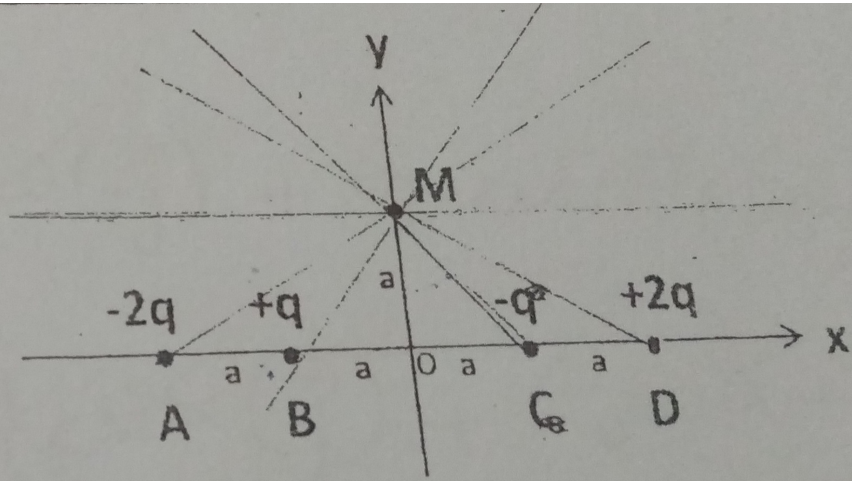
Exercice I : *(30 points, 20 mn)*

Quatre charges ponctuelles $-2q$, $+q$, $-q$ et $+2q$ sont distribuées sur l'axe des x aux points d'abscisses $A(-2a)$, $B(-a)$, $C(+a)$ et $D(+2a)$, respectivement.



1- Calculer le champ électrostatique résultant au point $M(0, a)$.

2- Calculer le potentiel électrostatique au point $M(0, a)$.

3- En déduire le travail électrique pour déplacer une charge $+Q$ de l'infini au point $M(0, a)$. $(V(\infty) = 0)$

Session 2014 2013 (P110)

Ex 1

1) $\vec{E} = \vec{E_A} + \vec{E_B} + \vec{E_C} + \vec{E_D}$

$|\vec{E_B}| = |\vec{E_C}| = \frac{K_0 q}{d^2}$ or $d = a\sqrt{2}$

$|\vec{E_B}| = |\vec{E_C}| = \frac{K_0 q}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{K_0 q}{2a^2}$

$|\vec{E_A}| = |\vec{E_D}| = K_0 \frac{2q}{d'}$ or $d' = 4a^2 + a^2 = 5a^2$

$|\vec{E_A}| = |\vec{E_D}| = K_0 \frac{2q}{5a^2}$

On a MOB triangle retangle isocèle

$\Rightarrow \alpha = 45°$

$\cos\theta = \frac{adj}{hyp}$ (ds le Δ OMA)

$\cos\theta = \frac{2\alpha}{\alpha\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0,894$

$\theta = \cos^{-1}(0,894) = 26,6°$

$\sin\theta = \frac{opp}{hyp}$ (ds. le Δ OMA)

$\sin\theta = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0,447 \Rightarrow \theta = 26,6$

$\Rightarrow \boxed{\theta = 26,6}$

$\vec{E}_M = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D$

$= E_A \cos\theta(-\vec{i}) + \cancel{E_A \sin\theta(-\vec{j})} + E_B \cos\alpha(\vec{i}) + \cancel{E_B \sin\alpha(\vec{j})}$

$+ E_C \cos\alpha(\vec{i}) + \cancel{E_C \cos\alpha(-\vec{j})} + E_D \cos\theta(-\vec{i}) + \cancel{E_D \sin\theta(\vec{j})}$

On a $E_D = E_A$ $\quad E_B = E_C$ (car on le m̂ q).

$\vec{E}_M = 2E_A \cos\theta(-\vec{i}) + 2E_B \cos\alpha(\vec{i})$

$\vec{E}_M = 2\left(K_0 \frac{2q}{5a^2}\right) \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}(-\vec{i}) + 2\left(K_0 \frac{q}{2a^2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i})$

$\vec{E}_M = \frac{8K_0 q \sqrt{5}(-\vec{i})}{25a^2} + \frac{K_0 q \sqrt{2}}{2a^2}(\vec{i})$.

