.) și se înlocuiesc în prima relație din (6.21.):

$$\sin 2\alpha = \pm \frac{\tan 2\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}} = \pm \frac{2 \cdot I_{zy}}{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2}}$$

$$\cos 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}} = \pm \frac{I_y - I_z}{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2}}$$

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \frac{I_z - I_y}{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2}} \mp I_{zy} \cdot \frac{2 \cdot I_{zy}}{\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2}}$$

După efectuarea calculelor se obține:

$$I_{1,2} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2} \quad (6.26.)$$

Dacă în fața radicalului se consideră semnul „+” se obține momentul axial maxim I_1 , iar cu semnul „-“ se obține momentul axial minim I_2 . Pentru suprafețele cu o axă de simetrie, direcțiile centrale (Gz , Gy) sunt direcții principale de inerție iar momentele de inerție axiale (I_z , I_y) sunt momente de inerție principale.

6.8. Caracteristici geometrice pentru suprafețe plane simple

6.8.1. Secțiunea dreptunghiulară

Se consideră suprafața dreptunghiulară din figura 6.5., de înălțime h și lățime b . Suprafața elementară de arie $dA = b \cdot dy$ este situată la distanța y de axa Gz . Sistemul de axe zGy trece prin centrul secțiunii iar axele y și z sunt axe de simetrie.

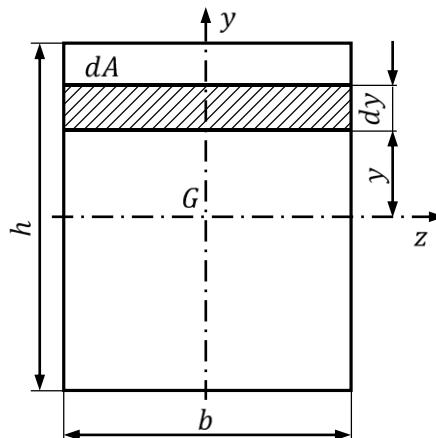


Figura 6.5. Suprafața dreptunghiulară

Pe baza relațiilor de definiție a momentului de inerție I_z , (6.7.) se obține:

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot (b \cdot dy) = 2 \cdot \int_0^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = \\ &= 2 \cdot b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^{h/2} \Rightarrow I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} \end{aligned} \quad (6.27.)$$

Analog, pentru $dA = h \cdot dz$, paralel cu axa Gy situat la distanța z de axa Gy :

$$\begin{aligned}
I_y &= \int_A z^2 \cdot dA = \int_{-b/2}^{b/2} z^2 \cdot (h \cdot dz) = 2 \cdot \int_0^{b/2} z^2 \cdot h \cdot dz = \\
&= 2 \cdot h \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_0^{b/2} \Rightarrow I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}
\end{aligned} \tag{6.28.}$$

Deoarece Gz și Gy sunt axe de simetrie, momentul de inerție centrifugal este:

$$I_{zy} = 0 \tag{6.29.}$$

Modulele de rezistență axiale se calculează cu relațiile (6.11.) și (6.12.), ținând cont de distanțele până la fibrele extreme:

$$y_{max} = y_{min} = \frac{h}{2}; \quad z_{max} = z_{min} = \frac{b}{2}$$

se obține:

$$\begin{aligned}
W_{z,min} = W_{z,max} &= \frac{I_z}{|y_{max,min}|} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^2}{6} \\
W_{y,min} = W_{y,max} &= \frac{I_y}{|z_{max,min}|} = \frac{\frac{b^3 \cdot h}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{b^2 \cdot h}{6}
\end{aligned} \tag{6.30.}$$

Particularizând relațiile (6.27.), (6.28.) și (6.30.) pentru pătrat cu latura ($h = b = a$), momentele de inerție față de axele centrale și modulele de rezistență au expresia:

$$\begin{aligned}
I_z = I_y &= \frac{a^4}{12}; \quad I_{zy} = 0 \\
W_{z,min/max} = W_{y,min/max} &= \frac{a^3}{6}
\end{aligned} \tag{6.31.}$$

6.8.2. Secțiunea circulară

Se consideră secțiunea circulară plină, având diametrul d și centrul de greutate G . Prin centrul de greutate G trece sistemul de axe ortogonal zGy , figura 6.6.

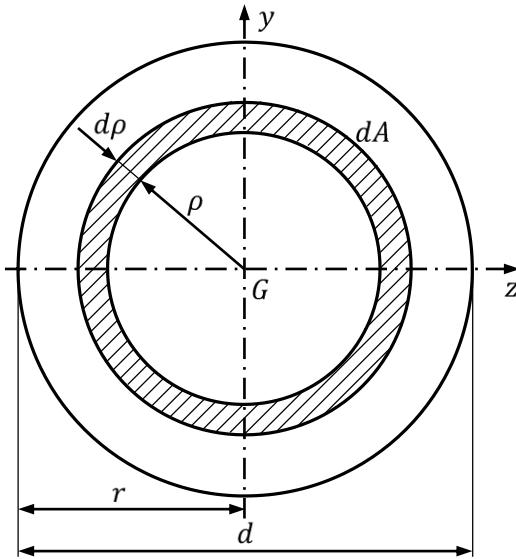


Figura 6.6. Suprafață circulară plină

La distanța ρ de centrul de greutate G se consideră un element de suprafață infinit mic de arie (dA), de forma unui inel de grosime $d\rho$. Elementul de arie dA are expresia:

$$dA = (2 \cdot \pi \cdot \rho) \cdot (d\rho)$$

Se pornește de la relația de calcul a momentului de inerție polar, relația (6.9.):

$$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_0^{d/2} \rho^2 \cdot [(2 \cdot \pi \cdot \rho) \cdot d\rho] = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{d/2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \quad (6.32.)$$

Secțiunea este simetrică, deci sunt valabile relațiile:

$$I_z = I_y \Rightarrow I_p = I_z + I_y = 2 \cdot I_z = 2 \cdot I_y \Rightarrow I_z = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \quad (6.33.)$$

Modulele de rezistență, față de orice diametru sunt egale între ele și se calculează cu relațiile:

$$W_z = W_y = \frac{I_z}{y_{max,min}} = \frac{I_y}{z_{max,min}} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \quad (6.34.)$$

Modulul de rezistență polar este:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}} = \frac{\frac{\pi \cdot d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \quad (6.35.)$$

6.8.3. Secțiunea inelară

Calculul momentelor de inerție axiale pentru o secțiune inelară având diametrul interior d și diametrul exterior D , se determină ca în cazul suprafeței circulare pline. Integrala pentru calculul momentului de inerție polar I_p , este între limitele: $r = d/2$ și $R = D/2$ (raza interioară r și raza exterioară R), figura 6.7.

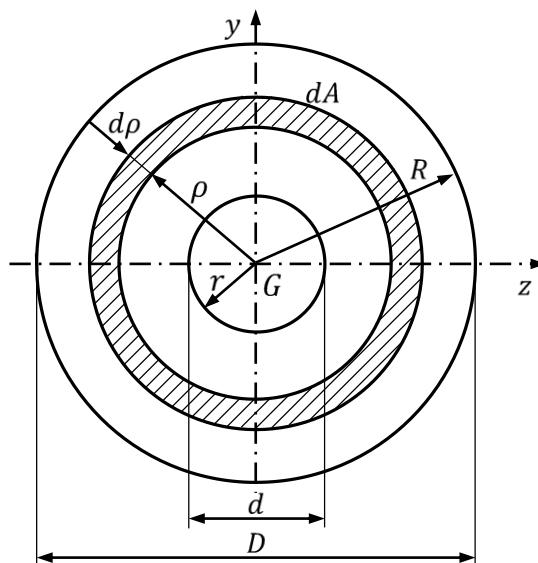


Figura 6.7. Suprafața inelară

Se obțin relațiile:

$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot (1 - k^4) \quad (6.36.)$$

$$I_z = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot (1 - k^4) \quad (6.37.)$$

$$W_p = \frac{I_p}{D} = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot (1 - k^4) \quad (6.38.)$$

$$W_z = W_y = \frac{I_z}{D} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - k^4) \quad (6.39.)$$

unde $k = d/D$.

6.9. Aplicație

Pentru suprafața compusă din două dreptunghiuri având dimensiunile din figura 6.8.a, să se calculeze:

- a) centrul de greutate al secțiunii compuse y_G, z_G ;
- b) momentele de inerție axiale I_z, I_y și momentul de inerție centrifugal I_{zy} ;
- c) razele de inerție i_z, i_y ;
- d) modulele de rezistență $W_{z,min}, W_{z,max}, W_{y,min}, W_{y,max}$;
- e) momentele de inerție principale I_1, I_2 și direcțiile principale de inerție α_1, α_2 ;
- f) momentul static al tălpiei de sus față de axa centrală Gz, S_z .

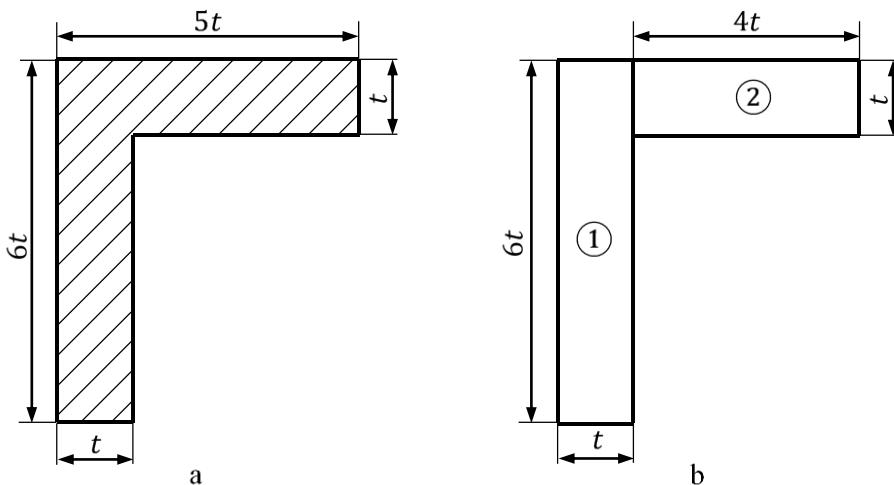


Figura 6.8. Aplicație

Rezolvare:

Pentru rezolvarea problemei se vor parcurge următoarele etape:

- se descompune suprafața compusă în două suprafete simple (dreptunghiuri), notate cu ① și respectiv ②, figura 6.8.b;
- se poziționează centrele de greutate G_1 și respectiv G_2 , figura 6.9.a;
- se poziționează sistemele axelor de coordonate $z_1 G_1 y_1$ pentru dreptunghiul ① și $z_2 G_2 y_2$ pentru dreptunghiul ②, aflate la intersecția diagonalelor, figura 6.9.a;
- se poziționează sistemul de axe de coordonate $z_0 O y_0$, ales arbitrar, față de care determinăm poziția centrului de greutate G , figura 6.9.a;

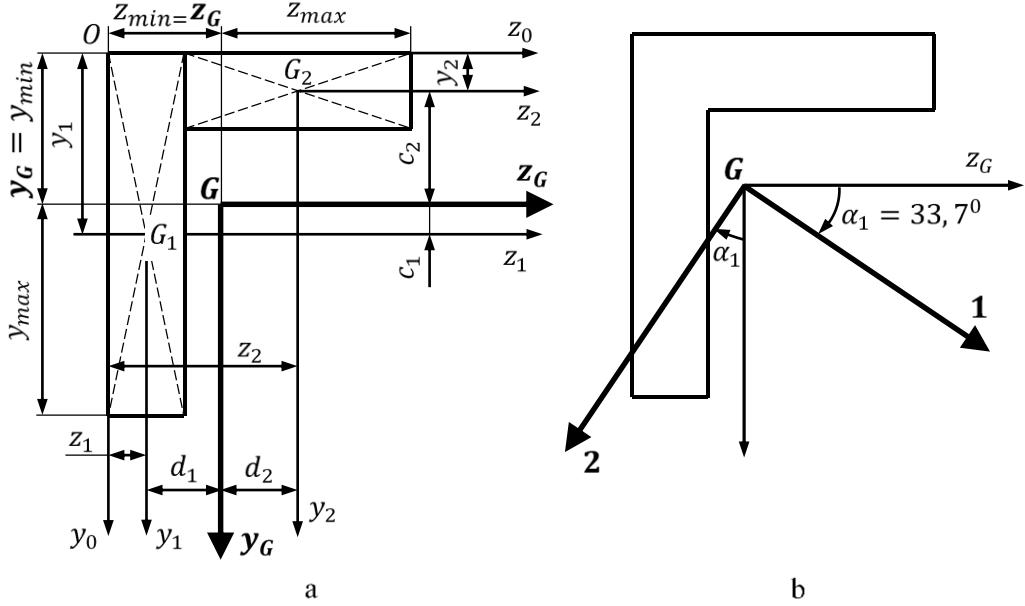


Figura 6.9. Aplicație

a) se calculează poziția centrului de greutate folosind relațiile (6.6.), în care:

$$A_1 = 6t \cdot t = 6t^2; \quad A_2 = 4t \cdot t = 4t^2; \quad A = A_1 + A_2 = 6t^2 + 4t^2 = 10t^2$$

iar centrele de greutate G_1 și respectiv G_2 au coordonatele (față de sistemul z_0Oy_0):

$$G_1: \begin{cases} y_1 = 3t \\ z_1 = 0,5t \end{cases}; \quad G_2: \begin{cases} y_2 = 0,5t \\ z_2 = t + 2t = 3t \end{cases}$$

se obține:

$$y_G = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A} = \frac{6t^2 \cdot 3t + 4t^2 \cdot 0,5t}{10t^2} = \frac{20t^3}{10t^2} = 2t$$

$$z_G = \frac{A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2}{A} = \frac{6t^2 \cdot 0,5t + 4t^2 \cdot 3t}{10t^2} = \frac{15t^3}{10t^2} = 1,5t$$

Se poziționează centrul de greutate G al suprafeței compuse, figura 6.9.a.

b) pentru determinarea momentelor de inerție axiale I_z, I_y și a momentului de inerție centrifugal I_{yz} , se determină constantele c_1, c_2, d_1, d_2 , din relațiile lui Stainer:

$$c_1 = y_1 - y_G = 3t - 2t = t; \quad c_2 = -(y_G - y_2) = -(2t - 0,5t) = -1,5t$$

$$d_1 = -(z_G - z_1) = -(1,5t - 0,5t) = -t; \quad d_2 = z_2 - z_G = 3t - 1,5t = 1,5t$$

Folosind relațiile lui Stainer (6.18.) se calculează momentele de inerție axiale și centrifugale față de sistemul central $z_G Gy_G$:

$$I_z = \sum (I_{z_i} + c_i^2 \cdot A_i) = I_{z_1} + c_1^2 \cdot A_1 + I_{z_2} + c_2^2 \cdot A_2$$

$$I_y = \sum (I_{y_i} + d_i^2 \cdot A_i) = I_{y_1} + d_1^2 \cdot A_1 + I_{y_2} + d_2^2 \cdot A_2$$

$$I_{zy} = \sum (I_{z_i y_i} + c_i \cdot d_i \cdot A_i) = I_{z_1 y_1} + c_1 \cdot d_1 \cdot A_1 + I_{z_2 y_2} + c_2 \cdot d_2 \cdot A_2$$

$$I_{z_1} = \left(\frac{b \cdot h^3}{12} \right) = \frac{t \cdot (6t)^3}{12} = 18,0t^4; \quad I_{z_2} = \left(\frac{b \cdot h^3}{12} \right) = \frac{4t \cdot t^3}{12} = 0,3t^4$$

$$I_{y_1} = \left(\frac{b^3 \cdot h}{12} \right) = \frac{t^3 \cdot 6t}{12} = 0,5t^4; \quad I_{y_2} = \left(\frac{b^3 \cdot h}{12} \right) = \frac{(4t)^3 \cdot t}{12} = 5,3t^4$$

$$I_{z_1 y_1} = I_{z_2 y_2} = 0, \text{ deoarece cele două dreptunghiuri au cel puțin o axă de simetrie.}$$

Cu acestea, momentele de inerție axiale și momentul de inerție centrifugal devin:

$$I_z = 18t^4 + t^2 \cdot 6t^2 + 0,3t^4 + (-1,5t)^2 \cdot 4t^2 = 33,3t^4$$

$$I_y = 0,5t^4 + (-t)^2 \cdot 6t^2 + 5,3t^4 + (1,5t)^2 \cdot 4t^2 = 20,8t^4$$

$$I_{zy} = 0 + t \cdot (-t) \cdot 6t^2 + 0 + (-1,5t) \cdot 1,5t \cdot 4t^2 = -15t^4$$

c) razele de inerție (girație) față de cele două axe centrale G_z și respectiv G_y se calculează cu relațiile (6.10.):

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{33,3t^4}{10t^2}} = 1,82t; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{20,8t^4}{10t^2}} = 1,44t$$

d) modulele de rezistență față de cele două axe centrale G_z și respectiv G_y se calculează cu relațiile (6.11.) și (6.12.).

Având în vedere figura 6.9.a, se obține:

$$y_{max} = 6t - y_G = 6t - 2t = 4t; \quad y_{min} = -y_G = -2t$$

$$z_{max} = 5t - z_G = 5t - 1,5t = 3,5t; \quad z_{min} = -z_G = -1,5t$$

Astfel, se obține:

$$W_{z_{min}} = \frac{I_z}{|y_{max}|} = \frac{33,3t^4}{4t} \cong 8,33t^3; \quad W_{z_{max}} = \frac{I_z}{|y_{min}|} = \frac{33,3t^4}{2t} = 16,65t^3$$

$$W_{y_{min}} = \frac{I_y}{|z_{max}|} = \frac{20,8t^4}{3,5t} \cong 5,94t^3; \quad W_{y_{max}} = \frac{I_y}{|z_{min}|} = \frac{20,8t^4}{1,5t} \cong 13,87t^3$$

e) momentele de inerție principale I_1 și I_2 , se calculează cu relațiile (6.26.):

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4 \cdot I_{zy}^2} = \frac{33,3t^4 + 20,8t^4}{2} \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{(33,3t^4 - 20,8t^4)^2 + 4 \cdot (-15t^4)^2} = 27,05t^4 \pm 16,25t^4 \end{aligned}$$

De unde, se obține:

$$I_1 = 27,05t^4 + 16,25t^4 = 43,3t^4$$

$$I_2 = 27,05t^4 - 16,25t^4 = 10,8t^4$$

Direcția principală 1, face cu axa centrală Gz unghiul α_1 dat de relația (6.24.):

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(-\frac{2 \cdot I_{zy}}{I_z - I_y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left[-\frac{2 \cdot (-15t^4)}{33,3t^4 - 20,8t^4} \right] \cong 33,7^\circ$$

Deoarece $\alpha_1 > 0$, rotirea axelor se face în sens orar acelor de ceasornic, figura 6.9.b. Poziția axei principale 2, față de care momentul de inerție este minim $I_2 = I_{min}$, este dată de unghiul:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ = 33,7^\circ + 90^\circ = 123,7^\circ$$

f) momentul static al tălpiei de sus față de axa centrală Gz , se determină cu relația (6.5.):

$$S_{z,A_2} = A_2 \cdot c_2 = 4t^2 \cdot (-1,5t) = -6t^3$$

Capitolul 7

ÎNTINDEREA ȘI COMPRESIUNEA MONOAXIALĂ A BARELOR DREPTE

7.1. Forță axială

În cazul barelor drepte, întinderea sau compresiunea monoaxială (centrică) este produsă de forțe care acționează în lungul axei longitudinale (axa centrelor secțiunilor transversale) numite **forțe axiale**.

Dacă în secțiunea transversală a unui element de rezistență, torsorul de reducere al forțelor interioare are o singură componentă diferită de zero, forță axială N , elementul de rezistență este solicitat la **întindere monoaxială** (dacă $N > 0$) sau la **compresiune monoaxială** (dacă $N < 0$).

Se consideră bara dreaptă încastrată la un capăt de lungime l , având secțiunea constantă, solicitată axial de forță F , figura 7.1.

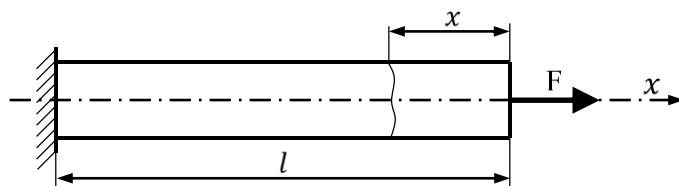


Figura 7.1. Bară dreaptă încastrată

Într-o secțiune oarecare, situată la distanța x de capătul liber al barei apare o singură componentă, forță axială N :

$$N(x) = F = \text{const.} \quad (7.1.)$$

Dacă în lungul axei barei sunt aplicate mai multe forțe, este necesară construirea diagramei forțelor axiale pentru a determina forță maximă. Într-o secțiune oarecare, forță axială este egală cu suma proiecțiilor pe axa barei a tuturor forțelor situate de o parte a secțiunii.

În figura 7.2., s-a reprezentat diagrama forțelor axiale pentru o bară încastrată la un capăt și liberă la celălalt, încărcată cu patru forțe dirijate în lungul axei.

Conform definiției, dacă se calculează forță axială într-o secțiune oarecare (între punctele C și D) adunând forțele din stânga secțiunii se obține:

$$N(x) = N_{CD} = 4F + F - 9F = -4F \quad (7.2.)$$

Din diagramă se observă că forță axială este maximă pe tronsonul DE iar reacțiunea R din încastrare este egală cu forță axială de pe tronsonul DE , $R = -6F$.

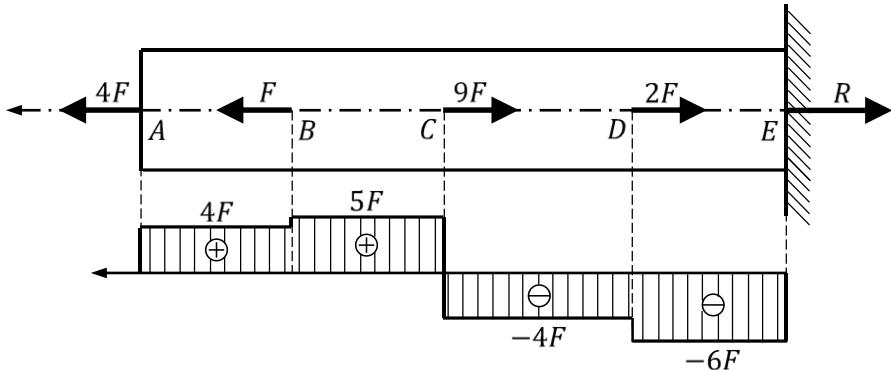


Figura 7.2. Diagrama forțelor axiale pentru o bară dreaptă încastrată

Deoarece solicitarea de compresiune nu diferă de solicitarea de întindere decât prin sensul forței axiale, relațiile de calcul sunt aceleași. Între aceste solicitări există mici deosebiri calitative care se constată la studiul barelor lungi solicitate la compresiune.

7.2. Tensiuni și deformații

Se consideră bara încastrată la un capăt solicitată la întindere, figura 7.3. Sub acțiunea forțelor exterioare F secțiunea transversală a barei BC se deplasează dar rămâne plană și normală pe axa longitudinală a barei și după deformație (ipoteza lui Bernoulli).

Toate punctele secțiunii transversale se deplasează axial cu aceeași cantitate Δx , iar deformațiile specifice date de relația $\varepsilon = \Delta x/x$ sunt constante.

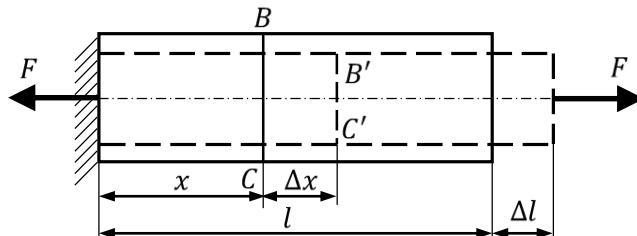


Figura 7.3. Deformații și deplasări la întindere

Prin aplicarea legii lui Hooke $\sigma = \varepsilon \cdot E$, tensiunea normală este constantă pe secțiunea transversală. Utilizând relația de echivalență din statică dintre eforturi și tensiuni, forța axială din secțiune N este rezultanta forțelor interioare elementare $dF = \sigma \cdot dA$ pe toate elementele de arie dA ale secțiunii, astfel se obține:

$$N = \int_A dF = \int_A \sigma \cdot dA = \sigma \cdot \int_A dA = \sigma \cdot A \quad (7.3.)$$

Din relația (7.3.) se obține valoarea tensiunii normale σ , dintr-o secțiune transversală a unei bare solicitată de forță axială N :

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (7.4.)$$

Relația (7.4.) reprezintă *relația fundamentală pentru calculul tensiunilor la solicitări axiale centrice* conform căreia: *mărimea tensiunii normale σ , se determină ca raport între forță axială N și aria secțiunii transversale A în care se calculează tensiunea.*

Semnificația termenilor din relația (7.4.) este următoarea:

- $\sigma [MPa = N/mm^2]$ reprezintă tensiunea normală;
- $N [N]$ reprezintă forță axială din secțiunea în care se calculează tensiunea;
- $A [mm^2]$ este aria secțiunii transversale.

Dacă materialul barei respectă legea lui Hooke și se ține cont de relația de calcul a tensiunii σ (7.4.), lungirea specifică sau scurtarea ε are expresia:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{E \cdot A} \quad (7.5.)$$

Pentru un element de bară de lungime dx , lungirea este:

$$\Delta(dx) = \varepsilon \cdot dx = \frac{N \cdot dx}{E \cdot A} \quad (7.6.)$$

de unde, pentru o bară de lungime l :

$$\Delta l = \int_l \frac{N \cdot dx}{E \cdot A} \quad (7.7.)$$

Pentru calculul integralei din relația (7.7.) se va ține cont de variația diferitelor mărimi pe intervalul de integrare. Dacă bara are formă prismatică ($A = const.$), iar E și N sunt constante pe toată lungimea barei, figura 7.3., lungirea devine:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \quad (7.8.)$$

Numitorul acestei relații ($E \cdot A$) se numește *rigiditatea la întindere* respectiv la *compresiune* a barelor. Se observă că materialul barei este mai puțin deformabil (Δl mic) cu cât rigiditatea barei este mai mare.

Pe baza relației (7.8.) se poate determina deplasarea unui punct al barei. Acest lucru se produce pe direcția axei barei, deplasarea punctului K din figura 7.4., este egală cu lungirea porțiunii KK_1 .

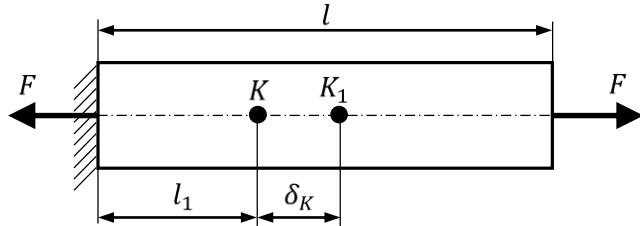


Figura 7.4. Deplasarea unui punct al barei supuse la întindere

$$\delta_K = KK_1 = \frac{N \cdot l_1}{E \cdot A} \quad (7.9.)$$

7.3. Probleme de rezistență la solicitări axiale

Pentru funcționarea corectă a unui bare, aceasta trebuie să îndeplinească condiția de rezistență. La solicitarea de tracțiune-compresiune, condiția de rezistență se exprimă prin relația:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq \sigma_a \quad (7.10.)$$

Cu ajutorul relației (7.10.), se pot rezolva cele trei probleme specifice din Rezistența Materialelor:

➤ **Problema de dimensionare** când se cunosc forța axială ce acționează asupra elementului de rezistență (bara solicitată la tracțiune sau compresiune), determinată din diagrama forțelor axiale N_{max} , și tensiunea admisibilă a materialului din care este confecționată bara σ_a sau, dacă se impune o valoare admisibilă a deformației, lungirea admisibilă Δl_a sau alungirea admisibilă ε_a .

Se determină aria secțiunii necesare A_{nec} , din cele două condiții:

- condiția de rezistență:

$$A_{nec} = \frac{N_{max}}{\sigma_a} \quad (7.11.)$$

- condiția de rigiditate:

$$A_{nec} = \frac{N_{max} \cdot l}{E \cdot \Delta l_a} = \frac{N_{max}}{E \cdot \varepsilon_a} \quad (7.12.)$$

Aria necesară presupune determinarea **dimensiunilor necesare** (minime) care, pentru o secțiune circulară cu diametrul d , diametrul necesar se va determina cu relația:

$$A_{nec} = \frac{N_{max}}{\sigma_a} = \frac{\pi \cdot d_{nec}^2}{4} \Rightarrow d_{nec} = \sqrt{\frac{4 \cdot N_{max}}{\pi \cdot \sigma_a}} \Rightarrow d_{ef} \quad (7.13.)$$

Diametrul efectiv al secțiunii circulare d_{ef} se alege din standarde la o valoare mai mare decât diametrul necesar (d_{nec}) calculat.

➤ **Problema de verificare** când se cunosc forța axială care acționează asupra elementului de rezistență (bara), determinată din diagrama forțelor axiale N_{max} și valoarea efectivă a secțiunii transversale a barei A_{ef} .

