universite libanaise
Faculte des science 1

Exemples d'examens

première année
Semestre -1-

P1100

MISPCE

مجلس طلاب الفرع

2022

Université Libanaise
Faculté des Sciences I
Département de Physique & Electronique

Cours : Phys 1100 (Mécanique)
Final 2020-2021, 1[ère] session
30-07-2021 (90 minutes)

On donne :

1. Le moment d'inertie d'une sphère pleine (de masse m et de rayon R), par rapport à l'axe passant par son centre de masse est : $I_{sphère/CM} = \frac{2}{5}mR^2$.
2. Le moment d'inertie d'une tige homogène (de masse m et de longueur L), par rapport à l'axe perpendiculaire à la tige et passant par son centre de masse est : $I_{tige/CM} = \frac{1}{12}mL^2$.
3. $g = 10\ m/s^2$

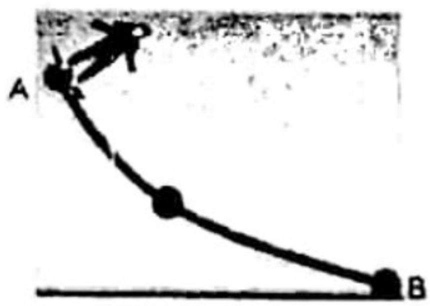
Problème I (16 Points)

Une armoire de masse m est posée sur le plateau arrière d'un camion qui roule vers la droite à une vitesse constante.

a) Tracer le bilan des forces exercées sur l'armoire.
b) Le camion, alors qu'il roulait à la vitesse constante, se met à accélérer uniformément vers la droite avec une accélération $a = 6\ m/s^2$. Quel est alors le coefficient de frottement statique minimal $\mu_{s,min}$ requis pour que l'armoire ne glisse pas ?

Problème II (16 Points)

Une athlète de masse $m = 70\ kg$, démarre son glissement sans vitesse initiale, en haut d'une piste de hauteur $h = 3\ m$ (point A) et arrive au point B au niveau du sol (voir la figure adjacente).

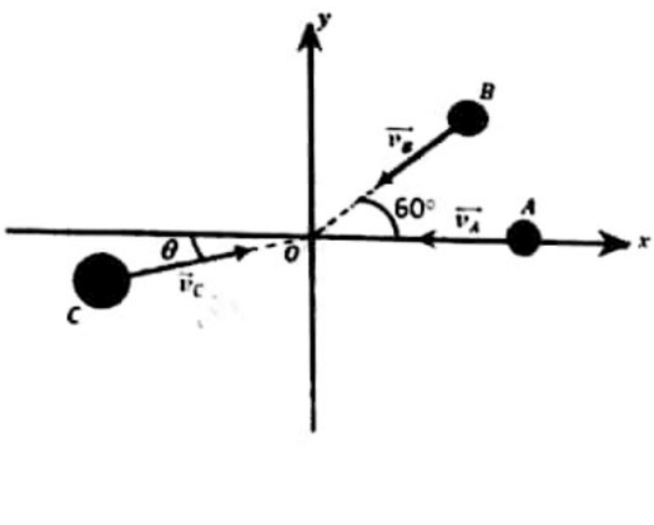


Utiliser la méthode d'énergie pour répondre aux questions a) et b)

a) Calculer la vitesse v_B de l'athlète en B en supposant que les frottements sont négligeables entre A et B.
b) En réalité, il existe des forces de frottement entre A et B, alors la vitesse en B est $v'_B = 5\ m/s$. En déduire le travail de ces forces.

Problème III (16 Points)

Trois balles (A, B et C) de masses $m_A = 0,02\ kg$, $m_B = 0,03\ kg$ et $m_C = 0,05\ kg$ se déplacent vers l'origine O sur une table horizontale sans frottement, comme le montre la figure adjacente. Les balles A et B ont les vitesses respectives $v_A = 1,5\ m/s$ et $v_B = 0,5\ m/s$. Ces trois balles entrent en collision au point O et se déplacent ensemble à la vitesse $v = 0,5\ m/s$ selon le sens [illegible] de [illegible]axe des [illegible]

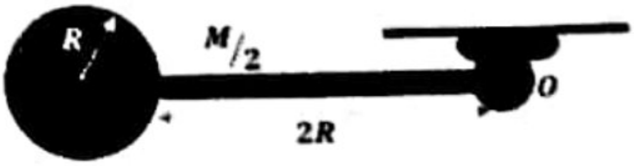


a) [illegible] v_C (module et direction)
b) [illegible] trouver la variation en

énergie cinétique de ces trois balles durant la collision.

Problème IV (16 Points)

Une sphère pleine de masse M et de rayon R est fixée à l'une des extrémités d'une tige homogène de masse $M/2$ et de longueur $2R$, comme le montre la figure ci-dessous. Cette structure rigide (sphère-tige) est portée initialement au repos à la position horizontale et elle peut tourner autour de l'axe de rotation passant par l'autre extrémité O de la tige comme le montre la figure.



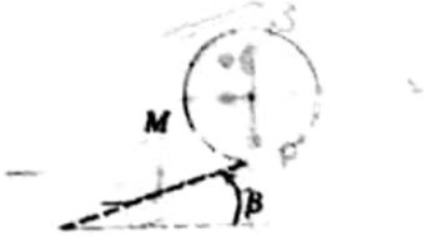
a) Montrer que le moment d'inertie de cette structure solide (sphère-tige) par rapport à O est : $I_{structure/O} = \frac{151}{15} MR^2$.

b) Si cette structure est lâchée sans vitesse initiale à partir de la position horizontale, trouver alors sa vitesse angulaire ω (en fonction de g et R) après une rotation de 90° autour de O (c.à.d. quand elle arrive à sa position verticale la plus basse).

Problème V (20 Points)

Une balle de bowling de masse M et de rayon R *roule sans glissement* vers le bas d'une rampe comme le montre la figure adjacente. La rampe est inclinée d'un angle β par rapport à l'horizontale.

Répondre aux questions suivantes en fonction de M, g et β :



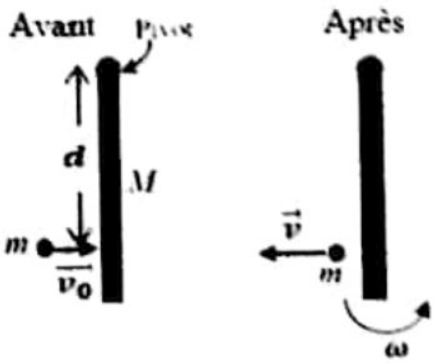
a) Pourquoi la force de frottement exercée sur la balle est-elle statique ? et pourquoi est-elle orientée vers le haut de la rampe ?

b) Déterminer l'accélération de la balle et l'intensité de la force de frottement.

c) Si le mouvement était plutôt vers le haut que vers le bas, le sens de la force de frottement changerait-il ? Justifier brièvement.

Problème VI (16 Points)

Une tige métallique uniforme de longueur $L = 2\ m$ et de masse $M = 9\ kg$, est accrochée verticalement au plafond par un pivot sans frottement. Soudainement, et à une distance $d = 1.5\ m$ plus bas que le pivot, cette tige a été frappée par une petite balle de masse $m = 3\ kg$, se déplaçant initialement horizontalement avec une vitesse $v_0 = 10\ m/s$. Après le choc, la balle rebondit dans le sens opposé avec une vitesse $v = 6\ m/s$ (voir figure adjacente).



a) Trouver la vitesse angulaire ω de la tige juste après la collision.

b) Pourquoi, durant la collision, la quantité de mouvement du système (tige-balle) n'est pas conservée ?

BONNE CHANCE

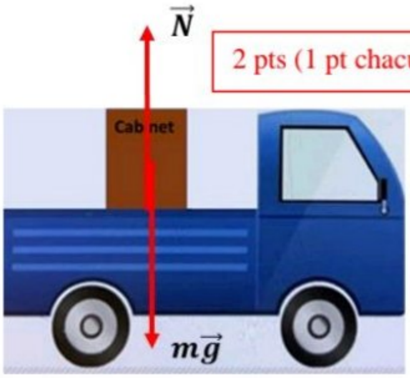
Université Libanaise
Faculté des Sciences I
Département de Physique & Electronique

Cours : Phys 1100 (Mécanique)
Final 2020-2021, 1ère session
30-07-2021 (90 minutes)

<u>Problème I (16 Points)</u>

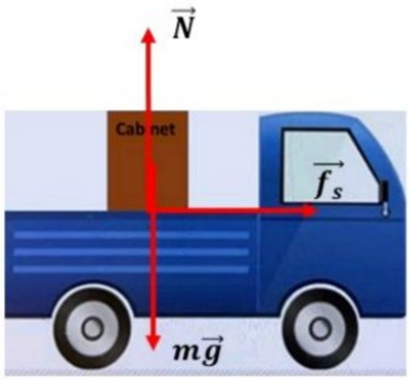
<u>Solution:</u>

a)



2 pts (1 pt chacun)

b) On applique la 2ème loi de Newton lorsque le camion accélère (voir la figure adjacente):



2 pts $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{f_s} = m\vec{a}$

Faisons la projection sur l'axe Ox →, on aura:

$f_s = ma$ 2 pts

On fait la projection sur l'axe Oy ↑, on aura:

$N = mg$ 2 pts

2 pts $f_s \leq f_{smax} \Rightarrow ma \leq \mu_s mg \Rightarrow a \leq \mu_s g \Rightarrow$

$$\mu_s \geq \frac{a}{g}$$ 4 pts

Alors: $\boldsymbol{\mu_{smin} = \frac{a}{g} = \frac{6}{10} = 0.6}$ 2 pts

Problème II (16 Points)

Solution:

a) Appliquons le théorème de conservation de l'énergie mécanique entre les points A et B:

$$\Delta E_m = 0 => E_{m_A} = E_{m_B} =>$$ 2 pts

4 points (1 pt each)

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgy_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgy_B => mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 => \boldsymbol{v_B = \sqrt{2gh} = 7,75\ m/s}$$ 2 pts

b) Dans ce cas-là, l'énergie mécanique n'est pas conservée à cause de l'existence de la force de frottement entre les points A et B. Alors : 1 pt

2 pts $$\Delta E_m + \Delta E_{th} = 0 => \frac{1}{2}mv_A^2 + mgy_A = \frac{1}{2}mv'^2_B + mgy_B + \Delta E_{th}$$

Alors:

2 pts

2 pts $$\Delta E_{th} = mgh - \frac{1}{2}mv'^2_B = (70)(10)(3) - \frac{1}{2}(70)(25) = 1225\ J => W_f = -\Delta E_{th} => \boldsymbol{W_f = -1225\ J}$$ 1 pt

Problème III (16 Points)

Solution:

a) Pas des forces extérieures agissant sur les 3 balles Durant la collision sauf leurs poids et leurs réactions normales agissant de la table sur les balles alors ces forces s'annulent ensemble. Notons qu'il n'y a pas de forces horizontales agissant sur les 3 balles durant la collision. Alors, on peut conclure qu'il y a une conservation de la quantité de mouvement. 1 pt

$$(\vec{P}_A + \vec{P}_B + \vec{P}_C)_i = (\vec{P}_A + \vec{P}_B + \vec{P}_C)_f => m_A\overrightarrow{v_A} + m_B\overrightarrow{v_B} + m_C\overrightarrow{v_C} = (m_A + m_B + m_C)\vec{v} = m_t\vec{v}$$ 2 pts (1/2 pt chacun)

Projection sur l'axe Ox →:

1 pt $m_Av_{Ax} + m_Bv_{Bx} + m_Cv_{Cx} = m_tv$ (1)

Projection sur l'axe Oy ↑:

1 pt $m_Av_{Ay} + m_Bv_{By} + m_Cv_{Cy} = 0$ (2)

De (1), on aura:

$$v_{Cx} = (m_tv - m_Av_{Ax} - m_Bv_{Bx})/m_C = [(0.1)(0.5) - (0.02)(-1.5) - (0.03)(-0.5)(cos60)]/0.05 = 1.75\ m/s$$ 1 pt

De (2), on aura:

$$v_{Cy} = (-m_Av_{Ay} - m_Bv_{By})/m_C = -(0.03)(-0.5)(sin60)/0.05 = 0.26\ m/s$$ 1 pt

$$\Rightarrow v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = \sqrt{1.75^2 + 0.26^2} = 1.77\ m/s$$ 2 pts

$$\theta_C = tan^{-1}(v_{Cy}/v_{Cx})tan^{-1}(0.26/1.75) = 8°$$ 1 pt

1 pt

b) Non, parce qu'une partie de l'énergie cinétique initiale est consommé pour les 3 balles se collent ensemble durant la collision.

4 pts (1 pt chacun)

$$\boldsymbol{\Delta E_c} = 1/2m_t v^2 - 1/2m_A v_A^2 - 1/2m_B v_B^2 - 1/2m_C v_C^2$$

$$= 1/2[(0.1)(0.5)^2 - (0.02)(1.5)^2 - (0.03)(0.5)^2 - (0.05)(1.77)^2] = \boldsymbol{-0.092\,J}.$$ 1 pt

$\boldsymbol{\Delta E_c \neq 0}$; ce qui confirme que la collision n'est pas élastique.

Problème IV (16 Points)

1 pt

a) $\boldsymbol{I_{structure}} = \boldsymbol{I_{sphere}} + I_{tige} =$

$$I_{structure} = \left[\frac{2}{5}MR^2 + M(3R)^2\right] + \left[\left(\frac{M}{2}\right)\frac{(2R)^2}{12} + (M/2)R^2\right] = MR^2\left(\frac{2}{5} + 9 + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{151}{15}MR^2$$ 1 pt

2 pts 2 pts

b) Il y a une conservation de l'énergie mécanique entre la position initiale (horizontale) et la position finale (verticale) :

$$\Delta E_m = 0 \Rightarrow E_{m_{initial}} = E_{m_{final}} \Rightarrow$$ 2 pts

2 pts On prend la position horizontale comme étant la position de référence du système (sphère-tige) qui est au repos initialement, alors l'énergie mécanique initiale est nulle ($E_{m,i} = 0$). Donc, l'énergie mécanique finale du système est aussi nulle. Alors :

3 pts (1 pt chacun) $$\frac{1}{2}I_{structure}\omega^2 - Mg(3R) - (M/2)g(R) = \frac{151}{30}MR^2\omega^2 - \frac{7}{2}MgR = 0$$ 2 pts

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{105}{151}g/R}$. 1 pt

Problème V (20 Points)

Solution:

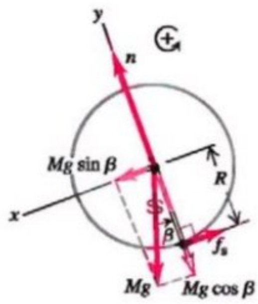
2 pts

a) La force de frottement est **statique** car c'est le cas d'un roulement sans glissement. Le poids et la réaction normale n'ont pas de moment dynamique mais la composante du poids ($Mgsin\beta$) (parallèle au plan incliné) agit sur la balle pour qu'elle glisse (mouvement de translation) vers le bas du plan. Alors, la 1ère tendance est la translation vers le bas du plan incliné alors la force de frottement statique empêche cette tendance pour un roulement sans glissement donc elle est dirigée vers le haut du plan incliné. 2 pts

b)

Appliquons la 2ème loi de Newton relative à la translation, on aura :

$$Mgsin\beta - f_s = Ma$$ 2 pts



Appliquons la 2ème loi de Newton relative à la rotation, on aura:

$$f_s R = I\alpha$$ 2 pts

2 pts $$a = R\alpha$$

$$f_s = I a/R = (2/5)(MR^2)a/R$$

$\Rightarrow f_s = (2/5)Ma$ 2 pts

$\Rightarrow Mgsin\beta - (2/5)Ma = Ma$

$\Rightarrow \boldsymbol{a = \frac{5}{7} g sin\beta}$ 2 pts

$\Rightarrow \boldsymbol{f_s = (2/7) Mgsin\beta}$ 2 pts

c) 1ère justification : La tendance de mouvement est déterminée par les forces agissantes sur l'objet étudié et non pas par le sens de la vitesse alors le fait que les forces agissantes sont les mêmes (Durant la montée ou la descente sur le plan incliné) alors le sens de la force de frottement garde le même sens vers le haut du plan incliné. 4 pts

<u>Problème VI (16 Points)</u>

<u>Solution:</u>

a) Durant la collision, il n'y a pas de moment dynamique externe (moment net de force est nul) alors il y a une conservation du moment cinétique (ou angulaire) du système (tige-balle). Notons que la tige était initialement au repos alors son moment cinétique est nulle juste avant la collision. 2 pts

$$(\vec{L}_{avant/pivot})_{tige+balle} = (\vec{L}_{après/pivot})_{tige+balle} =>$$

$$(\vec{L}_{tige/pivot} + \vec{L}_{balle/pivot})_{avant} = (\vec{L}_{tige/pivot} + \vec{L}_{balle/pivot})_{après}$$

$$mv_0 d = -mvd + I_{/pivot}\omega$$ 6 pts (2 pts chacun)

Le moment d'inertie de la tige autour du pivot O est :

2 pts $$I_{/pivot} = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3} = (9)(4)/3 = 12\ kgm^2$$

2 pts $$\omega = (mv_0 d + mvd)/I = (3)(1.5)(16)/12 = \boldsymbol{6\ rad/s}$$ 1 pt

b) Durant la collision, il y a de la force de réaction du pivot à l'extrémité de la tige. Cette force est considérée comme une force extérieure sur le système (tige-balle) alors pas de conservation de la quantité de mouvement durant la collision. $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \neq 0\ alors\ \vec{P}\ n'estpas\ constante.$ 3 pts

Université Libanaise
Faculté des Sciences I
Département de Physique & Électronique

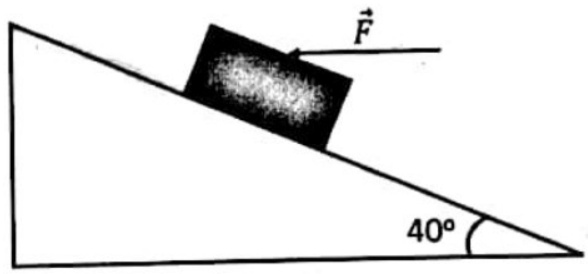
Cours : Phys 1100 (Mécanique)
Final 2020-2021, 2ème session
15-09-2021 (90 minutes)

On donne :

1. Le moment d'inertie d'une sphère pleine (de masse m et de rayon R), par rapport à un axe passant par son centre de masse est : $I_{sphère/CM} = \frac{2}{5}mR^2$.
2. Le moment d'inertie d'un cerceau (de masse m et de rayon R), par rapport à un axe lui est perpendiculaire en son centre de masse : $I_{cerceau/CM} = mR^2$.
3. Le moment d'inertie d'une tige homogène (de masse m et de longueur L), par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par son centre de masse est : $I_{tige/CM} = \frac{1}{12}mL^2$.
4. $g = 10$ m/s²

Problème I (20 Points)

Une boîte pesant 500 N est poussée vers le haut d'un plan incliné rugueux (avec frottement) sous l'action d'une force horizontale $\vec{F}$. Le plan est incliné d'un angle de 40° avec l'horizontale. Le module de la force $\vec{F}$ est de 1000 N, et il est suffisant pour déplacer la boîte vers le haut à une vitesse constante.