$\vec{E}_M = \frac{K_0 q}{a^2}\left(-\frac{8\sqrt{5}}{25} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\vec{i})$

$\vec{E}_M = \frac{K_0 q}{a^2}(-0{,}715 + 0{,}707)(\vec{i}) = -8 \times 10^{-3} \frac{K_0 q}{a^2}(+\vec{i})$

$\vec{E}_M = 8 \times 10^{-3} \frac{K_0 q}{a^2}(-\vec{i})$

2) $V_M = V_A + V_B + V_C + V_D$

$V_M = K_0 \cancel{\frac{2q}{d'}} + \cancel{\frac{K_0 q}{d}} + K_0 \cancel{\frac{-q}{d}} + K_0 \cancel{\frac{2q}{d'}} = 0$

$W = -Q\Delta V = -Q(V_f - V_i) = -Q(V_M - V_{(\infty)})$

$W = -Q(0-0) = 0$

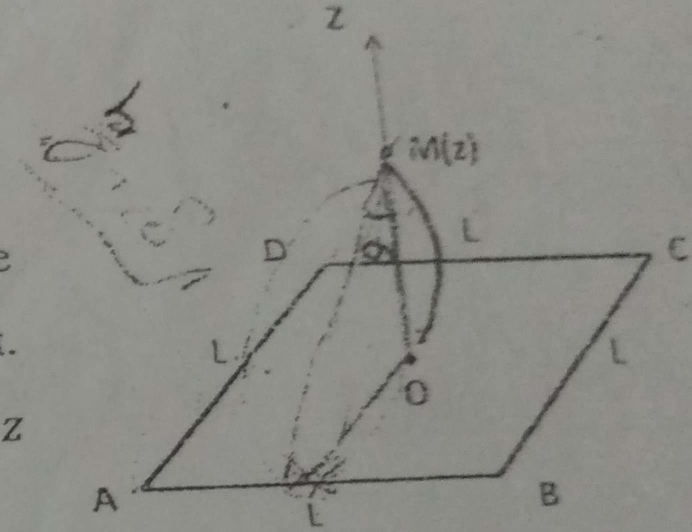
Exercice II : *(35 points, 20 mn)*

1- Une charge $+q$ est distribuée uniformément suivant un fil non conducteur de longueur finie L. Démontrer que le champ électrique créé par ce fil en un point P situé sur sa médiatrice à une distance y du fil est donné par :

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{(L^2 + 4y^2)^{1/2}}$$

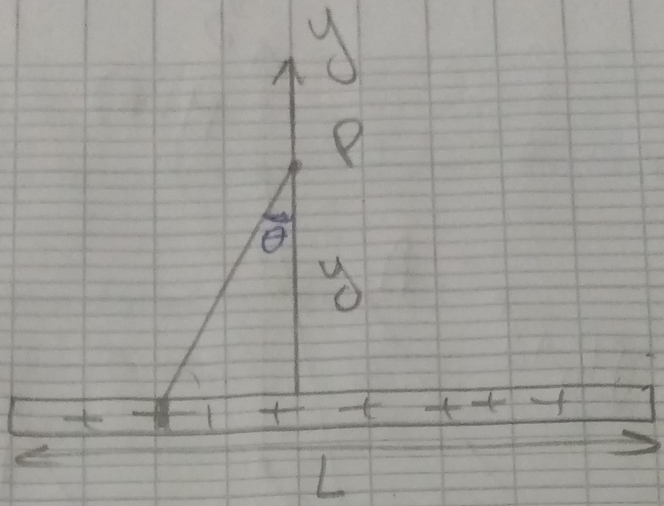
9

2- Dans la figure ci-contre, chaque coté du carré $ABCD$ a une longueur L et porte une charge $+q$ distribuée uniformément. Déduire le champ électrique résultant au point $M(z)$ de l'axe Oz de ce carré de centre O.



