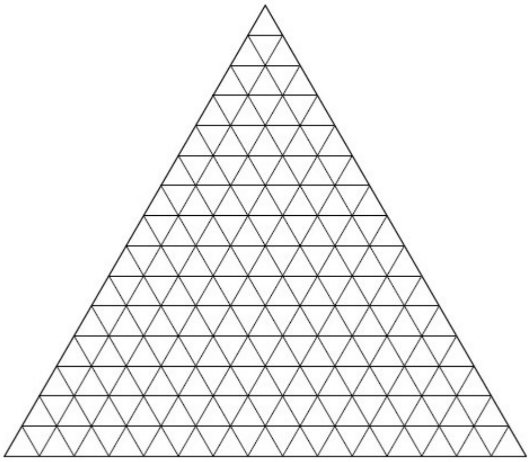
1.$D^{-1}A$矩阵最大特征值与第二大特征值的比值r，和Lapacian矩阵的第二小特征值λ_2有什么关系？（开放问题，实验或者理论结果都可以，20分）

2. 三角形有15层，就是最外侧长边有16个点。求出Laplacian矩阵的最大的两个特征值和特征向量，和最小的两个非零特征值和特征向量。分别画出两个平面嵌入图。（20分）



3.如果G是一个二部图（注意不是说有两个连通分支），令A是是邻接矩阵。证明如果λ是A的特征值，那么$-\lambda$也是A的特征值。(20分)

4.证明：矩阵的迹$tr(A)=\sum_i \lambda_i$，其中λ_i是矩阵的特征值。(20分)

5.证明：如果邻接矩阵A的任一特征值λ，它的相反数$-\lambda$也是特征值，那么图G是二部图。(20分)

6.在连通图G中，假设邻接矩阵A的最大特征值和最小特征值是相反数。证明最小特征值对应的特征向量的绝对值，是最大特征值对应的特征向量(10分)。证明G是二部图。(10分)

1 解：经 python 随机生成节点数为 1-500 的图的邻接矩阵，通过计算其度矩阵和 $D^{-1}A$ 以及 Laplacian 矩阵并对各特征值进行计算可得存在如下关系：