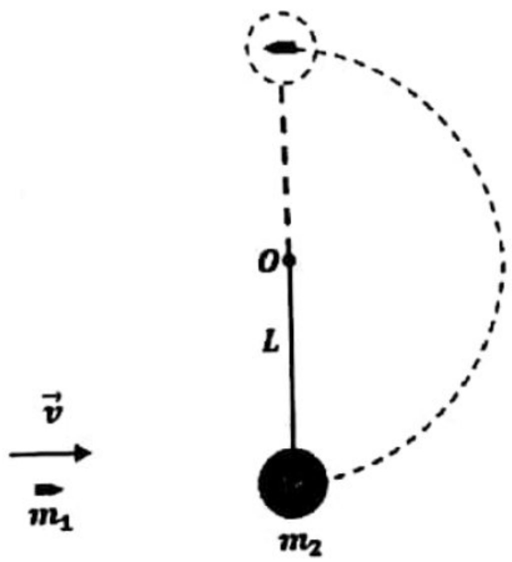


a) Tracer le bilan des forces exercées sur la boîte.
b) Quel est le coefficient de frottement cinétique μ_c entre la boîte et le plan incliné ?

Problème II (25 Points)

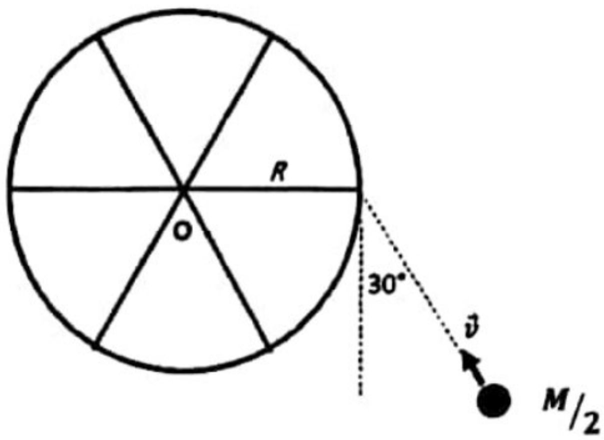
Une balle de masse m_1 est tirée avec une vitesse v vers une boule de masse m_2 d'un pendule balistique (initialement au repos) sachant que $m_2 = 9m_1$. La boule est attachée à l'extrémité d'une tige rigide assez légère (de masse négligeable) de longueur L qui peut tourner autour de l'autre extrémité O. La balle s'incruste dans la boule et elles tournent ensemble autour de O.

a) Trouver la vitesse V du système (balle-boule), en fonction de v, ***juste après la collision***.
b) Quelles sont les valeurs minimales de V et de v, en fonction de g et L, de sorte que le système (balle-boule) fasse un tour complet ?



Problème III (27 Points)

Une roue est formée d'un cerceau de rayon R et de masse $2M$, et de trois tiges chacune de longueur $2R$ et de masse M. La roue, initialement au repos, étant dans un plan *horizontal* peut tourner autour d'un axe lui est perpendiculaire en son centre O. Une boule de masse $M/2$ et de rayon négligeable est lancée avec une vitesse $\vec{v}$ vers la circonférence de la roue suivant une direction faisant un angle de 30° avec la verticale comme le montre la figure ci-contre. Après la collision, la boule se colle sur le cerceau et le système (boule-roue) tourne ensemble.



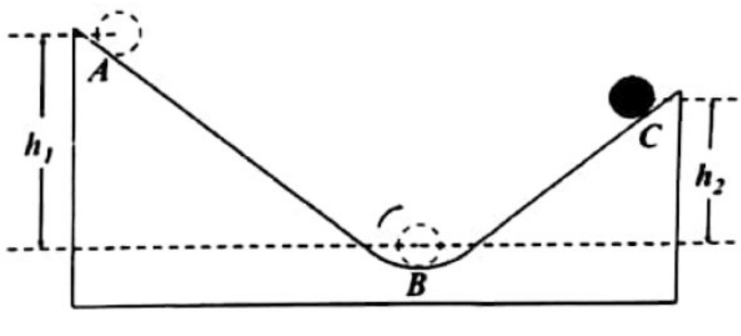
a) Montrer que le moment d'inertie de la roue par rapport à O est : $I_{roue/O} = 3MR^2$

b) Calculer, en fonction de v et R, la vitesse angulaire ω (module et direction) du système (boule-roue) juste après la collision.

c) En raison du frottement constant de la roue avec l'axe, le système (boule-roue) s'arrête après avoir effectué 12 tours. Déterminer, en fonction de v et R, l'expression de l'accélération angulaire α (module et direction) du système.

Problème IV (28 Points)

Une sphère pleine, initialement au repos, de masse M et de rayon R roule sans glissement à partir d'une hauteur h_1 vers le bas d'une piste du côté gauche (de A à B). La sphère remonte ensuite la surface lisse du côté droit de la piste (de B à C) jusqu'à atteindre une hauteur h_2 où elle s'arrête momentanément, voir la figure ci-dessous



a) Trouver la vitesse linéaire v_{CM} du centre de masse de la sphère au point B le plus bas de la piste en fonction de h_1.

b) Trouver h_2 en fonction de h_1.

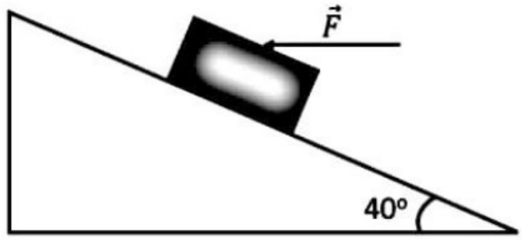
c) Si le côté gauche de la piste était lisse, est-ce que la sphère tournerait-elle ? Justifier brièvement. Que devient, dans ce cas, la nouvelle relation entre h_2 et h_1.

BONNE CHANCE

Université Libanaise	**Cours : Phys 1100 (Mécanique)**
Faculté des Sciences I	**Final 2020-2021, 2ème session**
Département de Physique & Électronique	**15-09-2021 (90 minutes)**

Problème I (20 Points)

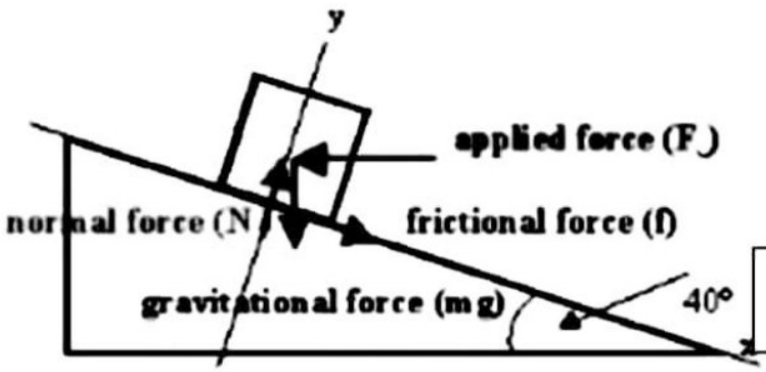
Une boîte pesant 500 N est poussée vers le haut d'un plan incliné rugueux (avec frottement) sous l'action d'une force horizontale $\vec{F}$. Le plan est incliné d'un angle de 40° avec l'horizontale. Le module de la force $\vec{F}$ est de 1000 N, et il est suffisant pour déplacer la boîte vers le haut à une vitesse constante.



a) Tracer le bilan des forces exercées sur la boîte.
b) Quel est le coefficient de frottement cinétique $\boldsymbol{\mu_c}$ entre la boîte et le plan incliné ?

Solution:

a)



6 Pts (2 pts pour chaque force, sauf F).

b) Appliquons la 2ème loi de Newton:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{f} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a} = \vec{0} \quad \boxed{\text{3 Pts}}$$

Projection sur l'axe des x:

$$F\cos(40) - f_c - mg\sin(40) = 0 \quad \boxed{\text{2 Pts}}$$

Projection sur l'axe des y :

$$N - F\sin(40) - mg\cos(40) = 0 \quad \boxed{\text{2 Pts}}$$

$$\Rightarrow f_c = F\cos(40) - mg\sin(40) = 1000\cos(40) - 500\sin(40) = 444{,}6\ N \quad \boxed{\text{2 Pts}}$$

$$N = F\sin(40) + mg\cos(40) = 1000\sin(40) + 500\cos(40) = 1025{,}8\ N \quad \boxed{\text{2 Pts}}$$

Mais $f_c = \mu_c N$ $\boxed{\text{1 Pt}}$

$$\Rightarrow \mu_c = \frac{f}{N} = \frac{444{,}6}{1025{,}8} = 0{,}43 \quad \boxed{\text{2 Pts}}$$

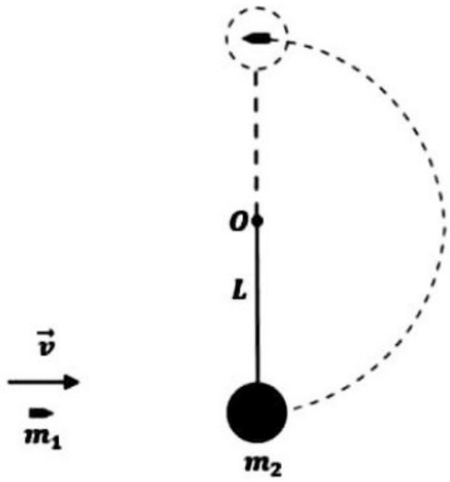
Dr. Nargess CHOUEIB

Problème II (25 Points)

Une balle de masse $\boldsymbol{m_1}$ est tirée avec une vitesse $\boldsymbol{v}$ vers une boule de masse $\boldsymbol{m_2}$ d'un pendule balistique (initialement au repos) sachant que $\boldsymbol{m_2 = 9m_1}$. La boule est attachée à l'extrémité d'une tige rigide assez légère (de masse négligeable) de longueur $\boldsymbol{L}$ qui peut tourner autour de l'autre extrémité O. La balle s'incruste dans la boule et elles tournent ensemble autour de O.

a) Trouver la vitesse $\boldsymbol{V}$ du système (balle-boule), en fonction de $\boldsymbol{v}$, ***juste après la collision***.

b) Quelles sont les valeurs minimales de $\boldsymbol{V}$ et de $\boldsymbol{v}$, en fonction de $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{L}$, de sorte que le système (balle-boule) fasse un tour complet ?



Solution: 2 Pts

a) Durant la collision, il y a une conservation de quantité de mouvement parce qu'il n'y a pas des forces extérieures. Alors :

$m_1v = (m_1 + m_2)V$ 3 Pts

$\Rightarrow \boldsymbol{V} = m_1v/(m_1 + m_2) = v/(1 + m_2/m_1) = v/(1 + 9m_1/m_1) = v/10$ 4 Pts

b) Appliquons le théorème de conservation d'énergie mécanique du système (balle-boule-terre) entre les 2 positions "top" et "bas" du tour et on prend la position la plus basse comme référence:

$E_{mi} = E_{mf}$, parce qu'il n'y a pas des forces extérieures agissant sur le système (balle-boule-terre).

$$=> E_{ci} + E_{Pgi} = E_{cf} + E_{Pgf}$$ 4 Pts

2 Pts $E_{cf} = E_{Pgi} = 0$ parce que la valeur minimale de V correspond à zéro au sommet 'top' du tour.

$E_{ci} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2$ et $E_{pgf} = (m_1 + m_2)g2L$ 2 Pts chaque expression

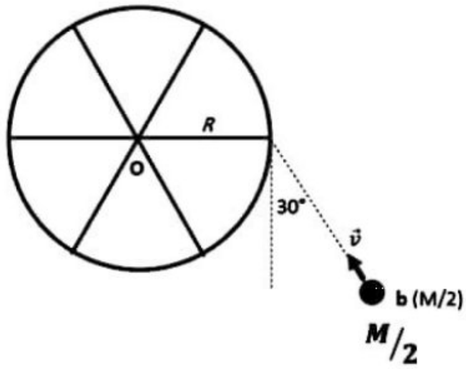
$\Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = (m_1 + m_2)g2L \Rightarrow V = 2\sqrt{gL}$ et $v = 10V = 20\sqrt{gL}$.

3 Pts 3 Pts

Dr. Nargess CHOUEIB

Problème III (27 Points)

Une roue est formée d'un cerceau de rayon $\boldsymbol{R}$ et de masse $\boldsymbol{2M}$, et de trois tiges chacune de longueur $\boldsymbol{2R}$ et de masse $\boldsymbol{M}$. La roue, initialement au repos, étant dans un plan *horizontal* peut tourner autour d'un axe lui est perpendiculaire en son centre $\boldsymbol{O}$. Une boule de masse $\boldsymbol{M/2}$ et de rayon négligeable est lancée avec une vitesse $\vec{v}$ vers la circonférence de la roue suivant une direction faisant un angle de 30° avec la verticale comme le montre la figure ci-contre. Après la collision, la boule se colle sur le cerceau et le système (boule-roue) tourne ensemble.



a) Montrer que le moment d'inertie de la roue par rapport à O est : $\boldsymbol{I_{roue/O} = 3MR^2}$
b) Calculer, en fonction de $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{R}$, la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ (module et direction) du système (boule-roue) juste après la collision.
c) En raison du frottement constant de la roue avec l'axe, le système (boule-roue) s'arrête après avoir effectué 12 tours. Déterminer, en fonction de $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{R}$, l'expression de l'accélération angulaire $\boldsymbol{\alpha}$ (module et direction) du système.

Solution:

a) $I_w = I_H + 3I_R$ 3 Pts

$= (2M)R^2 + 3\frac{M(2R)^2}{12} = 3MR^2$ 4 Pts

b) Durant la collision, le moment dynamique net est nul alors on applique la conservation de moment cinétique :

$$\vec{L_i} = \vec{L_f} \quad \text{2 Pts}$$

$$\vec{r} \times \frac{M}{2}\vec{v} + \vec{0} = (I_w + I_b)\vec{\omega} \quad \text{3 Pts; 1pt chaque expression}$$

$$R\frac{M}{2}v\sin(120)\,\vec{k} = (3MR^2 + \frac{M}{2}R^2)\vec{\omega} \quad \text{2 Pts}$$

$$\vec{\omega} = \frac{\sqrt{3}\,v}{14\,R}\,\vec{k}\ (\text{sens anti} - \text{horaire}) \quad \text{2 Pts}$$

2 Pts 1 Pt 1 Pt

c) $\omega_f^2 - \omega_i^2 = 2\Delta\theta.\alpha$ with $\omega_f = 0$; $\omega_i = \frac{\sqrt{3}\,v}{14\,R}$ *and* $\Delta\theta = 12\,.\,2\pi = 24\,\pi\ rad$

$-\frac{3v^2}{196\,R^2} = 48\pi\,.\,\alpha$ 2 Pts

$\Rightarrow\ \alpha = -\frac{v^2}{3136\,\pi\,R^2} \Rightarrow |\alpha| = \frac{v^2}{3136\,\pi\,R^2}$, *(sens horaire)* 1 Pt

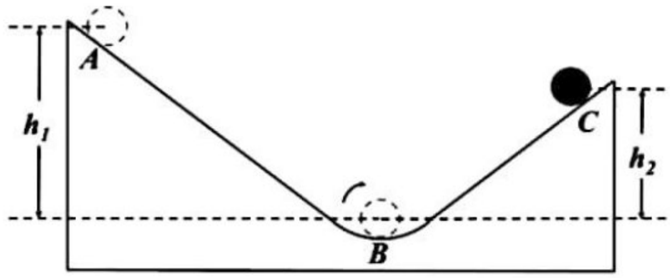
2 Pts

Dr. Nargess CHOUEIB

Problème IV (28 Points)

Une sphère pleine, initialement au repos, de masse *M* et de rayon *R* roule sans glissement à partir d'une hauteur $\boldsymbol{h_1}$ vers le bas d'une piste du côté gauche (de *A* à *B*). La sphère remonte ensuite la surface lisse du côté droit de la piste (de *B* à *C*) jusqu'à atteindre une hauteur $\boldsymbol{h_2}$ où elle s'arrête momentanément, voir la figure ci-dessous

a) Trouver la vitesse linéaire $\boldsymbol{v_{CM}}$ du centre de masse de la sphère au point B le plus bas de la piste en fonction de $\boldsymbol{h_1}$.
b) Trouver $\boldsymbol{h_2}$ en fonction de $\boldsymbol{h_1}$.
c) Si le côté gauche de la piste était lisse, est-ce que la sphère tournerait-t-elle ? Justifier brièvement. Que devient, dans ce cas, la nouvelle relation entre $\boldsymbol{h_2}$ et $\boldsymbol{h_1}$.