Ex II

1)



$$E = 2K\frac{\lambda}{d}\sin\theta$$

or $\sin\theta = \dfrac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (y)^2}} = \dfrac{L/2}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + y^2}} = \dfrac{L/\cancel{2}}{\frac{\sqrt{L^2+4y^2}}{\cancel{2}}}$

$$\sin\theta = \frac{L}{\sqrt{L^2+4y^2}}$$

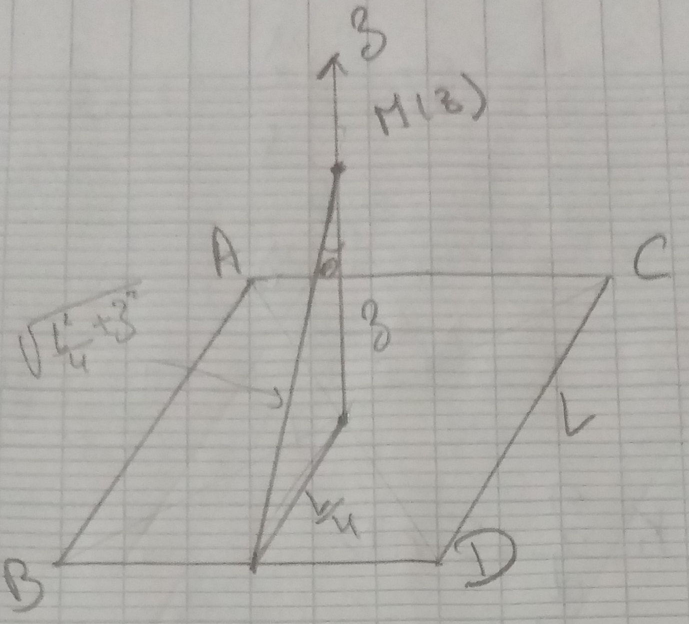
et $\lambda = \dfrac{q}{L}$

$$\Rightarrow E = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\frac{q}{L}}{y} \cdot \sin\theta$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\cancel{L}y} \cdot \frac{\cancel{L}}{\sqrt{L^2+4y^2}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{L^2+4y^2}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{(L^2+4y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

2)



$$\vec{E}_M = \sum 4 E \cos\theta (\hat{k})$$

or $\cos\theta = \frac{adj}{hyp} = \frac{z}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+z^2}} (\hat{k})$

où $E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{(L^2+4y^2)^{\frac{1}{2}}}$

or $y = \sqrt{\frac{L^2}{4}+z^2}$

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+z^2}} \cdot \frac{1}{(L^2+4(\frac{L^2}{4}+z^2))^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_M = 4\frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+z^2}} \cdot \frac{1}{(L^2+4(\frac{L^2}{4}+z^2))^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{z}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+z^2}} \cdot (\hat{k})$$

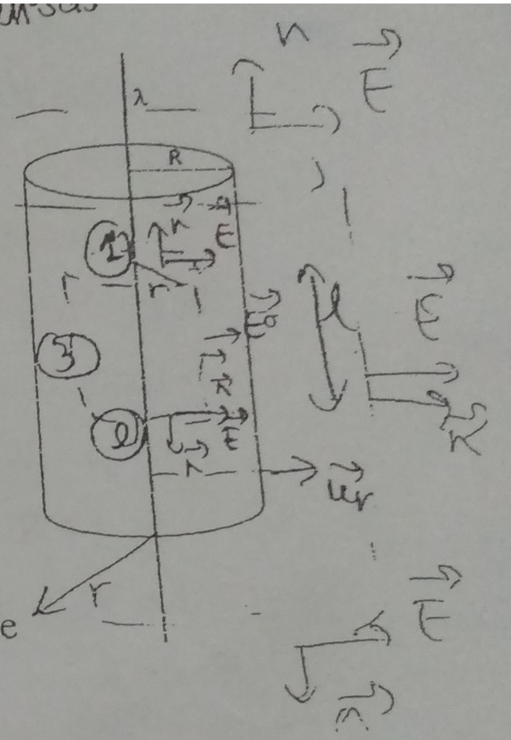
$$\vec{E}_M = \frac{2q}{\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+z^2}} \cdot \frac{1}{(2L^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{z}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+z^2}} (\hat{k})$$

$$\vec{E}_M = \frac{\cancel{2}q}{\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{z}{(\sqrt{\frac{L^2}{4}+z^2})^2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{(\frac{L^2}{2}+z^2)^{\frac{1}{2}}} (\hat{k})$$

$$\vec{E}_M = \frac{q}{\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{z}{(\frac{L^3}{4} \cdot z^2)} \cdot \frac{1}{(\frac{L^2}{2}+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Exercice III : *(35 points, ~ 15 mn)*