Se determină valoarea tensiunii maxime σ_{max} sau alungirea maximă ε_{max} care trebuie să fie mai mică decât tensiunea admisibilă σ_a sau alungirea admisibilă ε_a din cele două condiții:

- condiția de rezistență:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A_{ef}} \leq \sigma_a \quad (7.14.)$$

- condiția de rigiditate:

$$\varepsilon_{max} = \frac{N_{max}}{E \cdot A_{ef}} \leq \varepsilon_a \quad (7.15.)$$

sau condiția de deformabilitate care impune ca lungirea totală efectivă să nu depășească lungirea admisibilă:

$$\Delta l_{max} = \frac{N_{max} \cdot l}{E \cdot A_{ef}} \leq \Delta l_a \quad (7.16.)$$

➤ **Problema de efort capabil (încărcare capabilă)** când se cunosc aria efectivă a secțiunii elementului de rezistență A_{ef} și tensiunea admisibilă a materialului din care este confectionată bara σ_a sau, valoarea admisibilă a deformației Δl_a sau alungirea ε_a .

Se determină efortul capabil pe care îl poate suporta bara N_{cap} , din cele două condiții:

- condiția de rezistență:

$$N_{cap} = N_{max\,admis} = A_{ef} \cdot \sigma_a \quad (7.17.)$$

- condiția de rigiditate:

$$N_{cap} = N_{\max \text{admis}} = E \cdot A_{ef} \cdot \varepsilon_a = E \cdot A_{ef} \cdot \frac{\Delta l_a}{l} \quad (7.18.)$$

Relațiile stabilite sunt valabile atât pentru întindere cât și pentru compresiune. Calculele de rezistență se fac pentru secțiunea în care tensiunile sau deformațiile specifice ating valori maxime, această secțiune poartă numele de **secțiune periculoasă**.

7.4. Contrația transversală

Practica arată că, în timpul solicitării de întindere, odată cu lungirea unei bare apare o micșorare a secțiunii transversale, mărime numită **contrație transversală**, figura 7.5. La compresiune, dimensiunile secțiunii transversale se măresc și are loc fenomenul de **umflare transversală**.

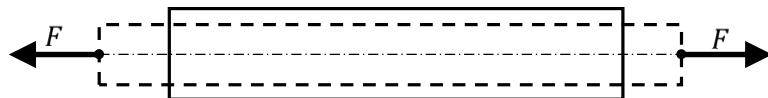


Figura 7.5. Contrația transversală

Contrația transversală este proporțională cu lungirea specifică, coeficientul de proporționalitate se notează cu ϑ și se numește **coeficient de contrație transversală** sau **coeficientul lui Poisson**.

La o lungire specifică ε a barei, contrația transversală este dată de relația:

$$\varepsilon_{tr} = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\vartheta \cdot \varepsilon_x \quad (7.19.)$$

Semnul minus (-) arată că cele două mărimi sunt contrare, dacă una crește cealaltă scade și invers.

7.5. Bare cu variații de secțiune

Barele solicitate la întindere sau compresiune se execută în general, cu secțiunea constantă pe toată lungimea lor dar, în unele cazuri, din motive constructive, piesele sunt prevăzute cu decupări, degajări sau diferite prelucrări care reduc secțiunea transversală a barei.

Efectul acestor prelucrări nu se rezumă doar la reducerea secțiunii transversale, și la o altă repartiție a tensiunilor. În secțiunea transversală cea mai mică a unei piese solicitată la întindere sau compresiune, eforturile unitare au cea mai mare valoare iar secțiunea se numește **secțiune periculoasă**, aceasta fiind secțiunea care se ia în considerare în calcule de proiectare (rezistență).

În figura 7.6.a, se prezintă un element de rezistență (piesă) de secțiune constantă având lățimea b și grosimea t solicitată la întindere, în care este practicată o gaură de diametru d , secțiunea RS din dreptul găurii fiind secțiunea periculoasă.

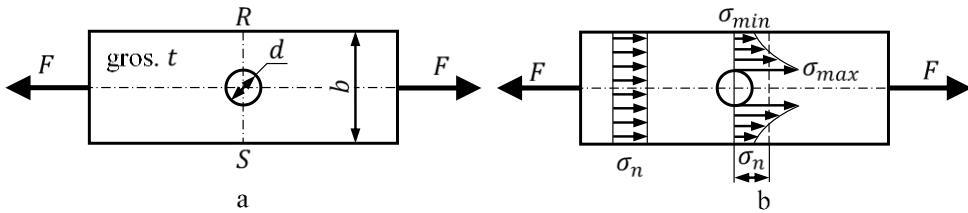


Figura 7.6. Element de rezistență cu secțiunea redusă

Secțiunea brută are aria:

$$A_b = b \cdot t \quad (7.20.)$$

Tensiunile în secțiunea slabită datorită găurii de diametru d , se numesc **tensiuni nominale** și se determină cu relația:

$$\sigma_n = \frac{N}{A_{min}} = \frac{F}{(b - d) \cdot t} \quad (7.21.)$$

Relația (7.21.) este relația de bază pentru dimensionarea (calculul) elementelor de rezistență cu variație de secțiune solicitată la întindere sau compresiune. Repartiția reală a tensiunilor într-o secțiune nu este uniformă, figura 7.6.b, valorile σ_{max} și σ_{min} încadrează între ele tensiunea nominală σ_n . Creșterea bruscă a tensiunii normale se extinde numai asupra unei porțiuni reduse din imediata vecinătatea a găurii, pe restul secțiunii tensiunea normală rămâne aproximativ egală cu σ_n .

Astfel de creșteri ale tensiunii normale se produc în cazul crestăturilor, canalelor de pană, găuri pentru bolțuri, filete etc. Aceste discontinuități din elementele de rezistență se numesc **concentratori de tensiune**.

Raportul dintre tensiunea locală maximă σ_{max} și tensiunea nominală σ_n se numește **coeficient de concentrare a tensiunii** α_k :

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \quad (7.22.)$$

Dacă se cunoaște pentru un concentrator de tensiune, valoarea coeficientului de concentrare a tensiunii (din literatura de specialitate), se poate calcula valoarea maximă a tensiunii din imediata vecinătatea a concentratorului.

7.6. Tensiuni și deformații ținând cont de greutatea proprie

În calcule de rezistență aproape întotdeauna efectul greutății proprii este neglijabil. În cazul barelor de lungime mare, aflate în poziție verticală (prăjini de foraj, stâlpi înalți, turnuri etc.) trebuie să se țină cont și de greutatea proprie.

Se consideră bara verticală de lungime l , având aria secțiunii transversale A , modulul de elasticitate longitudinal E (rigiditate constantă $E \cdot A = ct.$), confectionată dintr-un material omogen cu greutatea specifică γ . Bara este solicitată de forță axială F , figura 7.7.

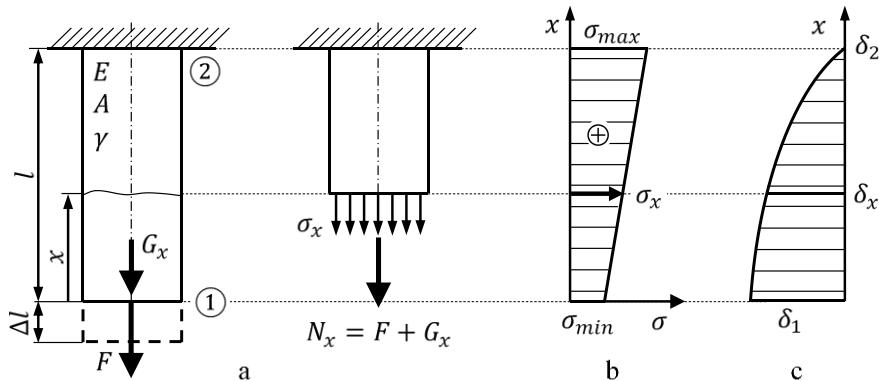


Figura 7.7. Bară dreaptă ținând cont de greutatea proprie

Într-o secțiune oarecare x , forța axială se calculează cu relația:

$$N_x = F + G_x \quad (7.23.)$$

unde G_x reprezintă greutatea porțiunii de lungime x a barei egală cu:

$$G_x = A \cdot \gamma \cdot x \quad (7.24.)$$

Forța axială devine:

$$N_x = F + A \cdot \gamma \cdot x \quad (7.25.)$$

Se observă că N_x are o variație liniară (variabila x), cu valorile în extremitățile barei:

$$N_1 = N_x \Big|_{x=0} = F \quad (7.26.)$$

$$N_2 = N_x \Big|_{x=l} = F + A \cdot \gamma \cdot l = F + G$$

Tensiunea normală din secțiunea respectivă este:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = \frac{F}{A} + \frac{A \cdot \gamma \cdot x}{A} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot x \quad (7.27.)$$

Din relația (7.27.) se observă că, tensiunea normală variază liniar în lungul barei având extretele, figura 7.7.b:

$$\begin{aligned}\sigma_{min} &= \sigma_x \Big|_{x=0} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot 0 = \frac{F}{A} \\ \sigma_{max} &= \sigma_x \Big|_{x=l} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot l = \sigma_{min} + \gamma \cdot l\end{aligned}\quad (7.28.)$$

Se constată că secțiunea periculoasă este în încastrare unde, pentru verificarea condiției de rezistență este necesar ca:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot l \leq \sigma_a \quad (7.29.)$$

Pentru dimensionare, din relația (7.29.) se obține:

$$A_{nec} = \frac{F}{\sigma_a - \gamma \cdot l} \quad (7.30.)$$

Sub acțiunea forței exterioare F și a greutății proprii G bara se lungește dar, deformația specifică nu mai este constantă în lungul barei. Lungirea totală a barei va fi:

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon_x \cdot dx = \int_0^l \frac{\sigma_x}{E} \cdot dx = \frac{1}{E} \cdot \int_0^l \left(\frac{F}{A} + \gamma \cdot x \right) \cdot dx = \frac{l}{E \cdot A} \cdot \left(F + \frac{G}{2} \right)$$

Deci, lungirea barei este:

$$\Delta l = \frac{\left(F + \frac{G}{2} \right) \cdot l}{E \cdot A} \quad (7.31.)$$

Dacă bara nu este supusă forțelor exterioare $F = 0$ atunci, sub greutatea proprie, lungirea ei devine:

$$\Delta l = \frac{G \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} \quad (7.32.)$$

Se poate calcula deplasarea fiecărei secțiuni situate la distanța x de capătul liber δ_x , care este egală cu lungirea părții de bară de deasupra ei. Aceasta se determină din lungirea segmentului dx care se integrează în limitele x și l :

$$\begin{aligned}\delta_x &= \int_x^l \varepsilon_x \cdot dx = \frac{1}{E} \cdot \int_x^l \left(\frac{F}{A} + \gamma \cdot x \right) \cdot dx = \\ &= \frac{1}{E} \cdot \left[\frac{F}{A} \cdot (l - x) + \frac{\gamma}{2} \cdot (l^2 - x^2) \right]\end{aligned}\quad (7.33.)$$

Deplasarea axială variază după o lege parabolică, figura 7.7.c, cu extretele:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \delta_x \Big|_{x=0} = \frac{F \cdot l}{E \cdot A} + \frac{\gamma \cdot l^2}{2 \cdot E} \\ \delta_2 &= \delta_x \Big|_{x=l} = 0\end{aligned}\quad (7.34.)$$

Dacă bara ar fi solicitată numai de greutatea proprie, variația tensiunii normale în lungul barei se obține din relația (7.27.) pentru $F = 0$:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = \gamma \cdot x \quad (7.35.)$$

Având valoarea maximă:

$$\sigma_{max} = \gamma \cdot l \quad (7.36.)$$

Pe baza relație (7.36.) se determină **lungimea de rupere l_r** , adică lungimea la care bara se rupe sub greutatea proprie, din condiția $\sigma_{max} = \sigma_r$:

$$\sigma_r = \gamma \cdot l \Rightarrow l_r = \frac{\sigma_r}{\gamma} \quad (7.37.)$$

Tensiunea σ_r este rezistența de rupere la tracțiune a materialului barei. Din relația (7.37.) se constată că, lungimea de rupere nu depinde de aria secțiunii transversale, deci creșterea dimensiunilor secțiunii transversale conduce la sporirea greutății proprii, lungimea de rupere rămâne aceeași.

7.7. Aplicație

Se consideră grinda rigidă orizontală articulată în punctul O și suspendată prin două bare verticale în punctele Q și R , figura 7.8.

Se cunosc: $a = 1\text{ m}$, $l = 2\text{ m}$, $F = 30\text{ kN}$, $E = 2,1 \cdot 10^5\text{ MPa}$, $\sigma_a = 150\text{ MPa}$ și raportul ariilor secțiunilor transversale a barelor verticale $A_2/A_1 = 2$, se cere:

- a) determinarea eforturilor din barele verticale;
- b) dimensionarea barelor verticale;
- c) deplasarea pe verticală a punctului de aplicare al forței F .

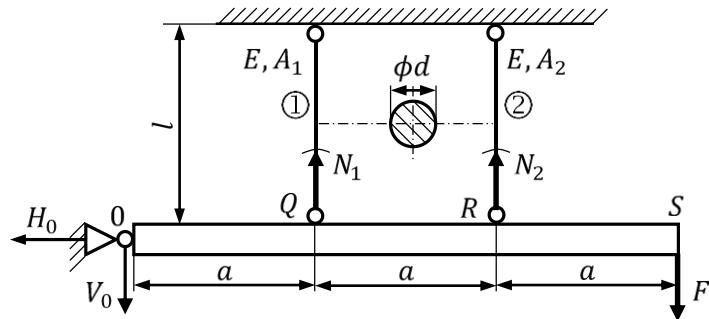


Figura 7.8. Aplicație

Rezolvare:

a) Pentru determinarea eforturilor din barele verticale se elimină legăturile și se pun în evidență reacțiunile: V_O, H_O, N_1, N_2 și se scriu ecuațiile de echilibru static:

$$\sum X = 0 \Leftrightarrow H_O = 0$$

$$\sum Y = 0 \Leftrightarrow N_1 + N_2 - V_O - F = 0$$

$$\left(\sum M_i \right)_O = 0 \Leftrightarrow F \cdot 3a - N_2 \cdot 2a - N_1 \cdot a = 0 \Rightarrow 3 \cdot F - 2 \cdot N_2 - N_1 = 0$$

Sunt patru necunoscute și trei ecuații de echilibru deci, sistemul este simplu static nedeterminat. Ecuația suplimentară de deformație, urmărește deplasările punctelor Q, R și S pe verticală, punctul O fiind fix (articulat), figura 7.9.

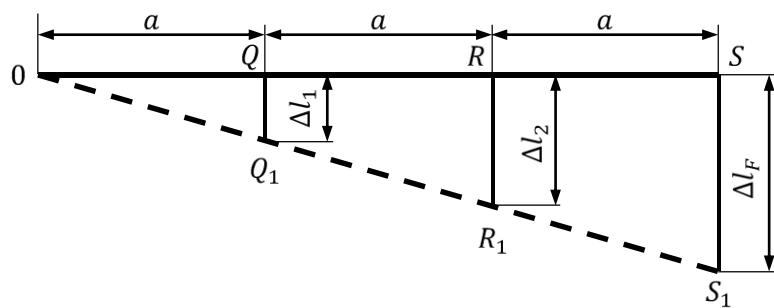


Figura 7.9. Aplicație

Din asemănarea triunghiurilor $\Delta OQQ_1 \sim \Delta ORR_1$, se obține:

$$\frac{QQ_1}{RR_1} = \frac{OQ}{OR} \Leftrightarrow \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{a}{2a} \Rightarrow \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta l_2 = 2 \cdot \Delta l_1$$

Se ține cont că:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot A_2}$$

Se obține:

$$\frac{N_2 \cdot l}{E \cdot A_2} = 2 \cdot \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A_1} \Rightarrow \frac{N_2}{A_2} = \frac{2 \cdot N_1}{A_1} \Rightarrow N_2 \cdot A_1 = 2 \cdot N_1 \cdot A_2$$

S-a obținut un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute:

$$\begin{cases} H_O = 0 \\ N_1 + N_2 - V_O - F = 0 \\ 3F - N_1 - 2N_2 = 0 \\ N_2 \cdot A_1 = 2 \cdot N_1 \cdot A_2 \end{cases}$$

Din care se obțin soluțiile, ținând cont de raportul ariilor transversale specificate în enunțul aplicație: $A_2/A_1 = 2$:

$$\begin{cases} H_O = 0 \text{ kN} \\ N_1 = 10 \text{ kN} \\ N_2 = 4 \cdot N_1 = 4 \cdot 10 = 40 \text{ kN} \\ V_O = N_1 + N_2 - F = 10 + 40 - 30 = 20 \text{ kN} \end{cases}$$

b) bara ② este cea mai solicitată deoarece: $N_2 = 4N_1$ și $A_2 = 2 \cdot A_1$. Pentru dimensionare se folosește relația (7.11):

$$A_{2,nec} = \frac{N_2}{\sigma_a}; \quad A_{2,nec} = \frac{\pi \cdot d_{2,nec}^2}{4} \Rightarrow \frac{\pi \cdot d_{2,nec}^2}{4} = \frac{N_2}{\sigma_a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{2,nec} = \sqrt{\frac{4 \cdot N_2}{\pi \cdot \sigma_a}} = \sqrt{\frac{4 \cdot (40 \cdot 10^3)}{\pi \cdot 150}} = 18,4 \text{ mm} \Rightarrow d_{2,ef} = 20 \text{ mm}$$

Se verifică diametrul efectiv al tirantului ②: $d_{2,ef} = 20 \text{ mm}$:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_{2,ef}} = \frac{4 \cdot N_2}{\pi \cdot d_{2,ef}^2} = \frac{4 \cdot (40 \cdot 10^3)}{\pi \cdot 20^2} = 127,3 \text{ MPa} < \sigma_a = 150 \text{ MPa}$$

Înținând cont de enunțul aplicației, se obține diametrul tirantului ① :

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} = 2 \Rightarrow A_{1,nec} = \frac{A_{2,ef}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi \cdot d_{1,nec}^2}{4} = \frac{\frac{\pi \cdot d_{2,ef}^2}{4}}{2} = \frac{\pi \cdot d_{2,ef}^2}{8} \Rightarrow \\ \Rightarrow d_{1,nec} = \sqrt{\frac{d_{2,ef}^2}{2}} = \sqrt{\frac{20^2}{2}} = 14,1 \text{ mm} \Rightarrow d_{1,ef} = 15 \text{ mm} \end{aligned}$$

Se verifică diametrul efectiv al tirantului ①: $d_{1,ef} = 15 \text{ mm}$:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_{1,ef}} = \frac{4 \cdot N_1}{\pi \cdot d_{1,ef}^2} = \frac{4 \cdot (10 \cdot 10^3)}{\pi \cdot 15^2} = 56,6 \text{ MPa} < \sigma_a = 150 \text{ MPa}$$

c) Deplasarea punctului de aplicare al forței F , se determină din asemănarea triunghiurilor $\Delta OQQ_1 \sim \Delta OSS_1$, figura 7.9.:

$$\begin{aligned} \frac{QQ_1}{SS_1} = \frac{OQ}{OS} \Leftrightarrow \frac{\Delta l_1}{\Delta l_F} = \frac{a}{3a} \Rightarrow \frac{\Delta l_1}{\Delta l_F} = \frac{1}{3} \Rightarrow \Delta l_F = 3 \cdot \Delta l_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta l_F = 3 \cdot \Delta l_1 = 3 \cdot \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A_1} = 3 \cdot \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot \frac{\pi \cdot d_{1,ef}^2}{4}} = \frac{12 \cdot N_1 \cdot l}{E \cdot \pi \cdot d_{1,ef}^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta l_F = \frac{12 \cdot (10 \cdot 10^3) \cdot (2 \cdot 10^3)}{(2,1 \cdot 10^5) \cdot \pi \cdot 15^2} \cong 1,62 \text{ mm} \end{aligned}$$

Conform rezultatelor obținute grinda rigidă se deplasează doar pe verticală.

Capitolul 8

ÎNCOVORIEREA BARELOR DREPTE

8.1. Noțiuni introductive

În practică, încovoierea este cea mai răspândită solicitare din construcția de mașini. Se întâlnește în diferite variante în funcție de poziția vectorului moment încovoiator M_i față de axele principale de inerție ale secțiunii transversale și de prezența simultană în secțiunea analizată a altor eforturi.

După natura eforturilor secționale încovoierea plană poate fi:

- **încovoierea pură** când în centrul de greutate a secțiunii transversale a unei bare există doar un moment încovoiator orientat după una din axele principale de inerție ale secțiunii (M_{iz} sau M_{iy}). Acest caz se întâlnește destul de rar în practică.

- **încovoierea simplă** dacă în afară de momentul încovoiator M_i , în secțiunea transversală a barei există și o forță tăietoare (T_z sau T_y), orientată după cealaltă direcție principală a secțiunii.

Cel mai frecvent caz întâlnit la solicitarea de încovoiere pură este prezentat în figura 8.1.

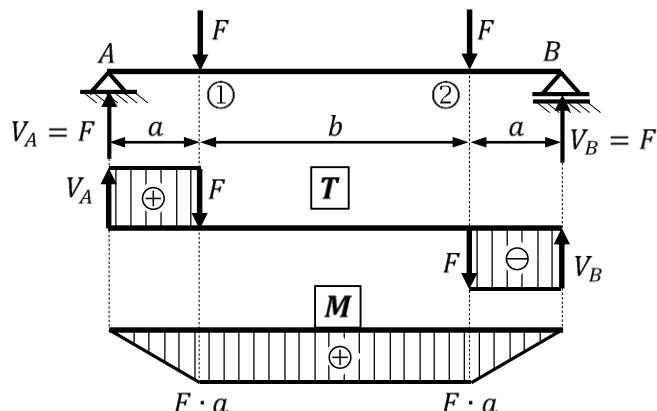


Figura 8.1. Solicitarea de încovoiere pură și încovoiere simplă

Pe tronsonul (1 – 2) se observă încovoierea pură iar pe tronsoanele (A – 1) și (2 – B) deoarece forța tăietoare nu este nulă, încovoierea este simplă.

Pentru determinarea tensiunilor care apar în secțiunile unei astfel de bare precum și modul în care se repartizează ele punctual, se acceptă următoarele ipoteze:

- bara este solicitată de forțe exterioare care sunt cuprinse într-un plan de simetrie longitudinal vertical, denumit planul forțelor, deci axa Gy este axă de simetrie;
- axa barei în stare nedeformată este o linie dreaptă;
- raportul dintre înălțimea secțiunii transversale a barei și lungimea barei este subunitară, $h \ll l$;

- materialul barei respectă legea lui Hooke, $\sigma = \varepsilon \cdot E$;
- este valabilă ipoteza secțiunilor plane și normale pe axa deformată a barei (ipoteza lui Bernoulli).

8.2. Tensiuni în barele drepte solicitate la încovoiere. Relația lui Navier

Se consideră bara dreaptă supusă la încovoiere pură din care se delimită un element infinit mic de lungime dx cu ajutorul a două plane perpendiculare pe axa longitudinală a barei, figura 8.2. Vectorul moment încovoiator M_{iz} , aplicat barei este dirijat după axa Gz și este perpendicular pe planul forțelor.

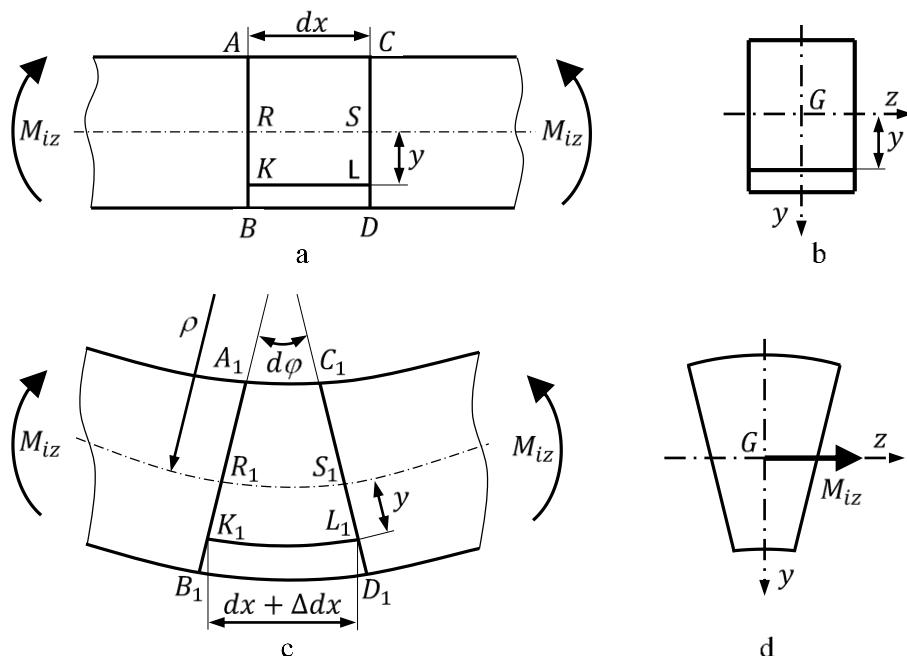


Figura 8.2. Element de lungime dx dintr-o bară solicitată la încovoiere pură

După aplicarea momentului încovoiator, bara se deformează astfel încât secțiunile AB și CD se vor rota una în raport cu celalaltă, cu unghiul $d\varphi$. Se constată că fibrele din partea de sus a secțiunii se scurtează iar cele de jos se lungesc. Linia RS care unește centrele de greutate ale tuturor secțiunilor, numită **fibra medie** a barei, rămâne de lungime constantă. Fibra medie a barei este notată în figura 8.2.a prin RS iar în figura 8.2.c prin R_1S_1 :

$$RS = R_1S_1 = dx = \rho \cdot d\varphi \quad (8.1.)$$

unde ρ este raza de curbură a fibrei neutre.

O fibră de material notată KL situată la distanța y de fibra medie se lungeste cu mărimea Δdx . În urma deformării arcul K_1L_1 a suferit alungirea $K_1L_1 = (\rho + y) \cdot d\varphi$. Fibra KL a avut lungimea dx . Creșterea lungimii fibrei va fi:

$$\Delta(dx) = (\rho + y) \cdot d\varphi - dx = (\rho + y) \cdot d\varphi - \rho \cdot d\varphi = y \cdot d\varphi \quad (8.2.)$$

Lungirea specifică a arcului va fi:

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{y \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{y}{\rho} \quad (8.3.)$$

Deoarece raza de curbură ρ este constantă, deformațiile specifice la încovoiere variază liniar pe secțiune cu distanța de la axa neutră la punctul în care se calculează (y).

Se acceptă valabilitatea legii lui Hooke adică existența unei relații liniare între tensiuni și deformații:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{y}{\rho} = \frac{E}{\rho} \cdot y \quad (8.4.)$$

Relația (8.4.) arată că tensiunile normale la încovoiere variază liniar cu distanța de la axa neutră la punctul în care se calculează. Prin reprezentarea grafică a tensiunilor și deformațiilor specifice liniare se obțin diagramele din figura 8.3.

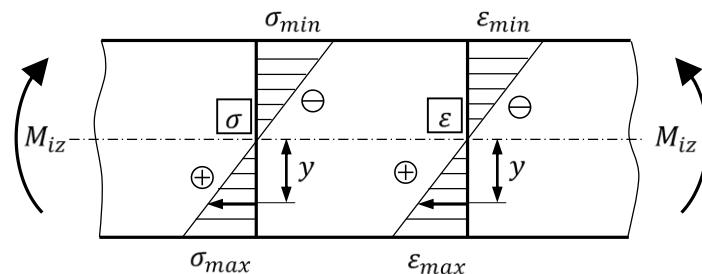


Figura 8.3. Tensiuni și deformații specifice

Pentru a determina legătura dintre tensiunile normale și momentul de încovoiere se folosesc pe secțiunea considerată ecuațiile de echivalență din statică.

Tensiunile normale σ produc pe secțiune eforturile $dF = \sigma \cdot dA$, figura 8.4.:

$$\int_A \sigma \cdot dA = N = 0 \quad (8.5.)$$

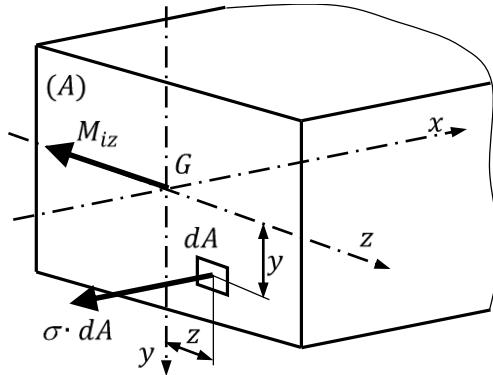


Figura 8.4. Echivalență între eforturi și tensiuni

$$\int_A (\sigma \cdot dA) \cdot z = M_{iy} = 0 \quad (8.6.)$$

$$\int_A (\sigma \cdot dA) \cdot y = M_{iz} \neq 0 \quad (8.7.)$$

Se înlocuiește relația (8.4.) succesiv în relațiile (8.5.), (8.6.) și (8.7.), astfel se obține:

$$\frac{E}{\rho} \cdot \int_A y \cdot dA = N = 0 \Rightarrow \int_A y \cdot dA = S_z = 0 \quad (8.8.)$$

$$\frac{E}{\rho} \cdot \int_A y \cdot z \cdot dA = M_{iy} = 0 \Rightarrow \int_A y \cdot z \cdot dA = I_{zy} = 0 \quad (8.9.)$$

$$\frac{E}{\rho} \cdot \int_A y^2 \cdot dA = M_{iz} \neq 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho} \cdot I_z \cdot y = M_{iz} \cdot y \quad (8.10.)$$

Relația (8.8) arată că axa 0z trece prin centrul de greutate G al secțiunii și este axă neutră, figura 8.4. Conform relației 8.4. tensiunile normale sunt nule în axa neutră, cresc liniar cu distanța y la axa neutră și sunt maxime în fibrele extreme ale secțiunii.