Solution:

a) Appliquons le théorème de conservation d'énergie entre le pt de départ A et le pt B et prenons le niveau de bas comme niveau de référence d'énergie potentielle gravitationnelle. Dans ce cas-là, on a roulement sans glissement, alors:

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_{pg} = 0 \quad \boxed{2\text{ Pts}}$$

$$E_{c_i} = 0 \; et \; E_{pgf} = 0 \quad \boxed{2\text{ Pts}}$$

$$\boxed{1\text{ Pt}} \qquad E_{cf} = E_{pgi} \quad \boxed{2\text{ Pts}}$$

on a $I = \frac{2}{5}MR^2$ et $\omega = \frac{v}{R}$ pour le roulement sans glissement.

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}(\frac{2}{5}MR^2)\frac{v^2}{R^2} = Mgh_1 \quad \boxed{3\text{ Pts}}$$

on aura:

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh_1} \quad \boxed{2\text{ Pts}}$$

b) Appliquons le théorème de conservation d'énergie mécanique entre le pt B et le pt C et prenons le niveau de bas comme niveau de référence d'énergie potentielle gravitationnelle. Dans ce cas-là, on n'a pas de roulement sans glissement mais c'est le cas de glissement 'mouvement de translation' autrement dit la vitesse angulaire ne change pas.

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_{pg} = 0 \quad \boxed{\text{2 Pts}}$$

$$E_{c_f} = 0 \; et \; E_{pgi} = 0 \quad \boxed{\text{2 Pts}}$$

$$E_{c_i} = E_{pgf} \quad \boxed{\text{2 Pts}}$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 = Mgh_2 \quad \boxed{\text{4 Pts}}$$

$$h_2 = \frac{v^2}{2g} = \frac{\frac{10}{7}gh_1}{2g} = \frac{5}{7}h_1 . \quad \boxed{\text{2 Pts}}$$

c) S'il n'y a pas de frottement sur la partie gauche de la piste alors la sphère ne vas pas tourner parce que le moment dynamique net sur la sphère est nul (les moments de la force gravitationnelle et de la force normale du plan sont nuls) alors la sphère va glisser. $\boxed{\text{2 Pts}}$
Alors, on peut appliquer le théorème de conservation d'énergie mécanique don la sphère va atteindre la même hauteur de départ, donc $\boldsymbol{h_2 = h_1}$. $\boxed{\text{2 Pts}}$

Université Libanaise
Faculté des Sciences I
Département de Physique & Electronique

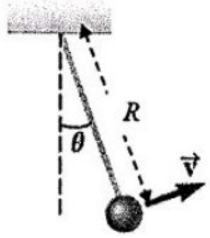
Cours : Phys 1100 (Mécanique)
Final 2019-2020
19-02-2020 (2 heures)

(Prendre $g = 10\ m/s^2$)

Problème I (12 Points)

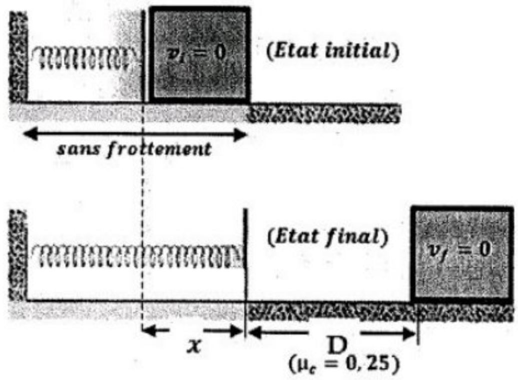
Une corde, fixée à l'une de ses extrémités, porte à son autre extrémité un petit objet de masse $m = 0,5kg$. L'objet se balance en décrivant un arc de cercle vertical de rayon $R = 2\ m$, comme le montre la figure ci-contre. Lorsque $\theta = 20°$, la vitesse de l'objet est $v = 8\ m/s$. **A cet instant** :

a) Tracer le diagramme des forces appliquées sur cet objet.
b) Trouver le **module** de la tension $\vec{T}$ de la corde.
c) Déterminer les **modules** des composantes tangentielle et normale de l'accélération ($\vec{a_t}$ et $\vec{a_n}$). Déduire le **module** et la **direction** de l'accélération totale $\vec{a}$.
d) La réponse de la question (c) change-t-elle si l'objet se balance dans le sens opposé c.à.d. vers sa position la plus basse? Justifier votre réponse brièvement.



Problème II (10 Points)

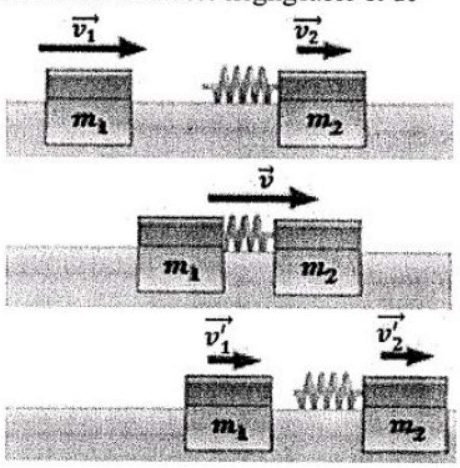
Dans la figure ci-contre, un bloc de masse $m = 3,5\ kg$ est accéléré à partir du repos par un ressort **comprimé** initialement de constante $k = 640\ N/m$. Le bloc quitte le ressort quand celui-ci est à sa position d'équilibre et ce bloc se déplace ensuite sur une surface horizontale rugueuse de coefficient de frottement cinétique $\mu_c = 0,25$. La force de frottement arrête le bloc après avoir parcouru une distance $D = 7,8\ m$.



a) Trouver l'augmentation de l'énergie thermique ΔE_{th} du système bloc-terre.
b) Quelle est l'énergie cinétique maximale du bloc ?
c) Déterminer la longueur de compression initiale x du ressort.

Problème III (12 Points)

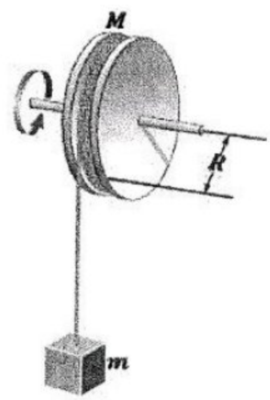
Deux planeurs de masses m_1 et m_2 sont mis en mouvement vers la droite sur une piste aérienne horizontale avec deux vitesses respectives différentes $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$. Un ressort de masse négligeable et de constante k est attaché à la partie arrière du second planeur. Quand m_1 rattrape m_2, il entre en collision avec le ressort attaché à m_2, le ressort se comprime d'une distance x_{max} et l'ensemble se déplace à une vitesse $\vec{v}$. Ensuite les planeurs se séparent à nouveau et ils se déplacent respectivement avec deux nouvelles vitesses $\vec{v_1'}$ et $\vec{v_2'}$ (voir figure adjacente). Trouver en fonction de v_1, v_2, m_1, m_2 et k :



a) Le module de la vitesse v du système (planeurs - ressort) à la compression maximale.
b) La compression maximale x_{max},
c) La vitesse de chaque planeur $\vec{v_1'}$ et $\vec{v_2'}$ juste après que m_1 ait perdu contact avec le ressort après la collision.

Problème IV (12 Points)

Un objet de masse $m = 5,1\ kg$ est attaché à l'extrémité libre d'une corde de masse négligeable enroulée autour d'un disque de rayon $R = 0,25\ m$ et de masse $M = 3\ kg$. Le disque est libre de tourner dans un plan vertical autour d'un axe horizontal passant par son centre de masse comme le montre la figure ci-contre. L'objet suspendu est lâché, sans vitesse initiale, à partir d'une hauteur $h = 6\ m$ au-dessus du sol.



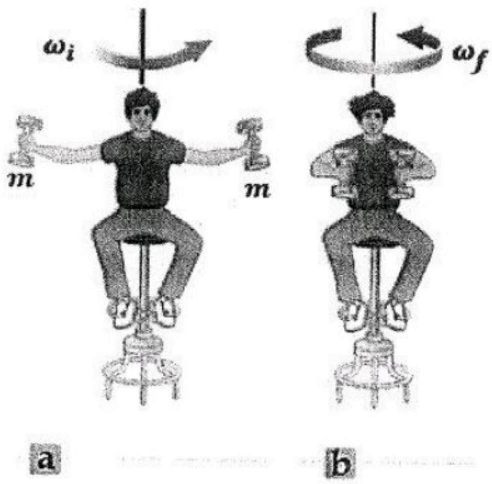
a) Montrer que le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe de rotation horizontal est $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$.

b) Déterminer la tension $\vec{T}$ de la corde et l'accélération $\vec{a}$ de l'objet.

c) Trouver la vitesse $\vec{v}$ de l'objet à son arrivée au sol.

Problème V (12 Points)

Un élevé est assis sur un tabouret tournant librement en tenant deux haltères de même masse $m = 3\ kg$. Quand ses bras sont étendus horizontalement (Figure (a)), les haltères sont à une distance $d = 1\ m$ de l'axe de rotation et l'étudiant tourne avec une vitesse angulaire $\omega_i = 0,75\ rad/s$. Le moment d'inertie du corps de l'étudiant avec le tabouret est $I_0 = 3kg.m^2$ supposé constant. L'élevé ramène les haltères horizontalement vers l'intérieur de sa poitrine, de sorte que ces haltères soient à une distance $d' = 0,3\ m$ de l'axe de rotation, alors il tourne à une nouvelle vitesse angulaire ω_f (Figure (b)).



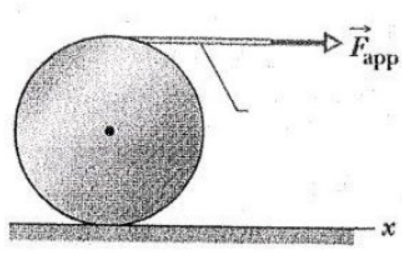
a) Trouver la nouvelle vitesse angulaire ω_f du système.

b) Trouver l'énergie cinétique E_c de rotation du système dans les deux cas (a) et (b).

c) Déduire de la question (b) si le système gagne ou perd de l'énergie durant l'action de l'étudiant et expliquer **brièvement** l'origine de ce gain ou cette perte.

Problème VI (12 Points)

Dans la figure ci-contre, une force horizontale constante $\vec{F}_{app}$, de module $12\ N$ est appliquée à un cylindre homogène solide par une corde enroulée autour de ce cylindre. La masse du cylindre est $m = 10\ kg$, son rayon est $R = 0,1\ m$, et le cylindre ***roule régulièrement*** sur une surface horizontale.



a) Quelle est le module de l'accélération du centre de masse a_1 du cylindre ?

b) En utilisant la notation des vecteurs unitaires, exprimer la force de frottement $\vec{f}$ et son orientation.

c) Partant du repos, déterminer la vitesse du centre de masse v_{CM} du cylindre après un roulement d'une distance $D = 2\ m$. Déduire l'accélération du centre de masse a_2 et la comparer à a_1 obtenue dans la question (a).

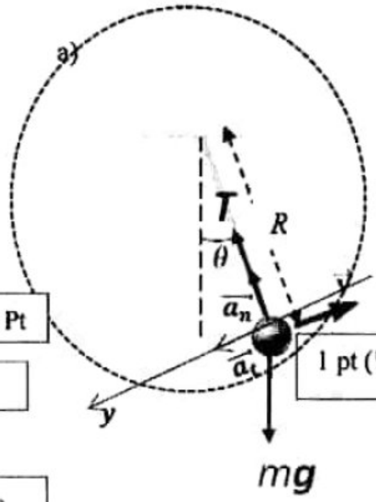
(On donne le moment d'inertie du cylindre : $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$)

Bon courage

Université Libanaise
Faculté des Sciences I
Département de Physique & d'Electronique

Phys 1100 (Mechanique)
Final 2019-2020
19-02-2020 (2 heures)

Problème 1 (12 pts):



1 pt (½ pt chacune)

b) Appliquons la 2ème loi de Newton sur la balle:

$$\vec{T} + \overrightarrow{mg} = m\vec{a} \quad (1)$$ 1 Pt

Projection sur ox (comme $\vec{a}_n$) :

$$T - mg\cos\theta = ma_n$$ 1 Pt

Où : $a_n = \frac{v^2}{R}$ 1/2 Pt

1 Pt $T = m\frac{v^2}{R} + mg\cos\theta = 0{,}5 * \frac{8^2}{2} + 0{,}5 * 10 * \cos 20° = 20{,}7\ N$ 1/2 Pt

c) L'accélération normale : $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{8^2}{2} = 32\ m/s^2$ 1Pt

L'accélération tangentielle : Projection de (1) sur oy :

$$mg * \sin\theta = ma_t \Rightarrow a_t = 10 * \sin 20 = 3{,}4\ m/s^2$$ 2 Pts

L'accélération totale :

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{32^2 + 3{,}4^2} = 32{,}2\ m/s^2$$ 2 Pts

$$\beta = (\overrightarrow{ox}, \vec{a}) = \tan^{-1}\left(\frac{a_t}{a_n}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3{,}4}{32}\right) = 6{,}1°$$ 1 Pt

d) Si l'objet se balance vers le bas, les résultats de la partie (c) restent le même car les directions des forces appliquées restent les mêmes alors l'accélération résultante ne dépend pas de la direction du mvt. 1 Pt

Problem II (10 Points)

a) l'augmentation de l'énergie thermique : $\Delta E_{th} = f_c * D = \mu_c N * D = \mu_c mg * D = (0{,}25)(3{,}5)(10)(7{,}8) = 68{,}25$ Joules

1 Pt 1 Pt 1 Pt

b) L'énergie cinétique du bloc est maximale lorsque la vitesse du bloc est maximale c'est-à-dire au moment où le bloc quitte le ressort.
Système: bloc + ressort + terre est isolé, on applique le principe d'énergie entre les deux états où le ressort est relâché et après avoir parcourue une distance D : $\Delta E_m + \Delta E_{th} = 0$

$$\Delta E_C + \Delta E_{Pg} + \Delta E_{th} = 0 \Rightarrow E_{Cf} - E_{Ci} = -\Delta E_{th} \Rightarrow E_{Ci} \equiv E_{Cmax} = 68{,}25 \text{ Joules}$$

1 Pt 1 Pt 1 Pt

c) Système: bloc + ressort + terre est isolé, on applique la conservation de l'énergie mécanique

$$\Rightarrow \Delta E_C + \Delta E_{Pg} + \Delta E_{Pe} = 0 \Rightarrow (E_{Cf} - E_{Ci}) + (E_{Pef} - E_{Pei}) = 0 \Rightarrow E_{Pei} = E_{Cf} \Rightarrow$$

1 Pt 1 Pt

$$\frac{1}{2}k\,x^2 = E_{Cmax} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2*68.25}{640}} = 0{,}461\ m = 46{,}1cm$$ 1 Pt

1 Pt

Dr. Nargess CHOUEIB

Problem III (12 Points)

a) le système (m_1+m_2+ressort) est isolé parce qu'il n'y a pas de force extérieure agissant sur lui durant la collision alors on applique la conservation de la quantité de mouvement sur ce système.

