5.8.1 Eq's 5.4.1 – 5.44

- Simplify for vehicle perfectly symmetric about $x_b - z_b$ plane $I_{xyb} = I_{yzb} = 0$
- No gyroscopic effects $[h] = 0$
- Pure longitudinal motion $\phi = 0,\ p = r = 0,\ \dot{p} = \dot{r} = 0,\ v = \dot{v} = 0$
- heading of 0 degrees $\psi = 0$
- No wind $\{V_{wf}\} = 0$
- $$\begin{bmatrix} e_0 \\ e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\phi/2} c_{\theta/2} c_{\psi/2} + s_{\phi/2} s_{\theta/2} s_{\psi/2} \\ s_{\phi/2} c_{\theta/2} c_{\psi/2} - c_{\phi/2} s_{\theta/2} s_{\psi/2} \\ c_{\phi/2} s_{\theta/2} c_{\psi/2} + s_{\phi/2} c_{\theta/2} s_{\psi/2} \\ c_{\phi/2} c_{\theta/2} s_{\psi/2} - s_{\phi/2} s_{\theta/2} c_{\psi/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\theta/2} \\ 0 \\ s_{\theta/2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.4.1

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \overline{F_{xb}} \\ \overline{F_{yb}} \\ \overline{F_{zb}} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} -s_\theta \\ s_\phi c_\theta \\ c_\phi c_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{u} \\ 0 \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \overline{F_{xb}} \\ \overline{F_{yb}} \\ \overline{F_{zb}} \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} -s_\theta \\ 0 \\ c_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -qw \\ 0 \\ qu \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{m}\overline{F_{xb}} - g s_\theta - q w \\ \dot{v} &= 0 = \overline{f_{yb}} \\ \dot{w} &= \frac{1}{m}\overline{F_{zb}} + g c_\theta + q u \end{aligned}}$$

5.4.2

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xxb} & -I_{xyb} & -I_{xzb} \\ -I_{xyb} & I_{yyb} & -I_{yzb} \\ -I_{xzb} & -I_{yzb} & I_{zzb} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \overline{M_{xb}} \\ \overline{M_{yb}} \\ \overline{M_{zb}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -h_{zb} & h_{yb} \\ h_{zb} & 0 & -h_{xb} \\ -h_{yb} & h_{xb} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} (I_{yyb} - I_{zzb})qr + I_{yzb}(q^2 - r^2) + I_{xzb}pq - I_{xyb}pr \\ (I_{zzb} - I_{xxb})pr + I_{xzb}(r^2 - p^2) + I_{xyb}qr - I_{yzb}pq \\ (I_{xxb} - I_{yyb})pq + I_{xyb}(p^2 - q^2) + I_{yzb}pr - I_{xzb}qr \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{h}_{xb} \\ \dot{h}_{yb} \\ \dot{h}_{zb} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xxb} & 0 & -I_{xzb} \\ 0 & I_{yyb} & 0 \\ -I_{xzb} & 0 & I_{zzb} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \overline{M_{xb}} \\ \overline{M_{yb}} \\ \overline{M_{zb}} \end{bmatrix}$$

$$I^{-1} = N \begin{bmatrix} I_{yyb} I_{zzb} & 0 & -I_{xzb} I_{yyb} \\ 0 & I_{xxb} I_{zzb} - I_{xzb}^2 & 0 \\ I_{xzb} I_{yyb} & 0 & I_{xxb} I_{yyb} \end{bmatrix}$$

$$N = \frac{1}{I_{yyb}\left(I_{xxb} I_{zzb} - I_{xzb}^2\right)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q} \\ 0 \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} I_{yyb} I_{zzb} & 0 & -I_{xzb} I_{yyb} \\ 0 & I_{xxb} I_{zzb} - I_{xzb}^2 & 0 \\ I_{xzb} I_{yyb} & 0 & I_{xxb} I_{yyb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{M}_{xb} \\ \overline{M}_{yb} \\ \overline{M}_{zb} \end{bmatrix}$$

$$N = \frac{1}{I_{yyb}\left(I_{xxb} I_{zzb} - I_{xzb}^2\right)}$$

5.4.3

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_f \\ \dot{y}_f \\ \dot{z}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi \\ C_\theta S_\psi & S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi \\ -S_\theta & S_\phi C_\theta & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{wxf} \\ V_{wyf} \\ V_{wzf} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_f \\ \dot{y}_f \\ \dot{z}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ w \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_f &= u C_\theta + w S_\theta \\ \dot{y}_f &= v = 0 \\ \dot{z}_f &= -u S_\theta + w C_\theta \end{aligned}}$$