Dacă din relația (8.4.) se înlocuiește raportul E/ρ în relația (8.10.) se obține:

$$\sigma = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y \quad (8.11.)$$

Relația (8.11.) este cunoscută sub numele de **formula lui Navier** sau formula fundamentală la solicitarea de încovoiere. În formula lui Navier, atât momentul încovoietor M_i , cât și variabila y se introduc fără semn, deci tensiunea poate fi pozitivă, negativă sau nulă (pe axa neutră a secțiunii).

Observație:

Încovoierea pură poate fi produsă și de un **moment încovoietor** M_{iy} , coliniar cu axa Oy . În acest caz **axa neutră** este y iar formula lui Navier are forma asemănătoare cu relația (8.11.):

$$\sigma = \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z \quad (8.12.)$$

Pentru o secțiune oarecare dată, M_{iz} și I_z sunt constante, înseamnă că tensiunea normală σ variază liniar funcție de ordonata y a punctului în care se calculează tensiunea σ . Deoarece interesează doar valorile maxime ale tensiunilor se obține:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{iz,max}}{I_z} \cdot y_{max} = \frac{M_{iz,max}}{\frac{I_z}{y_{max}}} = \frac{M_{iz,max}}{W_{z,min}} \quad (8.13.)$$

Pe baza relației (8.13.) se pot rezolva cele trei probleme clasice ale rezistenței materialelor din condiția de rezistență:

a) dimensionarea unei secțiuni:

$$W_{min,nec} = \frac{M_{i,max}}{\sigma_a} \quad (8.14.)$$

b) verificarea secțiunii:

$$\sigma_{ef,max} = \frac{M_{i,max}}{W_{ef,min}} \leq \sigma_a \quad (8.15.)$$

c) determinarea momentului încovoietor capabil:

$$M_{i,cap} = M_{i,max\ adm} = W_{ef} \cdot \sigma_a \quad (8.16.)$$

8.3. Dimensionarea barele drepte solicitate la încovoiere

Pentru dimensionarea unei bare drepte solicitate la încovoiere se parcurg etapele:

- se trasează diagrama momentelor încovoietoare și se determină momentul încovoietor maxim $M_{i,max}$ la care se va dimensiona bara. Dacă bara are secțiune variabilă, se va determina momentul din secțiunea periculoasă;

- se calculează caracteristicile geometrice ale secțiunilor transversale ($W_{z,min}$; $W_{z,max}$) și se stabilește secțiunea cea mai solicitată (periculoasă);
- se alege rezistența admisibilă a materialului barei σ_a și se aplică relația de dimensionare (8.14.) apoi, pentru W_z calculat se alege forma optimă a secțiunii și se calculează dimensiunile ei.

În figura 8.5., se prezintă un exemplu de alegere a secțiunii optime la încovoiere. Secțiunile din figura 8.5. a (profil I) și figura 8.5. b (profil dreptunghiular), deși au aria secțiunii transversale egală (același consum de material) au module de rezistență la încovoiere diferite. Caracteristicile geometrice ale celor două secțiuni sunt prezentate în figura 8.5.

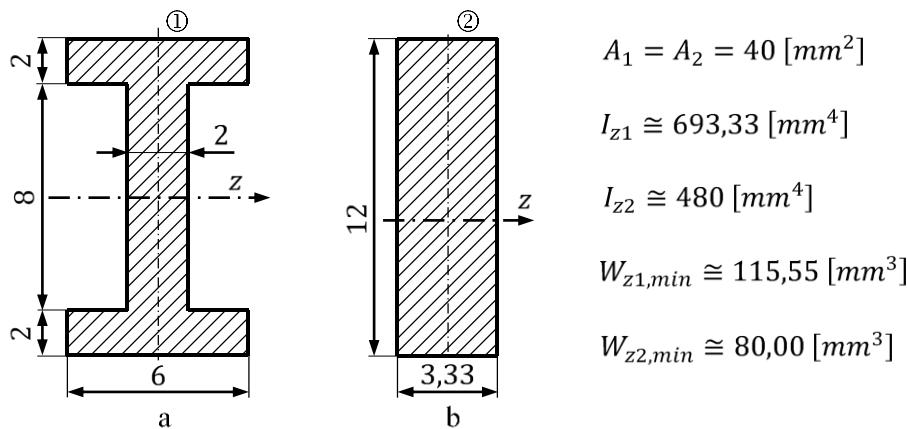


Figura 8.5. Exemplu de alegere a secțiunii optime

Deoarece $W_{z1,min} > W_{z2,min}$ secțiunea din figura 8.5.a poate prelua un moment M_{iz} mai mare, lucru explicabil prin concentrarea materialului în jurul fibrelor extreme acolo unde și tensiunile σ sunt maxime.

8.4. Încovoierea cu forță tăietoare

8.4.1. Dualitatea tensiunilor tangențiale

Se consideră un element de volum paralelipipedic, figura 8.6.a, solicitat de tensiuni normale și tangențiale, paralele cu axele x și y . Starea de solicitare reprezentată în plan, figura 8.6.b se numește **stare plană de tensiune**. Tensiunile normale poartă indicele axei cu care sunt paralele iar tensiunile tangențiale au doi indici: primul arată direcția normalei la planul pe care sunt aplicate iar al doilea indice indică direcția axei cu care sunt paralele.

La schema din figura 8.6.b se determină momentele față de punctul O_1 se obține:

$$2 \cdot \tau_{yx} \cdot dy \cdot 1 \cdot \frac{dx}{2} - 2 \cdot \tau_{xy} \cdot dx \cdot 1 \cdot \frac{dy}{2} = 0 \quad (8.17.)$$

de unde se obține:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad (8.18.)$$

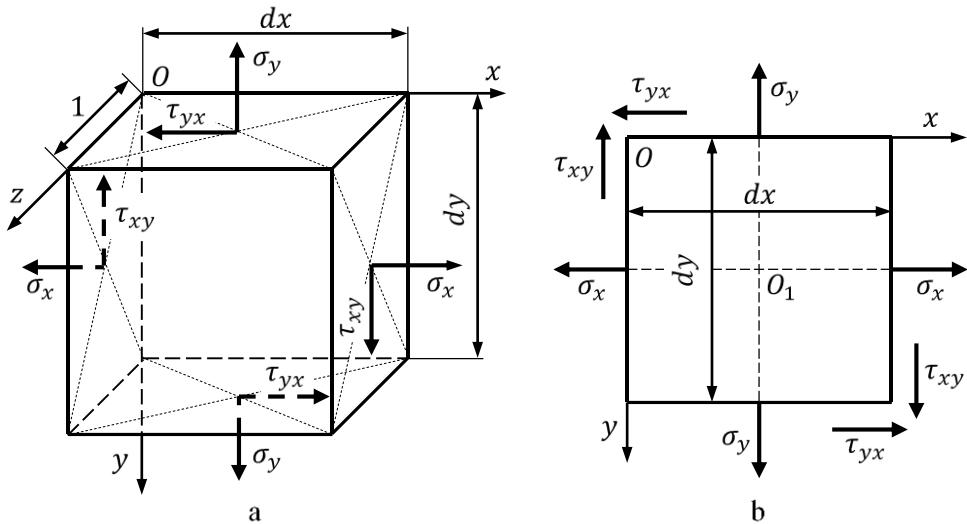


Figura 8.6. Element de volum paralelipipedic aflat în stare de tensiune

Relația (8.18.) reprezintă o teoremă fundamentală a teoriei elasticității numită **dualitatea sau paritatea tensiunilor tangențiale**: dacă pe un plan din interiorul unui corp acționează tensiuni tangențiale, atunci într-un plan perpendicular pe acesta acționează tensiuni tangențiale de aceeași valoare, perpendiculare pe muchia comună și simetrice ca sens în raport cu această muchie.

8.4.2. Tensiuni tangențiale la încovoierea cu forță tăietoare

Încovoierea simplă se întâlnește mult mai frecvent în practică decât încovoierea pură și constă în prezența simultană într-o secțiune a unui moment încovoiator (M_i) și a unei forțe tăietoare (T). Aceste eforturi determină într-un element de arie dA apariția simultană a tensiunilor normale σ , cauzate de prezența momentului încovoiator M_i și respectiv a tensiunilor tangențiale τ produse de forța tăietoare T , figura 8.7.

Tensiunile normale σ se determină folosind relația lui Navier iar tensiunile tangențiale τ , cauzate de forța tăietoare, au atât mărimea cât și orientarea necunoscută.

Se consideră un element de volum paralelipipedic decupat dintr-o bară având fața „abcd” în planul secțiunii transversale (A), iar fața „abef” situată într-un plan orizontal paralel cu planul neutru la încovoiere xGy , figura 8.8.

Pe fețele paralelipipedului, conform principiului dualității tensiunilor tangențiale acționează tensiunile tangențiale: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Pe fața „abcd” acționează tensiunea tangențială τ_{xy} , (una din componente ale tensiunii tangențiale τ care trebuie să fie diferită

de zero). Pe fața „*abfe*”, în baza dualității tensiunilor tangențiale, va acționa tensiunea $\tau_{yx} = -\tau_{xy}$ care are aceeași orientare față de muchia comună „*ab*”.

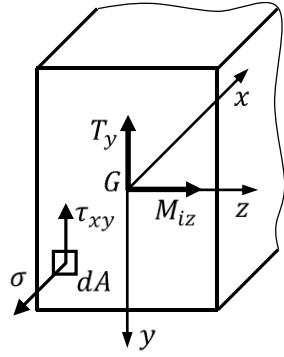


Figura 8.7. Încovoierea simplă

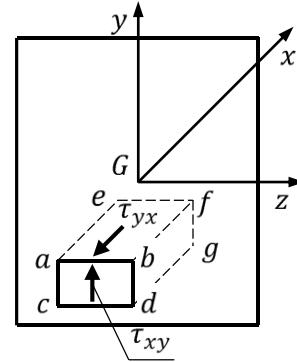


Figura 8.8. Element de volum

Datorită acestor tensiuni apar deformații de lunecare iar paralelipipedul devine oblic, elementul de volum înmagazinează deformații unghiulare, fețele sale se deplasează una față de cealaltă deci, ipoteza lui Bernoulli nu mai este valabilă.

Pentru cazurile frecvent întâlnite în practică, $h \ll l$, (raportul h/l mic), formula lui Navier poate fi considerată ca fiind exactă, erorile fiind foarte mici.

Se consideră doar bare la care formula lui Navier este aplicabilă și se vor studia tensiunile tangențiale care apar cauzate de forță tăietoare. Se consideră bara de secțiune dreptunghiulară asupra căreia acționează forță tăietoare T_y , figura 8.9. Datorită forței tăietoare T_y , în orice element al secțiunii barei apare o tensiune tangențială τ , de direcție necunoscută, care poate fi descompusă în două componente τ_{yx} și τ_{zx} .

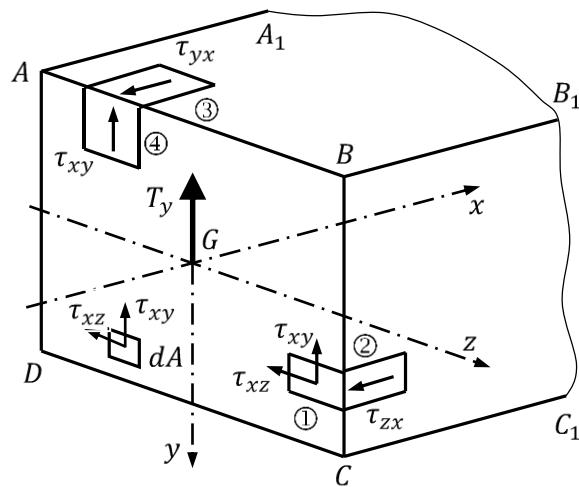


Figura 8.9. Bară de secțiune dreptunghiulară solicitată de forță tăietoare

Pe această secțiune, se pot scrie două relații de echivalență:

$$\int_A \tau_{xy} \cdot dA = T_y \neq 0; \quad \int_A \tau_{xz} \cdot dA = 0 \quad (8.19.)$$

Rezultă că, în secțiune componentele τ_{xy} trebuie să existe, iar componentele τ_{xz} sau nu există sau dacă există sunt de semne contrare, deci rezultanta lor este nulă.

Se consideră un element de suprafață ① aflat pe secțiune lângă muchia laterală verticală BC . Pe suprafața ① acționează în cazul cel mai general tensiunile tangențiale τ_{xy} și τ_{xz} . Se consideră un alt element de suprafață ② vecin cu ① dar aflat pe suprafața laterală BB_1C_1C a barei. Pe baza principiului dualității acțiunii tensiunilor tangențiale pe suprafața ② va trebui să acționeze tensiunea tangențială $\tau_{zx} = -\tau_{xz}$. Dar $\tau_{xz} = 0$ deoarece în rezistență materialelor pe suprafețele libere în punctele în care nu este aplicat nici-un efort, tensiunile sunt nule. Rezultă că și $\tau_{xz} = 0$ deci: *pe un element de suprafață aflat pe secțiune în vecinătatea conturului, tensiunea tangențială este paralelă cu conturul*.

Se consideră un alt element de suprafață ③ aflat pe secțiune în vecinătatea muchiei AB . Pe elementul ④ acționează tensiunea tangențială τ_{xy} . Pe un element ortogonal ③ de pe suprafață liberă ABB_1A_1 va apărea tensiunea tangențială $\tau_{yx} = -\tau_{xy}$. Dar $\tau_{yx} = 0$ (suprafață liberă) deci și $\tau_{xy} = 0$. Prin urmare: *tensiunile τ_{xy} există și sunt repartizate neuniform pe secțiune, în vecinătatea fibrelor extreme fiind nule*.

8.4.3. Relația lui Juravski

Se consideră un element de lungime dx , figura 8.10., detasat dintr-o grindă solicitată la încovoiere. Pe cele două secțiuni acționează eforturile M , $M + dM$ și forța tăietoare T , considerată constantă. Aceste eforturi produc în cele două secțiuni tensiunile normale σ , $\sigma + d\sigma$ și tensiunile tangențiale τ_{xy} , prezentate în figura 8.10.a.

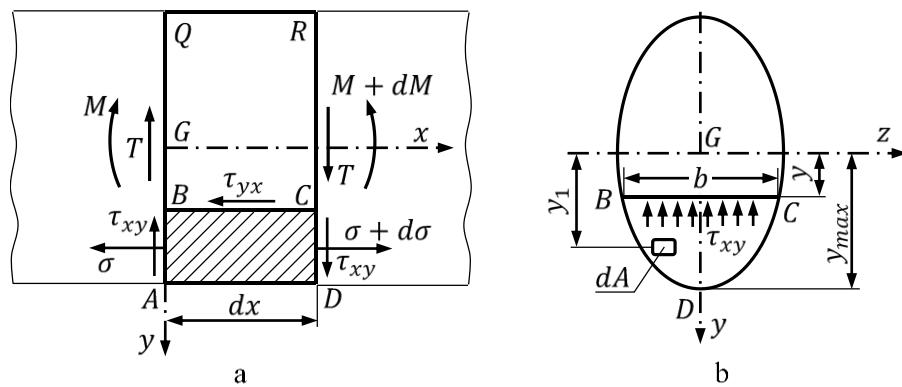


Figura 8.10. Element de lungime dx dintr-o grindă solicitată la încovoiere simplă

Se secționează orizontal bara, cu un plan paralel cu xGz . Se obține elementul de volum hașurat $ABCD$, figura 8.10.a unde, pe planul orizontal acționează tensiunile tangențiale $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Se consideră valabilă ipoteza lui Juravski: „pe o fibră BC , paralelă cu axa neutră, tensiunile tangențiale sunt constante, $\tau_{yx} = \text{const.}$ ”.

Se va studia echilibrul elementului de volum de lungime dx , situat sub planul orizontal BC . Se notează cu y distanța de la axa neutră la fibra BC iar prin y_1 distanța unui element oarecare de arie dA al suprafeței BCD la axa neutră, figura 8.10.b.

Pe suprafața din stânga QBA , figura 8.10.a, tensiunea normală σ în punctul situat la distanța y_1 de axa neutră este dată de relația lui Navier (8.11.):

$$\sigma = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_1 \quad (8.20.)$$

Pentru întreaga suprafață BCD (figura 8.10.b), tensiunea normală σ conduce la determinarea forței axiale:

$$N = \int_{BCD} \sigma \cdot dA = \int_{BCD} \frac{M_{iz} \cdot y_1}{I_z} \cdot dA = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot \int_{BCD} y_1 \cdot dA = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot S_z \quad (8.21.)$$

În relația de mai sus (8.21.) s-a ținut cont de faptul că raportul $M_{iz}/I_z = \text{const.}$ pe secțiune iar integrala reprezintă momentul static al părții de secțiune BCD , situată sub muchia BC calculat față de axa neutră.

Se procedează în mod analog pentru suprafața RCD (figura 8.10.a) a elementului de volum situat la aceeași distanță y_1 de axa neutră, tensiunea normală fiind:

$$\sigma + d\sigma = \frac{(M_{iz} + dM_{iz})}{I_z} \cdot y_1 \quad (8.22.)$$

care conduce la forța rezultantă:

$$N + dN = \int_{B_1 C_1 D_1} \frac{(M_{iz} + dM_{iz}) \cdot y_1}{I_z} \cdot dA = \frac{M_{iz} + dM_{iz}}{I_z} \cdot S_z \quad (8.23.)$$

Se va scrie ecuația de proiecții a tuturor forțelor aplicate elementului de volum pe direcția axei x , elementul de volum fiind în echilibru. Ecuația va conține forțele N , $N + dN$ și forța $(\tau_{xy} \cdot b \cdot dx)$ produsă de tensiunile tangențiale τ_{xy} pe fața BC :

$$N + \tau_{xy} \cdot b \cdot dx - (N + dN) = 0 \quad (8.24.)$$

Se înlocuiesc în relația (8.24.) forțele N și $(N + dN)$ date de relațiile (8.21.) și (8.23.), se obține:

$$\begin{aligned}
\frac{M_{iz}}{I_z} \cdot S_z + \tau_{xy} \cdot b \cdot dx - \frac{M_{iz} + dM_{iz}}{I_z} \cdot S_z = 0 &\Leftrightarrow \\
\frac{M_{iz}}{I_z} \cdot S_z + \tau_{xy} \cdot b \cdot dx - \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot S_z - \frac{dM_{iz}}{I_z} \cdot S_z = 0 &\Leftrightarrow \tau_{xy} \cdot b \cdot dx = \frac{dM_{iz}}{I_z} \cdot S_z \Rightarrow \\
\tau_{xy} = \frac{dM_{iz}}{dx \cdot b \cdot I_z} \cdot S_z &
\end{aligned} \tag{8.25.}$$

Se ține cont:

$$\frac{dM_{iz}}{dx} = T_y$$

relația (8.25.) devine:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{T_y \cdot S_z}{b \cdot I_z} \tag{8.26.}$$

Relația (8.26.) este cunoscută sub numele de **relația lui Juravski**, termenii din relație având următoarea semnificație:

- $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ [MPa], reprezintă tensiunea tangențială;
- T_y [N], reprezintă forța tăietoare din secțiune;
- b [mm], reprezintă lățimea secțiunii situate la distanța y de axa neutră;
- S_z [mm^3], reprezintă momentul static în raport cu axa neutră Gz a secțiunii cuprinsă între nivelul la care se calculează tensiunea tangențială τ_{xy} și fibra extremă, deci al acelei părți din secțiune care tinde să lunece;
- I_z [mm^4], reprezintă momentul de inerție axial al întregii secțiuni față de axa neutră.

Deoarece în relația de calcul a tensiunii tangențiale (8.26.) T_y și I_z sunt constante pe secțiune, legea de variație a tensiunii tangențiale τ_{xy} pe secțiune, de-a lungul axei y este dată de variația raportului S/b .

8.5. Variația tensiunilor tangențiale pentru secțiuni transversale simple

8.5.1. Secțiunea dreptunghiulară

Se consideră grinda de secțiune transversală dreptunghiulară cu laturile b și h , figura 8.11. Forța tăietoare T_y este paralelă cu axa y iar lățimea b este constantă. Se va calcula tensiunea tangențială τ_{xy} , la distanța y de axa neutră marcată prin fibra BC .

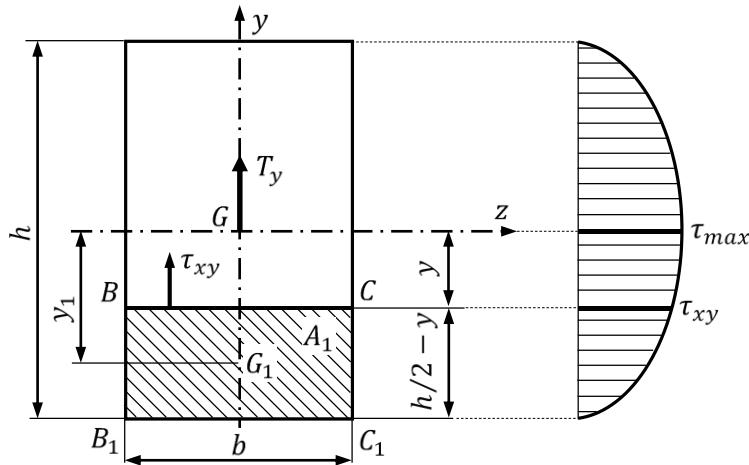


Figura 8.11. Secțiunea dreptunghiulară

Se aplică formula lui Juravski (8.26.):

$$\tau_{xy} = \frac{T_y \cdot S_z}{b \cdot I_z}$$

termenii din relație reprezintă:

- forța tăietoare: $T_y = T_y$;
- momentul de inerție axial: $I_z = (b \cdot h^3)/12$;
- lățimea secțiunii pentru care se calculează tensiunea tangențială: $b = b$;
- momentul static al suprafeței care tinde să lunece BCB_1C_1 se calculează cu relația: $S_z = A_1 \cdot y_1$.

Astfel, momentul static al suprafeței BCB_1C_1 devine:

$$S_z = A_1 \cdot y_1 = \left[b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y \right) \right] = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Se înlocuiește momentul static în relația lui Juravski:

$$\tau_{xy} = \frac{T_y \cdot S_z}{b \cdot I_z} = \frac{T_y \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{T_y}{A} \cdot \left(1,5 - \frac{6 \cdot y^2}{h^2} \right) \quad (8.27.)$$

Din relația (8.27.) se constată că tensiunea tangențială τ_{xy} are o variație parabolică simetrică pe înălțimea secțiunii cu valorile:

- în centrul secțiunii:

$$y = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{T_y}{A} \cdot \left(1,5 - \frac{6 \cdot y^2}{h^2} \right) \Big|_{y=0} = \frac{1,5 \cdot T_y}{A} = \tau_{max} \quad (8.28.)$$

► în fibrele extreme:

$$y = \pm \frac{h}{2} \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{T_y}{A} \cdot \left(1,5 - \frac{6 \cdot y^2}{h^2} \right) \Big|_{y=\pm \frac{h}{2}} = 0 \quad (8.29.)$$

Se constată că tensiunea tangențială τ_{xy} este maximă în axa neutră și nulă în fibrele extreme deci, este în opoziție cu tensiunea normală σ dată de relația lui Navier care este maximă în fibrele extreme și nulă în axa neutră.

8.5.2. Secțiunea circulară

Se consideră secțiunea circulară de diametru d , figura 8.12. și o fibră BC situată la distanța y de axa neutră. Lățimea acestei fibre este b_y , iar grosimea elementului de arie dA este dy .

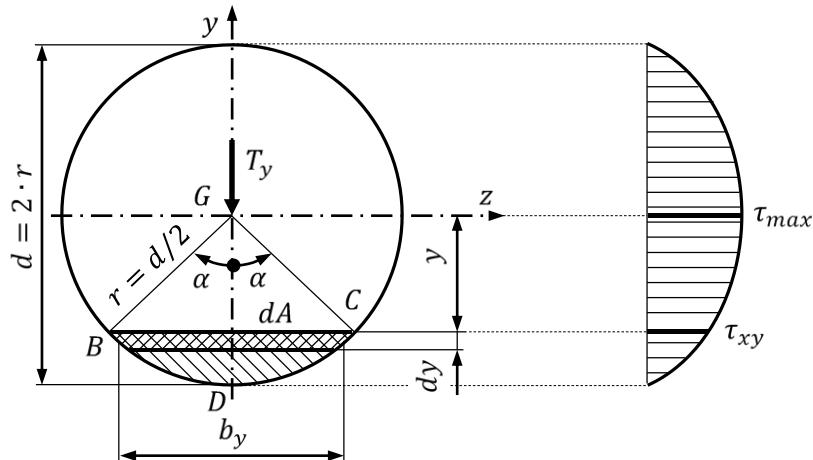


Figura 8.12. Secțiunea circulară

Valorile pentru b_y și distanța y conform figurii 8.12., se pot calcula în funcție de diametrul secțiunii d și unghiul α astfel:

$$b_y = 2 \cdot r \cdot \sin \alpha = d \cdot \sin \alpha$$

$$y = r \cdot \cos \alpha = \frac{d}{2} \cdot \cos \alpha \Rightarrow dy = -\frac{d}{2} \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha$$

Se calculează momentul static al suprafeței hașurate de sub fibra BC , ca integrală pentru fâșile de arie dA :

$$dA = b_y \cdot dy = d \cdot \sin \alpha \cdot \left(-\frac{d}{2} \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha \right) = -\frac{d^2}{2} \sin^2 \alpha \cdot d\alpha$$

$$S_z = \int_A y \cdot dA = \int_{-\pi/2}^{0} \frac{d}{2} \cdot \cos \alpha \cdot \left(-\frac{d^2}{2} \cdot \sin^2 \alpha \cdot d\alpha \right) = \frac{d^3}{4} \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{3}$$

Momentul de inerție axial pentru secțiunea circulară este:

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64}$$

Cu ajutorul acestor mărimi, se determină tensiunea tangențială τ_{xy} folosind relația lui Juravski (8.26.):

$$\tau_{xy} = \frac{T_y \cdot S_z}{b_y \cdot I_z} = \frac{T_y \cdot \frac{d^3}{4} \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{3}}{(d \cdot \sin \alpha) \cdot \frac{\pi d^4}{64}} = \frac{4 \cdot T_y}{3 \cdot A} \cdot \sin^2 \alpha \quad (8.30.)$$

Din relația (8.30.) se constată că tensiunea tangențială τ_{xy} are o variație parabolică în funcție de pătratul sinusului:

► în centrul secțiunii (axa neutră), $\alpha = 90^\circ$:

$$\tau_{xy} = \frac{4 \cdot T_y}{3 \cdot A} \cdot \sin^2 \alpha \Big|_{\alpha = 90^\circ} = \frac{4 \cdot T_y}{3 \cdot A} \cdot \sin^2 90^\circ = \frac{4 \cdot T_y}{3 \cdot A} = \tau_{max} \quad (8.31.)$$

► în fibrele extreme, $\alpha = 0^\circ$:

$$\tau_{xy} = \frac{4 \cdot T_y}{3 \cdot A} \cdot \sin^2 \alpha \Big|_{\alpha = 0^\circ} = \frac{4 \cdot T_y}{3 \cdot A} \cdot \sin^2 0^\circ = 0 \quad (8.32.)$$

8.5.3. Secțiunea de tip I dublu simetric

Secțiunea din figura 8.13., poate fi considerată ca fiind formată din dreptunghiuri la care se poate aplica cu ușurință formula lui Juravski. Mărurile care intervin în calculul tensiunilor tangențiale sunt fie constante (T_y și I_z), fie au variație mai mult sau mai puțin continuă. În punctul B se constată o variație bruscă a lățimii secțiunii b , ceea ce duce la o discontinuitate a parabolei ce reprezintă diagrama tensiunii tangențiale τ .