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad \boxed{\text{1 Pt}}$$

Projection sur ox →:

$$\boxed{\text{1 Pt}}\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v \Rightarrow v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad \boxed{\text{1 Pt}}$$

b) On applique la de conservation de l'énergie mécanique sur le système isolé (m_1, m_1 et ressort) Durant la descente de m_1 de sa position initiale au fond du bol: $\Delta E_m = 0$ $\boxed{\text{1 Pt}}$

$$(E_C + E_{Pe})_i = (E_C + E_{Pe})_f \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}k\, x_{max}^2 \Rightarrow \boxed{\text{2 Pts (1/2 sur chacune)}}$$

Remplaçons v par sa valeur trouvée dansla partie (a)

$$x_{max} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2)}{k(m_1 + m_2)}} = (v_1 - v_2)\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} \quad \boxed{\text{2 Pts}}$$

c) On applique la conservation de la quantité de mouvement sur ce système entre l'état initial et l'état final :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (1) \quad \boxed{\text{1 Pt}}$$

On applique la conservation de l'énergie cinétique du système entre l'état initial et l'état final :

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \quad (2) \quad \boxed{\text{1 Pt}}$$

$$(1): m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)$$
$$(2): m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$$

$\frac{(2)}{(1)}$,… on aura à la fin :

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}v_1 + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)}v_2 \quad \boxed{\text{1 Pt}}$$

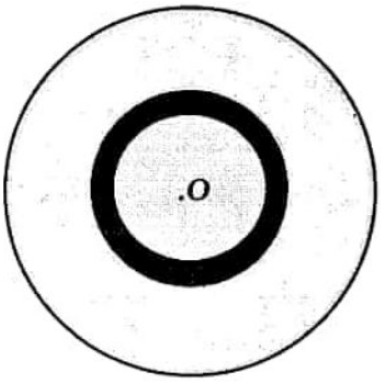
$$v_2' = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)}v_1 + \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}v_2 \quad \boxed{\text{1 Pt}}$$

Dr. Nargess CHOUEIB

Problème IV (12 Points)

a) Divisons le disque en des petits anneaux d'épaisseur dr et et rayon r :

$$dm = \sigma dS = \sigma(2\pi r dr) = \frac{M}{\pi R^2}(2\pi r dr)$$ 1 Pt



le moment d'inertie I du disque par rapport à son centre de masse est

1 Pt $I = \int_0^R r^2 dm = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R r^2(2\pi r)dr = \frac{2M}{R^2} * \frac{R^4}{4} = M\frac{R^2}{2}$ 1 Pt

b) D'après la 2ème loi de Newton de translation sur l'objet:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

Projection sur l'axe ox : $mg - T = ma$ (1) 1 Pt

D'après la 2ème loi de Newton de rotation sur la poulie: $\sum \vec{\mu}_{ext} = I\vec{\alpha}$

$$|\overrightarrow{OD} \wedge \vec{T}| = TR = I\alpha = M\frac{R^2}{2}\alpha \quad (2)$$ 1 Pt

Au point de contact du disque corde $a_t = a = R\alpha$ (3) 1 Pt

On aura : $a = \frac{g}{1+\frac{M}{2m}} = \frac{10}{1+\frac{3}{2*10}} = 7,73\ m/s^2$ 1 Pt

1 Pt

1 Pt $T = \frac{mMg}{M+2m} = \frac{Ma}{2} = \frac{3*7.73}{2} = 11,6\ N$ 1 Pt

c) Appliquons la cinématique de translation lorsque l'accélération est constante:

1 Pt $v_f^2 - v_0^2 = 2\,a\,h \Rightarrow v_f = \sqrt{2\,a\,h} = \sqrt{2*7,73*6} = 9,63\ m/s$ 1 Pt

Autre méthode : $\Delta E_m = 0$ car le système (**poulie, corde, masse et terre**) est isolé

1 Pt 1 Pt

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{\frac{5,1*10*6}{\frac{5,1}{2}+\frac{3}{4}}} = 9,63 m/s$$

Problème V (12 Points)

a) Le moment cinétique (ou moment angulaire) est conservé car le moment dynamique net agissant sur le système (l'étudiant, le tabouret et les haltères) est nul durant la collision :

$\vec{L}_i = \vec{L}_f \Rightarrow I_{sys,i}\,\vec{\omega}_i = I_{sys,f}\,\vec{\omega}_f$ (1) 1 pt

1 Pt $I_{sys,i} = I_{haltères} + I_{étudiant} = 2*md^2 + I_0 = 2*3*1^2 + 3 = 9\ kg.m^2$ 1 Pt

$I_{sys,f} \cong I_{haltères} + I_{étudiant} = 2*md'^2 + I_0 = 2*3*0,3^2 + 3 = 3,54\ kg.m^2$ 1 Pt

1 Pt

(1) $I_{sys,i}\,\vec{\omega}_i = I_{sys,f}\,\vec{\omega}_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_{sys,i}\,\omega_i}{I_{sys,f}} = \frac{9}{3,54}*0,75 = 1,91\ rad/s$ 1 Pt

Dr. Nargess CHOUEIB

b) $E_{ci} = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 = \frac{1}{2}\, 9 * 0.75^2 = 2{,}53\ Joules$ 2 Pts

$E_{cf} = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 = \frac{1}{2}\, 3{,}54 * 1{,}91^2 = 6{,}44\ Joules$ 2 Pts

1 Pt c) il y a un gain d'énergie cinétique durant cette action car $\Delta E_c > 0$, l'origine de ce gain est la force exercée par l'étudiant sur les haltères afin d'éviter leur tendance de se diriger loin de l'axe de rotation. 1 Pt

Problème VI (12 Points)

a) la translation se fait vers la droite et la rotation se fait dans le sens horaire

D'après la 2ème loi de Newton de translation:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_1$$

Projection sur l'axe ox : $F_{app} + f = ma_1$ (1) 1 Pt

D'après la 2ème loi de Newton de rotation: $\sum \vec{\mu}_{ext} = I\vec{\alpha}$

$$\left|\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F_{app}}\right| - \left|\overrightarrow{OP'} \wedge \vec{f}\right| = F_{app}.R - f.R = I\alpha \quad (2)$$ 1 Pt

Le roulement est sans glissement (roulement régulier) $a_1 = R\alpha$ (3) 1 Pt

remplaçons (2 et 3) dans (1) on aura: $a_1 = \frac{4\,F_{app}}{3m} = \frac{4*12}{3*10} = 1{,}6\ m/s^2$ 1 Pt

b) De l'équation (1) : $f = ma_1 - F_{app} = 10 * 1{,}6 - 12 = 4\ N \Rightarrow \vec{f} = 4\vec{i}$ 2 Pts

c) C'est le cas d'un corps qui roule sans glissement sur un plan horizontal.
Durant le mouvement du centre de masse du cylindre de distance D, le point d'application de la force F_{app} se déplace de 2D grâce au roulement sans glissement (rotation +translation). Appliquons le principe de l'énergie mécanique Durant la descente d'une distance d :

$$\Delta E_m = W_{ext} \Rightarrow \Delta E_C + \Delta E_{Pg} = W_{F_{app}}$$ 1 Pt

$$\frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = (W_{F_{app}})_{rotation} + (W_{F_{app}})_{translation\ de\ C.M.} = \mu_{F_{app}}.\Delta\theta + F.D = F.R.\frac{D}{R} + F.D$$ 1 ½ Pts

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} mR^2\right)\frac{v_{CM}^2}{R^2} + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = F_{app}.2D$$ 1 Pt

$$\Rightarrow \frac{1}{4} v_{CM}^2 + \frac{1}{2} v_{CM}^2 = \frac{F_{app}.2D}{m} \Rightarrow v_{CM} = \sqrt{\frac{8*F_{app}*D}{3m}} = 2{,}53\ m/s$$ 1 Pt

Appliquons la cinématique de translation lorsque l'accélération est constante:

1 Pt $$v_{CM}^2 - v_0^2 = 2\,a_2\,D \Rightarrow a_2 = \frac{v_{CM}^2}{2*D} = 1{,}6\ m/s^2$$ 1/2 Pt

On peut déduire : $a_1 = a_2$ comme prévue

Dr. Nargess CHOUEIB

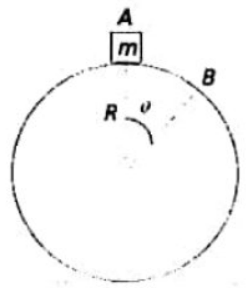
Université Libanaise
Faculté des Sciences I
Département de Phys. et Elect.

P1100 (Mécanique)
Final 2019-2020 (2eme session)
16-09-2020 (75 minutes)

Prendre g =10 m/s²

Problème I (15 Points)

Un bloc de masse m et de taille négligeable, initialement au repos, commence à glisser du haut (point A) d'une sphère fixe de rayon R ayant une surface lisse. θ est l'angle entre une position arbitraire du bloc et sa position verticale.



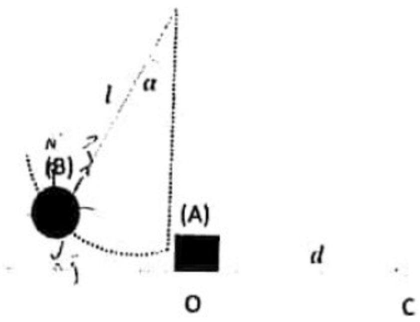
a) Tracer le bilan des forces exercées sur le bloc quand celui-ci est au point B.

b) En utilisant le principe de conservation de l'énergie mécanique, trouver en fonction de $R, g, et\ \theta$ la vitesse du bloc v_B tant que celui-ci est en contact avec la sphère.

c) Trouver la valeur de l'angle auquel le bloc perd le contact avec la sphère.

Problème II (20 Points)

Une petite boule (B) de masse m est attachée à l'extrémité d'une corde inextensible de longueur l, dont l'autre extrémité est fixée au plafond. Initialement au repos, la boule (B) est lâchée à un angle α par rapport à la verticale, et à son passage par sa position la plus basse (point O) elle entre en collision avec un bloc (A) de même masse m au repos. Après la collision, le bloc (A) se déplace sur une surface horizontale (OC) de longueur d et de coefficient de frottement cinétique μ_c. (On néglige la résistance de l'air).



a) Déterminer la vitesse de la boule (B) juste avant la collision, v_{1B}, en fonction de $g, l,$ et α.

b) Déterminer la vitesse du bloc (A) juste après la collision, v_{1A}, en fonction de $g, l,$ et α.

c) Tracer le bilan des forces exercées sur le bloc (A) durant son mouvement entre O et C.

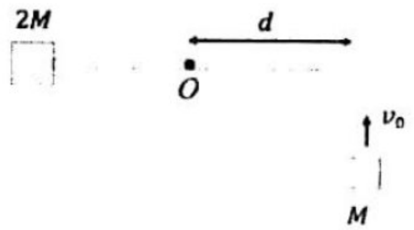
d) Trouver la vitesse du bloc (A) au point C, v_{2A}, en fonction de g, l, d, α et μ_c.

Problème III (15 Points)

Un bloc de masse $2M$ et de taille négligeable est attaché à l'extrémité d'une tige rigide de longueur $2d$ et de masse négligeable. Le système (2M-tige), au repos sur une table horizontale lisse, peut pivoter sans frottement autour d'un axe passant par son centre (O), comme le montre la figure ci-dessous (vue du dessus). Un deuxième bloc de masse M, en mouvement avec une vitesse v_0, entre en collision avec l'extrémité libre de la tige et s'y colle.

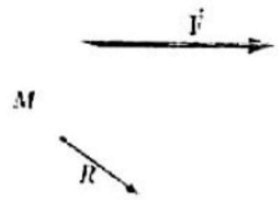
a) Quelle est la vitesse angulaire ω_s du système "blocs-tige", juste après la collision ?

b) Déterminer la modification de l'énergie mécanique du système "blocs-tige" due à la collision. Est-ce que le système gagne ou perd de l'énergie ?



Problème VI (20 Points)

Un dévidoir de masse M et de rayon R se déroule sur une table sous l'action d'une force constante $\vec{F}$ comme le montre la figure adjacente. On suppose que le dévidoir est un cylindre plein homogène qui ne glisse pas sur la table et que le fil est de masse négligeable.



a) Déterminer la nature et la direction de la force de frottement (f) entre le dévidoir et la table ? Justifier votre réponse.

b) Trouver l'accélération du centre de masse du dévidoir a_{CM}.

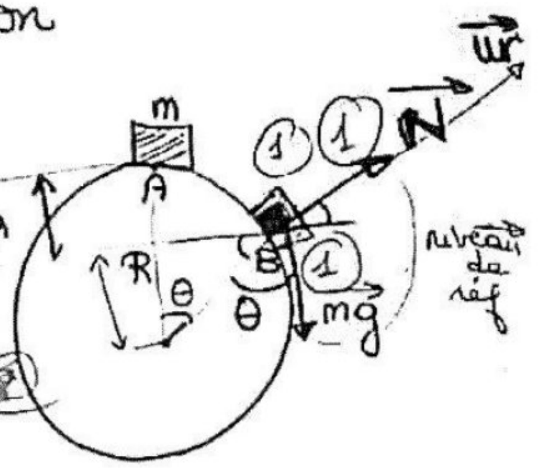
c) Déduire l'expression de la force de frottement (f).

d) Quelle est la vitesse du centre de masse du dévidoir v_{CM} après avoir roulé une distance d ?

(Donnée : $I_{cylinder,CM} = 1/2\ MR^2$)

P1100 – 2ème session

pb I — 15 pts



2) pas de f.n.c. $\Rightarrow$

$\Delta E_m = 0$ (conservation d'Em) 1

1 $E_{m_A} = E_{m_B} \Rightarrow \cancel{E_{C_A}} + E_{Pg_A} = E_{C_B} + \cancel{E_{Pg_B}}$ 2

B : niveau de Réf

$\cancel{m} g h_A = \frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2 . g . h_A}$

$h_A = R - R\cos\theta = R(1 - \cos\theta)$

$\Rightarrow v_B = \sqrt{2g.R(1-\cos\theta)}$ 2

3) $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{mg} + \vec{N} = -m \frac{v_B^2}{R} \vec{u_r}$

proj sur $\vec{u_r}$: $mg\cos(\pi - \theta) + N = -m\frac{v_B^2}{R}$.

$-mg\cos\theta + N = m\frac{v_B^2}{R} \Rightarrow N = -m\frac{v_B^2}{R} + mg\cos\theta$.

il perd contact avec la sphère : $N = 0$ 1

$\Rightarrow -\frac{\cancel{m} v_B^2}{R} + \cancel{m} g\cos\theta = 0 \Rightarrow \frac{v_B^2}{R} = \cos\theta . g \Rightarrow 2\cancel{g}.\cancel{R}(1-\cos\theta) = \cancel{R}\cancel{g}.\cos\theta$

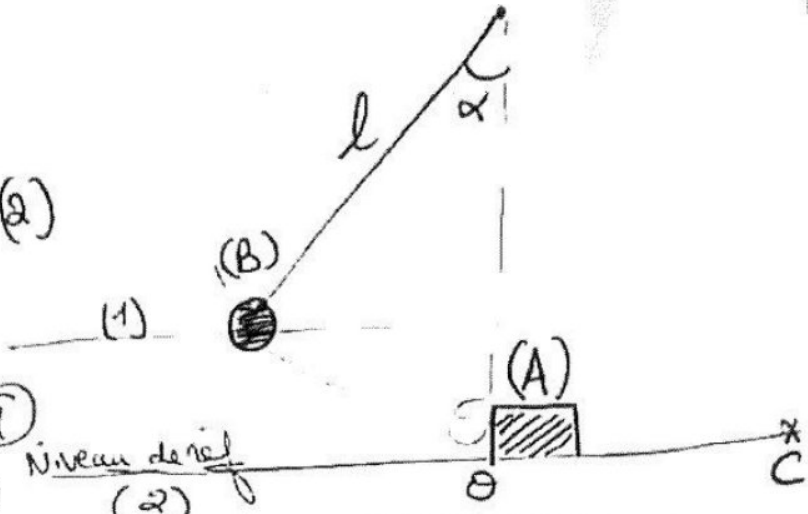
$\Rightarrow$ ~~2Rg = 2Rg cos θ = Rg cos θ ⇒~~

$2 - 2\cos\theta = \cos\theta \Rightarrow 2 = 3\cos\theta \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{2}{3}} \Rightarrow$

pb II

6) $v_B = 0\,m/s$.

a) $\Delta E_m = 0$ entre (1) et (2)



$Em_{(1)} = Em_{2}$ en θ. (1)

$\cancel{Ec_{(1)}}^{\,0} + Epg_{(1)} = Ec_{(2)} + \cancel{Epg_{(2)}}^{\,0}$

$$\left.\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2} m v_{1B}^2 \\ h &= \ell(1-\cos\alpha) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{v_{1B} = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)}} \ (1)$$

4) b) $\Delta E_m = 0$ (durant la collision) ; $\Delta E_{pg} = 0 \Rightarrow$

$\underbrace{\cancel{Ec_{(A)}}^{\,0} + E_{c(B)}}_{\text{juste avant}} = \underbrace{E_{c(A)} + E_{c(B)}}_{\text{juste après}}$

$\frac{1}{2} m v_{1B}^2 = \frac{1}{2} m v_{2A}^2 + \frac{1}{2} m v_{2B}^2$?

$\boxed{v_{1B}^2 = v_{2A}^2 + v_{2Bx}^2}$ (1)

4pts

Conservation de quantité de mvt.

