Université Libanaise
Faculté des Sciences
Section 3

ألجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : M1102 **Année :2020-2021**

Durée : 1h 30min **Examen : Final**

Exercice 1: (20 points)
Etudier la réflexivité, la symétrie, l'antisymétrie et la transitivité de la relation binaire R définie sur $\mathbb{Z}$ par
$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad xRy \Leftrightarrow (x - y \text{ est divisible par 2 ou par 3}).$$

Exercice 2: (40 points)
On définie sur l'ensemble $\mathbb{N}^2$ la relation binaire R par :
$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{N}^2, \quad (x,y)\,R\,(x',y') \Leftrightarrow (x \geq x' \text{ et } y = y').$$

1. Montrer que R est une relation d'ordre.
2. Montrer que l'ordre R est partiel.
3. Déterminer, lorsqu'ils existent, le plus petit élément et le plus grand élément de $\mathbb{N}^2$ pour R.
4. Soit $A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1)\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$.
   Déterminer, lorsqu'ils existent, le plus petit élément, le plus grand élément, les éléments minimaux, les éléments maximaux, la borne supérieure et la borne inférieure de A pour R.

Exercice 3: (20 points)
Soit l'application
$$\begin{array}{rcl} f \ : \ \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \dfrac{x}{y}. \end{array}$$

1. Définir la relation d'équivalence R associée à f.
2. Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{Z}$ tels que $\overline{(a,1)} = \overline{(1,a)}$.
3. Donner une bijection (canonique) de l'ensemble quotient $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)/R$ à $\mathbb{Q}$.

Exercice 4: (20 points)
Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on définit $I_a = \{x \in \mathbb{R}\,; x \leq a\}$. On note $S = \{I_a; a \in \mathbb{N}^*\}$.
On considère les ensembles ordonnés $(\mathbb{N}^*, D)$ et $(S, \subset)$
avec $\forall x, y \in \mathbb{N}^*, xDy \Leftrightarrow x$ divise y.
Soit l'application
$$\begin{array}{rcl} f \ : \ (\mathbb{N}^*, D) & \longrightarrow & (S, \subset) \\ a & \longmapsto & f(a) = I_a. \end{array}$$

1. Montrer que f est croissante.
2. f est-elle un isomorphisme d'ensembles ordonnés ? Justifier.

Bonne Chance ☺.

M1102 | Solution | 2020-2021

***Exercice* 1:**

- Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{Z}$,
  On a $x - x = 0$ qui est divisible par 2 ou par 3 alors xRx. $\boxed{\text{D'où } R \text{ est réflexive}}$.
- Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{Z}\,; xRy$,
  $xRy \Longrightarrow x - y$ est divisible par 2 ou par 3.
  - **Si x − y est divisible par 2** :
    Donc il existe $k \in \mathbb{Z}^*\,; x - y = 2k \Longrightarrow -(y - x) = 2k \Longrightarrow y - x = 2(-k)$.
    Alors $y - x$ est divisible par 2. $\boxed{\text{D'où } yRx}$.
  - **Si x − y est divisible par 3** :
    Donc il existe $k \in \mathbb{Z}^*\,; x - y = 3k \Longrightarrow -(y - x) = 3k \Longrightarrow y - x = 3(-k)$.
    Alors $y - x$ est divisible par 3. $\boxed{\text{D'où } yRx}$.

  $\boxed{\text{D'où } R \text{ est symétrie}}$.
- Antisymétrie : Prend $x = 2$ et $y = -2$,
  On a xRy (car 2+2=4 est divisible par 2) et yRx (car $-2 - 2 = -4$ est divisible par 2) mais $-2 \neq 2$. $\boxed{\text{D'où } R \text{ n'est pas antisymétrie}}$.
- Transitive : Prend $x = -2$, $y = 2$ et $z = 5$.
  On a xRy (car $-2 - 2 = -4$ est divisible par 2) et yRz (car $2 - 5 = -3$ est divisible par 3) mais $x \not R z$ (car $-2 - 5 = -7$ n'est pas divisible ni par 2 ni par 3).
  $\boxed{\text{D'où } R \text{ n'est pas transitive}}$.

***Exercice* 2:**

1. - Réflexive : Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$,
     $x \geq x$ et $y = y$, alors $(x, y)\, R\, (x, y)$. $\boxed{\text{D'où } R \text{ est réflexive}}$.
   - Antisymétrie : Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{N}^2\,; (x, y)\, R\, (x', y')$ et $(x', y')\, R\, (x, y)$,
     $$\begin{cases} \bullet\ (x, y)\, R\, (x', y') \Longrightarrow x \geq x' \text{ et } y = y' \\ \text{et} \\ \bullet\ (x', y')\, R\, (x, y) \Longrightarrow x' \geq x \text{ et } y' = y \end{cases} \Longrightarrow x = x' \text{ et } y = y' \Longrightarrow (x, y) = (x', y')$$
     $\boxed{\text{D'où } R \text{ est antisymétrie}}$.
   - Transitive : Soient $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{N}^2\,; (x, y)\, R\, (x', y')$ et $(x', y')\, R\, (x'', y'')$,
     $$\left.\begin{array}{l} \bullet\ (x, y)\ R\, (x', y') \Longrightarrow x \geq x' \text{ et } y = y' \\ \bullet\ (x', y') R\, (x'', y'') \Longrightarrow x' \geq x'' \text{ et } y' = y'' \end{array}\right\} \Longrightarrow x \geq x'' \text{ et } y = y''$$
     Donc $(x, y)\, R\, (x'', y'')$. $\boxed{\text{D'où } R \text{ est transitive}}$.

