1.令$f(x)=\frac{1}{2}(x_1^2-x_2)^2+\frac{1}{2}(1-x_1)^2$，$f$在什么点取最小值。(10分)假设$x=(2,2)^T$，假设步长为1，那么经过一步改进，$x_1$应该等于多少?(10分)

2.设$C\subset R^d$是一个凸的闭集合，用$\pi(x)$表示x在C上的投影，对于任意两个点$x,y\in R^d$，证明(20分)：

$$||\pi(x)-\pi(y)||\leq||x-y||$$

3.假设函数f是$\beta-smooth$，证明(20分):

$$f(y)-f(x)-\nabla f(x)^T(y-x)\leq\frac{\beta}{2}||x-y||_2^2$$

4. 假设函数f是$\beta-smooth$，在每一步更新的时候，我们取

$$y_s\in\arg\min_{y\in C}\nabla f(x_s)^Ty$$

$$x_{s+1}=(1-\frac{2}{s+1})x_s+\frac{2}{s+1}y_s$$

证明(10分):

$$f(x_{s+1})-f(x_s)\leq\frac{2}{s+1}(f(x^*)-f(x_s))+\frac{4\beta}{2(s+1)^2}R^2$$

证明(10分):

$$f(x_k)-f(x^*)\leq\frac{2\beta R^2}{k+1},\quad k\geq2$$

5.假设函数f是$\beta-smooth$，并且是$\alpha-strongly\ convex$，那么令步长$\eta=\frac{1}{\beta}$，证明(20分):

$$||x^T-x^*||_2^2\leq e^{-(T-1)\frac{\alpha}{\beta}}||x^{(1)}-x^*||_2^2$$

1 解：

1) $f(x)=\frac{1}{2}(x_1^2-x_2)^2+\frac{1}{2}(1-x_1)^2$，对 x_1,x_2 分别求导，得到 $\begin{cases} f_{x_1}=2x_1^3-2x_1x_2+x_1-1=0 \\ f_{x_2}=x_2-x_1^2=0 \end{cases}$，可得 $x_1=x_2=1$. 即驻点为 (1,1). 进一步，$A=f_{x_1x_1}=6x_1^2-2x_2+1, B=f_{x_1x_2}=-2x_1, C=f_{x_2x_2}=1$，在 (1,1) 处 A = 5，B = -2，C = 1，$B^2-AC=-1<0$，则 $f(x)$ 在点 (1,1) 处取极小值 0，又 $f(x)\geq 0$，故 $f(x)$ 在点 (1,1) 处取最小值 0.

2) $x_{s+1}=x_s-\eta_s g_s$，其中 $g_s=\partial f(x_s)=(9,-2)$，故经过一步调整，$x_1=2-9=-7$.

2 证明：对于 x, y，由于 $\pi(x),\pi(y)\in C$，有

$$\langle \pi(y)-y,\pi(x)-\pi(y)\rangle \geq 0$$

$$\langle \pi(x)-x,\pi(y)-\pi(x)\rangle \geq 0$$

由上面两式可得，

$$\langle \pi(x)-\pi(y)-(x-y),2(\pi(y)-\pi(x))\rangle \geq 0$$

$$\langle y-x,\pi(y)-\pi(x)\rangle \geq \langle \pi(y)-\pi(x),\pi(y)-\pi(x)\rangle$$

由柯西不等式可得，

$$\langle y-x,\pi(y)-\pi(x)\rangle \leq ||\pi(x)-\pi(y)||_2||x-y||_2$$

故有 $||\pi(x)-\pi(y)||_2\leq ||x-y||_2$ 得证.

3 证明：对于 $\beta-smooth$，有 $||\bigtriangledown f(x)-\bigtriangledown f(y)||_2\leq \beta||x-y||_2$，将 $f(x)-f(y)$ 视为整数，同时应用柯西施瓦茨不等式，有

$$\begin{aligned}
&|f(x)-f(y)-\bigtriangledown f(y)^T(x-y)| \\
=&\left|\int_0^1 \bigtriangledown f(y+t(x-y))^T(x-y)dt-\bigtriangledown f(y)^T(x-y)\right| \\
\leq&\int_0^1 ||\bigtriangledown f(y+t(x-y))-\bigtriangledown f(y)||\cdot||x-y||dt \\
\leq&\int_0^1 \beta t||x-y||^2dt \\
=&\frac{\beta}{2}||x-y||^2
\end{aligned}$$

故有 $f(y)-f(x)-\bigtriangledown f(x)^T(y-x)\leq \frac{\beta}{2}||x-y||_2^2$ 得证.

4 证明：

1) 由 $x_{s+1}=(1-\frac{2}{s+1})x_s+\frac{2}{s+1}y_s$，$\Rightarrow x_{s+1}-x_s=\frac{2}{s+1}(y_s-x_s)$. 根据题意，

$$y_s\in arg\min_{y\in C}\bigtriangledown f(x_s)^Ty$$

由定理

$$f(y)-f(x)\leq \bigtriangledown f(x)^T(y-x)+\frac{\beta}{2}||x-y||_2^2$$

有

$$\begin{aligned}
f(x_{s+1})-f(x_s)&=f(x_{s+1})-f(x^*)-(f(x_s)-f(x^*)) \\
&\leq \frac{2}{s+1}(f(x^*)-f(x_s))+\frac{\beta}{2}(||x_s-x^*||_2^2-||x^*-x_{s+1}||_2^2) \\
&\leq \frac{2}{s+1}(f(x^*)-f(x_s))+\frac{\beta}{2}\cdot\frac{4}{(s+1)^2}(y_s-x_s)^2 \\
&\leq \frac{2}{s+1}(f(x^*)-f(x_s))+\frac{4\beta}{2(s+1)^2}R^2
\end{aligned}$$

2)

$$
\begin{aligned}
f(x_k)-f(x^*) &\le \bigtriangledown f(x_k)(x_k-x^*)=\beta(x_k-x_{k+1})(x_k-x^*)\\
&=\frac{\beta}{2}(||x_k-x_{k+1}||_2^2+||x_k-x^*||_2^2-||x^*-x_{k+1}||_2^2)\\
&\le \frac{\beta}{2}(||x_k-x^*||_2^2-||x^*-x_{k+1}||_2^2)\\
&\le \frac{\beta}{2}\cdot\frac{4}{(k+1)^2}(y_k-x_k)^2\\
&\le \frac{2\beta R^2}{k+1}
\end{aligned}
$$

故有 $f(x_k)-f(x^*)\le\frac{2\beta R^2}{k+1}, k\ge 2$ 成立，证毕.

5 证明：

$$
\begin{aligned}
||x^T-x^*||_2^2 &= ||x^{T-1}-\frac{1}{\beta}f(x^{T-1})-x^*||_2^2\\
&=||x^{T-1}-x^*||_2^2-\frac{2}{\beta}f(x^{T-1})^T(x^{T-1}-x^*)+\frac{1}{\beta^2}||f(X^{T-1})||_2^2\\
&\le(1-\frac{\alpha}{\beta})||x^{T-1}-x^*||_2^2\\
&\le(1-\frac{\alpha}{\beta})^{T-1}||x^{(1)}-x^*||_2^2\\
&\le exp(-(T-1)\frac{\alpha}{\beta})||x^{(1)}-x^*||_2^2
\end{aligned}
$$

证毕.