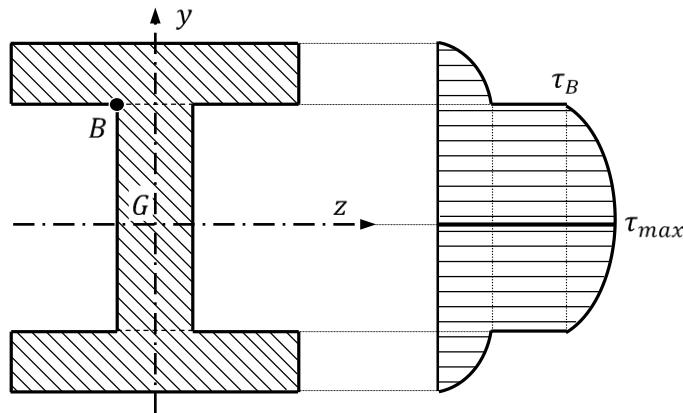


Figura 8.13. Tensiunea tangențială τ_{xy} la secțiunea de tip I dublu simetrică

În cazul trecerilor de la inima profilului la tălpile acestuia tensiunile tangențiale sunt apropiate de valoarea lor maximă ($\tau_B \approx \tau_{max}$).

8.6. Aplicație

Pentru grinda din figura 8.14., de rigiditate constantă și încărcare dată, având secțiunea transversală prezentată în figura 8.14., se cere:

- diagramele de eforturi cotate;
- verificarea grinzii pentru $\sigma_a = 160$ [MPa] și $t = 25$ [mm];
- diagramele tensiunii normale σ și respectiv a tensiunii tangențiale τ din secțiunea periculoasă.

Date numerice: $a = 2$ [m], $F = 20$ [kN], $M_0 = 10$ [kN · m]

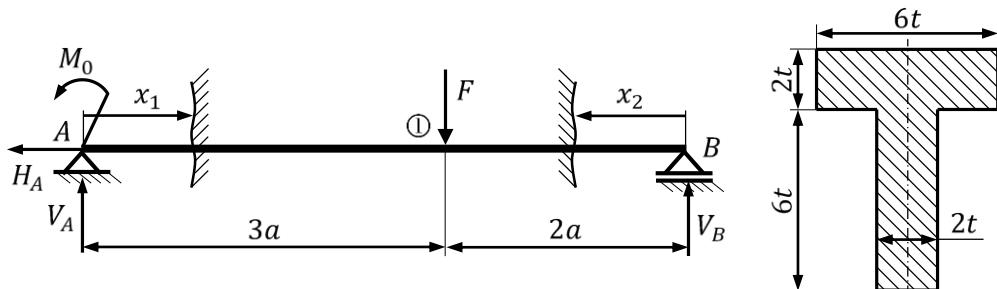


Figura 8.14. Aplicație

Rezolvare:

- Se introduc și se calculează reacțiunile H_A , V_A și V_B , figura 8.14. din condițiile de echilibru static:

$$\sum X = 0 \Leftrightarrow H_A = 0$$

$$\left(\sum M_i\right)_A = 0 \Leftrightarrow M_0 - F \cdot 3a + V_B \cdot 5a = 0 \Rightarrow V_B = 11 [kN]$$

$$\left(\sum M_i\right)_B = 0 \Leftrightarrow M_0 - V_A \cdot 5a + F \cdot 2a = 0 \Rightarrow V_A = 9 [kN]$$

Se verifică calculul reacțiunilor:

$$\sum Y = 0 \Leftrightarrow V_A - F + V_B = 0 \Rightarrow 9 - 20 + 11 = 0$$

Se determină funcțiile de eforturi T_y și M_{iz} , pe tronsoanele grinzi, figura 8.15.
Forța axială este nulă pe toată lungimea grinzi, $N = 0$:

Domeniul ($A - 1$), $x_1 \in [0; 3a = 3 \cdot 2 = 6 m]$

Funcția forță tăietoare T_y , are expresia:

$$T_y(x_1) = T_{A-1} = V_A = 9 [kN] = const.$$

Funcția moment încovoietor M_{iz} , are expresia:

$$M_{iz}(x_1) = M_{iz,A-1} = -M_0 + V_A \cdot x_1 = -10 + 9 \cdot x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{iz}(x_1 = 0) = M_A = -10 + 9 \cdot 0 = -10 [kN \cdot m] \\ M_{iz}(x_1 = 6 m) = M_1 = -10 + 9 \cdot 6 = 44 [kN \cdot m] \end{cases}$$

Domeniul ($B - 1$), $x_2 \in [0; 2a = 2 \cdot 2 = 4 m]$

Funcția forță tăietoare T_y , are expresia:

$$T_y(x_2) = T_{B-2} = -V_B = -11 [kN] = const.$$

Funcția moment încovoietor M_{iz} , are expresia:

$$M_{iz}(x_2) = M_{iz,B-1} = V_B \cdot x_2 = 11 \cdot x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{iz}(x_2 = 0) = M_B = 11 \cdot 0 = 0 [kN \cdot m] \\ M_{iz}(x_2 = 4 m) = M_1 = 11 \cdot 4 = 44 [kN \cdot m] \end{cases}$$

Diagramele cotate ale eforturilor T_y și M_{iz} , sunt prezentate în figura 8.15.

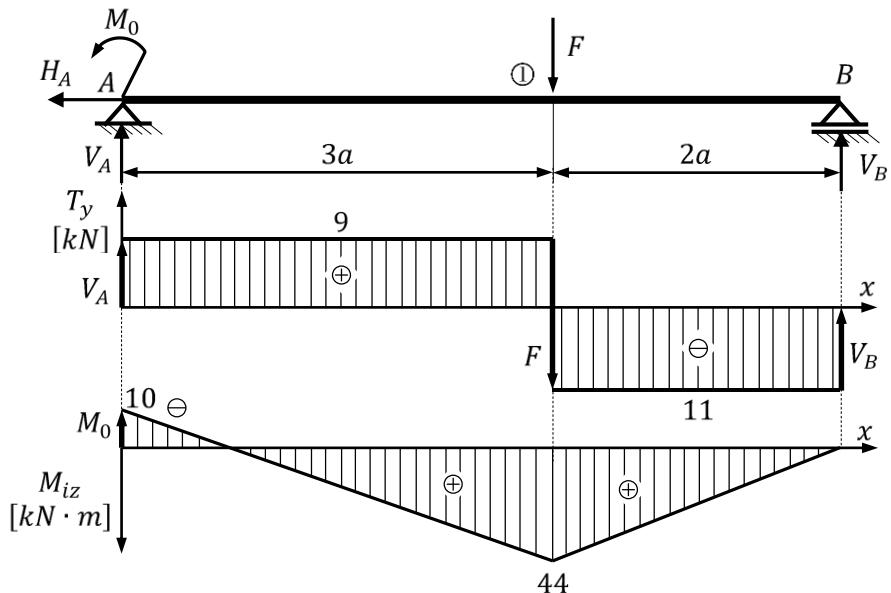


Figura 8.15. Aplicație. Diagrame de eforturi

b) Verificarea grinzelii se face în secțiunea periculoasă la încovoiere adică, în secțiunea în care momentul încovoielor este maxim. Din diagrama de momente se obține:

$$M_{iz,max} = 44 \text{ [kN} \cdot \text{m}]$$

Din analiza figurii 8.16. se observă că secțiunea grinzelii este simetrică față de axa Oy_0 , deci centrul de greutate se va situa pe această axă de simetrie. Față de sistemul de referință z_0Oy_0 poziția centrului de greutate al secțiunii compuse din două dreptunghiuri de arie A_1 și A_2 va fi:

$$A_1 = 6t \cdot 2t = 12t^2 ; A_2 = 6t \cdot 2t = 12t^2 ; A = A_1 + A_2 = 24t^2$$

$$y_{G1} = t ; y_{G2} = 3t + 2t = 5t$$

$$y_G = \frac{\sum(A_i \cdot y_i)}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A} = \frac{12t^2 \cdot t + 12t^2 \cdot 5t}{24t^2} = 3t$$

Centrul de greutate G , față de sistemul de axe propriu z_0Oy_0 , se află la distanțele:

$$y_G = 3t ; z_G = 0$$

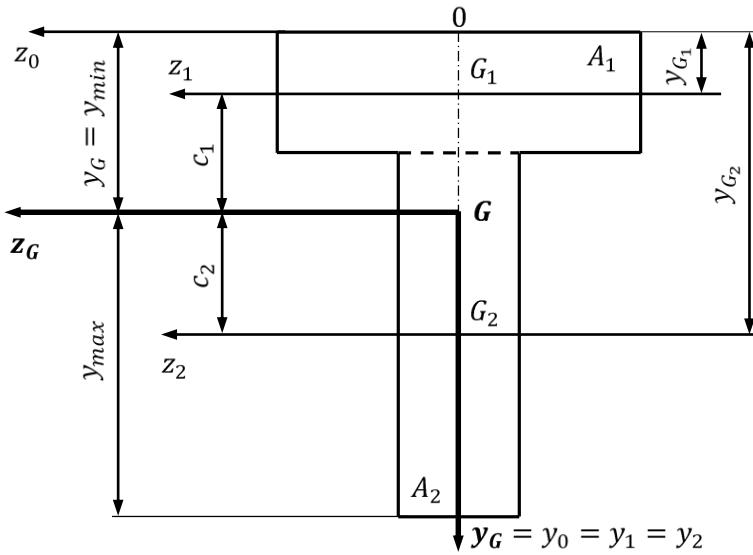


Figura 8.16. Aplicație. Caracteristici geometrice

Distanțele dintre centrele de greutate $G - G_1$, și $G - G_2$, figura 8.16., sunt:

$$c_1 = -(y_G - y_{G_1}) = -(3t - t) = -2t; \quad c_2 = y_{G_2} - y_G = 5t - 3t = 2t$$

Momentele de inerție axiale pentru cele două dreptunghiuri sunt:

$$I_{z1} = \left(\frac{b \cdot h^3}{12} \right) = \frac{6t \cdot (2t)^3}{12} = 4t^4; \quad I_{z2} = \left(\frac{b \cdot h^3}{12} \right) = \frac{2t \cdot (6t)^3}{12} = 36t^4$$

Cu acestea, se calculează momentul de inerție axial I_z al întregii secțiunii folosind relația lui Steiner:

$$\begin{aligned} I_z &= \sum_{i=1}^2 (I_{zi} + c_i^2 \cdot A_i) = I_{z1} + c_1^2 \cdot A_1 + I_{z2} + c_2^2 \cdot A_2 = \\ &= 4t^4 + (-2t)^2 \cdot 12t^2 + 36t^4 + (2t)^2 \cdot 12t^2 = 136t^4 \end{aligned}$$

Se calculează modulul de rezistență axial $W_{z,min}$:

$$y_{max} = 8t - y_G = 8t - 3t = 5t \Rightarrow W_{z,min} = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{136t^4}{5t} = 27,2t^3$$

Relația de verificare la încovoiere pentru $t = 25 \text{ mm}$ este:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{iz,max}}{W_{z,min}} \leq \sigma_a \Leftrightarrow \frac{44 \cdot 10^6}{27,2 \cdot 25^3} = 103,53 \text{ [MPa]} < \sigma_a = 160 \text{ [MPa]}$$

c) Se folosește relația lui Navier pentru a determina valorile extreme ale tensiunii în fibrele (1 – 1) de ordonată $y_{1-1} = -y_G = -3t$, respectiv pentru fibrele (3 – 3) de ordonată $y_{3-3} = y_{max} = 5t$, figura 8.17.:

$$\sigma_{1-1} = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_{1-1} = \frac{44 \cdot 10^6}{136 \cdot 25^4} \cdot (-3 \cdot 25) = -62,12 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{3-3} = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_{3-3} = \frac{44 \cdot 10^6}{136 \cdot 25^4} \cdot (5 \cdot 25) = 103,53 \text{ [MPa]}$$

Diagrama tensiunii normale σ , este prezentată în figura 8.17.b.

Pentru calculul tensiunii tangențiale maxime, din diagrama forțelor tăietoare se obține tensiunea tangențială maximă:

$$T_{max} = |-11| \text{ [kN]}$$

Tensiunea tangențială τ se determină cu relația lui Juravski. În fibrele extreme, tensiunile tangențiale sunt nule $\tau_{1-1} = \tau_{3-3} = 0$. Pentru calculul momentele statice S_z , figura 8.17., se determină:

$$A_{11} = 6t \cdot 2t = 12t^2; A_{33} = 5t \cdot 2t = 10t^2$$

$$y_{g_{11}} = y_G - t = 3t - t = 2t; y_{g_{33}} = \frac{5t}{2} = 2,5t$$

Momentul static aferent secțiunilor (2 – 2) și (2' – 2') este:

$$S_z^{2-2} = S_z^{2'-2'} = A_{11} \cdot y_{g_{11}} = 12t^2 \cdot 2t = 24t^3$$

Momentul static față de axa centrală Gz_G :

$$S_z^G = A_{33} \cdot y_{g_{33}} = 10t^2 \cdot 2,5t = 25t^3$$

Momentul static este maxim în axa neutră Gz_G , $S_z^{max} = 25t^3$.

Pentru calculul tensiunilor tangențiale se va ține cont de lățimea secțiunii:
- fibra (2 – 2), $b_z^{2-2} = 6t$;

- fibra $(2' - 2')$, $b_z^{2'-2'} = 2t$
- fibra în axa neutră Gz_G , $b_z^G = 2t$

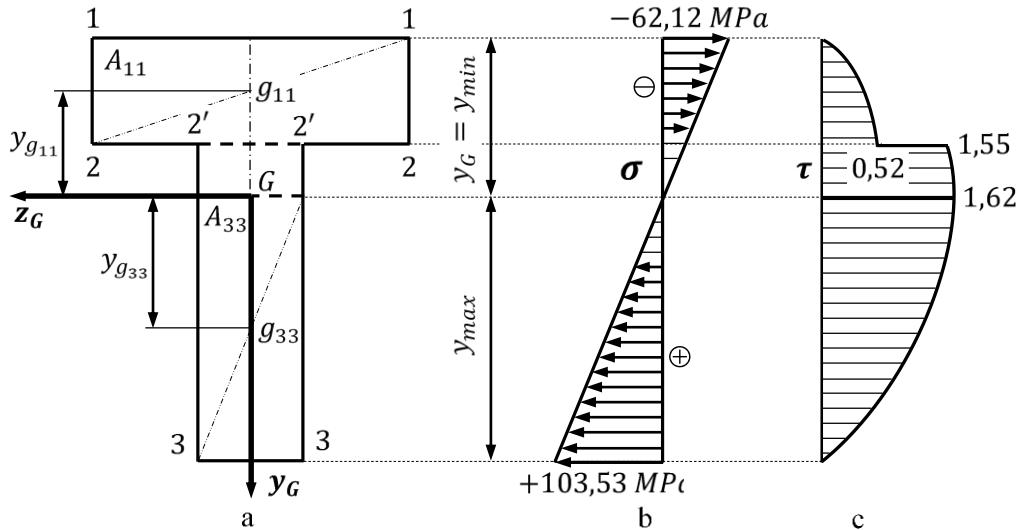


Figura 8.17. Aplicație. Variația tensiunilor pe secțiunea grinzi

Din momentele statice și lățimea secțiunii, se determină tensiunile tangențiale τ pe fibrele respective în secțiunea în care acționează forța F pentru $T_y = |-11| [kN]$ și $t = 25 \text{ mm}$.

➤ fibra $(2 - 2)$:

$$\tau_{2-2} = \frac{T_y \cdot S_z^{2-2}}{b_z^{2-2} \cdot I_z} = \frac{(11 \cdot 10^3) \cdot (24 \cdot 25^3)}{(6 \cdot 25) \cdot (136 \cdot 25^4)} \cong 0,52 [\text{MPa}]$$

➤ fibra $(2' - 2')$:

$$\tau_{2'-2'} = \frac{T_y \cdot S_z^{2'-2'}}{b_z^{2'-2'} \cdot I_z} = \frac{(11 \cdot 10^3) \cdot (24 \cdot 25^3)}{(2 \cdot 25) \cdot (136 \cdot 25^4)} \cong 1,55 [\text{MPa}]$$

➤ fibra din axa neutră Gz_G :

$$\tau_{Gz} = \frac{T_y \cdot S_z^G}{b_z^G \cdot I_z} = \frac{(11 \cdot 10^3) \cdot (25 \cdot 25^3)}{(2 \cdot 25) \cdot (136 \cdot 25^4)} \cong 1,62 [\text{MPa}]$$

Cu aceste valori se trasează diagrama tensiunii tangențiale τ , figura 9.17.

Capitolul 9

TORSIUNEA BARELOR DREPTE

9.1. Noțiuni introductive

Dacă în secțiunea transversală a unui element de rezistență de tip bară acționează un singur efort diferit de zero, vectorul moment orientat după axa barei $M_x = M_t \neq 0$, în bară se produce o **solicitare de răsucire sau torsiune**.

Solicitarea de torsiune este produsă de forțele care nu întâlnesc axa longitudinală a barei și nu sunt paralele cu ea. Prin convenție sunt considerate pozitive momentele de torsiune orientate în sensul normalei exterioare la secțiune.

9.2. Calculul momentului de torsiune

Torsiunea este prezentă în multe elemente de rezistență (construcția metalică a avioanelor, șasiu auto etc) fiind solicitarea predominantă a arborilor mașinilor.

În mișcarea de rotație puterea se calculează cu relația:

$$P = M_t \cdot \omega \quad (9.1.)$$

unde M_t reprezintă momentul de torsiune care produce mișcarea iar

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{60} = \frac{\pi \cdot n}{30} \quad [\text{rad/sec}]$$

reprezintă viteza unghiulară iar n reprezintă turația.

Momentul de torsiune se poate calcula în funcție de puterea transmisă:

➤ pentru **puterea P dată în [kW]**:

$$M_t[\text{kN} \cdot \text{m}] = 9,55 \cdot \frac{P[\text{kW}]}{n[\text{rot/min}]} \quad (9.2.)$$

➤ pentru **puterea P dată în [CP]**:

$$M_t[\text{kN} \cdot \text{m}] = 7,025 \cdot \frac{P[\text{CP}]}{n[\text{rot/min}]} \quad (9.3.)$$

Dacă pe un arbore se află mai multe roți de curea, figura 9.1. și dacă roata mare este motoare $S_1 > S_2$ momentul de torsiune transmis de această roată este:

$$M_t = (S_1 - S_2) \cdot R \quad (9.4.)$$

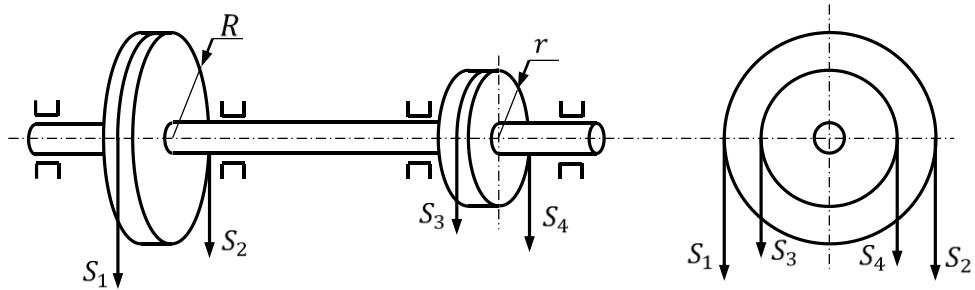


Figura 9.1. Arbore cu roată de curea

Condiția de echilibru este ca acest moment să fie egal cu cel preluat de roata mică la care $S_4 > S_3$:

$$M_t = (S_1 - S_2) \cdot R = (S_4 - S_3) \cdot r \quad (9.5.)$$

Pe toată distanța dintre roțile de curea momentul de torsiune M_t este constant.

Dacă pe arbore este montată o tobă (tambur) pentru cablu acționat de forță F , figura 9.2., momentul de torsiune este:

$$M_t = F \cdot R \quad (9.6.)$$

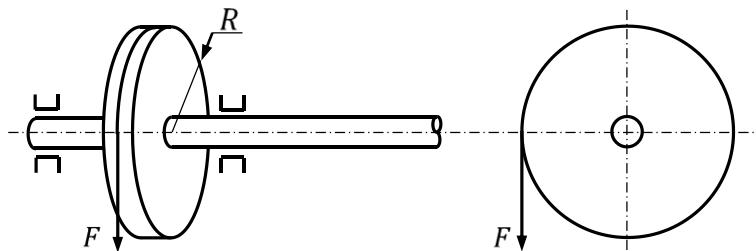


Figura 9.2. Arbore cu tobă (tambur) pentru cablu

Și în cazul momentelor de torsiune este valabilă definiția: momentul de torsiune într-o secțiune este egal cu suma momentelor de torsiune din stânga secțiunii sau a celor din dreapta secțiunii, luate cu semn schimbat.

9.3. Starea de forfecare pură

Se consideră starea plană de tensiune, figura 9.3.a. Pe cele patru fețe ale paralelipipedului având normale axele x și y acționează numai tensiuni tangențiale egale (principiului dualității). Acest element de volum se află în **stare de forfecare pură**. El se deformează schimbându-și unghiiurile, fără modificarea lungimii laturilor.

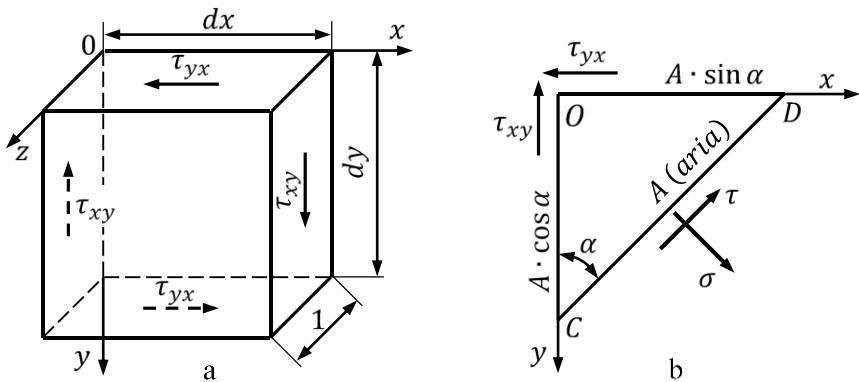


Figura 9.3. Starea plană de tensiune

Se vor determina tensiunile pe o secțiune înclinată cu unghiul α față de axa Oy . Se notează aria feței CD prin A , figura 9.3.b, fața OC va avea aria $(A \cdot \cos \alpha)$ iar fața OD aria $(A \cdot \sin \alpha)$. Elementul de volum este în echilibru sub acțiunea forțelor, ecuațiile de echilibru ale proiecțiilor forțelor σ și respectiv τ sunt:

$$\begin{aligned} \sigma \cdot A - \tau_{xy} \cdot (A \cdot \cos \alpha) \cdot \sin \alpha - \tau_{yx} \cdot (A \cdot \sin \alpha) \cdot \cos \alpha &= 0 \\ \tau \cdot A + \tau_{xy} \cdot (A \cdot \cos \alpha) \cdot \cos \alpha - \tau_{yx} \cdot (A \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (9.7.)$$

Conform principiului dualității tensiunilor tangențiale $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, din relația (9.7.), se obține:

$$\begin{aligned} \sigma &= \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha \\ \tau &= -\tau_{yx} \cdot \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (9.8.)$$

Se observă că, pe secțiunea înclinată cu unghiul $\alpha = 45^\circ$, se obțin tensiunile:

$$\begin{aligned} \sigma_{45^\circ} &= \tau_{xy} \cdot \sin 90^\circ = \tau_{xy} \\ \tau_{45^\circ} &= -\tau_{yx} \cdot \cos 90^\circ = 0 \end{aligned} \quad (9.9.)$$

De asemenea pe o porțiune perpendiculară pe aceasta, unghiul $\alpha = 135^\circ$, se obțin tensiunile:

$$\begin{aligned} \sigma_{135^\circ} &= \tau_{xy} \cdot \sin 270^\circ = \tau_{xy} \cdot (-1) = -\tau_{xy} \\ \tau_{135^\circ} &= -\tau_{yx} \cdot \cos 270^\circ = 0 \end{aligned} \quad (9.10.)$$

9.4. Torsiunea barelor de secțiune circulară

Se consideră bara dreaptă de secțiune circulară constantă, solicitată de momentul de torsiune M_t , figura 9.4. Se acceptă următoarele ipoteze:

- materialul barei este omogen și izotrop;
- materialul barei respectă legea lui Hooke, $\tau = \gamma \cdot G$.

Dacă se trasează pe conturul barei un caroaj ortogonal format din generatoare echidistante verticale (paralele cu axa barei) și cercuri paralele constituind o rețea de pătrățele curbilinii, figura 9.4., după aplicarea momentului de torsiune M_t se constată:

- secțiunea plană AB rămâne tot plană A_1B_1 la axa barei deci, ipoteza secțiunilor plane a lui Bernoulli este valabilă;
- pătrățele curbilinii $abcd$, după aplicarea momentului de torsiune M_t , devin romburi curbilinii $a_1b_1c_1d_1$, acestea modificându-și doar unghurile fără modificarea dimensiunilor laturilor, ceea ce înseamnă că avem o stare de forfecare pură.

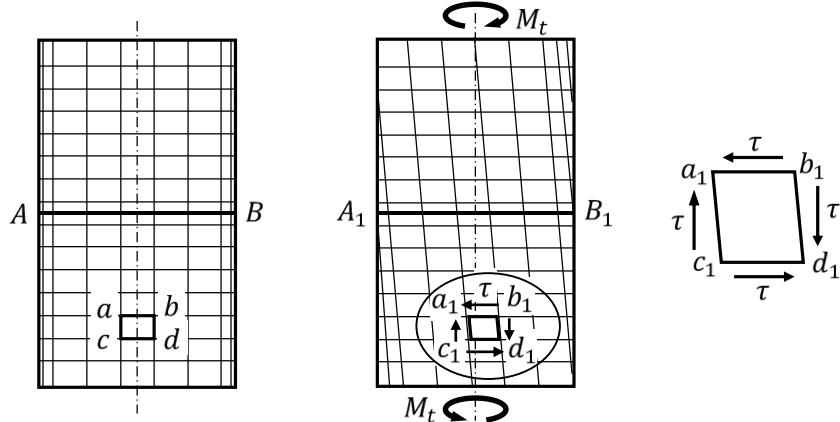


Figura 9.4. Bară de secțiune circulară

În planul secțiunii transversale apar doar tensiuni tangențiale τ perpendiculare pe rază, la elementul de arie. Legătura dintre momentul de torsiune M_t și tensiunea tangențială τ se obține din ecuația de echilibru într-o secțiune a barei, figura 9.5.

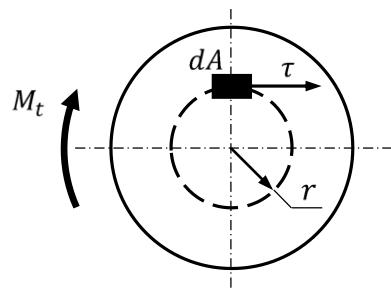


Figura 9.5. Tensiuni tangențiale τ

$$M_t = \int_A (\tau \cdot dA) \cdot r = \int_A r \cdot \tau \cdot dA \quad (9.11.)$$

Se consideră bara dreaptă de secțiune circulară încastrată la un capăt și liberă la celălalt, figura 9.6.a, cu raza R și lungimea l . Generatoarea CB se înclină datorită momentului de torsiune M_t cu unghiul γ_{max} . Punctul C fiind un punct fix din încastrare se constată că, o rază oarecare OB se rotește cu unghiul φ dar rămâne tot dreaptă și ajunge în poziția OB_1 .

În figura 9.6.b, se consideră un element de bară de lungime infinit mică dx cu raza secțiunii $r < R$ (element central din bară). Când generatoarea cb se înclină cu unghiul γ numit **unghi de lunecare specifică**, raza Ob se va roti cu unghiul $d\varphi$, ajungând în poziția Ob_1 .

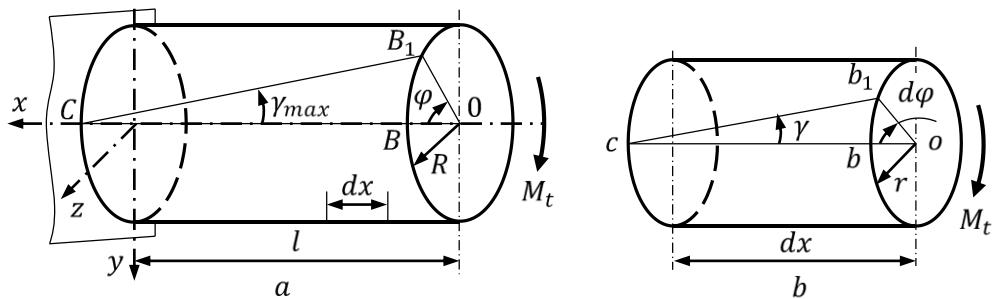


Figura 9.6. Deformații și deplasări datorate torsiunii

Din considerante de deformații se poate scrie relația:

$$\text{arc}(bb_1) = \gamma \cdot dx = r \cdot d\varphi$$

De unde se obține:

$$\gamma = r \cdot \frac{d\varphi}{dx} = r \cdot \theta \quad (9.12.)$$

În relația (9.12.) s-a notat **unghiul de răsucire specifică θ** , ca fiind unghiul cu care se rotesc una față de alta două secțiuni transversale situate la o distanță egală cu unitatea:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (9.13.)$$

Prin aplicarea legii lui Hooke pentru torsiune se obține tensiunea tangențială τ :

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \theta \cdot r \quad (9.14.)$$

unde G reprezintă modulul de elasticitate transversal al materialului din care este confectionată bara supusă la torsiune (pentru oțel: $G \cong 8,1 \cdot 10^4$ [MPa]).