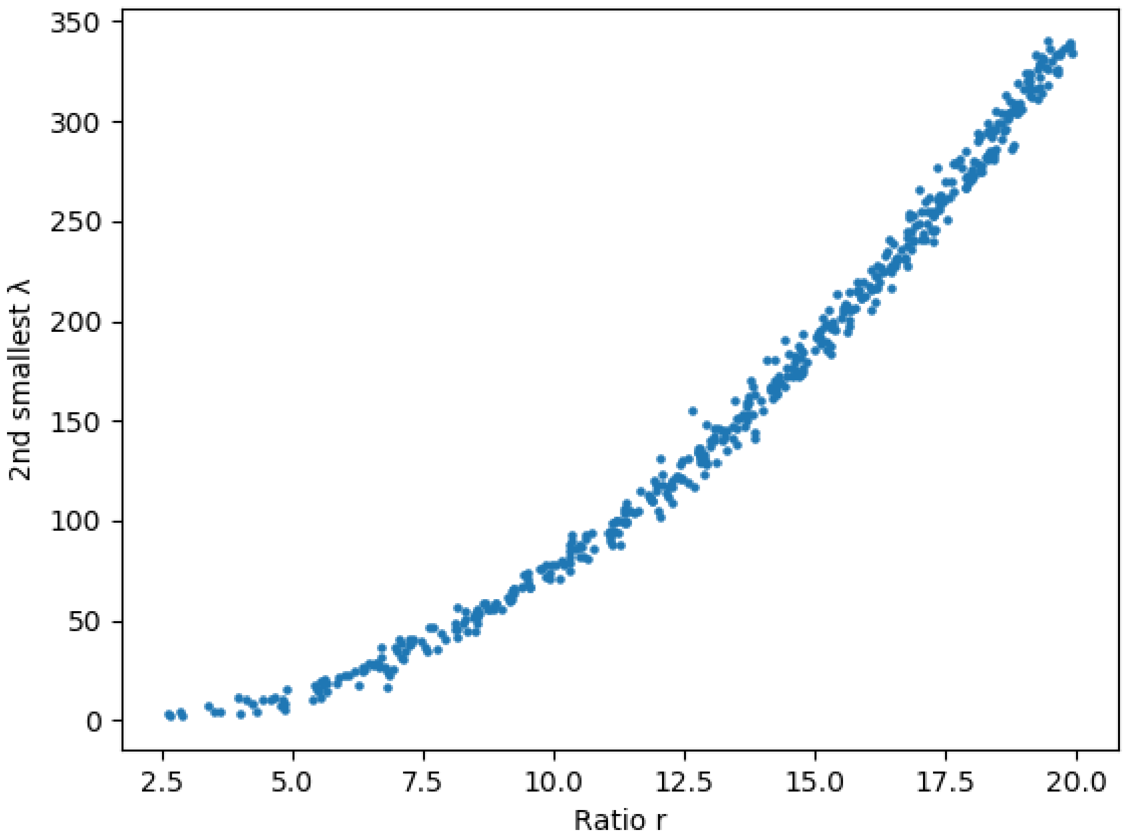


图 1: Q1

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from numpy import random
import time
from tqdm import *
nodenum = 500
def RandGenerate(nodesnum):
    G = nx.Graph()
    #随机生成邻接矩阵
    AdjMatrix = np.array(random.randint((2),size=(nodesnum, nodesnum)))
    for i in range(len(AdjMatrix)):
        for j in range(len(AdjMatrix)):
            if AdjMatrix[i, j]!= 0:
                AdjMatrix[j, i] = 1
                G.add_edge(i, j)
#     print(AdjMatrix)
#     nx.draw(G)
#     plt.show()
    D = np.zeros((nodesnum, nodesnum))
    for i in range(nodesnum):
        D[i][i] = sum(AdjMatrix[i])
    return D, AdjMatrix
def Calculator(D, AdjMatrix):
```