$\Rightarrow (P_A + P_B)_1 = (P_A + P_B)_2 \Rightarrow \cancel{m}\vec{v}_{1B} + \cancel{m\vec{v}_{1A}}^{\,0} = \cancel{m}\vec{v}_{2B} + \cancel{m}\vec{v}_{2A}$

projection $v_{1B} = v_{2Bx} + v_{2A} \Rightarrow \boxed{v_{2Bx} = v_{1B} - v_{2A}}$ (2)

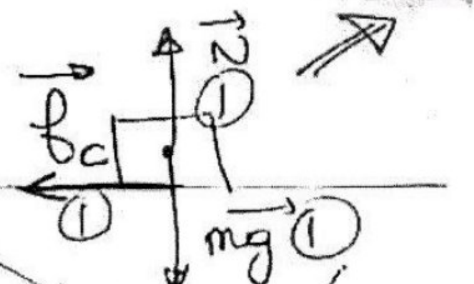
(2) → (1) $v_{1B}^2 = v_{2A}^2 + (v_{1B} - v_{2A})^2$

$\cancel{v_{1B}^2} = v_{2A}^2 + \cancel{v_{1B}^2} - 2v_{1B}\cdot v_{2A} + v_{2A}^2$

$2v_{2A}^2 - 2v_{1B}\cdot v_{2A} = 0 \Rightarrow v_{2A}\left[2v_{2A} - 2v_{1B}\right] = 0$

$\Rightarrow \boxed{v_{2A} = v_{1B} = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)}}$

(7) d) $v_{2A} = ?$ (c) → 3



$\Delta E_m + \Delta E_{th} = 0$

ou

$\Delta E_m = W_{f_c} = -f_c \cdot d$ (1)

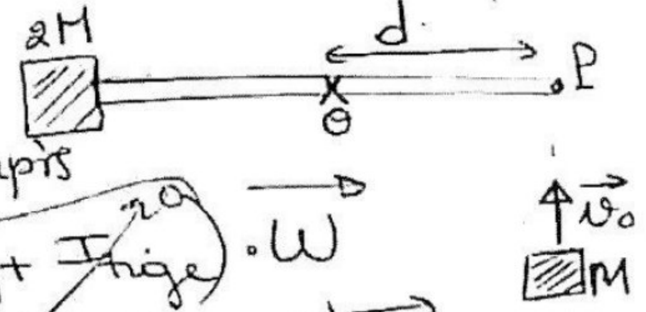
$E_{m_C} - E_{m_A} = -f_c \cdot d = -\mu_c \cdot N \cdot d = -\mu_c \cdot m g \cdot d$ / $\Delta E_{pg} =$

(1) $\frac{1}{2} \cancel{m} v_{2A}^2 - \frac{1}{2} \cancel{m} v_{1A}^2 = \mu_c \cdot \cancel{m} g \cdot d$ (1)

$\frac{1}{2}(v_{2A}^2 - v_{1A}^2) = 2\mu_c \cdot g \cdot d \Rightarrow v_{2A} = \sqrt{2\mu_c \cdot g \cdot d + v_{1A}^2}$ (1)

$\boxed{\sqrt{2gl(1-\cos\theta) + 2\mu_c \cdot g \cdot d} = v_{2A}}$ (1)

pb III → 15 — la — a → 8pts



Conservation du moment cinétique

(1) $\vec{\sigma}_{avant} = \vec{\sigma}_{après}$ ou $\vec{L}_{avant} = \vec{L}_{après}$

(3) chacun $\vec{OP} \wedge M\vec{v}_0 = (I_{2M} + I_M + \cancel{I_{tige}}) \cdot \vec{\omega}$ (2)

$(d \cdot M \cdot v_0 \cdot \sin 90°)\vec{k} = (2M d^2 + M d^2)\vec{\omega}$

$M \cdot d \cdot v_0 \vec{k} = 3 \cdot M \cdot d^2 \cdot \vec{\omega} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = \frac{v_0}{3d}\vec{k}}$ (2)

11 pts

b) $E_{m_{avant}} = E_{m_{bloc}} + E_{m_{tige}}$ (1)

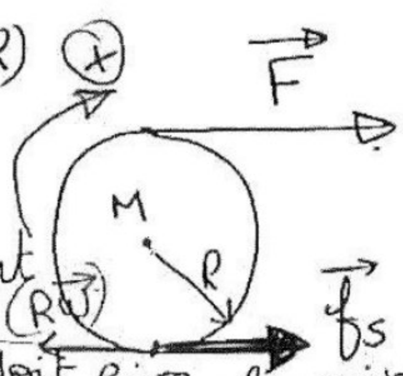
$E_{c_{avant}} = \frac{1}{2} M v_0^2$ (1) ; $E_{c_{après}} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} 3 M d^2 \cdot \frac{v_0^2}{9d^2}$ (1)

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{M v_0^2}{3} = \frac{M v_0^2}{6}$

$E_{c_f} - E_{c_i} = -\frac{1}{3} M v_0^2$ Ec après < Ec avant ⇒ (1) → perte d'Em ⇒ la collision n'est pas élastique

N°, VI → 20pts

Dévidoir : Cylindre plein homogène (M,R)



a) (4) 2pts

* le frottement est statique car le roulement est sans glissement

* pour déterminer le sens de $\vec{f}$, on doit faire le suivant,

pour la translation : $F = Ma \Rightarrow a = \frac{F}{M}$ et $v = a.t \Rightarrow v = \frac{F}{M}.t$ (1)

pour la rotation : $\mathcal{M} = \underbrace{F.R}_{\text{dans ce cas là}} = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{F.R}{I}$

$I_{\text{cylindre plein}} = \frac{1}{2}MR^2$ $\Big\} \Rightarrow \alpha = \frac{2F}{M.R}$

$\Rightarrow$ alors $\omega = \alpha.t = \frac{2F}{M.R}.t$: la vitesse angulaire

Comparons maintenant v avec $R\omega$

$R\omega = R \times \frac{2F}{M.R}.t = \frac{2F}{M}t$ mais de (1) : $v = \frac{F}{M}t$

$\Rightarrow R.\omega > v \Rightarrow$ la 1ère tendance est la Rotation $\Rightarrow$

2pts (la force de frottement s'oppose à cette tendance $\Rightarrow$ $\vec{f_s}$ est vers la droite.

b) (4) pour la translation : (2) $F + f_s = Ma$ (3)

" " Rotation (3) $\mathcal{M} = (F - f_s).R = I\alpha$ (3)

$\Rightarrow F - f_s = \frac{I\alpha}{R}$ et $\alpha = \frac{a}{R}$ (1) $\Rightarrow F - f_s = \frac{1}{2}MR^2 \times \frac{a}{R^2} = \frac{1}{2}Ma$

combinons (2) et (3) $\Rightarrow$ $\boxed{a = \frac{4F}{3M}}$ (1)

c) (3) $F - f_s = \frac{1}{2}Ma \Rightarrow f_s = -\frac{1}{2}Ma + F = -\frac{1}{2} \times M \times \frac{4F}{3M} + F = \frac{F}{3}$ (3)

d) (5) $v_f^2 - v_i^2 = 2.a.d$ (3) $\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{8F.d}{3M}}$ (2) نفس الجواب

ou on applique la conservation d'Em $\Rightarrow \Delta E_m = W_{ext} \Rightarrow$

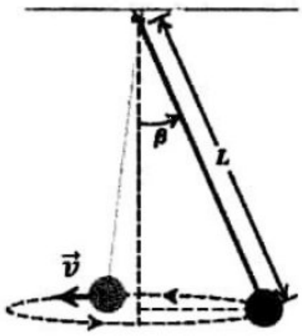
$\frac{1}{2}Mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = F \times 2d \Rightarrow \frac{1}{2}Mv_f^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_f}{R}\right)^2 = 2F.d$

(Take $g = 10$ m/s^2)

Problem I (10 Points)

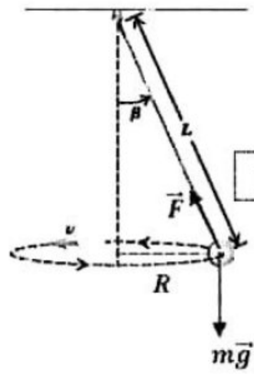
An investor proposes to make a pendulum clock using bob with mass m at the end of a massless thin inextensible wire of length L. The bob moves in a horizontal circle with constant speed v, with the wire making a constant angle β with the vertical direction, as shown in the adjacent figure. (Neglect air resistance)

a) Sketch the force diagram on the bob.
b) Find the magnitude of the tension (F) in the wire and the period T of revolution in terms of L and β.
c) What would be F and v in the case of $\beta = 90°$? Is this situation possible? Why?



Solution:

a)



1 Point

b) Apply Newton's law on the bob:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

Projection along radial direction:

1 Point $\quad F\sin\beta = ma_c = m\dfrac{v^2}{R} \quad (1)$

1/2 Point

Where $R = L\sin\beta$

1/2 Point

Projection along the vertical direction:

$$F\cos\beta = mg, \text{so that } F = \frac{mg}{\cos\beta} \quad (2)$$ 1 Point

By dividing (2)/(1) we get:

1 Point $\quad \tan\beta = \dfrac{v^2}{Rg}$, so that $v = \sqrt{Rg\tan\beta} = \sqrt{\dfrac{Lg(\sin\beta)^2}{\cos\beta}}$ $\quad$ 1 Point

1 Point $\quad$ Now $T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi L\sin\beta}{\sqrt{\dfrac{Lg(\sin\beta)^2}{\cos\beta}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}\cos\beta}$ $\quad$ 1 Point

c) If $\beta = 90°$ we get $F = \dfrac{mg}{\cos\beta} \to \infty$ and $v = \sqrt{\dfrac{R}{m}F} \to \infty$

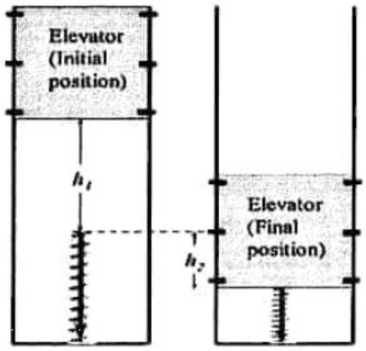
1/2 Point $\quad$ 1/2 Point

This situation is impossible since it is not possible to have an infinite values for F and v. $\quad$ 1 Point

Problem II (10 Points)

An elevator of mass $m = 2000$ kg, initially at rest, falls from a height h_1 after its cable is broken accidently. The bottom of the elevator hits a spring at the bottom of the shaft with a speed $v_1 = 4\ m/s$. The spring is supposed to stop the elevator after compression of $h_2 = 2\ m$. During the motion, a safety clamp applies a constant frictional force to the elevator of $f = 17000\ N$.

a) Find the initial height h_1 of the elevator.
b) Determine the spring constant k of the spring.



Solution:

a) Apply the energy approach while descending a height h_1:

$$\Delta ME = -f_k h_1$$ 1 Point

$$\Delta K + \Delta U = \frac{1}{2}mv^2 - mgh_1 = -f_k h_1$$ 2 Points

So that

1 Point $$h_1 = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{mg - f_k} = \frac{(0.5)(2000)(16)}{(2000)(10) - 17000} = 5.3\ m$$ 1/2 Point

b) Apply the energy approach while descending h_2 and compressing the spring an h_2:

$$\Delta ME = -f_k h_2$$ 1 Point

$$\Delta K + \Delta U = 0 - \frac{1}{2}mv_1^2 - mgh_2 + \frac{1}{2}kh_2^2 = -f_k h_2$$

1 Pt 1 Pt 1 Pt

So that

1 Point $$k = \frac{2}{h_2^2}\left(\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_2 - f_k h_2\right) = \frac{2}{4}[(0.5)(2000)(16) + (2000)(10)(2) - (17000)(2)]$$

$$= 11000\ N/m$$

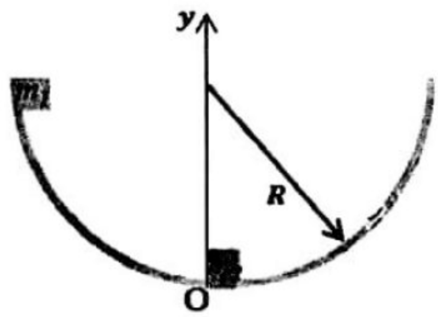
1/2 Point

Problem III (12 Points)

Two identical point masses of mass ($m_1 = m_2 = m$) are placed initially at rest in a smooth hemispherical bowl of radius R, in the positions shown in the adjacent figure. Once the mass m_1 is released it hits the mass m_2 and sticks to it. You can ignore friction between the masses and the surface of the bowl.

a) How high h (in terms of R) above the bottom of the bowl will the masses go after collision?

b) Find the y-component (in terms of R) of the center of mass of the two masses at their initial and final positions. Deduce the loss of energy during the collision in terms of m and R.



Solution:

a) During the collision there is a linear momentum conservation since there is no external force acting at the bottom of the bowl on the system of the two masses. Therefore:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad \boxed{1 \text{ Point}}$$

So that

$$m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2) v_f \quad \boxed{1 \text{ Point}}$$

$$\Rightarrow v_f = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{v_1}{2} \quad \boxed{1 \text{ Point}}$$

Now in order to find v_1 we apply conservation of energy on mass m_1 while descending from the initial position to the bottom of the bowl:

$$\Delta ME = \frac{1}{2} m v_1^2 - 0 - mgR = 0 \quad \boxed{1 \text{ Point}}$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2gR} \quad \boxed{1 \text{ Point}}$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{gR/2} \quad \boxed{1 \text{ Point}}$$

To find now the height h reached by the two masses after the collision we apply conservation of energy:

$$\Delta ME = 0 - \frac{1}{2}(2m) v_f^2 + (2m) g h = 0 \quad \boxed{1 \text{ Point}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{v_f^2}{2g} = \frac{gR/2}{2g} = R/4 \quad \boxed{1 \text{ Point}}$$

b) $$y_{CMi} = \frac{mR + m(0)}{2m} = R/2 \quad \boxed{1 \text{ Point}}$$

$$y_{CMf} = h = R/4 \quad \boxed{1 \text{ Point}}$$

$$\Rightarrow \Delta ME(collision) = (2m)gR/4 - (2m)gR/2 = -mgR/2 \quad \boxed{2 \text{ Points}}$$

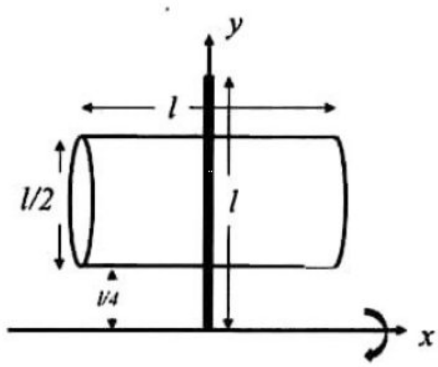
Problem IV (12 Points)

A rigid structure formed of a cylinder (mass $\boldsymbol{M}$ and radius $\boldsymbol{l/4}$) and a thin rod (mass $\boldsymbol{M}$ and length $\boldsymbol{l}$). The rod that is on the y-axis passes by the center of the cylinder. The structure is able to rotate about the x-axis, as shown in the figure below. (Take $\boldsymbol{I_{CM}(rod)} = \frac{1}{12}\boldsymbol{Ml^2}$)

a) Show that the moment of inertia of the cylinder (shown in the figure) about an axis that passes by its center of mass and parallel to x-axis is: $\boldsymbol{Ml^2/32}$.

b) Show that the moment of inertia of the structure about the horizontal x-axis is: $\boldsymbol{59Ml^2/96}$.

c) If this structure is initially at rest in a vertical position, find the angular speed $\boldsymbol{\omega}$ (in terms of $\boldsymbol{l}$) once it rotates $\boldsymbol{180^\circ}$ about x-axis (*i.e.* upside down). Deduce the linear speed (in terms of $\boldsymbol{l}$) of the center of mass $\boldsymbol{v_{CM}}$ of the structure at this new position.



Solution:

a) Divide the cylinder into concentric shells with radius r, thickness dr and length L.

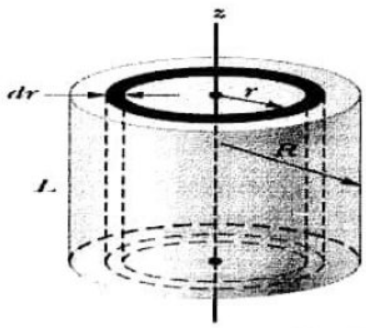
$$dm = \rho dV = \rho(2\pi r L dr)$$ 1 Point

Then for I

$$I = \int_0^R r^2 dm = \rho\int_0^R r^2(2\pi r L)dr = 2\pi\rho L\frac{R^4}{4} = \frac{M}{\pi R^2 L}(2\pi L\frac{R^4}{4}) = M\frac{R^2}{2}$$ 1 Point

Now $R = l/4$, so that

$$I = M\frac{(l/4)^2}{2} = M\frac{l^2}{32}$$ 1 Point



a) $I_{sy} = I_{cy} + I_{rod} = M\frac{l^2}{32} + (M\frac{l^2}{12} + M\frac{l^2}{4}) = \frac{59}{96}Ml^2$ 2 Points

1 Point b) y_{CM} of the structure is $l/2$.

Apply conservation of energy from initial position to final position:

$$\Delta ME = \frac{1}{2}I_{sy}\omega^2 - (2M)g(2y_{CM}) = 0$$

1 Point 1 Point 1 Point

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4Mgl}{I_{sy}}} = \sqrt{\frac{4Mgl}{\frac{59}{96}Ml^2}} = \sqrt{6.5\frac{g}{l}}$$ 1 Point

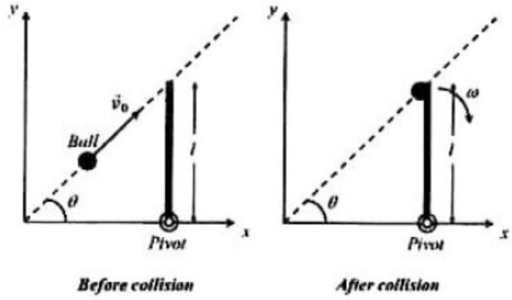
$$\Rightarrow v_{CM} = r\omega = \frac{l}{2}\omega = \sqrt{6.5g\frac{l^2}{4l}} = \sqrt{1.62gl}$$

1 Point 1 Point

Problem V (12 Points)

A rigid rod of mass $\boldsymbol{M} = 5\ kg$ and length $\boldsymbol{l} = 2\ m$ is placed at rest on a frictionless horizontal table and it is able to rotate about a fixed pivot perpendicular to the table, as shown in the figure below (top view). A small ball of mass $\boldsymbol{m} = 20\ g$ that is moving horizontally with a velocity $\vec{v}_0$ ($v_0 = 300\ m/s$) strikes the rod at its free end and sticks to it. The velocity of the ball before collision makes an angle $\boldsymbol{\theta} = 30^o$ with the x-axis, as shown in the figure. The system ball-rod starts to rotate, after the collision, about the fixed pivot with an angular speed $\boldsymbol{\omega}$. (Take $\boldsymbol{I_{CM}(rod)} = \frac{1}{12}\boldsymbol{Ml^2}$)

a) Is the linear momentum of the system conserved during the collision? Justify your answer briefly.
b) Is the mechanical energy of the system conserved during the collision? Justify your answer briefly.
c) Is the angular momentum of the system conserved during the collision? Justify your answer briefly.
d) Find the angular speed $\boldsymbol{\omega}$ just after the collision.
e) If a constant retarding torque ($\boldsymbol{\tau}$) is applied on the system after the collision in order to stop its rotation after completing **10** revolutions, what is the corresponding angular acceleration? Deduce $\boldsymbol{\tau}$.