On considère un cylindre **infini** de rayon **R** uniformément chargé d'une distribution **surfacique** positive σ. Un fil **infini** linéairement chargé avec une densité uniforme et positive λ est confondu avec l'axe du cylindre.



1- En appliquant le théorème de Gauss, trouver le champ électrique pour :

a- $r < R$

b- $r > R$

2- Soit V_0 le potentiel à la surface du cylindre, en déduire le potentiel électrique pour $r < R$.

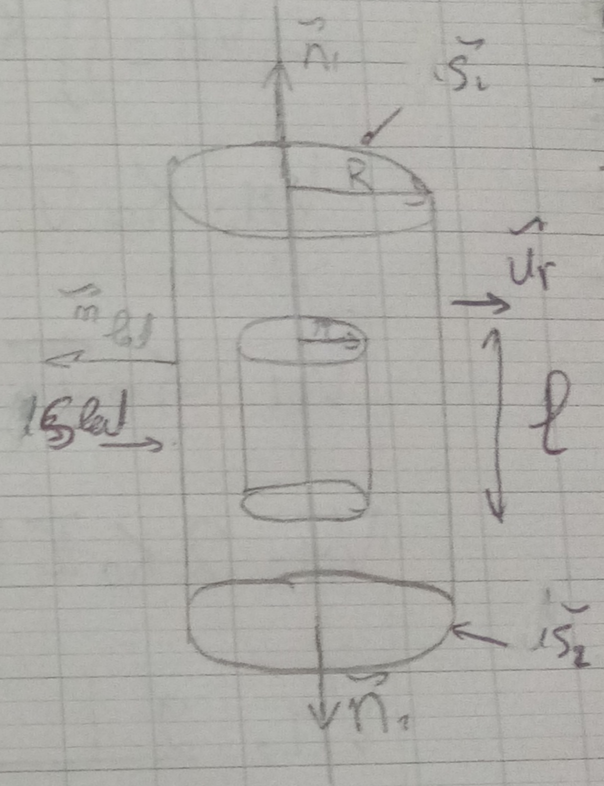
Bonne Chance

Ex III

1) a) $r < R$

Théorème de Gauss :

$$\Phi = \iint_{\Sigma_G} E \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$



Le fil infini de densité $\lambda > 0$

$\vec{E}(r) = E(r)\vec{u}_r$ (le champ est radiale).

$$\oiint_{\Sigma_G} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \cancel{\int \vec{E} \cdot d\vec{s}_1}^{\,0} + \cancel{\int \vec{E} \cdot d\vec{s}_2}^{\,0} + \int \vec{E} \cdot d\vec{s}_{lat}$$

car $\vec{E} \perp d\vec{s}$

$$\oiint_{\Sigma_G} \vec{E}\, d\vec{s} = \int \vec{E}\, d\vec{s}_{lat} = \int E \cdot ds_{lat} = E \int ds = E\, 2\pi r \ell$$

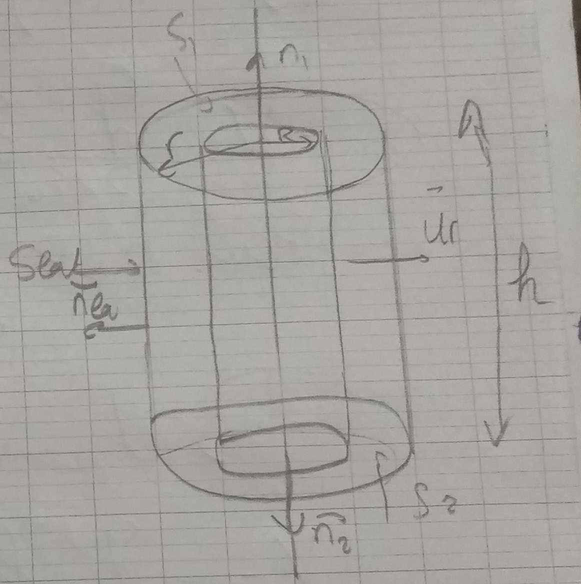
et $\dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\lambda \ell}{\varepsilon_0}$

$$E\, 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda}{r}} \quad \text{et} \quad \vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\vec{u_r}$$