   Donc R est une relation d'ordre.

2. Prend $(1,2)$ et $(2,3)$,
   On a $(1,2)\not{R}(2,3)$ (car $1 \ngeq 2$ ou car $2 \neq 3$) et $(2,3)\not{R}(1,2)$ (car $3 \neq 2$).
   $\boxed{\text{D'où } R \text{ est partiel}}$.
3. ❒ P.P.E :

   Si (a,b) est le p.p.e de $\mathbb{N}^2$ par R alors $(a,b)\,R\,(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{N}^2$,
   en particulier $\underbrace{(a,b)\,R\,(0,1)}_{a\geq 0 \text{ et } b=1}$ et $\underbrace{(a,b)\,R\,(0,2)}_{a\geq 0 \text{ et } b=2}$. Alors $b=1$ et $b=2$ contradiction. D'où le p.p.e n'existe pas pour $\mathbb{N}^2$.

   ❒ P.G.E :

   Si (a,b) est le p.g.e de $\mathbb{N}^2$ par R alors $(x,y)\,R\,(a,b), \forall (x,y) \in \mathbb{N}^2$,
   en particulier $\underbrace{(1,2)\,R\,(a,b)}_{1\geq a \text{ et } b=2}$ et $\underbrace{(0,1)\,R\,(a,b)}_{0\geq a \text{ et } b=1}$. Alors $b=1$ et $b=2$ contradiction. D'où le p.g.e n'existe pas pour $\mathbb{N}^2$.
4. $A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1)\}$,

$$\begin{tikzcd}
(1,1) & (1,2) \\
(2,1) \arrow[u] & (3,1) \arrow[l] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

   P.P.E : n'existe pas.
   P.G.E : n'existe pas.
   E.min : (3,1),(1,2).
   E.max : (1,1),(1,2).
   Minorant : Si (a,b) est un minorant de A dans $\mathbb{N}^2$ alors $(a,b)\,R\,(x,y), \forall (x,y) \in A$, en particulier $(a,b)\,R\,(1,1)$ et $(a,b)\,R\,(1,2)$, alors $b=1$ et $b=2$ contradiction. Donc il n'existe aucun minorant de A. D'où il n'existe pas un borne inférieure.
   Majorant : Si (a,b) est un majorant de A dans $\mathbb{N}^2$ alors $(x,y)\,R\,(a,b), \forall (x,y) \in A$, en particulier $(1,1)\,R\,(a,b)$ et $(1,2)\,R\,(a,b)$, alors $b=1$ et $b=2$ contradiction. Donc il n'existe aucun majorant de A. D'où il n'existe pas un borne supérieure.

Exercice 3:

1. $\forall\,(x,y),(x',y') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*, \quad (x,y)\,R\,(x',y') \Leftrightarrow f(x,y) = f(x',y') \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{x'}{y'} \Leftrightarrow xy' = x'y.$
2. $\overline{(a,1)} = \overline{(1,a)} \Longleftrightarrow (a,1)\,R\,(1,a) \Longrightarrow a^2 = 1 \Longrightarrow \boxed{a = \pm 1}$.
3. On considère la bijection canonique $\begin{array}{rccl} \bar{f} & : & (\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*)/R & \longrightarrow & f(\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*) \\ & & \overline{(x,y)} & \longmapsto & \bar{f}(\overline{(x,y)}) = f(x,y) = \dfrac{x}{y}. \end{array}$
   De plus f est surjective car $\forall\, y = \dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, il $\exists\,(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ par construction tel que $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$. Alors $f(\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*) = \mathbb{Q}$.
   D'où on a la bijection canonique suivante

$$\boxed{\begin{array}{rccl} \bar{f} & : & (\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*)/R & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & & \overline{(x,y)} & \longmapsto & \bar{f}(\overline{(x,y)}) = f(x,y) = \dfrac{x}{y}. \end{array}}$$

Exercice 4:

1. soient $a, a' \in \mathbb{N}^* \ / \ aDa'$, on va montrer que $\underbrace{f(a)}_{I_a} \overset{??}{\subset} \underbrace{f(a')}_{I_{a'}}$.

   $aDa' \Longrightarrow a$ divise $a' \Longrightarrow a' \geq a$.
   Soit $x \in f(a) = I_a \Longrightarrow x \leq a$ et $a \leq a'$, donc $x \leq a' \Longrightarrow x \in I_{a'} = f(a')$.
   $\boxed{\text{D'où } f(a) \subset f(a') \text{ et } f \text{ est croissante}}$.

2. Non, car f^{-1} n'est pas croissante. En effet :

$$\begin{array}{rcrcl} f^{-1} & : & (S, \subset) & \longrightarrow & (\mathbb{N}^*, D) \\ & & I_a & \longmapsto & a \end{array}$$

   On a $I_2 \subset I_3$ mais 2 ne divise pas 3 ($2 \not{D} 3$). D'où f^{-1} n'est pas croissante.

Ziad Bakaraki ***Bonne Chance*** ☺.