Solution:

a) The linear momentum is not conserved since there is a reaction from the pivot on the system ball-rod during the collision. This reaction is considered as an external force. $\boxed{\text{1 Point}}$

b) The mechanical energy is not conserved since the collision is inelastic so part of the energy is used to stick the ball to the rod. $\boxed{\text{1 Point}}$

c) The angular momentum is conserved since there is no external torque applied on the system ball-rod. $\boxed{\text{1 Point}}$

d) Since there is a conservation of angular momentum we have:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad \boxed{\text{1 Point}}$$

If we take the clockwise as a positive direction we get:

$$mv_0 l\sin(\pi/2 - \theta) = mv_0 l\cos\theta = I_{sy}\omega \quad \boxed{\text{2 Points}}$$

$$I_{sy} = ml^2 + (\frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4}) = (m + \frac{M}{3})l^2 = (20 + \frac{5000}{3})(4)(10^{-3}) = 6.75\ kg.m^2 \quad \boxed{\text{2 Points}}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{mv_0 l\cos\theta}{(m+\frac{M}{3})l^2} = \frac{(20)(300)\cos(30)}{(20+\frac{5000}{3})(2)} = 1.54\ rad/s \quad \boxed{\text{1 Point}}$$

e) Apply kinematics in rotation when the angular acceleration is constant:

$$\omega_f^2 - \omega^2 = 2\alpha\Delta\theta \quad \boxed{\text{1 Point}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-\omega^2}{2\Delta\theta} = -\frac{(1.54)^2}{2(10\cdot 2\pi)} = -0.019\ rad/s^2 \quad \boxed{\text{1 Point}}$$

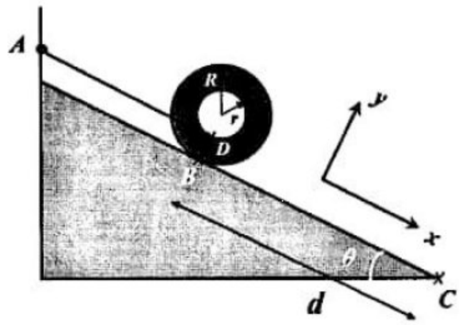
$$\Rightarrow \tau = I\alpha = (6.75)(-0.019) = -0.13\ \text{N.m} \quad \boxed{\text{1 Point}}$$

Problem VI (14 Points)

A yo-yo (mass m, moment of inertia I, inner radius r and outer radius R) is placed on an inclined plane of angle θ. An inextensible and massless cord is wrapped around its inner radius r such that its free end is pinned at point A on the wall of the inclined plane, as shown in the figure below. In the following two **independent** cases the yo-yo is released from rest at point B.

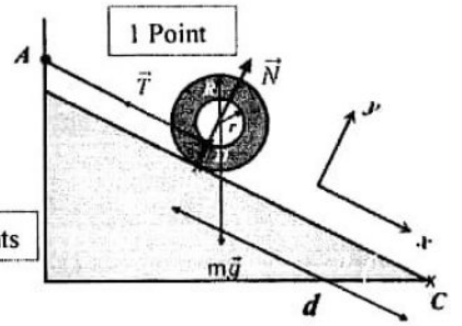
a) ***In the first case***, we assume that the incline is frictionless and the yo-yo rolls smoothly at point D. Sketch the force diagram and find the acceleration of the center of mass (in terms of the given) of the yo-yo using newton's laws for translation and rotation.

b) ***In the second case***, the cord doesn't exist and the incline has a friction. The yo-yo is released from rest at point B and rolls smoothly along the incline. Sketch the force diagram and find the speed of the center of mass v_{CM} (in terms of the given) once the yo-yo reaches the point C by using energy approach. (Take $BC = d$)



Solution:

a) Since there is no friction we can consider the situation as a yo-yo that is rolling on an inclined plane. The force diagram is shown in the adjacent figure.



Apply the Newton's law for translation: $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

Projection along x-axis: $mgsin\theta - T = ma$ (1) 2 Points

Apply Newton's law for rotation: $\sum \vec{\tau}_{ext} = I\vec{\alpha}$

By taking the clockwise as a positive direction we get:

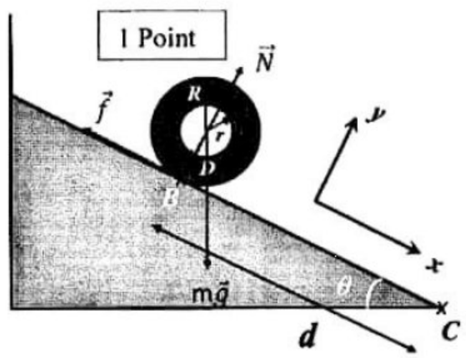
$$Tr = I\alpha$$ 2 Points

Now by applying smooth rolling condition $a = r\alpha$ we get: 1 Point

$$T = I\frac{a}{r^2} \quad (2)$$

Now plug (2) in (1) we get: $a = \frac{gsin\theta}{1+\frac{I}{mr^2}}$ 1 Point

b) Here we have a free solid that is rolling smoothly on an inclined plane. The corresponding force diagram is shown in the adjacent figure.
Apply conservation of energy approach while descending a distance d:



$$\Delta ME = 0$$ 1 Point

3 Points $\Delta ME = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 - mgdsin\theta = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}mv^2 = mgdsin\theta$ 1 Point

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gdsin\theta}{1+\frac{I}{mR^2}}}$ 1 Point

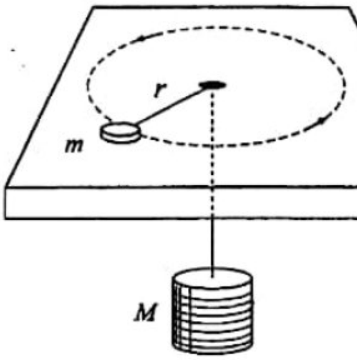
Université Libanaise
Faculté des Sciences I
Département de Physique et Electronique

P 1100 (Mécanique)
Final 2018-2019
21-01-2019 (2 heures)

(Prendre $g = 10\ m/s^2$)

Problème I (10 Points)

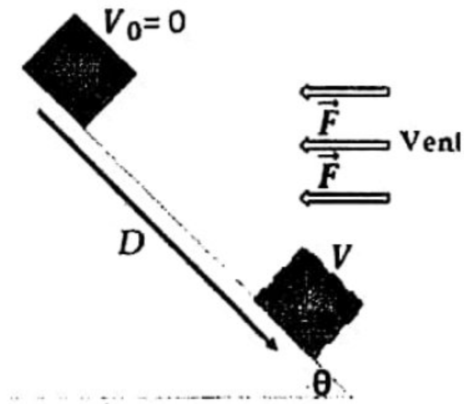
Une pièce de masse m placée sur une table *sans frottement* est attachée à un petit cylindre de masse M par une corde inextensible et de masse négligeable à travers un trou dans la table (voir figure adjacente). La pièce se déplace sur la table en une trajectoire circulaire de rayon r, avec une vitesse linéaire v .



a) Tracer le bilan des forces agissant sur la pièce et le cylindre.
b) Trouver, en fonction de M, m, r et g, la vitesse linéaire v de la pièce d'une façon que le cylindre reste *immobile*.
c) Décrire le mouvement de la pièce et du cylindre lorsque la corde est coupée durant le mouvement.

Problème II (10 Points)

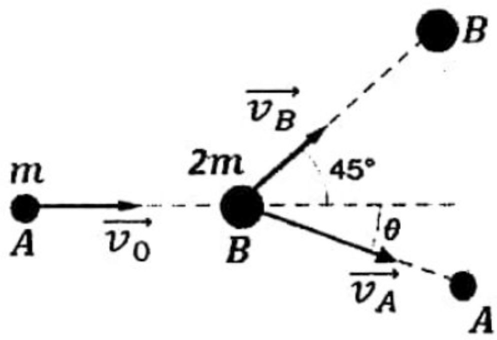
Initialement immobile, un bloc de masse $m = 4\ kg$ glisse vers le bas d'un plan incliné d'un angle $\theta = 45°$ avec l'horizontal. Le coefficient de frottement cinétique entre le bloc et le plan incliné est $\mu_c = 0{,}5$. Durant son glissement, le bloc subit une force du vent $\vec{F}$ horizontale, dirigée vers le plan incliné et de module constant $F = 10\ N$, comme le montre la figure adjacente.



a) Tracer le bilan des forces agissant sur le bloc.
b) Utiliser le principe de l'énergie pour trouver le module de la vitesse V du bloc après avoir glissé d'une distance $D = 1\ m$.
c) Déduire, de la partie (b), l'accélération a du bloc

Problème III (12 Points)

Sur une table horizontale mince, une rondelle A de masse m et de vitesse initiale $\vec{v_0}$ entre en **collision élastique** avec une autre rondelle B de masse $2m$, initialement immobile. Après la collision, les deux rondelles A et B suivent les chemins représentés dans la figure ci-contre.



a) Trouver la valeur de l'angle θ.
b) Pour $v_0 = 1{,}5\ m/s$, calculer les vitesses v_A et v_B .

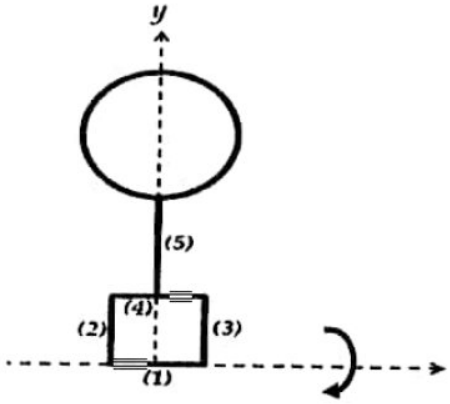
Problème IV (10 Points)

La figure adjacente montre une structure rigide homogène constituée d'un carré formé de quatre tiges minces (1, 2, 3 et 4) (chacune a une masse M et une longueur R), d'une tige mince (5) (de masse M et de longueur $2R$) et d'un anneau (de masse M et de rayon R).

a) Déterminer les coordonnées de centre de masse (*C.M.*) de cette structure par rapport au système xoy donné.

b) Trouver le moment d'inertie de cette structure par rapport à l'axe horizontal x'x.

c) Si cette structure est initialement immobile dans le plan vertical, trouver sa vitesse angulaire ω après avoir tourné d'un angle de 180° autour de l'axe horizontal (c.à.d. position verticale opposée).



__On donne :__

Le moment d'inertie d'anneau de masse M et de rayon R, autour de son diamètre : $I_{anneau/diamètre} = \frac{1}{2}MR^2$

Le moment d'inertie de tige de masse M et de longueur L, autour d'un axe lui y est perpendiculaire en son centre de masse : $I_{tige/CM} = \frac{1}{12}ML^2$

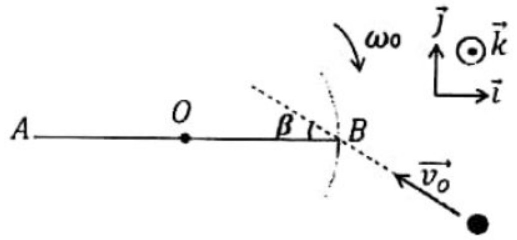
__Problème V (12 Points)__

Un disque homogène, de masse $M = 0,6\,kg$ et de rayon $R = 40\,cm$, tourne dans le sens horaire avec une vitesse angulaire initiale ω_0= 30 rad/s, autour d'un axe perpendiculaire au disque et passant par son centre O. Une balle (supposée ponctuelle) de masse m = 0,1 Kg se déplace avec une vitesse v_0= 200 m/s le long d'une direction faisant un angle $\beta = 30°$ avec le diamètre horizontal AB du disque (voir figure ci-dessous). Juste après la collision entre la balle et le disque, la balle se colle sur la surface de disque et le système (disque + balle) tourne avec une vitesse angulaire ω.

a) Démontrer que le moment d'inertie du disque par rapport à un axe qui lui est perpendiculaire en son centre O soit : $I_{disque/CM} = \frac{1}{2}MR^2$.

b) Trouver le module et la direction du vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ du système juste après la collision.

c) On suppose que le système (disque + balle) est freiné avec une accélération constante. Le système s'arrête après avoir effectué 20 tours. Calculer l'accélération angulaire α du système (en rad/s²). **En déduire** le vecteur moment dynamique qui est responsable de cet arrêt.



__Problème VI (16 Points)__

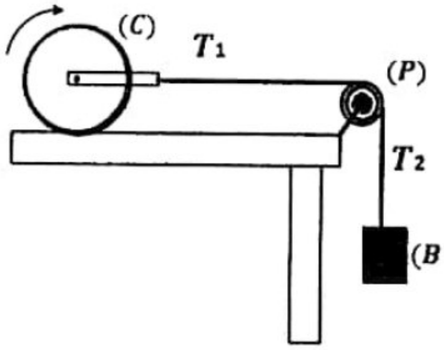
La figure ci-contre représente un cylindre (C), de masse M et de rayon R, attaché à un bloc (B) de masse M, par une corde inextensible et de masse négligeable passant à travers une poulie (P), qui a la forme d'un disque de masse M, de rayon $r = R/2$. Le cylindre (C) *roule sans glissement* sur une table horizontale, et la corde ne glisse pas sur la poulie.

a) Quelle est la nature et la direction de la force de frottement $\vec{f}$ entre le cylindre (C) et la table? justifier ta réponse.

b) Trouver l'expression de l'accélération a en fonction de g.

c) En déduire les tensions T_1, T_2 et f en fonction de M et g.

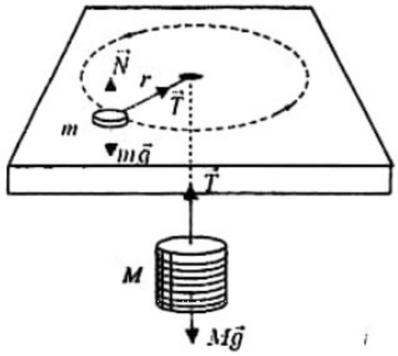
d) Initialement au repos, utiliser le principe de conservation de l'énergie pour trouver la vitesse v du bloc B quand il descend une distance D.



__On donne :__ **Le moment d'inertie du cylindre (et du disque) de masse M et de rayon R, autour d'un axe lui y est perpendiculaire en son centre :** $I_{disque/CM} = I_{cylindre/CM} = \frac{1}{2}MR^2$

(Prendre $g = 10$ m/s^2)

Pb1:



a) les forces agissant sont représentés sur la figure adjacente.

b) Appliquons la 2ème loi de Newton sur la pièce:

$$\overrightarrow{mg} + \vec{T} + \vec{N} = m\overrightarrow{a_n}$$

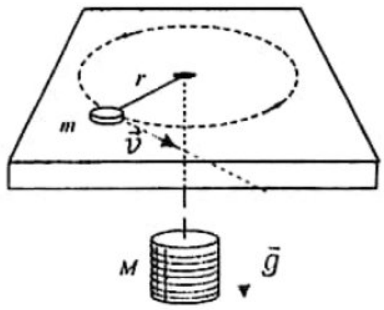
Projection sur l'axe horizontal: $T = mv^2/r$ (1)

Appliquons la 2ème loi de Newton sur le cylindre:

$$\overrightarrow{Mg} + \vec{T} = \vec{0}$$

Projection sur l'axe vertical: $T = Mg$ (2)

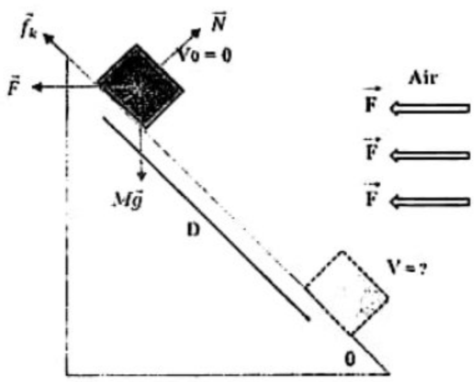
Combinons (1) et (2) : $Mg = mv^2/r$ donc $v = \sqrt{\frac{Mgr}{m}}$



c) Après la coupure de la corde, la force totale sue la pièce deviant zero, donc suite à la 1ère loi de Newton la pièce va continuer son mvt en suivant la vitesse $\vec{v}$ qui avait en ce moment alors il va continuer à se déplacer en ligne droite sur la table avec cette vitesse constante (voir figure).

Le cylindre tombe en chute libre avec accélération g.

