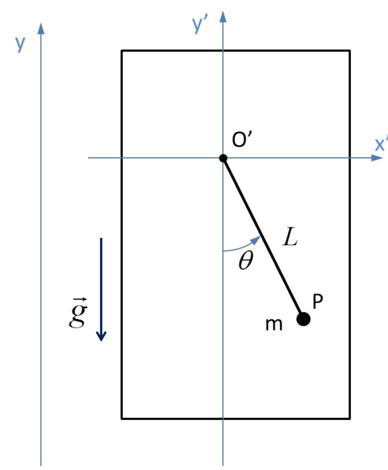
École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Semestre d'automne 2018

Physique Numérique I – Exercice 3

à rendre jusqu'au mercredi 21 novembre 2018 à 23h55 sur le site
http://moodle.epfl.ch/mod/assign/view.php?id=835969

3 Pendule avec excitation verticale : mode propre, résonance, excitation paramétrique, chaos et attracteurs étranges

Un pendule, point matériel P de masse m et tige rigide de longueur L de masse négligeable, est attaché à un point O' fixé dans une boîte. La boîte effectue un mouvement oscillatoire vertical $y_{O\prime}(t) = d\sin(\Omega t)$, avec une amplitude d et une fréquence Ω données. Les frottements exercent une force $-\kappa\vec{v}_P)_{\mathcal{R}\prime}$, où κ est un coefficient frottement donné et $\vec{v}_P)_{\mathcal{R}\prime}$ est la vitesse de P dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de la boîte. On prendra pour tout l'exercice $m = 0.1$kg, $g = 9.81\text{ms}^{-2}$, $L = 0.1$m.



3.1 Calculs analytiques [8 pts]

(a) Écrire les équations différentielles du mouvement pour $(\theta, \dot{\theta})$.

(b) Écrire les expressions de l'énergie mécanique et de la puissance des forces non conservatives dans le référentiel $\mathcal{R}\prime$ de la boîte.

(c) Trouver le mode propre du système *pour les petits mouvements au voisinage de la position d'équilibre*, i.e. la solution générale dans le cas $d = 0$, $\kappa = 0$ et $\theta \ll 1$ *(donc on linéarise les équations)*. Identifier la fréquence propre ω_0.

3.2 Programmation

(a) Téléchargez et décompressez le zip Exercice3.zip.

(b) Vous y trouverez également un squelette de script `ParameterScan.m` qui exécute le programme en boucle en variant un des paramètres d'entrée.

(c) Dans le code C++, implémentez le schéma de Stormer-Verlet (Eq. (2.72) du cours, avec les modifications présentées au cours de la semaine 6) du cours pour l'intégration des équations du mouvement, ainsi que les expressions de l'énergie mécanique du système et de la puissance des forces non conservatives.

3.3 Simulations numériques

(a) **[7 pts] Petits mouvements sans excitation ni amortissement :** $\kappa = 0$, $d = 0$, $\theta_0 = 10^{-6}$,$\dot{\theta}_0 = 0$ et $t_{fin} = 20$s.

  (i) Comparer les solutions numériques et analytiques.

  (ii) Faire une étude de convergence en Δt de la position finale.

  (iii) Vérifier la conservation de l'énergie mécanique.

(b) **[5 pts] Grands mouvements : période en fonction de l'amplitude :** Mêmes paramètres qu'en (a), sauf θ_0 que l'on fera varier.

  (i) Lancer des simulations pour $\theta_0 \in]0, \pi[$, pour chaque simulation mesurer la période. Tracer le graphe de la période T en fonction de l'amplitude θ_0.

  (ii) Comparer vos résultats avec la théorie analytique, qui donne $T(\theta_0) = \frac{4}{\omega_0} K(\sin(\theta_0/2))$, avec $K(k) = \int_0^{\pi/2} d\theta (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2}$ l'intégrale elliptique du premier type. Pour cela, vous utiliserez la fonction `ellipticK(m)` de Matlab, avec $m = k^2 = \sin^2(\theta_0/2)$.

(c) **[6 pts] Excitation résonnante : fréquence d'oscillation de la boîte égale à la fréquence propre :** $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 10^{-2}$ s^{-1}, $\Omega = \omega_0$, $d = 0.03$m, $\kappa = 0$ et $t_{fin} = 250$s.

  (i) Vérifier le théorème de l'énergie mécanique (pensez au travail des forces non conservatives).