Din legea de variație a tensiunii tangențiale pentru secțiunea circulară a barei, (9.14.), se observă că tensiunea tangențială variază liniar cu raza, fiind nulă în centrul secțiunii ($r = 0$) și maximă pe conturul secțiunii pentru ($r = R$).

$$\tau_{max} = G \cdot \gamma_{max} = G \cdot \theta \cdot R \quad (9.15.)$$

Deoarece τ_{max} este tangentă la contur (perpendiculară pe rază), se admite că în orice punct al secțiunii, tensiunea tangențială este perpendiculară pe rază. Astfel se obține diagrama de variație a tensiunii tangențiale, figura 9.7.

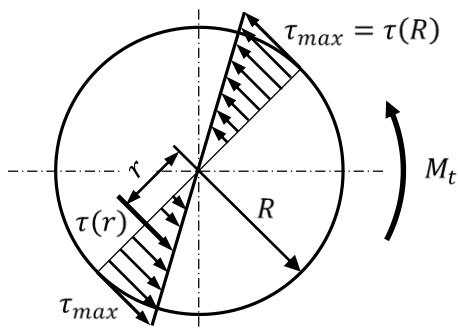


Figura 9.7. Diagrama de variație a tensiunii tangențiale

Pentru a stabili legătura dintre momentul de torsiune M_t și tensiunea tangențială τ se ține cont că momentul de torsiune este egal cu suma momentelor tuturor forțelor elementare $dF = \tau \cdot dA$, față de centrul secțiunii O , figura 9.8.

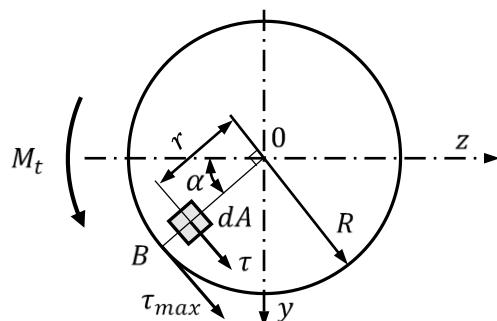


Figura 9.8. Echivalență dintre momentul de torsiune și tensiunea tangențială

$$M_t = \int_A r \cdot dF = \int_A r \cdot (\tau \cdot dA) = G \cdot \theta \cdot I_p \Rightarrow G \cdot \theta = \frac{M_t}{I_p} \quad (9.16.)$$

Se înlocuiește relația (9.16.) în relația (9.14.), se obține:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot r \quad (9.17.)$$

Relația (9.17.) reprezintă **relația de calcul a tensiunii tangențiale** τ produsă de momentul de torsiune M_t în bara de secțiune circulară cu momentul de inerție polar I_p .

Valoarea maximă a tensiunii tangențiale τ se obține la raza $r_{max} = R$:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_p} \cdot r_{max} = \frac{M_t}{I_p} \cdot R = \frac{M_t}{\frac{I_p}{R}} = \frac{M_t}{W_p} \leq \tau_a \quad (9.18.)$$

unde $W_p = I_p/R$ reprezintă modulul de rezistență polar al secțiunii transversale.

Din relația (9.18.) se rezolvă cele trei probleme specifice rezistenței materialelor:
a) **probleme de dimensionare**: modulul de rezistență polar necesar este:

$$W_{p,nec} = \frac{M_{t,max}}{\tau_a} \quad (9.19.)$$

b) **probleme de verificare**: se calculează tensiunea efectivă maximă din secțiunea periculoasă, secțiune pentru care modulul de rezistență polar este cunoscut:

$$\tau_{ef,max} = \frac{M_{t,max}}{W_{p,ef}} \leq \tau_a \quad (9.20.)$$

c) **probleme de efort capabil**: se determină momentul de torsiune maxim admis când se cunoaște materialul piesei (τ_a) și dimensiunile secțiunii transversale (W_p, I_p):

$$M_{t,cap} = \tau_a \cdot W_{p,ef} \quad (9.21.)$$

Pentru secțiunea circulară de diametru d , modulul de rezistență polar este:

$$W_p = \frac{I_p}{R} = \frac{(\pi \cdot d^4)/32}{d/2} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$$

Din relația (9.16.) se poate determina unghiul de răsucire specific:

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \quad (9.22.)$$

iar din relația (9.13.) se obține unghiul de răsucire $d\varphi$ pentru o bară de lungime dx :

$$d\varphi = \theta \cdot dx = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \cdot dx \quad (9.23.)$$

Produsul $(G \cdot I_p)$ reprezintă **modulul de rigiditate la torsiune** al barei de secțiune circulară. Unghiul de răsucire total pentru bara de lungime l se determină prin integrarea relației (9.23.) pe toată lungimea barei:

$$\Delta\varphi = \int_l d\varphi = \int_0^l \frac{M_t}{G \cdot I_p} \cdot dx = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \quad (9.24.)$$

Pornind de la relația (9.22.), se pot rezolva cele trei tipuri de probleme specifice rezistenței materialelor din condiția de rigiditate $\theta \leq \theta_a$:

a) **probleme de dimensionare**: momentul de inerție polar necesar este:

$$I_{p,nec} = \frac{M_{t,max}}{G \cdot \theta_a} \quad (9.25.)$$

b) **probleme de verificare**: se calculează unghiul de răsucire maxim din secțiunea periculoasă, secțiune la care momentul de inerție polar este cunoscut:

$$\theta_{ef,max} = \frac{M_{t,max}}{G \cdot I_{p,ef}} \leq \theta_a \quad (9.26.)$$

c) **probleme de efort capabil**: se determină momentul de torsiune maxim admis dacă se cunoaște unghiul de răsucire (θ_a) și dimensiunile secțiunii transversale (W_p, I_p):

$$M_{t,cap} = G \cdot I_{p,ef} \cdot \theta_a \quad (9.27.)$$

Observații:

➤ de regulă, valorile unghiului de răsucire specific admisibil θ_a în standarde este dat în grade pe metru, [°/m] și trebuie transformate în radiani pe milimetru, [rad/mm]:

$$\theta_a \left[\frac{^0}{m} \right] = \theta_a \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{10^3} \left[\frac{rad}{mm} \right]$$

➤ în practică se cunosc puterile diferitelor mașini care consumă sau produc energie pe arbore, precum și turațiile acestora.

Pentru un motor de putere $P [kW]$ și turația $n [rot/min]$ momentul de torsiune la arbore este:

$$M_t [kN \cdot m] = 9,55 \cdot \frac{P [kW]}{n \left[\frac{rot}{min} \right]}$$

Dacă puterea este dată în „cal putere” $P [CP]$ și turația $n [rot/min]$ momentul de torsiune la arbore este ($1kW = 1,36 CP$):

$$M_t [kN \cdot m] = 7,025 \cdot \frac{P [CP]}{n \left[\frac{rot}{min} \right]}$$

9.5. Calculul arcurilor elicoidale cu pas mic

Arcurile elicoidale cu pas mic sunt foarte des folosite în construcția de mașini și sunt supuse acțiunii forțelor exterioare care întind sau comprimă arcul. Forța aplicată arcului este în general de un singur semn, fie la întindere fie la compresiune.

Se consideră arcul elicoidal cu pas mic din figura 9.9.a

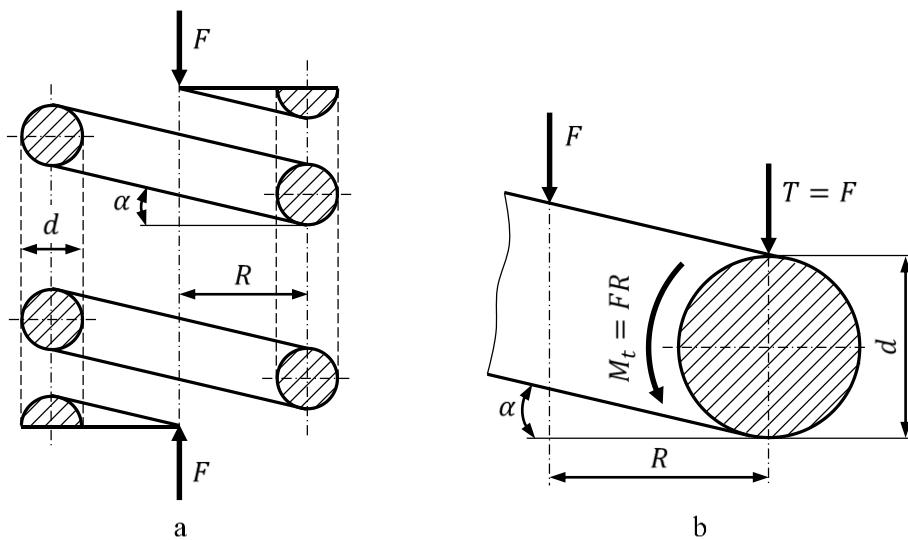


Figura 9.9. Arc elicoidal cu spire strânse

Pentru arcul din figura 9.9.a, se notează următoarele:

- F reprezintă forța aplicată arcului,
- R reprezintă raza de înfășurare a sârmei arcului,
- d reprezintă diametrul secțiunii transversale a sârmei arcului,
- α reprezintă unghiul de înclinare al elicei arcului,
- n reprezintă numărul de spire.

Dacă unghiul de înclinare al elicei arcului α este mare, în secțiunea sârmei arcului apar: forță axială N , forță tăietoare T , momentul încovoiotor M_i și momentul de torsiune M_t . În cazul arcului cu unghiul de înclinare al elicei α mic, forța axială N și momentul încovoiotor M_i se pot neglija și astfel, singurele solicitări care apar sunt forța tăietoare $T = F$ și momentul de torsiune M_t , figura 9.9.b:

$$T = F ; \quad M_t = F \cdot R$$

Calculul arcului elicoidal cu pas mic se poate efectua cu destulă exactitate dacă se ține cont doar de momentul de torsiune M_t folosind relația de dimenziune:

$$\tau = \frac{M_{t,max}}{W_{p,nec}} \Rightarrow W_{p,nec} = \frac{M_{t,max}}{\tau_a} = \frac{F \cdot R}{\tau_a}$$

$$W_{p,nec} = \frac{\pi \cdot d_{nec}^3}{16} \Rightarrow \frac{\pi \cdot d_{nec}^3}{16} = \frac{F \cdot R}{\tau_a} \Rightarrow d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot F \cdot R}{\pi \cdot \tau_a}} \Rightarrow d_{def}$$

La oțelurile pentru arcuri: $\tau_a = 400 \div 600$ [MPa] iar $G = 85$ [GPa].

Dacă la calculul de dimenziune al arcului se ține cont de forța tăietoare $T = F$ și de momentul de torsiune $M_t = F \cdot R$, figura 9.10., se obțin tensiunile tangențiale:

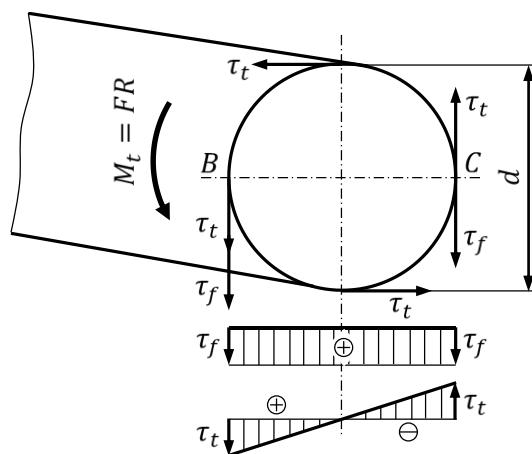


Figura 9.10. Tensiunile din spira arcului elicoidal

- tensiunea tangențială dată de momentul de torsiune M_t :

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_p} = \frac{F \cdot R}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{16 \cdot F \cdot R}{\pi \cdot d^3}$$

- tensiunea tangențială dată de forță tăietoare $T = F$:

$$\tau_f = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{A} = \frac{4}{3} \cdot \frac{F}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{16 \cdot F}{3 \cdot \pi \cdot d^2}$$

Tensiunea tangențială maximă produsă de momentul de torsiune se produce în toate punctele de pe conturul secțiunii. În punctul cel mai solicitat punctul B din figura 9.10., tensiunea tangențială maximă se obține pe față interioară a spirei și are expresia:

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= \tau_t + \tau_f = \frac{16 \cdot F \cdot R}{\pi \cdot d^3} + \frac{16 \cdot F}{3 \cdot \pi \cdot d^2} = \frac{16 \cdot F \cdot R}{\pi \cdot d^3} \cdot \left(1 + \frac{d}{3 \cdot R}\right) = \\ &= \tau_t \cdot \left(1 + \frac{d}{3 \cdot R}\right) \leq \tau_a \end{aligned}$$

Dacă raportul:

$$\frac{d}{3 \cdot R} \leq \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{d}{3 \cdot R} \leq 0,04 \Rightarrow d = 0,12 \cdot R$$

efectul forfecării poate fi neglijat și se obține :

$$\tau_{max} = \tau_t \quad (9.28.)$$

9.6. Aplicație

Se consideră arborele din figura 9.11. care primește puterea $P = 120 [kW]$ și turația $n = 500 [rot/min]$ de la un motor și transmite puterile $P_1 = 70 [kW]$ și respectiv $P_2 = 50 [kW]$.

Se cere:

- a) dimensionarea arborilor din oțel din cele două condiții:
 - din condiția de rezistență: $\tau_a = 30 [MPa]$;
 - din condiția de rigiditate: $G = 8 \cdot 10^4 [MPa]$ și $\theta_a = 1/3 [^\circ/m]$.
- b) rotirea relativă între roțile de la capete dacă $a = 2 [m]$.

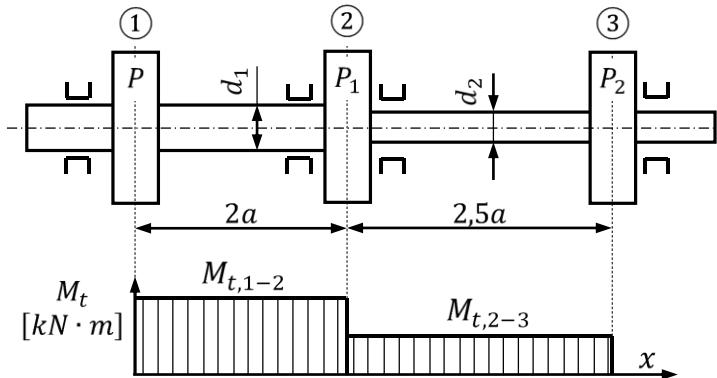


Figura 9.11. Aplicație

Rezolvare:

Între puteri există relația de echilibru:

$$P = P_1 + P_2 \Leftrightarrow 120 = 70 + 50$$

Se calculează momentele de torsiune:

$$M_t = 9,55 \cdot \frac{P}{n} = 9,55 \cdot \frac{120}{500} = 2,292 \text{ [kN} \cdot \text{m]}$$

$$M_{t1} = 9,55 \cdot \frac{P_1}{n} = 9,55 \cdot \frac{70}{500} = 1,337 \text{ [kN} \cdot \text{m}]$$

$$M_{t2} = 9,55 \cdot \frac{P_2}{n} = 9,55 \cdot \frac{50}{500} = 0,955 \text{ [kN} \cdot \text{m}]$$

Pe cele două tronsoane 1 – 2 și respectiv 2 – 3 momentele de torsiune vor fi:

$$M_{t,1-2} = M_t = 2,292 \text{ [kN} \cdot \text{m}]$$

$$M_{t,2-3} = M_t - M_{t1} = 2,292 - 1,337 = 0,955 \text{ [kN} \cdot \text{m}]$$

- a) Se vor dimensiona cei doi arbori din cele două condiții (rezistență și rigiditate)
➤ dimensionarea arborelui de diametru d_1 :

- din condiția de rezistență: $\tau_a = 30 \text{ [MPa]}$:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} \leq \tau_a \Leftrightarrow W_{p,nec} = \frac{M_{t,1-2}}{\tau_a} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi \cdot d_{1,nec}^3(\tau)}{16} = \frac{M_{t,1-2}}{\tau_a} \Rightarrow d_{1,nec}(\tau) = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{t,1-2}}{\pi \cdot \tau_a}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{16 \cdot (2,292 \cdot 10^6)}{\pi \cdot 30}} = 73,0 \text{ [mm]}$$

- din condiția de rigiditate: $G = 8 \cdot 10^4 \text{ [MPa]}$ și $\theta_a = 1/3 \text{ [}^0/\text{m}]$.

$$\theta_a = \frac{1}{3} \left[\frac{0}{m} \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{10^3} \left[\frac{\text{rad}}{\text{mm}} \right] = 5,8 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{rad}}{\text{mm}} \right]$$

$$\theta_{max} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \leq \theta_a \Leftrightarrow I_{p,nec} = \frac{M_{t,1-2}}{G \cdot \theta_a} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi \cdot d_{1,nec}^4(\theta)}{32} = \frac{M_{t,1-2}}{G \cdot \theta_a} \Rightarrow d_{1,nec}(\theta) = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{t,1-2}}{\pi \cdot G \cdot \theta_a}} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{32 \cdot (2,292 \cdot 10^6)}{\pi \cdot (8 \cdot 10^4) \cdot (5,8 \cdot 10^{-6})}} = 84,2 \text{ [mm]}$$

Se determină diametrul necesar $d_{1,nec}$:

$$d_{1,nec} = max\{d_{1,nec}(\tau); d_{1,nec}(\theta)\} = max\{73; 84,2\} = 84,2 \text{ [mm]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{1ef} = 85 \text{ [mm]}$$

Se verifică diametrul efectiv $d_{1,ef} = 85 \text{ [mm]}$ din cele două condiții:

- din condiția de rezistență: $\tau_a = 30 \text{ [MPa]}$:

$$\tau_1 = \frac{M_{t,1-2}}{W_{p1,ef}} = \frac{16 \cdot M_{t,1-2}}{\pi \cdot d_{1,ef}^3} = \frac{16 \cdot (2,292 \cdot 10^6)}{\pi \cdot 85^3} =$$

$$= 19 \text{ [MPa]} < \tau_a = 30 \text{ [MPa]}$$

- din condiția de rigiditate: $G = 8 \cdot 10^4 \text{ [MPa]}$; $\theta_a = 5,8 \cdot 10^{-6} \text{ [rad/mm]}$:

$$\theta_1 = \frac{M_{t,1-2}}{G \cdot I_{p1,ef}} = \frac{M_{t,1-2}}{G \cdot \frac{\pi \cdot d_{1,ef}^4}{32}} = \frac{32 \cdot M_{t,1-2}}{G \cdot \pi \cdot d_{1,ef}^4} = \frac{32 \cdot (2,292 \cdot 10^6)}{(8 \cdot 10^4) \cdot \pi \cdot 85^4} =$$

$$= 5,6 \cdot 10^{-6} \left[\frac{rad}{mm} \right] < \theta_a = 5,8 \cdot 10^{-6} \left[\frac{rad}{mm} \right]$$

➤ dimensionarea arborelui de diametru d_2 :

- din condiția de rezistență: $\tau_a = 30 [MPa]$:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} \leq \tau_a \Leftrightarrow W_{p,nec} = \frac{M_{t,2-3}}{\tau_a} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi \cdot d_{2,nec(\tau)}^3}{16} = \frac{M_{t,2-3}}{\tau_a} \Rightarrow d_{2,nec(\tau)} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{t,2-3}}{\pi \cdot \tau_a}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{16 \cdot (0,955 \cdot 10^6)}{\pi \cdot 30}} = 54,5 [mm]$$

- din condiția de rigiditate: $G = 8 \cdot 10^4 [MPa]$ și $\theta_a = 5,8 \cdot 10^{-6} [rad/mm]$.

$$\theta_{max} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \leq \theta_a \Leftrightarrow I_{p,nec} = \frac{M_{t,2-3}}{G \cdot \theta_a} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi \cdot d_{2,nec(\theta)}^4}{32} = \frac{M_{t,2-3}}{G \cdot \theta_a} \Rightarrow d_{2,nec(\theta)} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{t,2-3}}{\pi \cdot G \cdot \theta_a}} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{32 \cdot (0,955 \cdot 10^6)}{\pi \cdot (8 \cdot 10^4) \cdot (5,8 \cdot 10^{-6})}} = 67,7 [mm]$$

Se determină diametrul necesar $d_{2,nec}$:

$$d_{2,nec} = max\{d_{2,nec(\tau)}; d_{2,nec(\theta)}\} = max\{54,5; 67,7\} = 67,7 [mm] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{2ef} = 70 [mm]$$

Se verifică diametrul efectiv $d_{2,ef} = 70 [mm]$ din cele două condiții:

- din condiția de rezistență: $\tau_a = 30 \text{ [MPa]}$:

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \frac{M_{t,2-3}}{W_{p2,ef}} = \frac{M_{t,2-3}}{\frac{\pi \cdot d_{2,ef}^3}{16}} = \frac{16 \cdot M_{t,2-3}}{\pi \cdot d_{2,ef}^3} = \frac{16 \cdot (0,955 \cdot 10^6)}{\pi \cdot 70^3} = \\ &= 14,2 \text{ [MPa]} < \tau_a = 30 \text{ [MPa]}\end{aligned}$$

- din condiția de rigiditate: $G = 8 \cdot 10^4 \text{ [MPa]}$ și $\theta_a = 5,8 \cdot 10^6 \text{ [rad/mm]}$.

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \frac{M_{t,2-3}}{G \cdot I_{p2,ef}} = \frac{M_{t,2-3}}{\frac{G \cdot \pi \cdot d_{2,ef}^4}{32}} = \frac{32 \cdot M_{t,2-3}}{G \cdot \pi \cdot d_{2,ef}^4} = \frac{32 \cdot (0,955 \cdot 10^6)}{(8 \cdot 10^4) \cdot \pi \cdot 70^4} = \\ &= 5,1 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{rad}}{\text{mm}} \right] < \theta_a = 5,8 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{rad}}{\text{mm}} \right]\end{aligned}$$

b) Pentru a calcula rotirea relativă între roțile de la capete 1-3 se folosește relația:

$$\varphi_{1-3} = \varphi_{1-2} + \varphi_{2-3}$$

Rotirea se calculează cu relația:

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p}$$

Pentru cele două tronsoane 1-2 și 2-3 rotirea va fi:

$$\begin{aligned}\varphi_{1-3} &= \varphi_{1-2} + \varphi_{2-3} = \frac{M_{t,1-2} \cdot l}{G \cdot I_{p1,ef}} + \frac{M_{t,2-3} \cdot l}{G \cdot I_{p2,ef}} = \\ &= \frac{M_{t,1-2} \cdot 2a}{G \cdot \frac{\pi \cdot d_{1,ef}^4}{32}} + \frac{M_{t,2-3} \cdot 2,5a}{G \cdot \frac{\pi \cdot d_{2,ef}^4}{32}} = \frac{32 \cdot (2,292 \cdot 10^6) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 10^3)}{(8 \cdot 10^4) \cdot (\pi \cdot 85^4)} + \\ &+ \frac{32 \cdot (0,955 \cdot 10^6) \cdot (2,5 \cdot 2 \cdot 10^3)}{(8 \cdot 10^4) \cdot (\pi \cdot 70^4)} \cong 0,048 \text{ [rad]}\end{aligned}$$

Deci, rotirea relativă între roțile 1-3 este: $\varphi_{1-3} = \varphi_{1-2} + \varphi_{2-3} \cong 0,048 \text{ [rad]}$

Capitolul 10

STABILITATEA ECHILIBRULUI ELASTIC

10.1. Noțiuni introductive. Flambajul

Starea de solicitare a unui sistem elastic reprezintă o stare de echilibru între forțele exterioare și cele interioare, care poate fi stabilă sau instabilă.

Starea de echilibru este stabilă atunci când orice variație a efortului produce numai variații mici ale deplasărilor și eforturilor interioare, iar sistemul revine la starea inițială atunci când efortul a fost retras, figura 10.1.a.

Dacă sistemul are tendința de a se deplasa în sensul dat de variația efortului, starea de echilibru poate fi instabilă, figura 10.1.b.

Un sistem este în echilibru indiferent dacă după acțiunea forței, sistemuliese din echilibru și rămâne în noua poziție, care este tot o poziție de echilibru, figura 10.1.c.

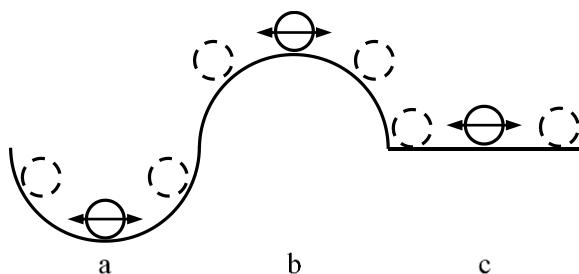


Figura 10.1. Tipuri de stabilitate

Între starea de echilibru stabil și instabil se află o stare intermediară critică, în care sistemul solicitat își poate pierde stabilitatea dintr-o cauză aparent nesemnificativă.

Efortul corespondent acestei stări intermediare critice este **forța critică** F_{cr} . Deci, dacă forța atinge valoarea critică F_{cr} , sistemul își pierde starea de echilibru și poate flamba.

Flambajul reprezintă fenomenul de trecere a unei piese din starea de echilibru stabil în starea instabilă, pentru o anumită valoare critică a eforturilor aplicate.

Relația fundamentală pentru calculul la flambaj este:

$$c_f = \frac{F_{cr}}{N_{ef}} \leq c_{af} \quad (10.1.)$$

unde:

- F_{cr} reprezintă forța critică de flambaj,
- N_{ef} reprezintă forța (efortul) axială efectivă de compresiune din bară,
- c_{af} reprezintă coeficientul de siguranță admisibil la flambaj.

Pentru a evita flambajul, forța efectivă aplicată trebuie să respecte condiția:

$$F_{ef} \leq \frac{F_{cr}}{c_{af}}$$

unde F_{ef} reprezintă forța efectivă ce acționează în bară.

Această condiție este echivalentă cu:

$$\sigma_{ef} \leq \frac{\sigma_{cr}}{c_{af}} \quad (10.2.)$$

unde:

- σ_{ef} reprezintă tensiunea efectivă corespunzătoare forței efective F_{ef} ;
- σ_{cr} reprezintă tensiunea critică, corespunzătoare forței critice de flambaj F_{cr} .

Flambajul poate fi general sau local și se produce cu atât mai ușor cu cât diferența dintre dimensiunile longitudinale și transversale ale elementului solicitat sunt mai mari.

În calculul de stabilitate **nu** se neglijază anumiți factori, în aparență neînsemnați. Astfel, flambajul unei bare drepte supusă la compresiune este influențat în cea mai mare măsură de factori secundari cum sunt: neuniformitatea de material, excentricitatea sarcinii, curbura inițială etc., care provoacă apariția unui moment încovoiator inițial ce va tende să crească în urma creșterii brațului de aplicare al forței axiale.

10.2. Pierderea stabilității barelor în domeniul de proporționalitate

10.2.1. Formula lui Euler

Atunci când flambajul barelor supuse la compresiune are loc în domeniul liniar-elastic, expresia forței critice F_{cr} poate fi dedusă teoretic.

Se consideră bara de lungime l și secțiunea A constantă pe toată lungimea barei, având momentul de inerție I . Bara este articulată la ambele capete și solicitată la compresiune de forțele F , figura 10.2.

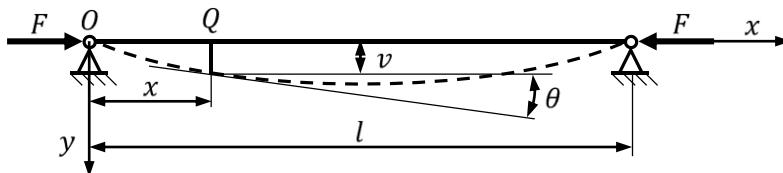


Figura 10.2. Bară articulată supusă la compresiune

Prin aplicarea forței F se produce încovoierea barei. Într-o secțiune transversală oarecare, situată la distanța x de articulația din stânga (punctul Q) apare momentul încovoiator:

$$M_i = -F \cdot v \quad (10.3.)$$

Momentul maxim în această secțiune corespunde forței critice F_{cr} :

$$M_{i,max} = -F_{cr} \cdot v \quad (10.4.)$$

Ecuația aproximativă a fibrei medii deformate a barei este:

$$\frac{1}{R} = \frac{M_i}{E \cdot I} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{M_i}{E \cdot I} \quad (10.5.)$$

unde R este raza de curbură a axei elastice deformate.