<u>r > R</u>

fil de ∞ de λ et cylindre ∞ de σ



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \cancel{\int \vec{E}\, d\vec{S}_1}^{\,0} + \cancel{\int \vec{E}\, d\vec{S}_2}^{\,0} + \int \vec{E}\, d\vec{S}_{ext}$$

car $E \perp d\vec{S}$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int \vec{E}\cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\int E\, d\vec{S}_{ext} = E\int d\vec{S}_{ext} = E\, 2\pi r h$$

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} + \frac{2\pi R h \sigma}{\varepsilon_0}$$

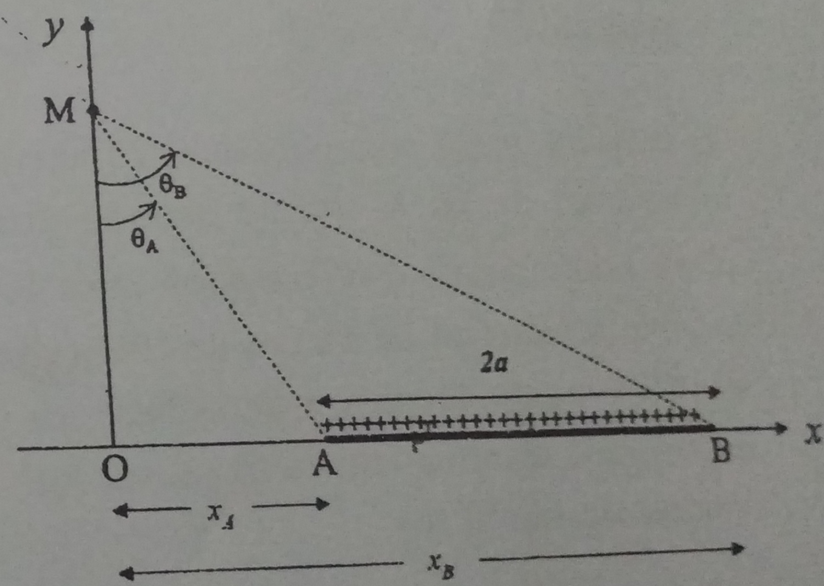
$$\Rightarrow E\, 2\pi r \cancel{h} = \frac{\cancel{h}\lambda}{\varepsilon_0} + \frac{2\pi R \cancel{h}\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{h}{r} + \frac{2\pi R\sigma}{r}\right)$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R}{r}$$

<u>Exercice I</u> : *(20 points)*

1) On considère un fil rectiligne ***AB*** de longueur finie ***2a***, portant une densité uniforme linéique de charges $\lambda > 0$ (voir fig). Montrez que le champ électrique créé par le fil au point ***M(y)*** vaut :

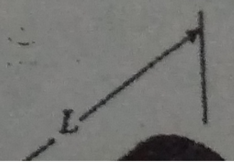


$$\begin{cases} E_x = \dfrac{K\lambda}{y}(\cos\theta_B - \cos\theta_A) = \dfrac{K\lambda}{y}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x_B^2+y^2}} - \dfrac{y}{\sqrt{x_A^2+y^2}}\right) \\ E_y = \dfrac{K\lambda}{y}(\sin\theta_B - \sin\theta_A) = \dfrac{K\lambda}{y}\left(\dfrac{x_B}{\sqrt{x_B^2+y^2}} - \dfrac{x_A}{\sqrt{x_A^2+y^2}}\right) \end{cases}$$