```
    A = AdjMatrix
    epsilon = 0.000000000001
    Laplacian = D - A
#     print(D)
    D_inv = np.linalg.inv(D)
    D_inv_A = np.matmul(D_inv, A)
    D_inv_A_eig = np.linalg.eigvals(D_inv_A)
    Laplacian_eig = np.linalg.eigvals(Laplacian)
    D_inv_A_eig = sorted(D_inv_A_eig, reverse=True)
    Laplacian_eig = sorted(Laplacian_eig, reverse=True)
    r = D_inv_A_eig[0] / (D_inv_A_eig[1] + epsilon)
    return r, Laplacian_eig[-2]
res = []
with tqdm(total=nodenum, ncols = 100) as pbar:
    for i in range(5, nodenum, 1):
        pbar.update(1)
        # time.sleep(0.5)
        D, A = RandGenerate(i)
        tmp = [D[j][j] for j in range(i)]
        #排除奇异矩阵
        if 0 in tmp:
            continue
        else:
            r, eig = Calculator(D, A)
        if np.dtype(r) == int or np.dtype(r) == float:
            res.append(np.array([r, eig]))
        else:
            print("随机生成的矩阵计算后包含虚数，请重试！")
            exit(0)
res = sorted(res, key= lambda x: x[0])
res = np.array(res)
# print(res)
plt.scatter(res[:, 0], res[:, 1], marker="o", s=5)
plt.xlabel("Ratio r")
plt.ylabel("2nd smallest  ")
plt.show()
```

2 解：通过编写 python 代码如下：

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
level = 15 #三角形图共15层
G = nx.Graph()
for i in range(level):
    for j in range(i+1):
        if i+1 < level: #非最后一排
            #向下连接
            G.add_edge(str(int(i*(i+1)/2+j+1)),str(int(i*(i+1)/2+j+1+i+1)), length=2)
            G.add_edge(str(int(i*(i+1)/2+j+1)),str(int(i*(i+1)/2+j+1+i+2)), length=2)
            if i != j: # 横向连接
                G.add_edge(str(int(i*(i+1)/2+j+1)),str(int(i*(i+1)/2+j+2)), length=20)
        else: #最后一排，只做横向连接
            if i != j:
                G.add_edge(str(int(i*(i+1)/2+j+1)),str(int(i*(i+1)/2+j+2)), length=20)
positions=nx.spectral_layout(G)
fig, ax = plt.subplots()
nx.draw(G, ax=ax, with_labels=True, pos=positions, node_color='y')
plt.show()
A = nx.to_numpy_array(G)
# print(A)
nodes_num = G.number_of_nodes()
```

```python
D = np.zeros(shape=(nodes_num, nodes_num))
degree_list = G.degree
# print(G.degree)
for i, pair in enumerate(degree_list):
    D[i, i] = pair[1]
# print(D)
Lapac = D - A
Lapac_eig, eigvec = np.linalg.eig(Lapac)
zipped = zip(Lapac_eig, eigvec) #合并起来
sort_zipped = sorted(zipped, key=lambda x:(x[0])) #按特征值大小排序
result = zip(*sort_zipped) #拆分
L_eigvalues, L_eigvetors = [list(x) for x in result]
L_eigvetors = [x.tolist() for x in L_eigvetors]
L_eigvalues = [round(i,3) for i in L_eigvalues]
L_eigvetors = [[round(j,3) for j in L_eigvetors[i]] for i in range(len(L_eigvetors))]
# print("特征值: ", L_eigvalues)
# print("特征向量: ", L_eigvetors)
print("最大两个特征值及特征向量:",L_eigvalues[-1],L_eigvetors[-1],L_eigvalues[-2],L_eigvetors[-2])
print('==============')
print("最小两个特征值及特征向量:",L_eigvalues[0],L_eigvetors[0],L_eigvalues[1],L_eigvetors[1])
```