Prin înlocuirea relației (10.3.) în relația (10.5.) se obține:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k^2 \cdot v = 0 \quad (10.6.)$$

În care s-a notat:

$$k^2 = \frac{F}{E \cdot I} \quad (10.7.)$$

Ecuația diferențială (10.6.) are soluția generală:

$$v = C_1 \cdot \sin(kx) + C_2 \cdot \cos(kx) \quad (10.8.)$$

Constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile la limită:

$$\begin{aligned} \text{Pentru: } x = 0; \quad v = 0 &\Rightarrow C_2 = 0 \\ \text{Pentru: } x = l; \quad v = 0 &\Rightarrow C_1 \cdot \sin(kl) = 0 \end{aligned} \quad (10.9.)$$

Deoarece $C_1 \neq 0$, (dacă $C_1 = 0 \Rightarrow v = 0$, bara nu flambează), este necesar ca:

$$\sin(kl) = 0 \Leftrightarrow kl = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi, \dots \quad (10.10.)$$

Valoarea $kl = 0$, nu este permisă din considerente fizice, $kl \neq 0$. Din restul valorilor date de relația (10.10.) se ia în considerare valoarea cea mai mică, deoarece este necesară determinarea forței critice (forță minimă):

$$kl = \pi \quad (10.11.)$$

Se înlocuiește relația (10.11.) în relația (10.7.) și se obține relația lui Euler pentru determinarea forței critice de flambaj F_{cr} :

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l^2} \quad (10.12.)$$

Relația (10.12.) este valabilă pentru cazul flambajului barei dublu articulate, caz considerat fundamental.

Expresia săgeții (10.8.), ținând cont de condițiile (10.9.) și (10.11.) devine:

$$v = C_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \quad (10.13.)$$

Ecuația (10.13.) reprezintă o sinusoidă în care constanta C_1 este amplitudinea maximă $v_{max} = C_1$ care se produce pentru $x = l/2$.

Din relația (10.13.) se observă că săgeata maximă nu depinde de forța F , experimental s-a demonstrat că în zona critică deformațiile cresc fără mărire efortului.

Din relația lui Euler (10.12.) se observă că mărimea forței critice de flambaj depinde de proprietățile fizico-mecanice ale materialului barei. Forța critică de flambaj este direct proporțională cu modulul de elasticitate al barei și nu depinde de caracteristicile de rezistență ale materialului barei (σ_r, σ_c etc.).

Celelalte soluții ale ecuației trigonometrice din care s-a determinat k (10.10.), dau valori succesive ale forței critice F_{cr} superioare celei date de relația (10.12.).

Fenomenul de flambaj apare la un număr foarte mare de elemente de rezistență: bare drepte solicitate la compresiune, bare curbe solicitate la eforturi care produc compresiunea, profile subțiri solicitate la încovoiere sau torsion, tuburi cu pereti subțiri solicitați la presiune interioară sau exterioară.

10.2.2. Influența modului de fixare a barei asupra flambajului

Relația lui Euler (10.12.) dedusă pentru bara dublu articulată poate fi aplicată și pentru alte moduri de fixare a capetelor barei, dacă în locul lungimii barei l se introduce o astfel numită lungime de flambaj l_f care depinde de modul de fixare al barei:

$$l_f = \Psi \cdot l \quad (10.14.)$$

unde Ψ este coeficientul de reducere.

Astfel, forma generală a relației lui Euler devine:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_f^2} \quad (10.15.)$$

În figura 10.3. se prezintă comparativ patru moduri de fixare a capetelor barei și valorile lungimilor de flambaj pentru fiecare caz în parte:

➤ bară articulată la ambele capete, figura 10.3.a: $l_f = l$;

- bară încastrată la un capăt și liberă la celălalt, figura 10.3.b: $l_f = 2 \cdot l$;
- bară încastrată la un capăt și articulată la celălalt, figura 10.3.c: $l_f = 0,7 \cdot l$;
- bară încastrată la ambele capete, figura 10.3.d: $l_f = 0,5 \cdot l$.

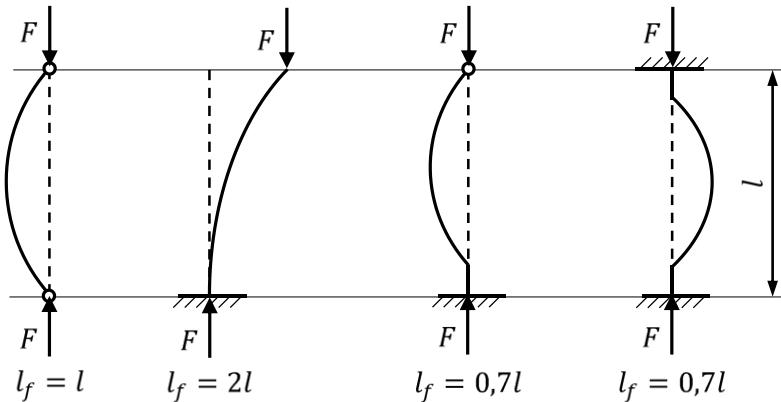


Figura 10.3. Lungimea de flambaj în funcție de fixarea barei

În practică sunt frecvente cazurile care nu corespund condițiilor de fixare a capetelor descrise în figura 10.3. Din prezentarea celor patru moduri de rezemare, se constată că forța critică de flambaj depinde de modul de rezemare prin **lungimea critică de flambaj l_f** . Pentru aceste moduri de rezemare forța critică de flambaj are o singură expresie, diferențiată doar de lungimea de flambaj l_f .

Pentru cazurile descrise în figura 10.3., valorile sunt: $\Psi = 1$ pentru bara dublu articulată; $\Psi = 2$ pentru bara încastrată la un capăt și liberă la celălalt; $\Psi = 0,7$ pentru bara încastrată la un capăt și articulată la celălalt; $\Psi = 0,5$ pentru bara încastrată la ambele capete.

În cazul unor asamblări nituite sau sudate coeficientul de reducere este;

$$\Psi = 0,70 \div 0,75 \quad (10.16.)$$

iar în cazul unor legături foarte flexibile se recomandă $\Psi = 1$.

10.2.3. Tensiunea critică de flambaj

Dacă forța critică de flambaj F_{cr} se repartizează uniform pe aria secțiunii A se obține tensiunea critică de flambaj:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_f^2 \cdot A} \quad (10.17.)$$

Pentru raza de giroză a secțiunii $i = \sqrt{I/A}$, relația (10.17.) devine:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{l_f}{i}\right)^2} \quad (10.18.)$$

Se notează cu:

$$\lambda = \frac{l_f}{i}$$

relația (10.18.) devine:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad (10.19.)$$

Raportul $\lambda = l_f/i$ se numește **coeficient de zveltețe** și reprezintă caracteristica geometrică a flexibilității barei. Tensiunea critică de flambaj din secțiunea unei bare confectionate dintr-un material dat ($E = ct.$) este determinată de flexibilitatea acesteia, flexibilitatea este mai mare cu cât tensiunea critică este mai mică.

10.2.4. Limita de aplicare a formulei lui Euler

Formula lui Euler determinată pe baza ecuației fibrei medii deformate a barei este valabilă numai pentru tensiunile critice cuprinse în domeniul liniar-elastic.

Condiția de aplicare a relațiilor (10.19.) și (10.15.) este:

$$\sigma_{cr} \leq \sigma_p \Rightarrow \lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}} \quad (10.20.)$$

unde σ_p reprezintă limita de proporționalitate a materialului barei.

Orientativ:

- $\lambda_{min} = 64$, pentru oțel carbon, ($\sigma_p = 500 \text{ MPa}$);
- $\lambda_{min} = 41$, pentru oțel aliat, ($\sigma_p = 1200 \text{ MPa}$).

10.3. Flambajul în domeniul plastic

Pentru valori ale coeficientului de zveltețe λ , inferioare unei anumite limite λ_0 , tensiunea critică de flambaj σ_{cr} nu corespunde domeniului liniar-elastic. Este necesară determinarea unei relații între σ_{cr} și λ pentru zona flambajului plastic.

Incertitudinea în ceea ce privește determinarea tensiunii critice de flambaj σ_{cr} a condus pe baza rezultatelor experimentale, la diferite relații empirice pentru funcția $\sigma_{cr}(\lambda)$, în zona flambajului elasto-plastic.

Tetmajer-Iasinski au propus pentru domeniul elasto-plastic o relație de forma:

$$\sigma_{cr} = a - b \cdot \lambda \quad (10.21.)$$

Pentru fontă se folosește relația parabolică de forma:

$$\sigma_{cr} = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2 \quad (10.22.)$$

cu limitele $\lambda_0 = 80$ și $\lambda_1 = 0$.

Din analizele experimentale efectuate se pot delimita domeniile de aplicare a flambajului pe baza coeficientului de zvelteță, figura 10.4.

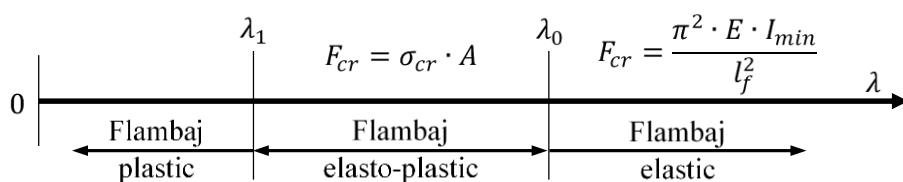


Figura 10.4. Delimitarea domeniilor de flambaj

Valorile coeficienții (a, b, c) și limitele λ_0 și λ_1 pentru câteva materiale sunt prezentate în tabelul 10.1.

Tabelul 10.1.

Material	a	b	c	λ₀	λ₁
S 235 (OL 37) ($\sigma_c = 240 \text{ MPa}$)	304	1,12	-	105	60
Oțel ($\sigma_r = 480 \text{ MPa}$) ($\sigma_c = 310 \text{ MPa}$)	460	2,57	-	100	60
Oțel Cr-Mo	980	5,30	-	55	0
Duraluminiu	372	2,14	-	50	0
Fontă	776	12	0,053	80	0
Lemn	28,7	0,19	-	100	0

10.4. Aplicație

Să se dimensioneze bara de secțiune circulară din oțel S235, comprimată de o forță $F = 160 \text{ kN}$ dacă se impune un coeficient de siguranță $c_f = 4$. Bara este articulată la ambele capete (figura 10.5.) având lungimea de $l = 2,2 \text{ m}$, coeficientul de zvelteță $\lambda_0 = 105$ (tabelul 10.1.) iar modulul de rezistență longitudinal al materialului barei se consideră $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

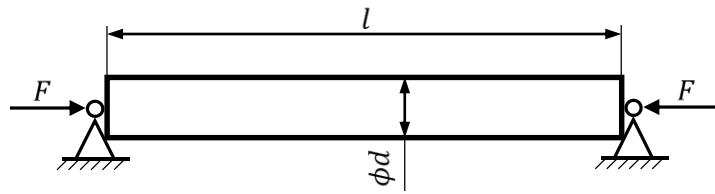


Figura 10.5. Aplicație

Rezolvare:

Bara este articulată la ambele capete (figura 10.5.), lungimea de flambaj este (vezi figura 10.3.):

$$l_f = l = 2,2 \text{ [m]}$$

În cazul problemelor de dimensionare nu se poate stabili domeniul de flambaj, din acest motiv se dimensionează bara folosind relația lui Euler (10.15.), după care se verifică dacă flambajul se produce în domeniul liniar elastic:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{nec}}{l_f^2}$$

Se ține cont de coeficientul de siguranță la flambaj:

$$F = \frac{F_{cr}}{c_f} \Rightarrow F_{cr} = F \cdot c_f$$

Se înlocuește în relația lui Euler:

$$F \cdot c_f = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{nec}}{l_f^2} \Rightarrow I_{nec} = \frac{F \cdot c_f \cdot l_f^2}{\pi^2 \cdot E}$$

Momentul de inerție axial pentru secțiunea circulară este:

$$I_{nec} = \frac{\pi \cdot d_{nec}^4}{64}$$

Pe baza relațiilor de mai sus se obține:

$$\frac{\pi \cdot d_{nec}^4}{64} = \frac{F \cdot c_f \cdot l_f^2}{\pi^2 \cdot E} \Rightarrow d_{nec} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot F \cdot c_f \cdot l_f^2}{\pi^3 \cdot E}} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{64 \cdot (160 \cdot 10^3) \cdot 4 \cdot (2,2 \cdot 10^3)^2}{\pi^3 \cdot (2 \cdot 10^5)}} \cong 75,2 [mm]$$

Se adoptă diametrul efectiv:

$$d_{ef} = 80 [mm]$$

Se determină raza de inerție pe baza diemetrului efectiv $d_{ef} = 80 [mm]$:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi \cdot d_{ef}^4}{64}}{\frac{\pi \cdot d_{ef}^2}{4}}} = \frac{d_{ef}}{4} = \frac{80}{4} = 20 [mm]$$

Se calculează coeficientul de zvelteță:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{2,2 \cdot 10^3}{20} = 110 > \lambda_0 = 105$$

Deoarece $\lambda = 110 > \lambda_0 = 105$ flambajul se produce în domeniul elastic, diametrul barei $d_{ef} = 80 [mm]$ poate fi acceptat.

Capitolul 11

ELEMENTE DE TEHNOLOGIA MATERIALELOR

11.1. Noțiuni introductive

Procesul de fabricație reprezintă totalitatea acțiunilor și proceselor folosite pentru a transforma materia primă și semifabricatul în produs finit. Procesul de fabricație cuprinde operații de bază, prelucrarea mecanică, asamblarea pieselor prelucrate și procese auxiliare.

Procesul tehnologic este partea procesului de fabricație prin care se realizează operațiile de modificare a formei și dimensiunilor, proprietăților materialului sau semifabricatului în vederea obținerii piesei finite.

Tehnologia este știința care studiază transformările la care este supusă materia în procesul de lucru și se aplică în vederea obținerii produselor necesare societății în condiții de fabricație optime.

Procesul tehnologic se realizează prin aplicarea diferitelor **metode tehnologice**. Metoda tehnologică este un mod sistematic și principal de prelucrare (turnare, deformare plastică, prelucrare prin aşchieri etc.) comun dintr-un punct de vedere esențial mai multor procedee tehnologice.

Procedeul tehnologic de fabricare este format din mai multe operații ce se realizează asupra materialului. **Operația** este definită ca fiind totalitatea modificărilor pe care le suportă un semifabricat la un singur loc de muncă.

11.2. Materiale utilizate în tehnica

Exigențele tot mai mari ale industriei constructoare de mașini impun elaborarea și utilizarea unei game extrem de diversificate de materiale care să asigure fiabilitatea produselor în timpul exploatarii.

În industria constructoare de mașini se folosesc următoarele materiale:

- metale,
- materiale plastice,
- materiale ceramice,
- materiale compozite.

Funcționarea ansamblelor (mașini și aparate) se asigură prin confeționarea lor din materiale adecvate. Alegerea acestor materiale este foarte importantă deoarece asigură funcționarea un timp îndelungat, bazat pe proprietățile intrinseci ale materialului. Alegerea materialului se face pe baza unui complex de proprietăți ale materialelor din care cele mai importante sunt:

- fizico-chimice,
- mecanice,
- tehnologice.

Proprietățile fizico-chimice sunt: greutatea specifică, densitatea, dilatația termică, contracția, conductivitatea termică și electrică, rezistența la coroziune etc.

Proprietățile mecanice definesc modul în care se comportă materialul sub acțiunea diferitelor încărcări (forțe și momente exterioare). Principalele proprietăți mecanice sunt: rezistența la rupere, limita de curgere, elasticitatea, plasticitatea, tenacitatea la rupere, rezistența la uzură, rezistența la oboseală etc.

Proprietățile tehnologice definesc modul de comportare a materialului în timpul diferitelor procese de prelucrare (turnare, sudare, aşchiere etc.).

În alegerea materialului pentru fiecare element de rezistență (piesă) al unui ansamblu, trebuie să se țină cont de durata de viață a reperului respectiv care se studiază în raport cu celelalte repere componente ale ansamblului.

11.3. Obținerea semifabricatelor turnate

Metalurgia este știința care se ocupă cu studiul procedeelor industriale de extragere a metalelor din minereuri și prelucrarea acestora.

Prin **minereu** se înțelege un conglomerat de substanțe minerale metalifere și nemetalifere, din care se pot extrage în mod rentabil, unul sau mai multe metale sau aliaje. Minereul este format din două părți constitutive: minerale sau combinații metalice care conțin metalul sau metalele care urmează să fie extrase, adică **utilul** și minerale neutile, pietroase sau pământoase, numite **steril** sau **gangă**.

Turnarea se referă la obținerea semifabricatelor și a pieselor prin introducerea materialului metalic în stare topită, în cavitatea unei forme de turnare unde acesta se va solidifica formând piesa turnată.

Aplicarea procedeelor speciale de turnare permite obținerea unor piese cu precizie dimensională ridicată și calitate foarte bună a suprafeței.

Avantajele turnării sunt:

➤ se pot realiza piese având geometrie complexă la prețuri reduse comparativ cu alte metode;

➤ accesibilitatea, se pot realiza cu costuri minime și nu necesită mâna de lucru înalt calificată (manoperă ieftină);

➤ se pretează la mecanizare și automatizare;

Dezavantajele turnării constau în neomogenitatea structurală care conduce la o rezistență mecanică redusă a pieselor obținute prin acest procedeu.

Formele de turnare pot fi:

- forme temporare, se utilizează pentru o singură turnare;
- forme permanente, se utilizează pentru turnarea de serie.

Turnarea semifabricatelor se poate face prin:

➤ **Turnarea în forme de nisip** se folosește pentru obținerea de piese turnate din materiale diferite, într-o gamă largă de dimensiuni și mase.

➤ **Turnarea în forme metalice** prin care se obțin semifabricate din aliaje feroase și neferoase. La turnarea oțelului și a fontei apar dificultăți datorită temperaturilor ridicate a metalului lichid care micșorează durabilitatea formelor.

➤ **Turnarea centrifugală** se folosește cu precădere la obținerea semifabricatelor care au forma unor corpuri de revoluție (cămăși de cilindru, semifabricate tubulare etc.).

➤ **Turnarea sub presiune** este folosită pentru obținerea pieselor complicate cu pereți subțiri, având cavități adânci și cu intersecțări de pereți.

11.4. Prelucrarea prin deformare plastică

Deformarea plastică este metoda de prelucrare în scopul obținerii unor piese finite sau semifabricate.

Avantajele deformării plastice sunt:

- proprietăți mecanice îmbunătățite datorită unei structuri omogene;
- consum minim de material;
- precizie mare de prelucrare (mai ales la deformarea plastică la rece);
- posibilitatea obținerii unor forme complexe cu un număr minim de operații și manoperă redusă;
- posibilitate de automatizare (linii de automatizare și celule flexibile de fabricație).

Dezavantajele deformării plastice sunt:

- investiții inițiale foarte mari în ceea ce privește utilajele folosite;
- necesitatea unor forțe mari pentru deformare.

Mecanismele care stau la baza deformațiilor plastice sunt:

- **Întărirea (ecruisarea)** reprezintă modificarea proprietăților mecanice și fizice ale metalelor în procesul de deformare plastică la rece.

- **Alunecarea** reprezintă deplasarea straturilor subțiri ale cristalelor unele față de altele.

- **Maclarea** este fenomenul de reorientare a unei părți dintr-un cristal în raport cu restul, de-a lungul unui plan, numit plan de maclare.

Principalele procedee de deformare plastică sunt: laminarea, tragerea, forjarea.

11.4.1. Laminarea

Laminarea este procedeul cu ceea mai mare răspândire în prelucrarea metalelor prin deformare plastică (90 % din producția de oțel). Prin laminare se obțin produse finite precum: table, bare, profile, țevi etc.

Laminarea este procedeul de prelucrare mecanică prin deformare plastică la care un semifabricat trece forțat printre doi cilindri aflați în mișcare de rotație, care îi reduc dimensiunile în direcția de acționare a forței F , figura 11.1.

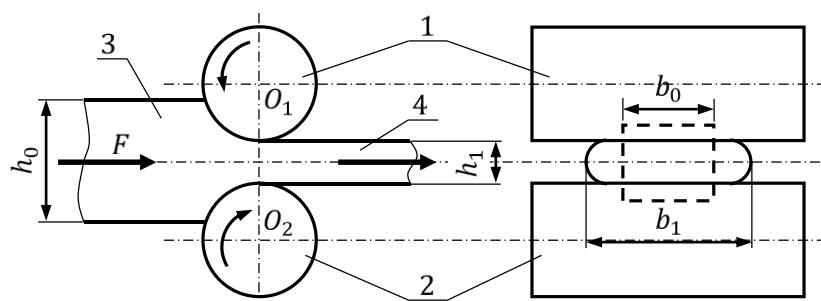


Figura 11.1. Schema de principiu pentru laminare
1,2-cilindri de laminare, 3-semifabricat, 4-produsul laminat

Cei doi cilindri de laminare 1 și 2 se rotesc în sens invers unul față de altul, iar dimensiunile semifabricatului 3, se reduc în direcția acționării forței F și cresc în celelalte direcții obținând produsul laminat 4.

Utilajul care realizează laminarea se numește **laminor**, procedeul poartă numele de **laminare** iar produsul rezultat în urma laminării se numește **laminat**.

Tablele obținute prin laminare sunt folosite în industria alimentară, industria ușoară, electronică, electrotehnică etc.

11.4.2. Tragerea

Tragerea este procedeul de deformare plastică a materialelor ce se realizează prin trecerea forțată a unui material ductil printr-o matriță a cărei secțiune este mai mică decât secțiunea inițială a materialului, figura 11.2.

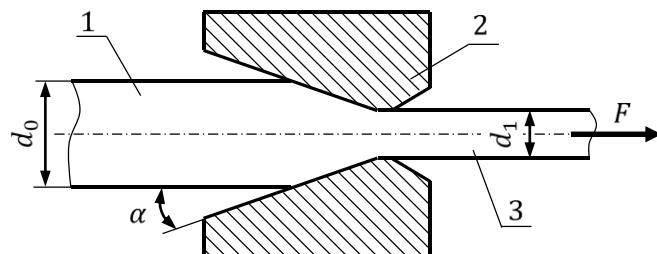


Figura 11.2. Schema de principiu pentru tragere
1-semifabricat, 2-matriță, 3-produsul tras (finit)

Procedeul aplicat la tragerea sărmelor se numește **trefilare**, iar matrița folosită se numește **filieră**. Valoarea reducerii de secțiune este cuprinsă între 10 ÷ 45 % (maxim 95 %). Semifabricatul (materialul) ductil 1 este tras printr-o matriță 2, a cărei secțiune este mai mică decât secțiunea inițială a semifabricatului (d_0 este dimensiunea inițială a semifabricatului iar d_1 este dimensiunea produsului finit).

Procedeul de tragere are anumite avantaje față de alte procedee de deformare plastică, cum sunt:

➤ obținerea unor produse cu precizie dimensională și calitatea suprafeței mult superioară față de alte procedee de deformare plastică;

➤ permite obținerea în condiții de eficiență economică și precizie dimensională produse greu de obținut prin alte procedee de deformare plastică.

11.4.3. Forjarea

Forjarea este procedeul de prelucrare prin deformare plastică, între suprafețe plane, profilate sau cave ale sculelor de forjat, sub acțiunea unor forțe statice sau dinamice exercitate la prese respectiv la ciocane.

Forjarea liberă figura 11.3.a, reprezintă procesul tehnologic de prelucrare prin care semifabricatul este deformat plastic cu ajutorul unor scule simple prin aplicarea unei

forțe de compresiune. Operațiile de bază ale forjării libere sunt: întinderea, refularea, tăierea, găurilea, îndoirea, răscuirea și sudarea prin forjare.

Forjarea în matriță sau matrițarea, figura 11.3.b, reprezintă procesul de prelucrare la care materialul este deformat plastic cu ajutorul unei scule prevăzute cu caviatii care are configurația piesei dorite denumită matriță. Matrițarea se folosește pentru obținerea unor piese complexe, cu forma, dimensiunile și rugozitatea suprafeței foarte apropiată de cele ale pieselor finite.

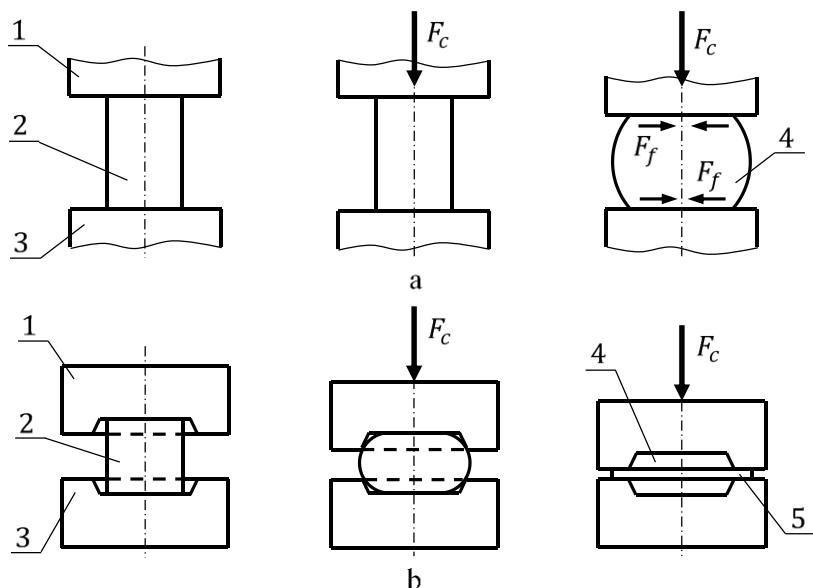


Figura 11.3. Schema de principiu pentru forjare

a-forjarea liberă, b-forjarea în matriță

1-semimatriță mobilă, 2-semifabricat, 3-semimatriță fixă, 4-piesa forjată, 5-bavură

F_c -forță de compresiune, F_f -forță de frecare

Principalele **avantaje** ale forjării în matriță față de forjarea liberă sunt:

- posibilitatea producerii unor piese având un grad mare de complexitate;
- obținerea unor piese având o structură omogenă mult superioară și dimensiuni precise (toleranțe dimensionale de 3 ÷ 4 ori mai mici);
- economie de material datorită adaosurilor de prelucrare mult mai mici și a pierderilor prin ardere mai reduse;
- economie de manopera datorită creșterii productivității muncii, manopera de calificare mai redusă și reducerea volumului de lucru la prelucrarea prin aşchiere.

Majoritatea metalelor sunt forjate la cald (oțelul și aliajele feroase sunt forjate la căldură extremă). Acest lucru se produce din două motive: dacă vor fi tratate termic prin călire, materialele dure precum oțelul ar deveni extrem de greu de prelucrat prin aşchiere. În al doilea rând oțelul poate fi durificat prin alte mijloace decât prelucrarea la cald, astfel încât este mai economică forjarea la cald față de tratamentul termic.

Aliajele pretabile la călirea prin precipitare (aliaje de aluminiu și titan) pot fi forjate la cald în loc să fie tratate termic.

11.5. Prelucrarea prin aşchieri

Prelucrarea prin aşchieri este operația de îndepărțare a surplusului de material (adaos de prelucrare) dintr-o piesă, sub formă de aşchii, folosind o sculă cu muchii tăietoare, cu scopul de a obține forma, dimensiunile și calitatea suprafetei prelucrate.

Procedeele de prelucrare prin aşchieri sunt numeroase și diferă între ele prin modul în care se realizează mișările de aşchieri, sculele utilizate, mașinile unelte pe care se realizează prelucrarea. Cele mai utilizate procedee sunt: strunjirea, frezarea, găurirea, rabotarea, mortezarea, rectificarea etc.

Semifabricatele care se prelucră prin aşchieri provin din turnare, laminare, forjare, mărițare, presare, stanțare, sudare etc.

Strunjirea reprezintă procedeul de prelucrare prin aşchieri executat pe mașini-unelte numite strunguri, cu ajutorul unor scule aşchietoare, numite cuțite de strung. La această prelucrare, procesul de aşchieri se realizează prin compunerea a două mișcări:

➤ mișcarea principală de rotație a piesei (determină desprinderea aşchiilor) care este efectuată cu o anumită turăție dată de strung;

➤ mișcarea secundară de avans a sculei (determină aducerea unor straturi noi de material în fața tăișului sculei), această mișcare este executată de sculă, cu o anumită viteză de avans.

Frezarea reprezintă operația de prelucrare prin aşchieri executată pe mașini-unelte numite mașini de frezat, cu ajutorul unor scule aşchietoare cu mai multe tăișuri numite freze. La prelucrarea prin frezare procesul de aşchieri se realizează prin compunerea a două mișcări:

➤ mișcarea principală de rotație a sculei care determină desprinderea aşchiilor efectuată cu o anumită turăție;

➤ mișcarea secundară de avans a piesei prință în dispozitivul mașinii-unelte care are ca scop, aducerea unor straturi noi de material în fața tăișului sculei.

Burghierea este operația de prelucrare prin aşchieri executată manual sau mecanic (mașina de gărit sau strung) cu ajutorul sculei numite burghiu, care prezintă mai multe tăișuri, figura 11.4. În general semifabricatul rămâne imobil iar scula execută mișcarea de rotație n și de avans s .

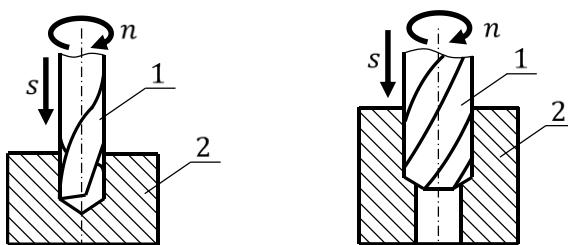


Figura 11.4. Procesul de prelucrare prin burghiere

1-scula (burghiu), 2-semifabricat, n -mișcarea de rotație (turăția), s -mișcarea de avans

Pe mașina de găurit, mișcarea de rotație și de avans este executată de sculă (burghiu), iar pe strung scula (burghiu) execută numai mișcarea de avans.