2) En déduire le champ en ***M(y)*** dans chacun des cas suivants :

a) le point ***M(y)*** est sur la médiatrice de ***AB***,

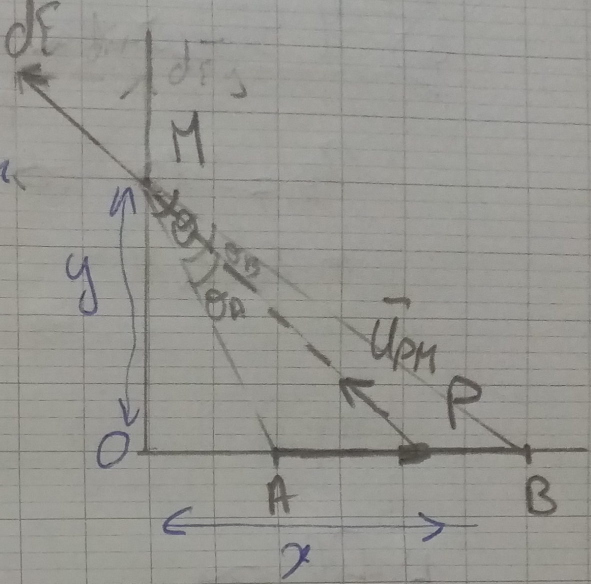
b) le fil a une longueur infinie.



Session 2017-2018 Final (P11|01)

Ex I

1) Soit $d\vec{E}$ le champ créé par un élément de fil de longueur dx autour de P



$$d\vec{E} = K_0 \frac{\lambda dx}{(PM)^2} \vec{U}_{PM}$$

Dans le Δ PMO, on a :

$$\tan\theta = \frac{x}{y}$$

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{dx}{y} \quad \text{or } y = PM\cos\theta$$

$$\Rightarrow dx = \frac{y\,d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{PM\cos\theta\,d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{PM\,d\theta}{\cos\theta}$$

$$d\vec{E} = \frac{K_0\lambda \frac{PM\,d\theta}{\cos\theta}}{PM^2} = \frac{K_0\lambda\,d\theta}{PM\cos\theta} = \frac{K_0\lambda\,d\theta}{y}\vec{U}_{PM}$$

$$d\vec{E}\begin{cases} dE_x = +\frac{K\lambda}{y}\cos\theta\,d\theta \Rightarrow E_x = +\frac{K\lambda}{y}\int_{\theta_A}^{\theta_B}\sin\theta\,d\theta \\ dE_y = -\frac{K\lambda}{y}\sin\theta\,d\theta \Rightarrow E_y = -\frac{K\lambda}{y}\int_{\theta_A}^{\theta_B}\sin\theta\,d\theta \end{cases}$$

En posant $\theta_A = (\vec{MO}, \vec{MA})$ $\quad \theta_B = (\vec{MO}, \vec{MB})$

$$E_x = \frac{K\lambda}{y}(\cos\theta_B - \cos\theta_A) = \frac{K\lambda}{y}\left(\frac{y}{\sqrt{x_B^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x_A^2+y^2}}\right)$$

$$E_y = \frac{K\lambda}{y}(\sin\theta_B - \sin\theta_A) = \frac{K\lambda}{y}\left(\frac{x_B}{\sqrt{x_B^2+y^2}} - \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2+y^2}}\right)$$

2)

a) M est sur la médiatrice de AB.

$x_A = - x_B$ or $x_B = a$ $\Rightarrow \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \frac{2k\lambda}{y} \cdot \frac{x_B}{\sqrt{x_B^2+y^2}} + \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2+y^2}} \end{cases}$

$E_y = 2k\lambda \frac{\cancel{2} x_B}{\cancel{2}\sqrt{x_B^2+y^2}} = 2k\lambda \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}$

b) Fil ∞

$\left.\begin{array}{l} x_A \longrightarrow -\infty \\ x_B \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \frac{2k\lambda}{y} \end{cases}$