Problem II (10 Points)



a) Voir la figure adjacente.

b) Utilisant le principe de l'énergie mécanique:

$$\Delta E_m = W_{ext} - f_c D$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgD\sin\theta = -F\cos\theta\, D - f_c D$$

On a:

$$f_c = \mu_c N = \mu_c(F\sin\theta + mg\cos\theta)$$

donc: $\frac{1}{2}mv^2 - mgD\sin\theta = -F\cos\theta\, D - \mu_c(F\sin\theta + mg\cos\theta)D$

alors: $v = \sqrt{(2/m)(mg\sin\theta\, D - F\cos\theta\, D - \mu_c(F\sin\theta + mg\cos\theta)D)}$

$=\sqrt{(2/4)(4*10\sin 45 - 10\cos 45 - 0{,}5(10\sin 45 + 4*10\cos 45))} = 1{,}33\ m/s$

c) Si le bloc descend une distance x alors sa vitesse est :

$v^2 = \frac{2}{m}(mg\sin\theta - F\cos\theta - \mu_c F\sin\theta - \mu_c mg\cos\theta)x$

En dérivant cette expression on aura:

$$2va = \frac{2}{m}(mg\sin\theta - F\cos\theta - \mu_c F\sin\theta - \mu_c mg\cos\theta)v$$

alors:

$$a = \frac{1}{m}(mg\sin\theta - F\cos\theta - \mu_c F\sin\theta - \mu_c mg\cos\theta) = 0{,}88\ m/s^2$$

2ème méthode:

Tant que toutes les forces agissantes sur le bloc sont constantes alors l'accélération est aussi constante et on peut appliquer:

$v^2 - v_0^2 = 2aD$,

Alors $a = \frac{v^2}{2D} = \frac{1.33^2}{2 \cdot 1} = 0.88\ m/s^2$

Problem III (12 Points)

a) $\sum \vec{F}_{ext} = 0$, Il y a une conservation de quantité de mouvement => $\vec{P}_i = \vec{P}_f$ =>

$$(m_A\overrightarrow{v_A} + m_B\overrightarrow{v_B})_i = (m_A\overrightarrow{v_A} + m_B\overrightarrow{v_B})_f$$

Projection sur Ox →+: $mv_0 = mv_A\cos\theta + 2mv_B\cos(45) \Rightarrow v_0 = v_A\cos\theta + v_B\sqrt{2}$ (1)

Projection sur Oy ↑: $0 = 2mv_B\sin(45) - mv_A\sin\theta \Rightarrow v_B\sqrt{2} = v_A\sin\theta$ (2)

Remplaçons (2) dans (1) $\Rightarrow v_0 = v_A(\cos\theta + \sin\theta) \Rightarrow v_0^2 = v_A^2(\cos\theta + \sin\theta)^2$ (3)

La collision est élastique, donc il y a une conservation de l'énergie cinétique => $Ec_i = Ec_f$

$\frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mv_A^2 + \frac{1}{2}(2m)v_B^2 \Rightarrow v_0^2 = v_A^2 + 2v_B^2$ (4)

Remplaçons (2) dans (4) $\Rightarrow v_0^2 = v_A^2 + v_A^2(\sin\theta)^2 = v_A^2[1 + (\sin\theta)^2]$ (5)

Comparons (3) et (5) on aura : $(\cos\theta + \sin\theta)^2 = [1 + (\sin\theta)^2] \Rightarrow (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 + 2\cos\theta\sin\theta = 1 + (\sin\theta)^2$

$\Rightarrow 1 + 2\cos\theta\sin\theta = 1 + (\sin\theta)^2 \Rightarrow 2\cos\theta = \sin\theta \Rightarrow \tan\theta = 2 \Rightarrow \theta = 63.43°$

b) De (3): $v_A = v_0/(\cos\theta + \sin\theta) = 1{,}5/(\sin(63{,}43) + \cos(63{,}43)) = 1{,}12$ m/s

De (2): $v_B = v_A\sin\theta/\sqrt{2} = 1.12 * \sin(63{,}43)/\sqrt{2} = 0{,}71$ m/s

Problème IV (10 Points)

a) Suite à la symétrie, $x_{CM} = 0$

$$y_{cm} = \frac{M\, y_{CM,anneau} + M\, y_{CM,tige} + 4M\, y_{CM,square}}{6M} = \frac{M(4R) + M(2R) + 4M(\frac{R}{2})}{6M} = \frac{4R}{3}$$

b) Pour l'anneau: $I_{anneau} = I_{CM} + M(4R)^2 = M\frac{R^2}{2} + 16MR^2 = \frac{33}{2}MR^2$

Pour la tige: $I_{tige} = I_{CM} + M(2R)^2 = M\frac{(2R)^2}{12} + 4MR^2 = \frac{13}{3}MR^2$

Pour le carré: $I_{carré} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 + M\frac{R^2}{3} + M\frac{R^2}{3} + MR^2 = \frac{5}{3}MR^2$

Poue la structure complèteFor the whole structure:

$$I_{structure} = I_{anneau} + I_{tige} + I_{carré} = \frac{33}{2}MR^2 + \frac{13}{3}MR^2 + \frac{5}{3}MR^2 = \frac{135}{6}MR^2$$

c) L'énergie mécanique est conservée donc E_{mi}=E_{mf}, donc : Epg_i+ 0 = Epg_f + Ec_f

$$M_{structure}\cdot g\cdot y_{CM} = \frac{1}{2}I\omega^2 - M_{structure}\cdot g\cdot y_{CM}, \text{ donc:}$$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = 6Mg(2y_{CM}), so\ that\ \omega = \sqrt{\frac{24Mgy_{CM}}{I}} = \sqrt{\left(\frac{24Mg\left(^{4R}/_{3}\right)}{\left(^{135MR^2}/_{6}\right)}\right)} = \sqrt{\frac{14.22}{R}}$$

<u>Problème V (12 Points)</u>

a) $I = \int r^2\,dm = \int r^2\,\sigma dA = \int_0^R r^2\,\sigma(2\pi r dr) = 2\pi\sigma\int_0^R r^3\,dr = 2\pi\sigma\frac{R^4}{4}$

Sachant que $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$, alors:

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

b) Durant la collision, le moment net dynamique autour de l'axe de rotation est nul donc le moment cinétique est conservé, alors:

$$\vec{L_i} = \vec{L_f}$$

Le sens horaire est considéré comme étant le sens positif; on aura :

$-mv_0R\sin\alpha + I_{disk}\omega_0 = I_{disk+ball}\omega$ (1)

$I_{disque-balle} = I_{CM} + mR^2 = \frac{MR^2}{2} + mR^2$ (2)

Remplaçons (2) dans (1) on aura: $\omega = \frac{-mv_0R\sin\alpha + I_{disk}\omega_0}{I_{disk+ball}} = \frac{\frac{MR^2\omega_0}{2} - mv_0R\sin\alpha}{\frac{MR^2}{2} + mR^2} = \frac{\omega_0 - 2\frac{mv_0\sin\alpha}{MR}}{1 + \frac{2m}{M}}$

$$\omega = \frac{30 - 2\frac{(0.1)*200*(0.5)}{(0.6)*(0.4)}}{1 + \frac{2*(0.1)}{0.6}} = -40\ rad/s\ (sens\ antihoraire) ou\ \vec{\omega} = 40\vec{k}\ rad/s$$

c) $\Delta\theta = 20 * 2\pi = 40\pi\ rad$

L'accélération angulaire est constante, on peut appliquer:

$$\omega_f^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$$

Ici $\omega_f = 0$ and $\omega_0 = -40\ rad/s$

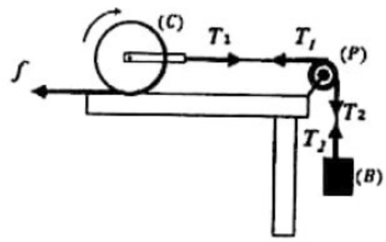
Donc $\alpha = -\frac{\omega_0^2}{2\Delta\theta} = -\frac{1600}{2(-40\pi)} = 6.37\frac{rad}{s^2}$ $(sens\ horaire)$ ou $\vec{\alpha} = -6.37\vec{k}\ \frac{rad}{s^2}$

Le moment dynamique net est:

$$\tau = I\alpha = \left(\frac{MR^2}{2} + mR^2\right)\alpha = 0.064 * 6.37 = 0.41\ N.m\ (sens\ horaire)\ or\ \vec{\tau} = -0.41\vec{k}\ N.m$$

Problème VI (16 Points)

a) Le frottement est statique $\vec{f_s}$ car le cylinder roule sans glissement. Il est dirigé vers la gauche tant que la tendance de translation est vers la droite.



b) Appliquons la 2ème loi de Newton de translation:

Projection sur l'axe des x vers la droite :

$$Cylindre: T_1 - f_s = Ma \quad (1)$$

$$Bloc\ B: T_2 - Mg = -Ma, \qquad donc\ \ T_2 = Mg - Ma \quad (2)$$

Appliquons la 2ème loi de Newton de rotation: (le sens horaire est positif car le même sens de rotation du cylindre)

$$Cylindre: f_s R = I_c\alpha_c = \ I_c\frac{a}{R} = \frac{M}{2}R^2\frac{a}{R} = \frac{MaR}{2} \Rightarrow f = \frac{Ma}{2} \qquad (3)$$

$$Poulie: (T_2 - T_1)\frac{R}{2} = I_p\alpha_p = I_p\frac{a}{R/2} = \frac{M\left(\frac{R^2}{4}\right)}{2} * \frac{a}{\frac{R}{2}} = \frac{Ma}{4}R \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{Ma}{2} \qquad (4)$$

Remplaçons (3) dans (1) on aura:

$$T_1 - \frac{Ma}{2} = Ma\ \ so\ T_1 = \frac{3}{2}Ma \qquad (5)$$

(2) - (5) : $Mg - Ma - \frac{3}{2}Ma = Mg - \frac{5}{2}Ma \qquad (6)$

Comparons (6) et (4) on aura: $Mg - \frac{5}{2}Ma = \frac{Ma}{2}, et\ Mg = 3Ma,$ donc: $a = \frac{g}{3}$

c) De (5) on aura: $T_1 = \frac{3}{2}Ma = \frac{Mg}{2}$

De (4) on aura $T_2 = T_1 + \frac{Ma}{2} = \frac{3}{2}Ma + \frac{Ma}{2} = 2Ma = 2\frac{Mg}{3}$

De (3) on aura: $f_s = \frac{Ma}{2} = \frac{Mg}{6}$

d) Utilisant la loi de conservation d'énergie, on aura:

$$\Delta Em = \frac{1}{2}I_c\omega_c^2 + \frac{1}{2}I_p\omega_p^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}Mv_B^2 - MgD = 0$$

Substituons ω_c par $v_{cm,c}/R$ et ω_p *by* $v_{t,p}/(R/2)$ et utilisant le fait que $v = v_{cm,c} = v_{t,p} = v_B$ on aura:

(ici $v_{cm,c}$ est la vitesse de centre de masse du cylinder et $v_{t,p}$ est la vitesse tangentielle de la poulie)

$\frac{1}{2}[(MR^2)/2]\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}[\frac{\frac{MR^2}{4}}{2}]\frac{v^2}{R^2/4} + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = MgD$

Simplifions, on aura: $v^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1\right) = 2gD$

Alors $v = \sqrt{\frac{2gD}{3}}$

__Autre méthode__: on considère le bloc B comme système alors la tension T_2 devient une force extérieure appliquée sur ce bloc. Donc ,

$$\Delta Em = \frac{1}{2}Mv_B^2 - MgD = -T_2D = -\frac{2}{3}MgD$$

$$\frac{1}{2}Mv_B^2 = \frac{1}{3}MgD$$

$$v_B = v = \sqrt{\frac{2gD}{3}}$$

Université Libanaise
Faculté des Sciences I
Département de Physique et Electronique

P 1100 (Mécanique)
Final 2018-2019 - 2
04-09-2019 (2 heures)

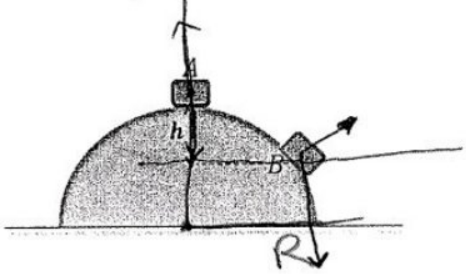
(Prendre $g = 10\ m/s^2$)

Problème I (10 Points)

Un bloc de masse m est placé au point A sur une piste semi-circulaire *sans frottement* de rayon R. Après une très légère poussée ($V_0 = 0$), le bloc commence à glisser vers le bas de la piste. Au point B, le bloc perd le contact avec la piste. Soit h la distance verticale entre A et B (voir figure).

a) Trouver h en fonction de R.

b) Déterminer les accélérations normale et tangentielle du bloc au point B. En déduire l'accélération nette.



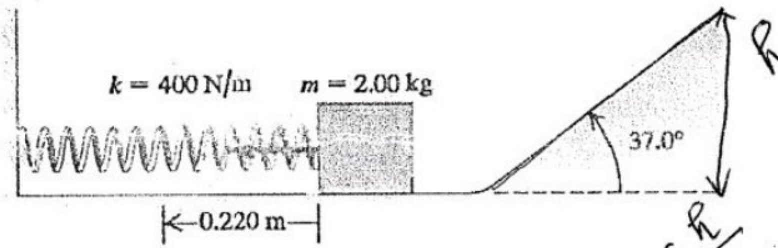
Problème II (10 Points)

Un bloc de masse $m = 2\ kg$ est poussé contre un ressort horizontal de masse négligeable et de constante de raideur $k = 400\ N/m$ jusqu'à ce que celui-ci soit comprimé d'une distance $x = 0{,}22\ m$. Lorsque le bloc est lâché, il se déplace sur une surface horizontale sans frottement et il monte sur un plan incliné d'un angle de 37° et sans frottement, voir figure. On néglige la résistance de l'air. **Utiliser le principe de conservation de l'énergie mécanique pour déterminer :**

a) La vitesse V_b du bloc en se déplaçant sur la surface horizontale après avoir quitté le ressort.

b) La distance d parcourue par le bloc sur le plan incliné jusqu'à ce qu'il s'arrête momentanément.

c) Si le plan incliné est rugueux (il existe une force de frottement), le nombre d'oscillations aller-retour du bloc augmente-t-il, diminue-t-il ou reste-t-il le même ? justifier brièvement ta réponse.



$\sin\theta = \frac{h}{d}$

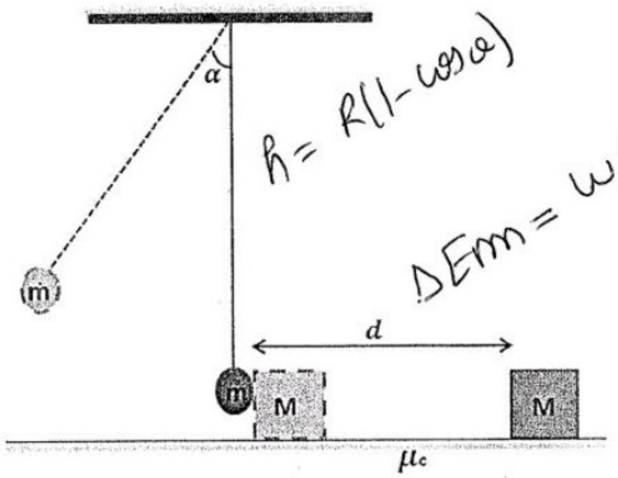
Problème III (12 Points)

Une boule d'acier de masse $m = 1\ kg$ est attachée à l'extrémité d'une corde inextensible de longueur $L = 1\ m$, dont l'autre extrémité de ce ressort est fixée au plafond. On relâche la boule d'un angle α avec la verticale. Au bas de sa trajectoire, la boule entre en *collision élastique* avec un bloc d'acier de masse $M = 3\ kg$, immobile sur une surface horizontale de coefficient de frottement cinétique $\mu_C = 0{,}2$, comme le montre la figure ci-contre. Après la collision, le bloc se déplace d'une distance $d = 1\ m$ avant de s'arrêter. Déterminer :

a) La vitesse du bloc v_{2f} juste après la collision.

b) La vitesse de la boule v_{1f} juste après la collision ainsi que sa vitesse v_{1i} juste avant la collision.

c) L'angle α.

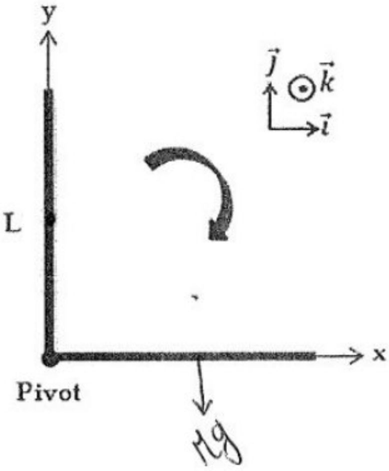


$h = R(1-\cos\alpha)$

$\Delta E_m = W_{fext}$

Problème IV (12 Points)

La figure adjacente montre une tige uniforme de longueur L et de masse M pouvant tourner librement autour d'un pivot situé à l'une de ses extrémités. La tige était immobile dans sa position verticale, mais après une très légère poussée elle commence à tourner. **Dans sa position horizontale,** déterminer :

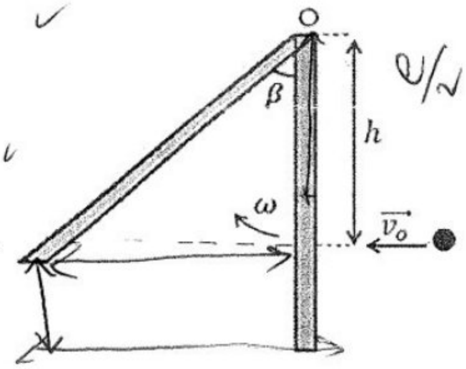


a) La vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ de la tige en utilisant le principe de l'énergie mécanique.
b) L'accélération angulaire $\boldsymbol{\alpha}$ de la tige en utilisant la deuxième loi de Newton de rotation.

On donne : Le moment d'inertie de la tige : $I_{tige/pivot} = \frac{1}{3}ML^2$

Problème V (14 Points)

Une tige homogène de masse $\boldsymbol{M} = 1\ kg$ et de longueur $\boldsymbol{L} = 1\ m$ est initialement au repos dans sa position verticale mais capable de tourner autour de son extrémité O. Une balle de masse $\boldsymbol{m} = 0{,}5\ kg$ se déplace horizontalement avec une vitesse constante $v_0 = 5\ m/s$, et heurte la tige à une hauteur $h = \frac{2L}{3}$ de O. Juste après la collision, la balle continue son chemin avec une nouvelle vitesse $\boldsymbol{v_f}$, tandis que la tige tourne dans le sens horaire avec une vitesse angulaire ω et elle s'arrête lorsqu'elle fait un angle β =60° avec la verticale, voir la figure adjacente.