得到的结果如下：

```
最大两个特征值及特征向量： 8.827 [-0.091, 0.047, -0.074, -0.096, 0.024, -0.119, -0.004, 0.071, -0.004, -0.174, -0.004, -0.143, 0.119, 0.057,
0.006, -0.156, 0.0, 0.01, -0.042, 0.011, 0.127, -0.146, -0.003, 0.013, -0.177, 0.0, -0.041, 0.054, -0.076, -0.005, -0.062, 0.008, -0.0, -0.1
7, 0.002, 0.0, -0.005, 0.243, 0.051, 0.237, 0.0, -0.131, -0.094, 0.0, 0.08, -0.147, 0.0, -0.001, 0.006, -0.016, -0.025, -0.015, -0.031, 0.00
5, -0.001, -0.001, 0.004, 0.267, 0.001, 0.126, 0.001, -0.003, 0.002, -0.023, 0.173, -0.06, -0.001, -0.0, -0.0, 0.031, 0.12, -0.227, -0.084,
0.0, 0.003, -0.007, 0.089, -0.178, 0.001, 0.161, -0.001, -0.163, 0.125, -0.167, 0.001, 0.004, 0.112, 0.026, -0.0, 0.016, -0.022, -0.122, -0.
003, 0.005, -0.046, 0.0, 0.001, 0.002, 0.0, 0.297, -0.096, -0.226, -0.051, 0.235, 0.0, -0.0, 0.006, 0.0, -0.0, -0.002, -0.0, -0.013, -0.241,
-0.0, 0.001, -0.003, -0.002, -0.0, -0.0, -0.001] 8.827 [-0.091, 0.067, 0.179, -0.002, -0.08, 0.143, 0.053, 0.108, 0.173, 0.096, 0.039, 0.06
1, 0.032, -0.033, -0.085, 0.016, -0.114, 0.094, 0.155, 0.2, 0.157, -0.114, 0.031, 0.125, 0.015, -0.059, 0.014, -0.171, -0.154, -0.132, -0.12
6, -0.123, 0.016, -0.057, -0.188, -0.064, 0.024, 0.023, 0.119, -0.037, 0.011, 0.046, -0.036, -0.015, -0.004, -0.004, 0.005, 0.136, 0.056, 0.
081, 0.038, -0.183, -0.011, 0.018, -0.002, -0.118, 0.132, -0.09, -0.034, -0.006, 0.061, -0.144, -0.039, -0.061, -0.044, 0.012, -0.042, 0.09
1, 0.014, 0.013, 0.057, 0.012, -0.009, 0.185, 0.015, -0.025, 0.079, 0.04, 0.026, -0.169, 0.022, 0.03, 0.021, -0.013, 0.002, 0.035, 0.047, -
0.072, -0.036, -0.156, 0.042, -0.053, 0.041, 0.077, 0.094, 0.01, -0.088, -0.104, -0.005, 0.055, -0.068, -0.026, -0.022, -0.034, -0.128, 0.21
6, -0.184, -0.102, -0.045, 0.105, -0.028, -0.045, -0.041, -0.182, 0.077, -0.064, -0.011, -0.053, 0.214, 0.02]
==============
最小两个特征值及特征向量： 0.0 [-0.091, -0.224, 0.179, -0.226, 0.056, 0.302, -0.231, -0.227, 0.013, -0.235, 0.009, -0.271, -0.197, 0.288, 0.
032, 0.118, 0.004, 0.013, -0.079, -0.018, 0.238, 0.15, -0.065, 0.24, -0.001, 0.0, 0.226, -0.119, 0.214, 0.005, 0.087, -0.045, 0.0, -0.057, -
0.003, -0.001, -0.0, 0.002, -0.193, 0.002, 0.0, -0.07, -0.005, 0.0, 0.004, -0.006, 0.0, 0.004, 0.003, 0.17, 0.039, -0.146, 0.007, 0.0, -0.01
2, 0.001, -0.043, 0.042, -0.0, -0.01, 0.0, -0.0, 0.03, -0.12, 0.013, -0.009, 0.0, -0.001, -0.0, 0.013, -0.015, -0.01, -0.018, 0.001, 0.0, -
0.002, 0.01, 0.019, -0.0, -0.012, 0.0, 0.014, -0.01, -0.008, -0.0, -0.0, -0.011, -0.006, 0.0, 0.095, 0.017, -0.008, -0.0, 0.028, -0.006, -0.
0, -0.0, 0.0, 0.0, -0.015, -0.005, 0.011, -0.021, 0.001, -0.009, 0.028, 0.071, 0.001, -0.0, -0.0, -0.049, 0.012, 0.004, 0.0, 0.0, 0.0, 0.00
1, 0.0, -0.001, 0.0] 0.105 [-0.091, -0.149, -0.013, -0.199, 0.049, 0.089, -0.029, -0.126, 0.007, 0.064, 0.003, 0.117, 0.081, -0.034, -0.004,
-0.076, 0.0, -0.004, 0.034, 0.007, -0.12, -0.094, 0.034, -0.128, -0.018, -0.0, -0.107, 0.092, -0.075, -0.003, -0.059, 0.021, -0.0, 0.057, 0.
002, 0.0, -0.0, 0.047, 0.029, 0.046, 0.0, 0.066, -0.08, 0.0, 0.074, -0.106, 0.0, -0.001, -0.003, 0.018, -0.033, -0.059, 0.108, 0.004, -0.00
5, -0.001, -0.004, -0.084, -0.004, -0.163, 0.001, 0.001, -0.066, -0.088, 0.167, -0.127, 0.002, 0.002, -0.0, 0.179, -0.218, -0.136, -0.229,
0.001, 0.002, -0.02, -0.09, 0.255, -0.001, 0.039, 0.001, 0.205, -0.152, -0.144, 0.0, -0.005, -0.166, -0.089, 0.001, 0.102, 0.245, -0.177, -
0.002, 0.03, -0.191, -0.0, -0.007, 0.003, 0.002, -0.215, -0.084, 0.164, -0.273, 0.063, -0.018, 0.053, 0.098, 0.001, -0.001, -0.0, -0.081, -
0.121, -0.1, 0.001, 0.001, -0.001, -0.014, 0.0, -0.001, 0.001]
```