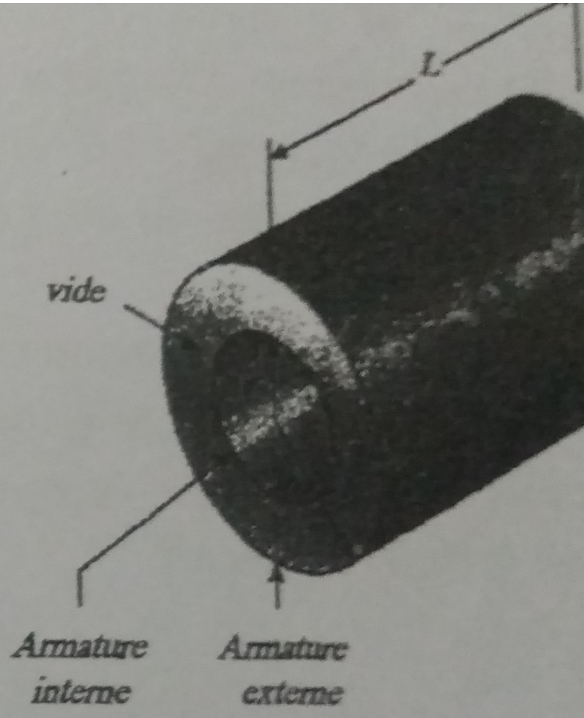
b) le fil a une long...

Exercice II : *(15 points)*

On considère un condensateur cylindrique formé de deux armatures métalliques coaxiales, de rayons a et b (avec $a < b$), et de hauteur L ($L >> b$), (voir fig). On note $+Q$ la charge de l'armature interne.

1) Déterminer le vecteur champ électrique en un point situé à une distance r ($a < r < b$).

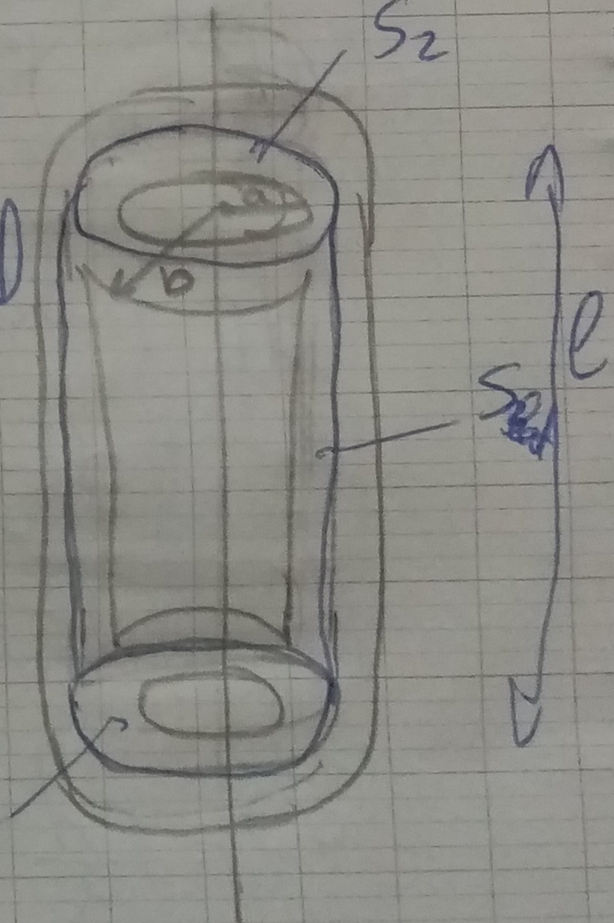
2) Déterminer la différence de potentiel entre les armatures, et en déduire la capacité C.



Ex II

1) à Cause des Symetrie électrique et géometrique, le champs $\vec{E}$ est radial et son module ne depend que de r.

$\vec{E} = E(r) \cdot \vec{u}_r$



$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= \underbrace{\iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_1}_{\substack{0 \\ \vec{E} \perp d\vec{S}}} + \underbrace{\iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_2}_{\substack{0 \\ \vec{E} \perp d\vec{S}}} + \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{lat}$$

$$\phi = \iint \vec{E}\, d\vec{S}_{lat} = \iint E\, dS_{lat} = E \cdot S_{lat}$$

$$\phi = E \cdot 2\pi r \ell$$

(3)

Théorème de Gauss

$$\phi = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \cdot 2\pi r l = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 r l}$$

2. $dV = -\vec{E} \cdot \vec{dl}$

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_a^b E \cdot dr \Rightarrow V_2 - V_1 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$