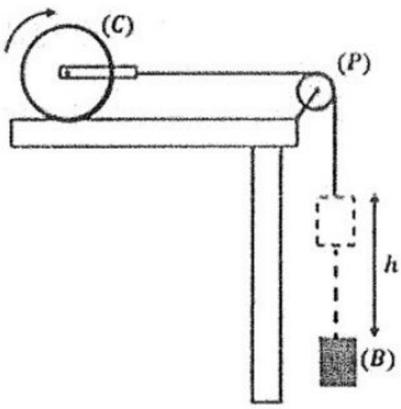


a) Utiliser le théorème des axes parallèles pour démontrer que le moment d'inertie de la tige par rapport à son extrémité O soit : $I_{tige/O} = \frac{1}{3}\ ML^2$.
b) Calculer la valeur de la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ de la tige (juste après la collision).
c) Calculer la valeur de vitesse $\boldsymbol{v_f}$ de la balle (juste après la collision).

On donne : Le moment d'inertie de la tige : $I_{tige/C.M.} = \frac{1}{12}ML^2$

Problème VI (12 Points)

La figure adjacente représente un cylindre (C), de masse M et de rayon R, attaché à un bloc (B) de masse M, par une corde inextensible et de masse négligeable passant à travers une poulie (P), qui a la forme d'un cerceau de masse M, de rayon r =$R/2$. Le système est initialement au repos. Lorsque le cylindre (C) est lâché, le bloc (B) accélère vers le bas et la corde fait tourner la poulie ainsi que le cylindre (C) roule sans glissement sur une table horizontale et la corde ne glisse pas sur la poulie. Après que le bloc (B) descend d'une hauteur de sa position initiale :



a) Utiliser le principe d'énergie mécanique pour trouver la vitesse linéaire $\boldsymbol{v}$ du système en fonction de g et h.
b) Déduire les vitesses angulaires $\boldsymbol{\omega_C}$ et $\boldsymbol{\omega_P}$ du cylindre (C) et de la poulie (P) respectivement en fonction de g, h et R.

On donne : **Le moment d'inertie du cylindre et du cerceau, autour d'un axe lui y est perpendiculaire en son centre sont respectivement :**
$I_{cylindre/CM} = \frac{1}{2}MR^2$ et $I_{cerceau/CM} = Mr^2$.

Université Libanaise
Faculté des Sciences I
Département de Physique et Electronique

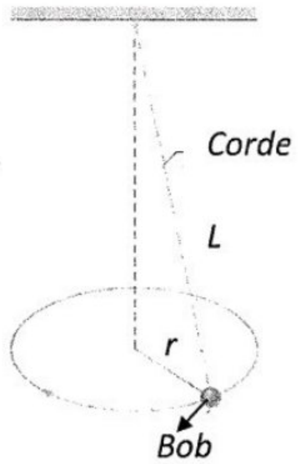
P 1100 (Mécanique)
Final 2017-2018
22-01-2018 (2 heures)

(Prendre $g = 10\ m/s^2$)

Problème I (10 Points)

La figure adjacente montre un pendule conique, dans lequel le bob (le petit objet à l'extrémité inférieure de la corde) se déplace sur un cercle horizontal à vitesse constante. La corde balaie un cône lorsque le bob tourne. Le bob a une masse m = 0,04 kg, la corde a une longueur L = 0,9 m et de masse négligeable, et le bob suit un chemin circulaire de périmètre 0,94 m.

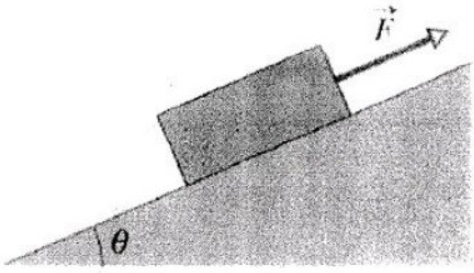
a) Tracer le bilan de forces agissant sur le bob.
b) Trouver le module de la tension $\vec{T}$ de la corde?
c) Trouver la période t du mouvement du bob?



Problème II (10 Points)

Un bloc de masse m = 8 kg repose sur un plan incliné d'angle θ = 20° avec l'horizontale (figure ci-contre). Entre le bloc et le plan, le coefficient de frottement statique est μ_s = 0,25 et le coefficient de frottement cinétique est μ_k = 0,15. Ce bloc est tiré avec une force $\vec{F}$, parallèle au plan incliné et dirigée vers le haut.

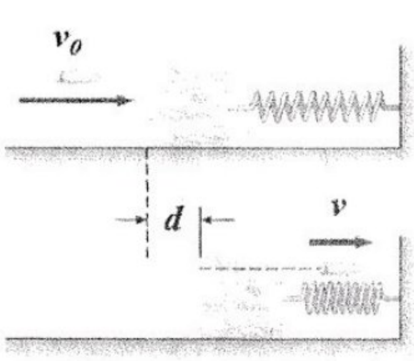
a) Quelle est la valeur minimale de $\vec{F}$, qui empêchera le bloc de glisser vers le bas du plan incliné?
b) Quelle est la valeur minimale de $\vec{F}$, qui permet au bloc d'être au point de se déplacer vers le haut du plan incliné?
c) Quelle valeur de $\vec{F}$ est nécessaire pour déplacer le bloc vers le haut du plan incliné à vitesse constante?



Problème III (12 Points)

Une balle de masse m = 5 g se déplaçant avec une vitesse initiale v_0 = 400 m/s est tirée vers un bloc de masse M = 1 kg, initialement au repos sur une surface horizontale sans frottement, et relié à un ressort de raideur k = 900 N/m. La balle traverse le bloc et sort de l'autre côté (figure ci-contre). Si le bloc se déplace après la collision d'une distance d = 5 cm vers la droite, Trouvez:

a) La vitesse du bloc V_M après la collision.
b) La vitesse v à laquelle la balle émerge du bloc.
c) L'énergie mécanique convertie en énergie thermique

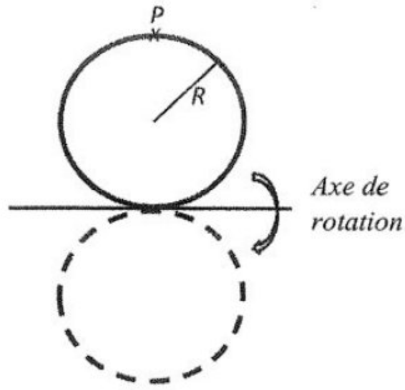


pendant la collision.

(Ici on considère que le temps de collision entre la balle et le bloc soit négligeable).

Problème IV (12 Points)

Un cerceau de rayon R et de masse m est placé dans un plan vertical. Ce cerceau est capable de tourner autour d'un axe horizontal situé dans le même plan que le cerceau et lui est tangent comme l'indique la figure ci-contre.



a) Montrer que le moment d'inertie de ce cerceau par rapport à son diamètre est donné par : $I_{com} = \frac{1}{2}mR^2$.

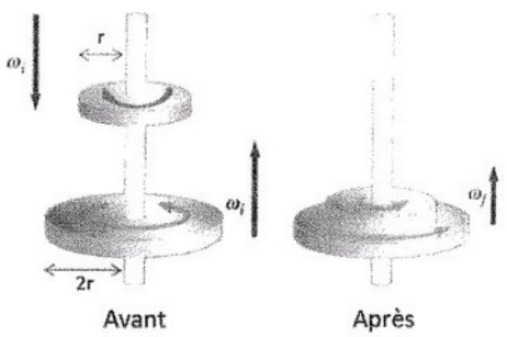
b) Trouver la vitesse angulaire ω du cerceau quand il tourne de 180° à partir du repos.

c) Trouve la vitesse linéaire V_P du point P lorsqu'il passe par sa position verticale la plus basse.

(Note: $\int sin^2\theta d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} + C$)

Problème V (13 Points)

Deux disques de masses identiques m mais de rayons différents (r et $2r$) tournent sans frottement, sur deux paliers différents, à la même vitesse angulaire ω_i mais dans deux sens opposés. Les deux disques sont rapprochés lentement. La force de frottement résultante entre les surfaces les amène directement à la même vitesse angulaire ω_f, comme le montre la figure ci-contre.



a) Trouver la vitesse angulaire ω_f en fonction de ω_i?

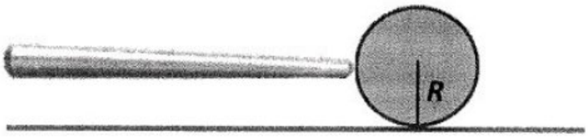
b) Trouver le changement relatif de l'énergie cinétique due à ce processus $\left(\frac{\Delta E_c}{E_{c_i}}\right)$.

c) Où est ce que l'énergie est perdue?

[I_{CM} (disque de rayon r par rapport à l'axe de rotation représenté dans la figure) = $\frac{1}{2}mr^2$]

Problème VI (13 Points)

Une boule de billard, de masse m = 0,3 kg et de rayon r = 3 cm, est frappée fortement par un bâton qui est parallèle à la surface de la table et dirigé vers le centre de la boule (voir la figure ci-contre). La vitesse initiale de la boule résultante est v_0 = 4 m/s. Le coefficient de frottement cinétique entre la boule et la table est μ_k = 0,6.



a) Pendant combien de temps la boule glisse-t-elle avant qu'elle ne commence à rouler sans glisser?

b) Quelle distance la boule parcourt-elle pendant qu'elle *roule avec glissement*?

c) Quelle est sa vitesse une fois qu'elle commence à *rouler sans glisser*?

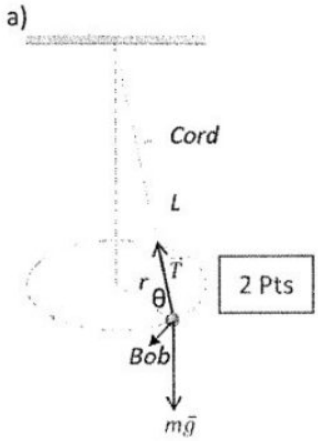
[I_{CM} (boule) = $\frac{2}{5}mr^2$]

Université Libanaise
Faculté des Sciences I
Département de Physique et Electronique

P 1100 (Mécanique)
Final 2017-2018 (1ère session)
22-01-2018 (2heures)

(Take $g = 10$ m/s^2)

Problème I (10 Points)



a) Voir figure

b) On applique la 2ème loi de Newton : $\vec{T} + \overrightarrow{mg} = m\overrightarrow{a_n}$ car $\overrightarrow{a_t} = \vec{0}$

On fait la projection sur oy vertical vers le haut : T sin θ = mg mais θ= ?

Le rayon r de la trajectoire circulaire du bob (la distance horizontale entre le bob et l'axe de rotation vertical) est:
r = périmètre/2π = 0,94/2π = 0,15 m
L'angle que fait la corde avec le rayon r (l'horizontal) est :
$\theta = \cos^{-1}(r/L) = \cos^{-1}(0,15/0,90) = 80°$

Donc $T = \dfrac{mg}{\sin\theta} = 0.40$ N.

c) La période de révolution (t) est le temps nécessaire pour effectuer un tour complet (périmètre d'un cercle complet) alors $t = \frac{périmètre\ du\ cercle\ complet}{vitesse}$; alors on doit déterminer la vitesse v du bob= ?
Projection de l'équation (1) sur l'axe ox horizontal dirigé vers le centre du cercle, on aura

$T\cos\theta = mv^2/R$ donc v = 0,49 m/s.

La période de revolution est: t = 0,94/0,49 = 1,9 s.

Problème II (10 Points)

a) Dans cette situation, On prend la force de frottement statique dirigée vers le haut du plan incline afin d'empêcher le bloc de glisser vers le bas il faut que $f_s \le f_{s,max}$ sachant que $f_{s,max} = \mu_s N$.
Appliquant la 2ème loi de Newton sur le bloc de masse $m = P/g$ = 8,2 kg : $\vec{F} + \vec{f_s} + \overrightarrow{mg} = \vec{0}$,
projection sur les deux axes Ox et Oy, on aura
$F - mg\ sin\theta + f_s = 0$ alors $f_s = mg\ sin\theta - F$
$f_{s,max} = \mu_s N$ $et\ N = mg\ cos\theta\ alors\ f_{s,max} = \mu_s.mg\ cos\theta$
$mg\ sin\theta - F \le \mu_s.mg\ cos\theta \Rightarrow F_{min1} = mg(sin\theta - \mu_s cos\theta) = 8,6\ N.$

b) Dans cette situation, On prend la force de frottement statique dirigée vers le bas du plan incline afin d'empêcher le bloc de glisser vers le haut.
Appliquant la 2ème loi de Newton sur le bloc: $\vec{F} + \vec{f_s} + \overrightarrow{mg} = \vec{0}$, projection sur les deux axes Ox et Oy, on aura :$F - mg\ sin\theta - f_s = 0$ alors $f_s = -mg\ sin\theta + F$
$f_{s,max} = \mu_s N$ $et\ N = mg\ cos\theta\ alors\ f_{s,max} = \mu_s mg\ cos\theta$ alors si $f_s = f_{s,max}$ alors il commence à se déplacer vers le haut donc : $F_{min2} = mg\ sin\theta + \mu_s mg\ cos\theta \Rightarrow F_{min2} = 46\ N.$

(c) Finallement, le bloc commence à se déplacer à vitesse constante, alors la force de frottement devient cinétique, dirigée vers le bas, donc :

$$F - mg\ sin\theta - f_c = 0$$

$f_c = \mu_c N$ et $N = mg\ cos\theta$ alors $f_c = \mu_c mg\ cos\theta$

$$F = mg\ sin\theta + \mu_c mg\ cos\theta \Rightarrow F = 39N.$$

Problème III (12 Points)

a) Conservation de l'énergie mécanique (état initial : lorsque la balle sort du bloc, état final :lorsque le ressort est comprimé au max)

$\frac{1}{2}\ MV_M^2 = \frac{1}{2}kx^2$

So $V_M = x\sqrt{\frac{K}{M}} = 0{,}05\sqrt{900/1} = 1{,}5$ m/s

b) Conservation de la quantité de mouvement durant la collision :

$mv_0 = MV_M + mv$,
$v = (mv_0 - MV_M)/m = (0{,}005*400 - 1*1{,}5)/0{,}005 = 100$ m/s.

c) La variation de l'énergie mécanique est $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_{Pe} = ½m(v^2 - v_0^2) + \frac{1}{2}\ MV_M^2 = -374$ Joules
Donc on a une perte de l'énergie durant la collision de 374Joules.

Problème IV (12 Points)

a) le moment d'inertie de ce cerceau par rapport à son diamètre est :

$$I_{com} = \int_0^{2\pi} r^2 dm = \int_0^{2\pi} (Rsin\theta)^2 \lambda R d\theta = \pi\lambda R^3 = {}^1/_2\, mR^2$$

Sachant que λ est la densité linéaire de masse de ce cerceau ; $\lambda = \frac{masse\ totale}{longueur\ totale}$

b) D'après le théorème de l'énergie mécanique :

$\Delta E_m = 0 \Rightarrow 2MgR = \frac{1}{2}I\omega^2$

$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$

Donc la vitesse angulaire : $\omega = 2\sqrt{\frac{2g}{3R}}$

c) $v = 2R\omega = 4\sqrt{\frac{2gR}{3}}$

Problème V (13 Points)

a) Durant la collision, le moment dynamique est nul alors on a une conservation du moment cinétique alors :

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow I_1\omega_0 - I_2\omega_0 = (I_1 + I_2)\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}\,\omega_0$$

$$Sachant\ que:\ I_1 = \frac{1}{2}m\,(2r)^2 = 2mr^2\ \ et\ I_2 = \frac{1}{2}m\,r^2$$

$$\omega_f = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}\,\omega_0 = \frac{2mr^2 - \frac{1}{2}m\,r^2}{2mr^2 + \frac{1}{2}m\,r^2}\,\omega_0 = \frac{3}{5}\,\omega_0$$

b) $E_{Ci} = \frac{1}{2}I_1\omega_0^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_0^2 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_0^2$

$E_{Cf} = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_f^2$

$$\frac{E_{Cf} - E_{Ci}}{E_{Ci}} = \frac{\frac{1}{2}(I_1+I_2)\omega_f^2 - \frac{1}{2}(I_1+I_2)\omega_0^2}{\frac{1}{2}(I_1+I_2)\omega_0^2} = \frac{\omega_f^2}{\omega_0^2} - 1 = \frac{9}{25} - 1 = \frac{-16}{25} < 0$$

alors une quantité d'énergie cinétique est perdue durant la collision

c) L'énergie cinétique est perdue lorsque les deux disques collent ensemble dû au frottement entre leurs surfaces.

Problème VI (13 Points)

a) On applique la 2ème loi de Newton de translation, on aura:

$-f_c = Ma \Rightarrow a = \frac{-f_c}{M} = \frac{-\mu_c Mg}{M} = -6\ m/s^2$,

On utilise la cinématique : $v_f = at + v_0 = -\mu_c gt + v_0 = 4 - 6t$

On applique la 2ème loi de Newton de rotation, on prend le sens horaire comme sens positif, on aura :

$$-f_c R = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{f_c R}{I} = \frac{5\mu_c g}{2R}$$

On utilise la cinématique : $\omega_f = \alpha t + \omega_0 = \frac{5\mu_c g}{2R}t$

Pour avoir un roulement régulier (sans glissement), il faut que :

$$v = R\omega \Rightarrow -\mu_c gt + v_0 = \frac{5\mu_c g}{2}t \Rightarrow t = \frac{2v_0}{7\mu_c g} = 0{,}19\ s$$

b) D'après la cinématique: $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t = 0{,}65\ m$

c) On a : $v_f = -\mu_c gt + v_0 = 4 - 6t = 2{,}86\ m/s$