Prin acest procedeu se pot prelucra următoarele operații:

- găuriri în plin, cu burghiu;
- adânciri de găuri, cu adâncitorul;
- alezări, cu alezoare;
- filetări, cu tarozi.

Polizarea este prelucrarea prin aşchieri executată mecanic (la polizor), figura 11.5., cu ajutorul unei scule numită piatră de polizor 1 asupra unui semifabricat 2 cu scopul de curăță sau fasona piesele brute. Piatra de polizor execută mișcarea de rotație n iar piesa execută mișcarea de translație s , figura 11.5.

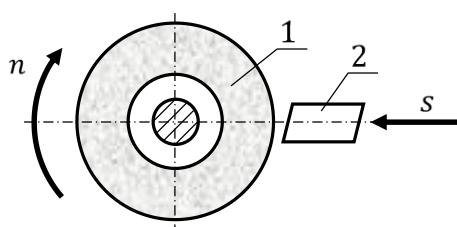


Figura 11.5. Procesul de prelucrare prin polizare
1-sculă (piatră de polizor), 2-piesa de polizat, n -mișcarea de rotație (turația),
 s -mișcarea de avans

Polizarea se practică din mai multe considerențe:

- înlăturarea adaosului de prelucrare și a oxizilor,
- ascuțirea sculelor aşchietoare pentru strung, freză, burghiu etc.,
- înlăturarea bavurilor rezultate în urma debitării sau găuririi,
- rectificarea cordoanelor de sudură.

11.6. Metode de realizare a conexiunilor electrice

Conexiunile din echipamentele electrice pot fi nedemontabile sau demontabile. Cele nedemontabile sunt destinate locurilor care nu vor fi niciodată demontate, deoarece demontarea acestora ar fi dificilă, ar dura foarte mult și ar putea implica riscul deteriorării instalației.

11.6.1. Conexiunea prin lipire

Lipirea este procesul tehnologic de îmbinare la cald a două sau mai multe piese metalice, numite metale de bază aliate în stare solidă, cu ajutorul unui metal de adaos topit, numit aliaj pentru lipit. Aliajul folosit pentru lipit, are întotdeauna o temperatură de topire mai joasă (cu cel puțin 50 °C) decât al metalelor de bază.

Metoda de lipire se alege în funcție de materialele pieselor care se lipsesc și de condițiile de funcționare ale ansamblului.

Caracteristicile asamblării prin lipire sunt:

- se realizează întotdeauna cu material de adaos;
- compoziția materialului de adaos diferă de materialul care se lipește;
- încălzirea pieselor se face la temperatura de topire a aliajului de lipit deci, la o temperatură mult mai mică decât temperatura lor de topire;
- nu apar tensiuni termice în piesele lipite;
- nu apar deformații datorate încălzirii și răciriilor pieselor.

Principalele defecte, ușor vizibile, ale conexiunii prin lipire sunt:

- defecte de formă (punți, „stalactite” etc.), punțile realizate la o conexiune prin lipire apar atunci când surplusul de aliaj de lipit conduce la formarea unei conexiuni electrice nedorite cu alte terminale;
- defecte de aspect (umectare necorespunzătoare);
- defecte datorate fabricației sau prelucrării cablajelor imprimante (exfoliere, realizarea de găuri necorespunzătoare etc.);
- defecte de montaj (terminale scurte ale componentelor);
- lipiturile false constau în neîndeplinirea rolului acesteia (mecanic și electric) cu toate că aspectul său pare normal.

11.6.2. Conexiunea prin wrapare

Wraparea constă în înfășurarea conductorului de conexiune cu secțiune circulară, dezisolat pe porțiunea de torsadare în jurul unui pin. Modul de realizare a unei astfel de îmbinări prin wrapare este prezentat în figura 11.6.a, conexiune regulată și respectiv figura 11.6.b, conexiune modificată.

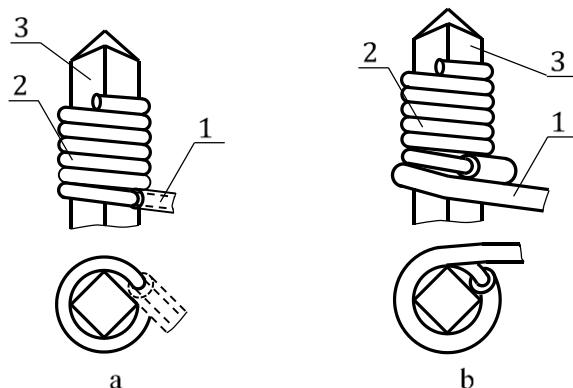


Figura 11.6. Conexiunea prin wrapare

a-conexiunea regulată, b-conexiunea modificată

1-fir electric izolat, 2-fir electric dezisolat, 3-pin de conexiune

Avantajele îmbinărilor prin wrapare sunt:

- densitate mare de conexiuni,
- conectare fiabilă fără degajare de căldură și gaze,
- stabilitate electrică și mecanică.

Dezavantajele acestui tip de îmbinare constau în:

- imposibilitatea reutilizării conductorului de conexiune, pinii folosiți permit cel mult 25 de wrapări;
- nu se poate wrapă un conductor multifilar, la frecvență de peste 100 MHz;
- capacitatea și inductivitatea parazită devin semnificative.

Operația de wrapare poate fi executată manual, semiautomat sau automat. Pistolul de wrapare este cel mai utilizat utilaj.

11.6.3. Alte procedee de realizare a conexiunilor electrice

1) conexiunea prin sudură conduce la îmbinări rezistente mecanic, funcție de aplicația curentă se poate utiliza: sudare prin rezistență electrică, cu laser, cu fascicul de electroni, cu ultrasunete etc.;

2) conexiunea prin sertizare se realizează prin atașarea-presarea și deformarea unui element de conectare de tip papuc la capătul conductorului de conexiune, cu ajutorul unor clești speciali sau a unor echipamente automate.

3) conexiunea de tip termopunct se realizează prin atașarea firului de conexiune dezisolat la un pin de secțiune dreptunghiulară, prin intermediul unei capse speciale aplicată manual sau automat.

4) conexiunea mecanică de tip șurub-piuliță este mai puțin utilizată în construcția echipamentelor electronice datorită în special rezistențelor electrice de contact destul de ridicate. Conexiunea se recomandă și este extrem de fiabilă pentru echipamente ce funcționează la tensiuni și curenți mari.

11.7. Sudarea metalelor

Sudarea este metoda de îmbinare nedemontabilă a două corpuși solide, având compozиții apropiate prin stabilirea, în anumite condiții de temperatură și presiune, a unor forțe de legătură între atomii marginali ai celor două corpuși de îmbinat. Procedeul se poate realiza cu sau fără material de adaos. Pentru oțeluri o sudabilitate bună se asigură pentru un conținut mai mic de 0,5 % carbon. Dintre fonte, sunt sudabile numai fontele cenușii.

Sudarea la rece se aplică pentru îmbinarea materialelor cu plasticitate ridicată, la temperaturi joase: aluminiu, plumb, zinc etc. Presiunea se aplică brusc sau progresiv, presiunile utilizate depind de perechea de material de îmbinat și poate varia în limite destul de largi ($10 \div 550 \text{ MPa}$).

Sudarea cu arc electric poate fi directă sau indirectă. La metoda directă un electrod se identifică prin piesa de sudat iar cel de-al doilea electrod este bara metalică ce amorsează arcul electric. Varianta indirectă are la bază încălzirea prin radiație a piesei de la cei doi electrozi.

Sudarea prin presiune este un procedeu foarte răspândit, fiind cel mai des utilizat procedeu în construcția echipamentelor electronice. Procedeul se realizează la trecerea unui curent electric de valori ridicate printr-un contact, încălzirea acestuia la temperaturi înalte și răcirea sub presiune. Se pot suda simultan unul sau mai multe puncte.

Sudarea cu energie înmagazinată este utilizată în cazurile în care este necesară o definire precisă a energiei consumate la sudarea fiecărui punct, figura 11.7.

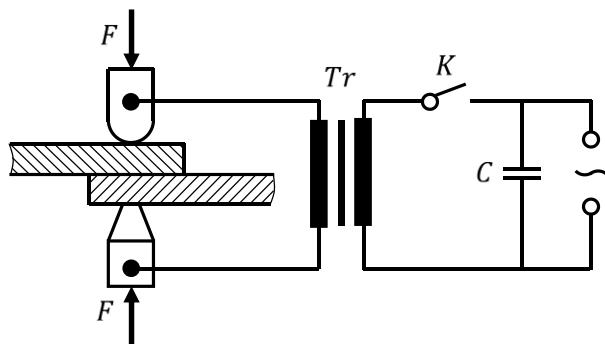


Figura 11.7. Sudarea cu energie înmagazinată

Fazele de funcționare ale instalației sunt:

- încărcarea condensatorului C atașat schemei pe perioada când întrerupătorul K este deschis și condensatorul este conectat la o sursă de curent continuu;
- descărcarea condensatorului (când K este închis) peste înfășurarea primară a transformatorului de sudare.

Pe parcursul desfășurării procesului de sudare cele două piese sunt presate prin forță F .

Sudarea în linie este un procedeu care se realizează în același mod cu sudarea în puncte. Deosebirea constă în forma electrozilor care se materializează sub aspectul unei role.

Sudarea prin presiune cu încălzire prin inducție sau cu încălzire prin frecare sunt alte metode folosite. Presiunea asupra pieselor se aplică prin intermediul unei scule care este în același timp și sonotrod (produce unde ultrasonice).

Industria electronică utilizează și alte metode pentru a obține căldura necesară pentru realizarea sudării și anume:

- **Laserul**, atunci când energia fasciculului luminos este convertită în energie termică la suprafața pieselor de îmbinat (sudat), spotul luminos fiind focalizat la $0,0025 \div 0,5 \text{ mm}$ diametru. Energia este reglată prin puterea debitată de sursa de alimentare și dimensiunea spotului.

- **Fascicul de electroni**, prin această metodă se permite o densitate de 2-3 suduri/ mm^2 . Procedeul se utilizează la asamblarea componentelor active și pasive, la îmbinarea metalelor refractare, pentru beriliu, aliaje de titan etc.

Capitolul 12

ELEMENTE DE ORGANE DE MAȘINI ȘI MECANISME

12.1. Noțiuni introductive

Mașina reprezintă un ansamblu tehnic format din elemente cu mișcări relative determinate, cu scopul de a transforma o formă de energie în lucru mecanic.

Mecanismele sunt părți componente ale mașinilor cu rolul de a transmite mișcarea sau de a transforma mișcarea în altă mișcare necesară.

Organele de mașini sunt părți componente ale mașinilor și utilajelor, care pot fi calculate, proiectate și executate separat, ținând cont de condițiile de funcționare ale acestora în cadrul ansamblului din care fac parte.

Ansamblele reprezintă grupuri de mecanisme având un rol funcțional foarte bine determinat, reprezentând unități distințe din punct de vedere constructiv (cutia de viteză, reductor de turatie, diferențialul transmisiei la autovehicule).

Subansamblele sunt complexe de organe de mașini, care păstrează anumite caracteristici de unitate funcțională, având un rol funcțional mai limitat decât ansamblele (arborele unui reductor sau a unei cutii de viteze).

Forțele care solicită organele de mașini pot fi forțe exterioare (presiunea unui fluid, forță elastică a unui arc, greutatea proprie etc.), forțe periferice interioare (forțe de frecare, ghidajele mașinilor etc.) și forțele interioare sau eforturile interioare σ și τ .

Solicitările simple și cele compuse pot fi atât statice cât și dinamice. În tabelul 12.1. se prezintă tipurile de solicitări și relațiile lor caracteristice.

Tabelul 12.1.

Solicitarea	Relația de calcul	Domeniul de aplicare
Statică simplă (σ, τ)	$\sigma_{(t,c)} = \frac{F}{A} \leq \sigma_a$	tracțiune, compresiune, strivire
	$\tau_f = \frac{F}{A} \leq \tau_a$	forfecare
	$\sigma_i = \frac{M_i}{W} \leq \sigma_a$	încovoiere
	$\tau_t = \frac{M_t}{W_p} \leq \tau_a$	torsiune
Compusă	$\sigma_{tot} = \sigma_{(t,c)} \pm \sigma_i = \frac{F}{A} \pm \frac{M_i}{W} \leq \sigma_a$	tracțiune (compresiune) și încovoiere
	$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq \sigma_a$ $M_{ech} = \sqrt{M_i^2 + M_t^2}$	încovoiere și torsione după teoria a-III-a de rezistență

Rezistențele admisibile σ_a sau τ_a , se obțin raportând tensiunea σ (de rupere σ_r la materiale fragile, de curgere σ_c la materiale tenace) sau τ la coeficientul de siguranță corespunzător c :

$$\sigma_a = \frac{\sigma_r(c)}{c} ; \quad \tau_a = \frac{\tau}{c} \quad (12.1.)$$

Tensiunile limită (σ sau τ), sunt indicate de producătorii de materiale în MPa fiind determinate experimental. Valorile coeficienților de siguranță sunt adoptate de proiectant pe baza experienței și a domeniului de utilizare a pieselor și, întotdeauna sunt supraunitari.

12.2. Osii și arbori

Osiile și arborii sunt organe de mașini care au rolul de a susține elemente aflate în mișcarea de rotație, care transmit sau nu moment de torsion. Acestea fac legătura cu alte elemente constructive de la care primesc sau la care transmit mișcarea de rotație.

Arborii sunt organe de mașini în mișcare de rotație, destinate să susțină alte organe de mașini (roți dințate, roți de lanț, roți de curea etc.) și să transmită momente de torsion în lungul axei lor (solicitați la încovoiere și torsion).

Osiile sunt organe de mașini fixe sau rotative, capabile să susțină organe de mașini în mișcare de rotație, **fără** a transmite momente de torsion, (solicitare doar la încovoiere).

Părțile componente ale unui arbore sau osie sunt prezentate în figura 12.1.:

- 1 - corp arbore (osie);
- 2 - porțiunea de calare;
- 3 - porțiunea de reazem (fusul arborelui sau osiei);
- 4 - tronson intermediar;
- 5 – canal de pană.

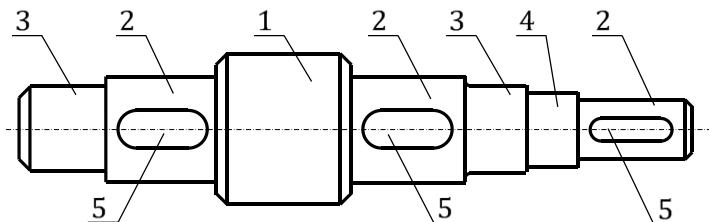


Figura 12.1. Părțile componente ale unui arbore sau osie

Corful arborelui (osiei) poate fi considerat arborele (osia) în întregul lui, pe el fiind prelucrate suprafețele celorlalte tronsoane având un rol foarte bine definit.

Porțiunile (tronsoanele) de calare sunt reprezentate de tronsoanele pe care se montează piesele susținute de arbore, care pot fi: roți dințate, roți de curea etc.

Acstea porțiuni pot fi cilindrice (ușor de prelucrat) și mai rar conice. Forma conică este de preferat în cazul montărilor și demontărilor repetitive sau atunci când se impune o centrare mai precisă a roții pe arbore.

Fusurile arborelui (osiei) sunt materializate de zonele arborelui (osiei) cu care acesta se reazemă în lagările de rostogolire sau alunecare, executate de regulă la capetele arborelui.

Tronsonul intermediar nu are o destinație specială doar face legătura dintre două tronsoane diferite învecinate.

Clasificarea arborilor și osiilor se realizează după mai multe criterii din care cele mai importante sunt:

➤ Clasificarea arborilor:

- după forma geometrică a axei arborelui:

- arbori drepti,

- arbori cotiți,

- arbori flexibili.

● după destinația arborelui:

- arbori de transmisie,

- arbori de transformare a mișcării,

- arbori de susținere.

● după variația secțiunii arborelui pe lungime:

- arbori cu secțiunea constantă,

- arbori cu secțiunea variabilă în trepte,

- arbori cu secțiunea variabilă.

➤ Clasificarea osiilor:

- după forma geometrică a axei:

- osii drepte,

- osii curbată,

● după natura mișcării osiei:

- osii fixe,

- osii rotitoare,

Arborii drepti (figura 12.2. a, b) sunt cei mai folosiți în transmisiile mecanice, secțiunea transversală a acestora putând fi constantă sau variabilă.

Arborii drepti sunt utilizati ca arbori de transmisie, pentru fixarea organelor de transmisie (roți dințate, roți de curea etc.) sau ca arbori principali ai mașinilor unelte.

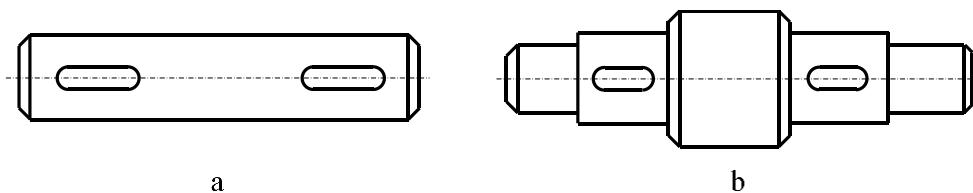


Figura 12.2. Tipuri de arbori

La arborii de dimensiuni mari, treptele de trecere se execută de formă conică, caz în care, arborele este apropiat de o grindă de egală rezistență la încovoiere.

Arborii cotiti se folosesc în construcția mecanismelor de tip bielă-manivelă, pentru a transforma mișcarea de translație în mișcare de rotație (motoare cu ardere internă) sau invers (la compresoare, prese, mașini de forjat). Aceștia se compun din două sau mai multe fusuri paliere, dispuse pe lungimea arborelui pentru a asigura o rigiditate mare construcției și unul sau mai multe fusuri manetoane de legătură cu biela.

Arborii flexibili formează o grupă specială de arbori care au axa geometrică de formă variabilă în timp. Se folosesc pentru transmiterea momentelor de torsiune la subansamble care își schimbă poziția relativă.

Osiile sunt de două feluri: rotitoare și fixe. Osiile rotitoare au axa geometrică și secțiunea constantă pe toată lungimea ei, figura 12.3. (osia de la vagoanele de cale ferată). Osiile fixe pot avea axa geometrică dreaptă sau curubată și se întâlnesc la: punțile nemotoare ale automobilelor, mașini de ridicat, susținerea roților intermediare etc.

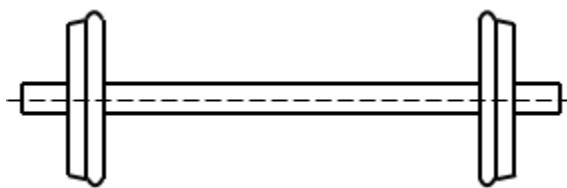


Figura 12.3. Osie rotitoare de secțiune constantă

Materialele folosite pentru fabricarea osiilor și arborilor trebuie să îndeplinească anumite condiții:

- rezistență la încovoiere pentru osii și pentru arbori la torsion și încovoiere;
- rezistență la solicitări variabile;
- deformabilitate redusă;
- rezistență la uzură;
- bună aderență a lubrifiantilor folosiți mai ales în zona fusului;
- să fie ușor de prelucrat.

Arborii drepti și osiile se execută din oțel carbon de uz general (standard SR EN 10025+A1:1994) și oțel de calitate sau din oțel aliat. Pentru arborii de dimensiuni mici și medii, se folosesc laminate rotunde, iar la producția de serie semifabricate matrițate. Pentru arborii de dimensiuni mari se folosesc semifabricate forjate sau turnate.

Arborii cotiți și în general de greutate mare se execută din fontă cu grafit nodular sau din fontă modificată, care conferă arborilor sensibilitate redusă la concentratorii de tensiune, proprietăți antifricțiune și de amortizare a socurilor și vibrațiilor.

Arborii flexibili se confectionează din sârmă de oțel carbon cu diametrul de $0,3 \div 3$ mm, trasă la rece prin trefilare. Mantaua arborilor flexibili este metalică, putând fi prevăzută și cu straturi de țesătură și cauciuc.

12.3. Elemente de calcul specifice arborilor și osiilor

Osiile, fiind solicitate la încovoiere, dimensionarea pornește de la condiții reale de încărcare. Se consideră cazul unei osii încărcată cu forță F , reacțiile din reazeme fiind egale ($V_A = V_B = F/2$), figura 12.4.

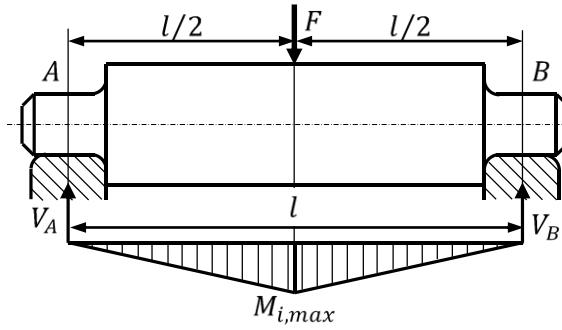


Figura 12.4. Calculul osiilor

Momentul încovoietor maxim $M_{i,max}$ este în dreptul forței F și are valoarea:

$$M_{i,max} = \frac{F}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{F \cdot l}{4} \quad (12.2.)$$

Pentru osia cu secțiunea transversală circulară, modulul de rezistență polar este:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \quad (12.3.)$$

Tensiunea maximă σ_{max} se calculează folosind relația lui Navier:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i,max}}{W_p} = \frac{M_{i,max}}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{16 \cdot M_{i,max}}{\pi \cdot d^3} \quad (12.4.)$$

iar diametrul osiei având secțiunea transversală circulară se obține din relația (12.4.):

$$d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{i,max}}{\pi \cdot \sigma_a}} \Rightarrow d_{ef} \quad (12.5.)$$

Arborii sunt supuși la solicitări compuse: încovoiere cu torsiune. Funcție de rolul funcțional și de forma lor, se verifică la oboseală, rigiditate, flambaj și turația critică.

Calculul la torsiune al arborilor: majoritatea arborilor sunt solicitați la torsiune, solicitarea de încovoiere fiind mult mai mică se poate neglijă. În aceste condiții arborii se dimensionează din condiția de rezistență:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} \leq \tau_a \quad (12.6.)$$

La arborii de secțiune circulară (diametrul d), modulul de rezistență polar este:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \quad (12.7.)$$

Se înlocuiește relația (12.7.) în relația (12.6.) se obține:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{M_t}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot d^3} \leq \tau_a \quad (12.8.)$$

Dimensionarea arborelui (diametrul d) din condiția de rezistență, pentru arborele de secțiune circulară este:

$$d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot \tau_a}} \Rightarrow d_{ef} = \quad (12.9.)$$

Calculul arborilor la deformații de torsiune: chiar dacă dimensionarea arborelui realizată pe baza condiției de rezistență a fost judicioză efectuată (τ_a), nu întotdeauna aceste calcule sunt satisfăcătoare din punct de vedere funcțional. Limitarea deformațiilor de torsiune se aplică arborilor având lungimi mari în raport cu diametrul arborelui d .

Unghiul de răsucire specifică θ cauzat de momentul de torsiune M_t , nu trebuie să depășească unghiul de răsucire admisibil θ_a , cu care se poate rota o secțiune a arborelui în raport cu altă secțiune situată la distanța l :

$$\theta_{max} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \leq \theta_a \quad (12.10.)$$

unde:

- G este modulul de elasticitate transversal, (pentru oțel, $G = 8,1 \cdot 10^4 \text{ MPa}$);
- I_p este momentul de inerție polar, pentru secțiuni circulare este:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \quad (12.11.)$$

Se înlocuiește relația (12.11.) în relația (12.10.) se obține:

$$\theta_{max} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} = \frac{M_t}{G \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{32}} = \frac{32 \cdot M_t}{\pi \cdot G \cdot d^4} \leq \theta_a \quad (12.12.)$$

Din relația (12.12.), se obține diametrul arborelui d :

$$d_{nec} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_t}{\pi \cdot G \cdot \theta_a}} \Rightarrow d_{ef} = \quad (12.13.)$$

Arbori solicitați la torsiune și încovoiere: pentru dimensionarea arborilor solicitați în același timp la torsiune și încovoiere, se determină mai întâi momentul încovoietor M_i și momentul de torsiune M_t . Pe baza acestor momente se determină momentul echivalent cu ajutorul teoriilor din rezistență (teoria a treia de rezistență):

$$M_{ech(3)} = \sqrt{M_i^2 + M_t^2} \quad (12.14.)$$

Astfel, dimensionarea arborelui (diametrul d) devine relativ simplă, calculul se realizează folosind momentul echivalent $M_{ech(3)}$:

$$d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{ech(3)}}{\pi \cdot \sigma_a}} \Rightarrow d_{ef} \quad (12.15.)$$

Verificarea la oboseală: verificarea rezistenței la oboseală nu se aplică în cazul osiilor fixe și numai la osiile rotative și arborilor. Calculul la solicitări variabile constă în determinarea unui coeficient de siguranță în secțiunile în care există concentratori de tensiune (canale de pană, caneluri, salt de diametru, găuri transversale, filet etc.), și compararea acestuia cu valorile admisibile, determinate experimental.

Osiile rotative și arborii sunt organe de mașini supuse la solicitări variabile, de regulă la cicluri alternante simetrice deci, după dimensionare este necesară verificarea rezistenței la oboseală în toate secțiunile periculoase.

Verificarea la rigiditate presupune determinarea deformărilor la încovoiere și torsiune a arborilor, deformării ce trebuie încadrate în limite impuse.

Verificarea la turație critică se aplică doar pentru arborii care lucrează la turații ridicate. Dacă perioada vibrațiilor proprii ale arborelui coincide cu perioada forțelor exterioare, se produce rezonanță care conduce la eforturi suplimentare în arbore. Turația de lucru a arborelui, corespunzătoare acestei perioade (rezonanță), se numește turație critică și trebuie evitată în funcționare.

12.4. Lagăre

Lagările sunt organe de mașini care au rolul de a susține și ghida arborii și osiile în mișcare rotativă sub acțiunea forțelor care acționează asupra lor.

Clasificarea lagărelor se face după mai multe criterii, cele mai importante sunt:
➤ după direcția forțelor transmise prin lagăr:

- lagăre radiale având direcția forței perpendiculară pe axa de rotație;
- lagăre axiale având direcția forței paralelă cu axa de rotație;
- lagăre radial-axiale având direcția forței după ambele direcții (perpendicular și paralel cu axa de rotație).

➤ după caracterul frecării produse în funcționare putem avea:

- lagăre cu alunecare între suprafața exterioară a fusului și suprafața interioară a lagărului;
- lagăre cu rostogolire între elementele rulmenților;
- lagăre combinate (hibride).

12.4.1. Lagăre cu alunecare

Lagărele cu alunecare sunt organe de mașini care asigură rezemarea pieselor în mișcarea de rotație, preiau forțele care încarcă piesele respective și lucrează în condițiile unei alunecări relative a suprafeței fusului arborelui pe suprafața lagărului (cuzinetului).

Clasificarea lagărelor cu alunecare se face după mai multe criterii, dintre care cele mai importante sunt:

- după regimul de frecare, lagărele cu alunecare pot fi:
- cu frecare uscată,
 - cu frecare fluidă,
 - cu frecare mixtă.
- după direcția forței preluate, lagărele cu alunecare pot fi:
- lagăre radiale,
 - lagăre axiale,
 - lagăre axial-radiale,
 - lagăre radial-axiale.

Avantajele lagărelor cu alunecare sunt următoarele:

- ghidare mai precisă a arborilor față de carcăsă, datorită numărului redus de piese față de lagărele cu rostogolire (rulmenți);
- filmul de lubrifiant preia, în mare măsură, șocurile și vibrațiile și contribuie la reducerea zgomotului;
- au dimensiuni de gabarit radiale mai reduse decât lagărele cu rostogolire;
- au durată de funcționare mai mare decât lagărele cu rostogolire și pot funcționa la turații mari și foarte mari.

Dezavantajele lagărelor cu alunecare constau în:

- coeficienți de frecare (pierderi prin frecare) mult mai mari decât la lagărele cu rostogolire;
- gabarit în direcție axială mai mare;
- grad de standardizare mult redus față de lagărele cu rostogolire (rulmenți) și consum de lubrifiant mare.

Domeniul de folosire ale lagărelor cu alunecare este mult mai redus decât al lagărelor cu rulmenți și este recomandabil să se folosească în acele cazuri în care lagărele cu rostogolire nu pot fi utilizate (turații foarte mari).

Materialele din care se execută lagărele cu alunecare trebuie să îndeplinească anumite condiții de bază: coeficient de frecare redus și bună rezistență la uzură (antifricțiune), capacitate de aderență superficială pentru a reține lubrifiantul.

La majoritatea lagărelor, mișcarea de rotație este asigurată de fusurile arborilor, frecarea se produce între suprafața fusului și cea a cuzinetului, aflate în contact sub presiunea exercitată de forța de încărcare a arborilor.