5.4.4

$$\begin{bmatrix}\dot\phi\\ \dot\theta\\ \dot\psi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & s_\phi s_\theta/c_\theta & c_\phi s_\theta/c_\theta\\ 0 & c_\phi & -s_\phi\\ 0 & s_\phi/c_\theta & c_\phi/c_\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ q\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix}0\\ \dot\theta\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & s_\theta/c_\theta\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/c_\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ q\\ 0\end{bmatrix}}$$

5.4.5

$$\begin{bmatrix}\dot u\\ \dot v\\ \dot w\end{bmatrix}=\frac{1}{M}\begin{bmatrix}\overline{F_{xb}}\\ \overline{F_{yb}}\\ \overline{F_{zb}}\end{bmatrix}+g\begin{bmatrix}2(e_xe_z-e_ye_0)\\ 2(e_ye_z+e_xe_0)\\ e_z^2+e_0^2-e_x^2-e_y^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}rv-qw\\ pw-ru\\ qu-pv\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}e_0\\ e_x\\ e_y\\ e_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_\theta/2\\ 0\\ s_\theta/2\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix}\dot u\\ 0\\ \dot w\end{bmatrix}=\frac{1}{M}\begin{bmatrix}\overline{F_{xb}}\\ \overline{F_{yb}}\\ \overline{F_{zb}}\end{bmatrix}+g\begin{bmatrix}-2e_ye_0\\ 0\\ e_0^2-e_y^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-qw\\ 0\\ qu\end{bmatrix}}$$

5.4.b

$$\begin{bmatrix}\dot{p}\\ \dot{q}\\ \dot{r}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_{xxb} & -I_{xyb} & -I_{xzb}\\ -I_{xyb} & I_{yyb} & -I_{yzb}\\ -I_{xzb} & -I_{yzb} & I_{zzb}\end{bmatrix}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\overline{M_{xb}}\\ \overline{M_{yb}}\\ \overline{M_{zb}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -h_{zb} & h_{yb}\\ h_{zb} & 0 & -h_{xb}\\ -h_{yb} & h_{xb} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}\right.$$

$$\left.+\begin{bmatrix}(I_{yyb}-I_{zzb})qr+I_{yzb}(q^2-r^2)+I_{xzb}pq-I_{xyb}pr\\ (I_{zzb}-I_{xxb})pr+I_{xzb}(r^2-p^2)+I_{xyb}qr-I_{yzb}pq\\ (I_{xxb}-I_{yyb})pq+I_{xyb}(p^2-q^2)+I_{yzb}pr-I_{xzb}qr\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\dot{h}_{xb}\\ \dot{h}_{yb}\\ \dot{h}_{zb}\end{bmatrix}\right\}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\begin{bmatrix}0\\ \dot{q}\\ 0\end{bmatrix}=N\begin{bmatrix}I_{yyb}I_{zzb} & 0 & -I_{xzb}I_{yyb}\\ 0 & I_{xxb}I_{zzb}-I_{xzb}^2 & 0\\ I_{xzb}I_{yyb} & 0 & I_{xxb}I_{yyb}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{M_{xb}}\\ \overline{M_{yb}}\\ \overline{M_{zb}}\end{bmatrix}\\[1em] N=\frac{1}{I_{yyb}(I_{xxb}I_{zzb}-I_{xzb}^2)}\end{gathered}}$$

5.4.7

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_f \\ \dot{y}_f \\ \dot{z}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e_0 \\ -e_x \\ -e_y \\ -e_z \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} V_{wxf} \\ V_{wxy} \\ V_{wxz} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{x}_f \\ \dot{y}_f \\ \dot{z}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_0 \\ 0 \\ e_y \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} 0 \\ u \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e_0 \\ 0 \\ -e_y \\ 0 \end{bmatrix} \right) \qquad \begin{bmatrix} e_0 \\ e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta/2 \\ 0 \\ S\theta/2 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

5.4.8

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e_x & -e_y & -e_z \\ e_0 & -e_z & e_y \\ e_z & e_0 & -e_x \\ -e_y & e_x & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ q \\ r \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} e_0 \\ e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta/2 \\ 0 \\ S\theta/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -e_y & 0 \\ e_0 & 0 & e_y \\ 0 & e_0 & 0 \\ -e_y & 0 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ q \\ 0 \end{bmatrix}}$$