  (ii) Varier Ω au voisinage de ω_0, observer et décrire les différents comportements. Représenter sur un graphe $\max_t(E_{\text{mec}}(t))$ en fonction de Ω.

(d) **[4 pts] Excitation paramétrique : fréquence d'oscillation de la boîte égale au double de la fréquence propre :** $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 10^{-2}$ s^{-1}, $\Omega = 2\omega_0$, $d = 0.005$m, $\kappa = 0.05$kgs^{-2} et $t_{fin} = 100$s.

  (i) Même question qu'en (c)(i)

  (ii) Même question qu'en (c)(ii), mais au voisinage de $2\omega_0$.

(e) **[10 pts] Sections de Poincaré, chaos (sans amortissement) :** $\Omega = \omega_0$, $d = 0.04$m, $\kappa = 0$.

  (i) Pour $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 10^{-2}$s^{-2}, faire une étude de convergence en Δt avec $t_{fin} = 20(2\pi/\Omega)$.

  (ii) Tracer la section de Poincaré définie par $\left\{ \left(\theta(t_i), \dot{\theta}(t_i)\right) | t_i = i2\pi/\Omega \right\}_{i \in [i_s, i_e]}$, en effectuant une longue simulation. On prendra typiquement $i_s \approx 100$ et $i_e \approx 10000$.
  Indication : En utilisant $\Delta t = 2\pi/(n\Omega)$, où n est le nombre de pas de temps par période, et en n'écrivant dans le fichier de sortie que tous les n pas de temps (voir le paramètre `sampling`), on obtient directement la section de Poincaré.

  (iii) Choisir différentes conditions initiales θ_0 et $\dot{\theta}_0$. Illustrer quelques cas (sections de Poincaré), dont au moins un chaotique.

  (iv) Sensibilité aux conditions initiales : Dans un cas chaotique, faire une paire de simulations avec des conditions initiales déplacées de 10^{-8} (θ_0 et $\theta_0 + 10^{-8}$), $t_{fin} = 200(2\pi/\Omega)$ et observer la différence entre les 2 simulations, $d(t) = \sqrt{(\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t))^2 + \Omega^2(\theta_1(t) - \theta_2(t))^2}$, par exemple en tracant $\log(d(t))$. (L'exposant de Lyapunov est la pente de $\log(d(t))$ dans la phase initiale de la simulation).

  (v) Dans un cas **non** chaotique, refaire comme (iv) et comparer les deux cas.

(f) **[5 pts] Sections de Poincaré, chaos et attracteurs étranges (avec amortissement) :** $\Omega = 2\omega_0$, $d = 0.05$m, $\kappa = 0.1$kgs^{-2}.

  (i) Obtenir les sections de Poincaré pour diverses conditions initiales très différentes.

  (ii) Pour une paire de simulations avec des conditions initiales voisines, $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ et $(\theta_0 + 10^{-8}, \dot{\theta}_0)$, observer la différence entre les deux simulations $d(t)$ définie en (e)(iv).

(g) **Facultatif :**

  (i) Etudier la stabilisation non-linéaire au voisinage de $\theta = \pi$.

  (ii) Analyser le spectre en fréquence des signaux temporels $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$, en utilisant la transformée de Fourier discrète (`fft` et `ifft` dans Matlab). Caractériser les différents régimes (chaotique et non-chaotique).

  (iii) Amusez-vous avec le pendule et essayez de trouver d'autres attracteurs étranges intéressants. Faire varier d, κ et Ω peut très fortement affecter le système chaotique.

4 Rédaction du rapport en LaTeX

En partant du fichier source en `tex` (SqueletteRapport.tex) sur Moodle ou du rapport précédant, rédiger un rapport dans lequel les résultats des simulations ainsi que les réponses aux questions ci-dessus sont présentées et discutées en détail.
N.B. On trouve plusieurs documents LaTeX (introduction, examples, références) dans un dossier spécifique sur Moodle (Dossier LaTeX).

5 Soumission du rapport

(a) Préparer le fichier du rapport en format `pdf` portant le nom `RapportExercice3_Nom1_Nom2.pdf`, ainsi que le fichier source LaTeX `RapportExercice3_Nom1_nom2.tex`.

(b) Préparer le fichier source C++ `Exercice3_Nom1_Nom2.cpp`.

(c) Préparer le(s) fichier(s) script(s) Matlab `Analyse_Nom1_Nom2.m`.

(d) Déposez les fichiers sur Moodle ou en cliquant ici.