Pentru ca această mișcare să fie posibilă, diametrul fusului d este mai mic decât diametrul lagărului D. În acest fel, între fus și cuzinet se crează un joc radial, figura 12.5., spațiul dintre fus și cuzinet se încarcă cu material de ungere numit lubrifiant.

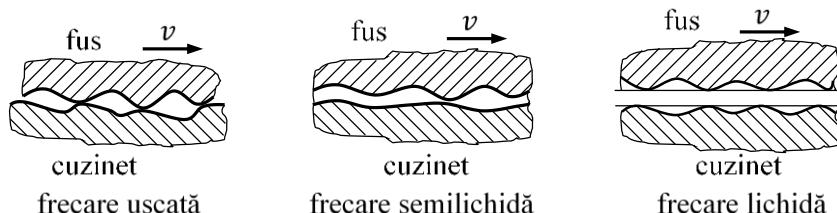


Figura 12.5. Frecarea în lagărul cu alunecare

În timpul funcționării, contactul nu se mai produce direct între suprafețele metalice fus-cuzinet, și prin intermediul stratului de lubrifiant. Astfel, coeficientul de frecare scade considerabil. În cazul utilizării lagărelor de alunecare se disting trei stadii ale frecării, figura 12.5.:

➤ **frecare uscată** când se produce contact direct între suprafețele metalice, deci absența totală a lubrifiantului;

➤ **frecare semilichidă** când se produce contact parțial între suprafețele metalice fus-cuzinet și parțial între suprafețele metalice și lubrifiant;

➤ **frecare lichidă (fluidă)** când nu se produce contact direct între suprafețele metalice iar frecarea se produce numai între straturile de lubrifiant.

Pentru producerea frecării fluide este necesar ca, între suprafața fusului și cea a cuzinetului să se mențină permanent un strat continuu de lubrifiant, numit **peliculă** sau **film de lubrifiant**. Acest lucru este posibil dacă distanța cea mai mică dintre fus și cuzinet, denumită **joc minim** (j_{min}) depășește suma înălțimilor asperităților fusului și cuzinetului, figura 12.6.

Condiția de realizare a frecării fluide se poate exprima cu ajutorul relației:

$$j_{min} = c \cdot (h_1 + h_2) \quad (12.16.)$$

unde:

- h_1 și h_2 sunt înălțimile asperităților (rugozitățile) suprafețelor fusului și cuzinetului, de regulă suma asperităților este: $h_1 + h_2 = 1 \div 14 \mu m$;

- c reprezintă coeficientul de siguranță.

Reducerea pierderilor prin frecare este puternic influențată de forma geometrică și de locul amplasării canalelor de ungere.

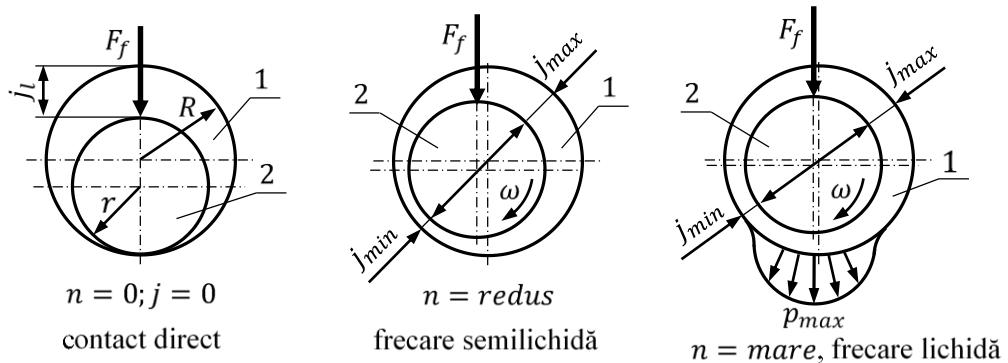


Figura 12.6. Frecarea în lagăr
1-lagăr, 2-fus, j_l -jocul lagărului, F_f -forța de frecare, p_{max} -presiunea maximă

Pentru ungerea lagărelor cu alunecare se folosesc de regulă **uleiuri minerale** și **unsori consistente**. Cu utilizare mai redusă, la temperaturi ridicate se utilizează **lubrifianti solizi** în stare pulverizată precum: talcul, bisulfura de molibden etc.

12.4.2. Lagăre cu rostogolire

Lagărele cu rostogolire se obțin prin înlocuirea cuzinetului din lagărul cu alunecare printr-un rulment, de unde provine și denumirea de **lagăre cu rulmenți**, restul de componente ale lagărelor cu rostogolire diferă foarte puțin de elementele lagărelor cu alunecare.

În figura 12.7. este prezentat un rulment cu bile având elemente componente specificate în desen.

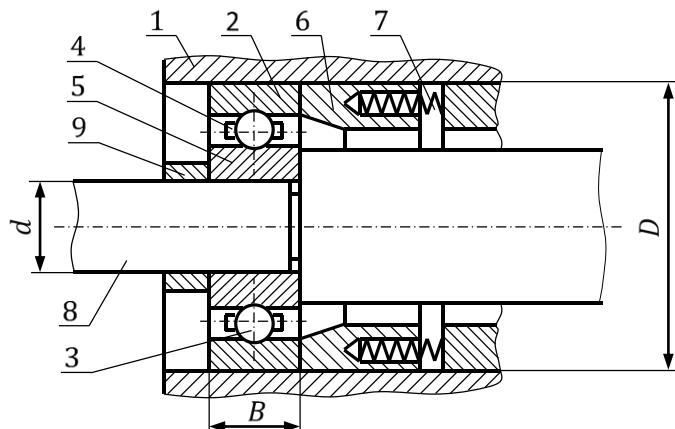


Figura 12.7. Componentele unui lagăr cu rulment
1-corp lagăr, 2-inel exterior, 3-corp rostogolire rulment, 4-colivie rulment,
5-inel interior rulment, 6-element de reglaj, 7-arc, 8-fus, 9-element de strângere

Rulmenții sunt alcătuți din mai multe componente:

- inelul interior și exterior care împreună formează **calea de rulare**;
- corpurile de rostogolire care pot avea formă de bile, role sau ace;
- colivia are rolul de a păstra distanța între corpurile de rostogolire în timpul funcționării;

- elemente de asamblare și etanșare.

Dimensiunile de bază ale rulmentului sunt:

- d reprezintă diametrul nominal corespunzător diametrului nominal al fusului arborelui;
- D reprezintă diametrul exterior al inelului exterior corespunzător diametrului interior al lagărului;
- B reprezintă lățimea rulmentului.

Avantajele lagărelor cu rostogolire (rulmenților) sunt:

- frecare mult mai mică, deci pierderi de putere mai mici;
- centrare mult mai bună;
- jocuri mult mai mici;
- pentru ungere este necesară o cantitate mult mai mică de lubrifiant;
- funcționare mult mai bună chiar în condiții de ungere incompletă;
- lățimea rulmentului este mult mai mică decât lățimea lagărelor hidrodinamice;
- standardizarea pe scară internațională prin care se asigură schimbarea ușoară a acestora.

Dezavantajele lagărelor cu rostogolire (rulmenți) constau în:

- dimensiuni mari în direcție radială;
- durata de funcționare mult mai redusă decât lagărele de alunecare în cazul vitezelor mari;
- comportare nesatisfăcătoare la șocuri și vibrații;
- necesitatea unei precizii de execuție ridicate și a unor condiții mai severe de montaj;
- rulmenții sunt mai sensibili la deformațiile accidentale ale arborilor deoarece aceste deformații modifică pozițiile relative ale corpurilor de rulare (inele sau bile) și implicit schema forțelor din contacte.

Clasificarea rulmenților se face pe baza următoarelor criterii:

- După forma corpurilor de rostogolire:

- rulmenți cu bile;
- rulmenți cu role care pot fi: cilindrice, medii, lungi (ace);
- conice;
- butoi.

- După unghiul de contact și direcția sarcinii pe care rulmentul o poate prelua (unghiul de contact este unghiul dintre direcția radială a rulmentului și direcția punctelor de contact), se deosebesc:

- rulmenți radiali;
- rulmenți radiali-axiali (cu bile sau role);
- rulmenți axiali.

- După numărul de rânduri pe care sunt dispuse corpurile de rulare:

- rulmenți având un singur rând de corpi de rulare;

- rulmenți având două rânduri de corpi de rulare;
- După direcția forței pe care o pot prelua:
- rulmenți radiali (rulmenți cu role cilindrice);
- rulmenți radial-axiali cu simplu efect (rulmenți radiali-axiali cu role conice sau bile pe un singur rând);
- rulmenți radial-axiali cu dublu efect (rulmenți radial-axiali cu două rânduri de corpi de rulare);
- rulmenți oscilați (în cazul arborilor care prezintă deformații importante).

Funcționarea optimă a lagărelor cu rulmenți este influențată de alegerea corectă a tipului de rulment, de montarea corectă a rulmentului pe fus și în lagăr, de ungerea și proprietățile lubrifiantului, de etanșarea corectă a lagărului etc.

12.5. Elemente de asamblare ale organelor de mașini

Asamblarea este îmbinarea a două sau mai multe piese definitiv prelucrate, într-o anumită succesiune astfel încât, să formeze un produs finit care să corespundă din punct de vedere tehnic scopului pentru care a fost proiectat.

În funcție de posibilitățile de desfacere, asamblările se clasifică în demontabile și nedemontabile. În funcție de posibilitățile de realizare se deosebesc asamblări directe ale pieselor și asamblări indirekte cu un element suplimentar.

Îmbinările nedemontabile nu permit demontarea decât prin distrugerea parțială sau totală a pieselor componente și pot fi obținute prin intermediul mijloacelor mecanice.

Asamblările demontabile permit montarea și demontarea ulterioară, fără a fi necesară distrugerea organelor de asamblare și a pieselor asambleate, ori de câte ori este necesar.

12.5.1. Asamblarea prin nituire

Nituirea reprezintă procedeul tehnologic de îmbinare nedemontabilă a două sau mai multe piese cu ajutorul niturilor.

Nitul este organul de mașină folosit la asamblarea nedemontabilă a două sau mai multe piese, table, profile sau piese cu formă plată. Pentru desfacerea legăturii realizate, se procedează la distrugerea nitului cu dalta sau cu flacără oxi-acetilenică.

Nitul, figura 12.8., este format din:

- 1-tija cilindrică, având capul format prin fabricație;
- 2-capul format în timpul nituirii cu ajutorul căpuitorului.

Pentru a putea fi realizată nituirea, tija nitului este mai lungă decât grosimea totală a tablelor ce urmează a fi asamblate, pentru a exista suficient material, astfel încât prin baterea (presarea) contracăpuitorului să se realizeze al doilea cap al nitului.

Materialul din care este confectionat nitul se alege funcție de materialul pieselor ce trebuie îmbinate și forțele la care este solicitat ansamblul. Pentru nituri se poate folosi: oțel-carbon obișnuit, oțeluri aliante, alama, cuprul, aluminiu, lemn etc.

Nituirea se poate executa:

- la rece pentru nituri de oțel ($d \leq 10 \text{ mm}$), alamă, cupru, aliaje ușoare;

- la cald pentru $d \geq 10 \text{ mm}$ care presupune o preîncălzire a nitului la temperaturi de $1000 - 1100^\circ\text{C}$.

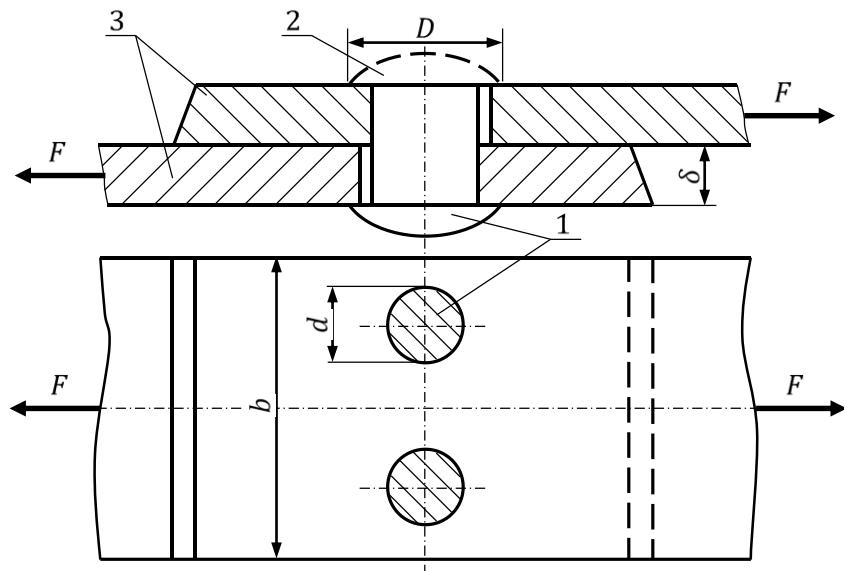


Figura 12.8. Elementele componente ale nitului și dimensionarea îmbinării nituite
1-nit, 2-capul format după nituire, 3-platbandele de îmbinat

Dacă îmbinarea este solicitată centric, figura 12.8., forța F se consideră uniform repartizată pe cele n nituri care compun îmbinarea, forța ce revine unui nit este:

$$F_{nit} = \frac{F}{n} \quad (12.17.)$$

Calculul de rezistență al îmbinării se realizează ținând cont de aria netă a secțiunii slabite precum și de valoarea maximă a efortului transmis, (figura 12.8.):

$$\sigma_{ef,max} = \frac{N_{max}}{A_{min}} = \frac{F}{(b - 2 \cdot d) \cdot \delta} \leq \sigma_{at} \quad (12.18.)$$

unde, σ_{at} reprezintă tensiunea admisibilă la tracțiune pentru materialul platbandelor.

Platbandele tind să lunece relativ una față de alta, solicită nitul în secțiunea de trecere la forfecare, condiția de rezistență la forfecarea tijei nitului este:

$$\tau_{ef,max} = \frac{F_{nit}}{A_{ef}} = \frac{4 \cdot F}{n \cdot \pi \cdot d^2} \leq \tau_{at} \quad (12.19.)$$

unde τ_{af} reprezintă tensiunea admisibilă la forfecare pentru materialul din care este confectionat nitul.

Dimensiunile capului de nit (diametrul D și înălțimea h), se determină ținând cont că nitul poate ceda sub acțiunea forței care apare la răcire (montarea la cald a nitului). Diametrul D se calculează din condiția de egală rezistență a nitului la tracțiunea tijei și strivirea capului de nit.

12.5.2. Asamblări filetate

Asamblările filetate sunt asamblări demontabile realizate prin intermediul unor piese filetate conjugate, figura 12.9., formate din șurubul 1, piuliță 2 și șaiba 3.

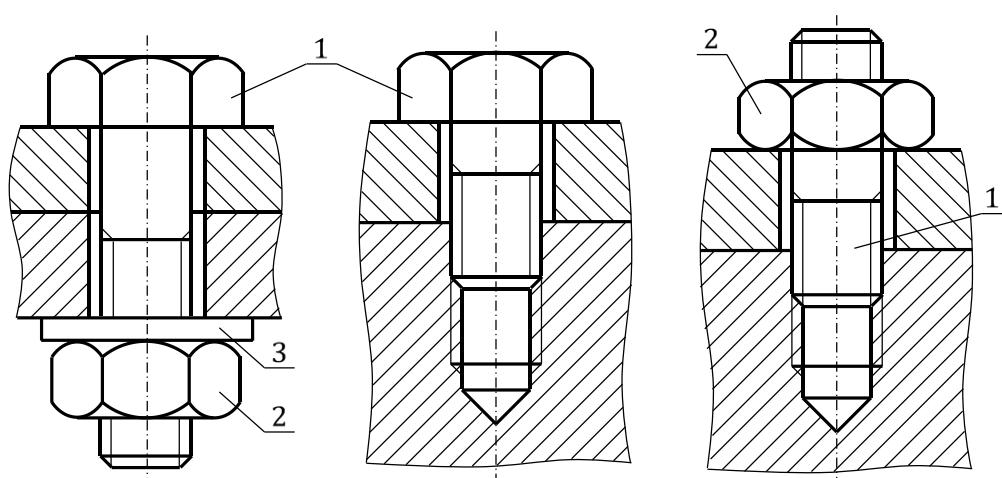


Figura 12.9. Elementele componente ale asamblării filetate
1-șurub, 2-piuliță, 3-șaibă

După rolul funcțional, asamblările filetate pot fi:

➢ **de fixare**, cu sau fără strângere inițială, formând grupa cea mai des utilizată de asamblări filetate;

➢ **de reglare**, fiind utile pentru fixarea poziției relative a două piese;

➢ **de mișcare**, care transformă mișcarea de rotație, de regulă a șurubului, în mișcare de translație sau invers;

➢ **de măsurare**, prevăzut cu filet fin (cazul micrometrului) permitând o precizie de măsurare de 1/100 [mm].

Asamblările filetate au o răspândire foarte largă în construcția de mașini, peste 60% din piesele componente au filet. Această utilizare foarte largă a asamblărilor filetate este justificată de **avantajele** pe care le au aceste asamblări:

➢ forțe de strângere mari folosind forțe de acționare mici,

➢ gabarit redus,

➢ posibilitatea de adaptare șurubului și piuliței după forma pieselor de îmbinat,

➢ tehnologia de fabricație simplă (producția de serie și individuală).

Utilizarea asamblărilor filetate prezintă și unele **dezavantaje**:

- concentratori de tensiune puternici în zona filetată,
- nevoie de asigurare contra autodesfacerii (șaibe de tip Grower),
- necunoașterea exactă a forței de strângere a piuliței,
- randament scăzut,
- lipsa de autocentrare (dispozitive speciale de centrare),
- uzura flancurilor filetelui poate conduce la jocuri care pot conduce la scăderea preciziei de lucru a mașinilor în cazul șuruburilor de mișcare.

Filetel este partea caracteristică a șurubului și reprezintă o nervură elicoidală înfășurată pe o suprafață cilindrică (cea mai largă utilizare) sau conică (pentru construcții speciale).

Surubul este organul de mașină de formă unei tije care are o nervură elicoidală numită filet exterior, utilizat pentru fixări mecanice de îmbinare demontabilă a două sau mai multe piese.

Piulița este organul de mașină având o gaură cu filet interior, fiind utilizată pentru realizarea asamblărilor demontabile cu șurub.

Șaibe sunt discuri metalice găurite, poziționate între piuliță și suprafața piesei de reazem a piuliței, având rolul de a micșora și uniformiza presiunea de contact și de a asigura perpendicularitatea suprafeței de reazem a piuliței.

Șaibele pot fi:

- **uzuale** pentru mărirea suprafeței de contact dintre piuliță și piesele asamblate,
- **de siguranță** pentru a împiedica desfacerea piulițelor sau a șuruburilor,
- **elastice-Grower**, datorită elasticității lor asigură forțele de frecare în filet nepermisând astfel deșurubarea piulițelor sau șuruburilor.

Tija filetată a șurubului este solicitată la tracțiune (foarte rar la compresiune), tensiunea corespunzătoare la tracțiune fiind:

$$\sigma_{t,(c)} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \leq \sigma_{at,(c)} \quad (12.20.)$$

unde:

- F -reprezintă forță axială din șurub,
- A -reprezintă aria secțiunii transversale a tijei filetate a șurubului,
- d -diametrul tijei șurubului,
- $\sigma_{at,(c)}$ -reprezintă tensiunea admisibilă la tracțiune (compresiune).

Pentru dimensionare, din relația (12.20.) se determină diametrul necesar al tijei filetate a șurubului:

$$d_{nec} = \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot \sigma_{at,(c)}}} \Rightarrow d_{ef} \quad (12.21.)$$

cunoscând diametrul efectiv al tijei filetate se alege un șurub standardizat.

12.5.3. Asamblări prin pene

Asamblările prin pene sunt asamblări demontabile care îmbină sau regleză poziția relativă a două piese. Au avantajul unor forme geometrice simple, gabarit redus și care se pot monta/demonta ușor.

Funcție de poziția penelor față de axa de simetrie a pieselor asamblate, penele se clasifică în: pene transversale, figura 12.10.a (se montez perpendicular pe axa pieselor, deci perpendicular pe direcția sarcinii) și pene longitudinale, figura 12.10.b (se montez paralel cu axa geometrică a pieselor, deci transmit moment de torsion).

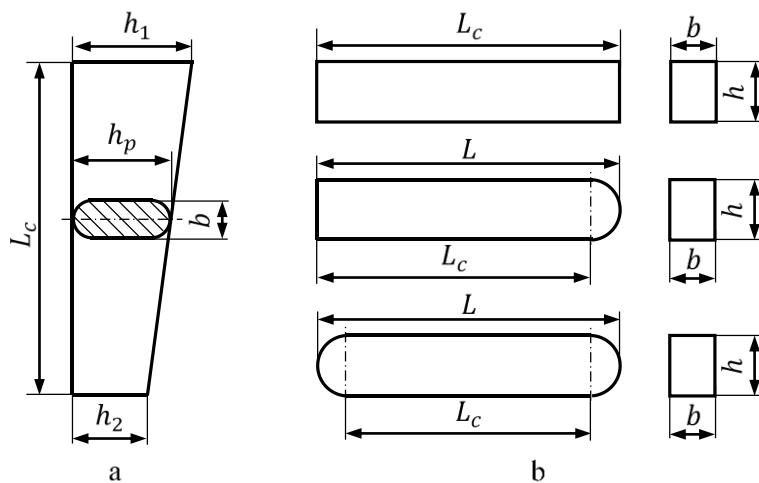


Figura 12.10. Tipuri de pene
a-pană transversală, b-pene longitudinale

Penele se execută din oțeluri având rezistență la rupere de minim 600 MPa , de regulă din oțeluri nealiante laminate, oțel carbon de calitate tratat termic, oțeluri pentru scule sau oțel de arc.

Pentru asamblările cu prestrângere forță de calcul F_c , se determină în funcție de forță din exploatare F cu relația:

$$F_c = (1,25 \div 1,5) \cdot F \quad (12.22.)$$

Calculul de dimensionare al penelor transversale se face în funcție de modul de solicitare al îmbinării. Dacă pana transversală preia o forță axială, aceasta se consideră ca o bară simplu rezemată încărcată cu o sarcină uniformă distribuită, cu modulul de rezistență W_z și momentul încovoiector maxim $M_{i,max}$ (figura 12.10.a) date de relațiile:

$$W_z = \frac{b \cdot h_p^2}{6} \quad ; \quad M_{i,max} = \frac{F_c \cdot D}{8} \quad (12.23.)$$

unde D reprezintă diametrul exterior al îmbinării (diametrul butucului).

Prin dimensionarea la încovoiere se obține:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i,max}}{W_z} = \frac{3 \cdot F_c \cdot D}{4 \cdot b \cdot h_p^2} \leq \sigma_a \quad (12.24.)$$

Din relația (12.23.), se obține înălțimea penei:

$$h_{p,nec} = \sqrt{\frac{3 \cdot F_c \cdot D}{4 \cdot b \cdot \sigma_a}} \Rightarrow h_{p,ef} \quad (12.25.)$$

Din calculul la forfecare se poate verifica (determina) grosimea penei:

$$\tau_{max} = \frac{F_c}{2 \cdot b \cdot h_p} \leq \tau_{af} \Rightarrow b_{nec} = \frac{F_c}{2 \cdot h_p \cdot \tau_{af}} \Rightarrow b_{ef} \quad (12.26.)$$

Asamblările prin pene longitudinale se realizează folosind pene cu secțiunea transversală dreptunghiulară constantă. Transmiterea momentului de torsion se realizează prin zonele de contact ale penelor cu suprafețele pieselor (arbore și butuc) cu care vine în contact.

Forma constructivă a penelor longitudinale este paralelipipedică cu capete drepte sau rotunde (figura 12.10.b) și uneori cu găuri de fixare în arbore.

Calculul unei pene longitudinale se face funcție de diametrul arborelui, alegând dimensiunile standardizate ale penei ($b \times h$).

Deoarece condiția de rezistență la forfecare s-a folosit la stabilirea lățimii penei indicate în standard, iar lungimea penei se determină din condiția de rezistență la strivire, verificarea penei la forfecare nu mai este neapărat necesară.

Pentru a reduce efectul concentratorilor de tensiune, penele se execută cu muchiile teșite iar canalele de pană se execută cu racordări.

BIBLIOGRAFIE

1. Babeu T., „Teoria elementară a Rezistenței Materialelor”, Editura Mirton, Timișoara, 1998.
2. Bacivarof I. C., „Conexiuni prin lipire în aparatura electronică”, Editura Tehnică, București, 1984.
3. Bejan V., „Tehnologia fabricării și a reparării utilajelor tehnologice ”, Editura Tehnică, București, 1991.
4. Buzdugan G., „Rezistența materialelor-Ediția XI revizuită”, Editura Tehnică, București, 1980.
5. Buzdugan G., ş.a, „Culegere de probleme din rezistența materialelor-Ediția a VI-a”, Editura Didactică și Pedagogică, București.
6. Comănescu A., „Mecanica, Rezistența Materialelor și Organe de Mașini”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
7. Constantin V., ş.a., „Organe de mașini și mecanisme-Volumul I”, Editura Fundației Universitare Dunărea de Jos, Galați, 2004.
8. Drăghici I., „Organe de mașini. Culegere de probleme”, Editura Tehnică, București, 1975.
9. Drăgușescu D., „Mecanica”, Editura Orizonturi Universitare, Timișoara, 2002.
10. Deutsch I., „Rezistența materialelor”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1976.
11. Deutsch I., ş.a., „Probleme de rezistența materialelor”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
12. Dobre I., ş.a., „Rezistența materialelor. Probleme pentru examen. Soluții - partea I”, Litografia UPT, Timișoara, 1996.
13. Dobre I., ş.a., „Rezistența materialelor, elasticitate, plasticitate. Solicitări fundamentale - Vol. 1”, Editura de Vest, Timișoara, 1997.
14. Faur N., „Mecanica materialelor: Noțiuni fundamentale, statică, solicitări simple”, Editura Politehnica, Timișoara, 2005.
15. Gafitanu M., „Organe de Mașini-Volumul I”, Editura Tehnică, București, 1981.
16. Gafitanu M., „Organe de Mașini-Volumul II”, Editura Tehnică, București, 1983.
17. Gheorghiu H., ş.a., „Capitole avansate din rezistența materialelor”, Editura Printech, București, 2009.
18. Groșanu I., „Mecanica-Volumul I. Statica și cinematica”, Litografia UPT, Timișoara, 1985.
19. Hlușcu M., ş.a., Rezistența Materialelor I, Editura Mirton, Timișoara, 2014.
20. Hlușcu M., ş.a., Rezistența Materialelor II, Editura Mirton, Timișoara, 2013.
21. Ianuș G., „Organe de mașini. Partea I”, Editura Politehnium, Iași, 2010.
22. Manea G., „Organe de mașini-I”, Editura Tehnică, București, 1956.
23. Mincă I., ş.a., „Rezistența materialelor și elemente de teoria elasticității. Solicitări simple”, Editura Tehnică, București, 1998.
24. Muhs D., ş.a., „Organe de mașini”, Editura Matrix ROM, București, 2008.

- 25.** Nanu A., „Tehnologia materialelor”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1977.
- 26.** Neguț N., „Rezistența materialelor. Teorie și aplicații”, Editura Politehnica, Timișoara, 2007.
- 27.** Nichici A., „Tehnologia Materialelor-Vol. I”, Litografia UPT, Timișoara, 1979.
- 28.** Ponomariov S.D., ş.a, „Calculul de rezistență în construcția de mașini, Volumul I”, Editura Tehnică, București, 1960.
- 29.** Ponomariov S.D., ş.a, „Calculul de rezistență în construcția de mașini, Volumul II”, Editura Tehnică, București, 1963.
- 30.** Ponomariov S.D., ş.a, „Calculul de rezistență în construcția de mașini, Volumul III”, Editura Tehnică, București, 1964.
- 31.** Popoviciu M. O., „Tehnologia fabricației și montajul mașinilor hidraulice”, Litografie UPT, Timișoara, 1980.
- 32.** Pruteanu O., „Tehnologia fabricării mașinilor”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- 33.** Pupăzescu A., „Mecanică teoretică și rezistența materialelor”, Editura Universității din Ploiești, Ploiești, 2004.
- 34.** Radeș M., „Rezistența materialelor I”, Editura Printech, București, 2004.
- 35.** Roșca I., „Mecanică pentru ingineri”, Editura Matrix ROM, București, 1998.
- 36.** Sava M., „Rezistența materialelor. Noțiuni fundamentale. Solicitări simple”, Editura Politehnica, Timișoara, 2008.
- 37.** Ștefănescu I., ş.a., „Transmisii și asamblări cu șuruburi”, Editura Fundației Universitare Dunărea de Jos, Galați, 2004.
- 38.** Tripa P., ş.a., „Rezistența Materialelor. Noțiuni fundamentale și aplicații”, Volumul I, Editura Mirton, Timișoara, 2006.
- 39.** Tripa P., ş.a., „Rezistența Materialelor. Noțiuni fundamentale și aplicații”, Volumul II, Editura Mirton, Timișoara, 2007.
- 40.** Tudose I., ş.a., „Rezistența materialelor”, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- 41.** Tudose I., ş.a., „Rezistența materialelor. Aplicații”, Editura Tehnică, București, 1990.