1.[30分]

令$B = (A - \alpha I)^{-1}$，并对B应用幂算法，可以证明，若$\lambda_1, ..., \lambda_n$是$A$的特征值，则$B$的特征值是$\frac{1}{\lambda_1 - \alpha}, ..., \frac{1}{\lambda_n - \alpha}$

2.[30分]求解下列方程组(15)

$$\begin{aligned} 4.5x_1 + 3.1x_2 &= 19.249 \\ 1.6x_1 + 1.1x_2 &= 6.843 \end{aligned}$$

求解下列方程组(15)

$$\begin{aligned} 4.5x_1 + 3.1x_2 &= 19.249 \\ 1.6x_1 + 1.1x_2 &= 6.84 \end{aligned}$$

请分析原因解变化大的原因(0)

3.[40分]

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & -1 & & & & \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & & & \\ & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & & \\ & & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & \\ & & & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ & & & & -1 & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

对A进行LU分解(15)。用LU分解解$Ax = b$, $b = (5, 15, 0, 10, 0, 10, 20, 30)^T(10)$。求出$A^{-1}(15)$。

1 解：$\exists\beta,\ s.t.\ A\beta=\lambda\beta \ \Rightarrow\ A\beta-a\beta=(\lambda-a)\beta \ \Rightarrow\ (A-aI)\beta=(\lambda-a)\beta$, 对 A 的每一个特征值 $\lambda_1,...,\lambda_n$, 由上有 $A-\alpha$ 的特征值为 $\lambda_1-\alpha,...,\lambda_n-\alpha$, 故 B 的特征值为 $\frac{1}{\lambda_1-\alpha},...,\frac{1}{\lambda_n-\alpha}$.

2 解：

1) 原方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 4.5 & 3.1 & 19.249 \\ 1.6 & 1.1 & 6.843 \end{pmatrix}$ 对其进行初等行变换得 $\begin{cases} x_1=3.94 \\ x_2=0.49 \end{cases}$

2) 原方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 4.5 & 3.1 & 19.249 \\ 1.6 & 1.1 & 6.84 \end{pmatrix}$ 对其进行初等行变换得 $\begin{cases} x_1=3.01 \\ x_2=1.84 \end{cases}$

3) 解变化大的原因：

在数值分析领域，一个函数关于一个参数的条件数测量了函数的输出值相对于输入参数的变化强度。这用来测量一个函数相对于输入变化或误差有多敏感，以及输出结果相对于输入中的误差变化。条件数是判断矩阵病态与否的度量，对于上述矩阵，计算得其条件数 cond(A, 1) = 4636.0, cond(A, 2) = 3363.0，可见尽管右端项仅产生了 0.003 的扰动，但其所对应的矩阵为病态矩阵，较小的数据扰动仍然会带来结果较大的波动，所以最后的解也产生了较大的变化。

3 解：

1) 对矩阵 A 从下至上地进行初等行变换，直至得到上三角矩阵 U，其初等行变换逆过程即为 L 矩阵，最终得到

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & -0.3333 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2667 & -0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 & -0.4375 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3125 & -0.4656 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3239 & -0.4856 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3313 & -0.5011 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.75 & -1.25 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.3333 & -1.3333 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.2 & -1.4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.0875 & -1.4375 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.0182 & -1.4656 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.9645 & -1.4856 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.9242 \end{pmatrix}$$

2) 设 $Ly=b$ ，同时有 $Ux=y$，即有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & -0.3333 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2667 & -0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 & -0.4375 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3125 & -0.4656 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3239 & -0.4856 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3313 & -0.5011 & 1 \end{pmatrix} y=\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

解得 $y=(5,\ 16.25,\ 6.6661,\ 17.0003,\ 9.437,\ 19.7067,\ 32.6264,\ 52.8779)^T$ ，根据

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.75 & -1.25 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.3333 & -1.3333 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.2 & -1.4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.0875 & -1.4375 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.0182 & -1.4656 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.9645 & -1.4856 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.9242 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 16.25 \\ 6.6661 \\ 17.0003 \\ 9.437 \\ 19.7067 \\ 32.6264 \\ 52.8779 \end{pmatrix}$$

解得 $x=(9.1895,\ 15.3868,\ 16.3712,\ 20.9866,\ 19.9226,\ 22.2651,\ 20.0676,\ 18.0829)^T$

3) 由 $A^{-1}=(LU)^{-1}=U^{-1}L^{-1}$ 可以计算得到

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0.341973 & 0.171373 & 0.196518 & 0.147002 & 0.125725 & 0.094391 & 0.064990 \\ 0.171373 & 0.423211 & 0.262282 & 0.259188 & 0.195358 & 0.155899 & 0.104062 \\ 0.196518 & 0.262282 & 0.523791 & 0.328820 & 0.307544 & 0.221663 & 0.155899 \\ 0.147002 & 0.259188 & 0.328820 & 0.560928 & 0.348162 & 0.307544 & 0.195358 \\ 0.125725 & 0.195358 & 0.307544 & 0.348162 & 0.560928 & 0.328820 & 0.259188 \\ 0.094391 & 0.155899 & 0.221663 & 0.307544 & 0.328820 & 0.523791 & 0.262282 \\ 0.064990 & 0.104062 & 0.155899 & 0.195358 & 0.259188 & 0.262282 & 0.423211 \\ 0.039845 & 0.064990 & 0.094391 & 0.125725 & 0.147002 & 0.196518 & 0.171373 \end{pmatrix}$$