图 2: Q2

3 证明：因为 G 是二部图，则 G 的邻接矩阵 A 可以表示为：

$$A = \begin{pmatrix} O_p & B \\ B^T & O_q \end{pmatrix}$$

其中 O_p 和 O_q 为零矩阵。对于 A 的特征值 λ，设其特征向量为 $\alpha=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，有

$$A\alpha = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx_2 \\ B^T x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

取 $\beta=\begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，则有

$$A\beta = A\begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bx_2 \\ -B^T x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ -\lambda x_2 \end{pmatrix} = -\lambda\begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

故 $-\lambda$ 为 A 的特征值，证毕.

4 证明：对于矩阵 A 的特征值，

$$\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & ... & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & ... & -a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -a_{n1} & -a_{n2} & ... & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

该式可以展开写成 $\sum_{k=1}^{n} b_k\lambda^k + b_0 = 0$，即矩阵 A 的特征值为该方程的根。由韦达定理：

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = -\frac{b_{n-1}}{b_n}$$

其中 $b_n=1$，b_{n-1} 只能为 $(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})...(\lambda-a_{nn})$ 中 λ^{n-1} 的系数，也即 $-(a_{11}+a_{22}+...+a_{nn})$，故有 $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$ 得证.

5 证明：若 G 是图，A 为其邻接矩阵，则有

$$G\text{是二部图} \iff A=\begin{pmatrix} O & X \\ X^T & O \end{pmatrix}$$

令

$$B = A-\lambda I_{n+p} = \begin{pmatrix} -\lambda I_n & X \\ X^T & -\lambda I_p \end{pmatrix}$$

$$\iff det(B) = det(-\lambda I_n)det(-\lambda I_p - X^T(-\lambda I_n)^{-1}X)$$

$$\iff det(B) = det(-\lambda I_n)det(-\lambda I_p - X^T(\frac{1}{-\lambda}I_n)X)$$

$$= (-\lambda)^n det[\frac{1}{-\lambda}(\lambda^2 I_p - X^T X)]$$

$$= (-\lambda)^n \frac{1}{(-\lambda)^p} det[(\lambda^2 I_p - X^T X)]$$

$$= (-\lambda)^{(n-p)} det[(\lambda^2 I_p - X^T X)]$$

由此可以知道，对于特征值成对出现的邻接矩阵 A，其对应的图 G 为二部图，证毕.

6 证明：

1) 对于任意连通图，其邻接矩阵 A 为对称矩阵，则 A 可以分解为

$$A = Qdiag(\lambda)Q^T$$

其中 $diag(\lambda)$ 为对角线为 A 的特征值的对角阵，而 Q 为正交矩阵，且每一列为对应特征值的特征向量。由于 A 的最大特征值和最小特征值是相反数，则容易知道其对应 Q 中的两列也互为相反数，则有最小特征值对应的特征向量的绝对值，是最大特征值对应的特征向量命题得证.

2) 设图 G 的最大度数为 n，设顶点 u 的度数为 n，只要证 G 中至少含有 n+1 个顶点。u 有 n 条边，每条边都有一个异于 u 的顶点，所以除 u 外，G 中至少还有 n 个点。则 G 中至少有 n+1 个顶点，故 G 是二部图，证毕.