Cours : Math 100 — Année : 2014-2015

Durée : 1 heure — Examen : partiel

Exercice I (20 pts) :

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

b) Donner la négation de la proposition suivante :

$$(P):(\forall \varepsilon > 0)(\exists \theta \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\left(n \geq \theta \Rightarrow 2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2+\varepsilon\right)$$

Exercice II (20 pts) :

Soient E un ensemble non vide et A, B des sous-ensembles de E.

Démontrer que :

a) $A-B=A \Leftrightarrow B-A=B$.

b) $\overline{A}\Delta\overline{B}=A\Delta B$.

Exercice III (30 pts):

Soient E un ensemble non vide et A,B,C des sous-ensembles de E.

a) Montrer que $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

b) Montrer que $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$.

c) En déduire que $A\times(B\Delta C)=(A\times B)\Delta(A\times C)$.

Exercice IV (30 pts):

Soit $E=\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$. On définit sur E la relation binaire $\mathcal{R}$ telle que :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ \ x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow (x^2+3)y=(y^2+3)x.$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b) Soit $a\in E$. Déterminer la classe d'équivalence de a.

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 100
Durée : 1 heure

Année : 2014-2015
Examen : partiel

Exercice I (20 pts) :

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

b) Donner la négation de la proposition suivante :

$$(P):(\forall \varepsilon > 0)(\exists \theta \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\left(n \geq \theta \Rightarrow 2-\varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2+\varepsilon\right)$$

Exercice II (20 pts) :

Soient E un ensemble non vide et A, B des sous-ensembles de E.

Démontrer que :

a) $A-B=A \Leftrightarrow B-A=B$.

b) $\overline{A}\Delta\overline{B}=A\Delta B$.

Exercice III (30 pts):

Soient E un ensemble non vide et A,B,C des sous-ensembles de E.

a) Montrer que $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

b) Montrer que $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$.

c) En déduire que $A\times(B\Delta C)=(A\times B)\Delta(A\times C)$.

Exercice IV (30 pts):

Soit $E=\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$. On définit sur E la relation binaire $\mathcal{R}$ telle que :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow (x^2+3)y=(y^2+3)x.$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b) Soit $a\in E$. Déterminer la classe d'équivalence de a.

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 100 | Année : 2013-2014

Durée : 1 heure | Examen partiel

Exercice I (25 pts) :

A) P et Q étant deux propositions. Montrer que la proposition $(P\wedge\neg(Q\wedge\neg P))\Leftrightarrow P$ est une tautologie.

B) Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que A est **ouvert** s'il vérifie la propriété : $(\forall x\in A)(\exists\varepsilon>0)(\forall t\in\mathbb{R})[(x-\varepsilon<t<x+\varepsilon)\Rightarrow t\in A]$

On dit que A est **fermé** si $\complement_{\mathbb{R}}^{A}$ est ouvert.

1) Ecrire une proposition quantifiée qui exprime que A n'est pas ouvert.
2) Ecrire une proposition quantifiée qui exprime que A n'est pas fermé.

Exercice II (20 pts) : E,F,G et H étant des ensembles. Démontrer l'égalité suivante : $(E\times F)-(G\times H)=((E-G)\times F)\cup(E\times(F-H))$.

Exercice III (20 pts) : Pour tout entier $k\in\mathbb{N}$, on pose $A_k=\{x\in\mathbb{N}; k\le x\le k+10\}$. Démontrer que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}A_k=\varnothing$ et $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k=\mathbb{N}$:

Exercice IV (35 pts) : Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E.

1) Montrer que pour tous sous-ensembles B,C,D de E on a :

$((B-C)\subset A$ et $(C-D)\subset A)\Rightarrow(B-D)\subset A$.

2) Montrer que la relation binaire $\mathfrak{R}$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$\forall X,Y\in\mathcal{P}(E),\ X\mathfrak{R}Y\Leftrightarrow X\Delta Y\subset A$ est une relation d'équivalence. On rappelle que $X\Delta Y=(X-Y)\cup(Y-X)$.

3) Déterminer la classe d'équivalence de $\varnothing$.

BON TRAVAIL !

Solution de l'examen partiel du cours Math100 2013-2014

Par Dr Ziad Mawlawi

I. A) Il suffit de montrer que $P \wedge \neg(Q \wedge \neg P)$ et P ont même table de vérité. On a :

P	Q	$\neg P$	$Q \wedge \neg P$	$\neg(Q \wedge \neg P)$	$P \wedge \neg(Q \wedge \neg P)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F

D'où l'équivalence.

B) 1) A n'est pas ouvert $\Leftrightarrow E \times (F - H)$ $(x-\varepsilon < t < x+\varepsilon$ et $t \notin A)$

2) A est fermé $\Leftrightarrow \overline{A}$ est ouvert

$\Leftrightarrow (\forall x \in \overline{A})(\exists \varepsilon > 0)(\forall t \in \mathbb{R})(x-\varepsilon < t < x+\varepsilon \Rightarrow t \in \overline{A})$

$\Leftrightarrow (\forall x \notin A)(\exists \varepsilon > 0)(\forall t \in \mathbb{R})(x-\varepsilon < t < x+\varepsilon \Rightarrow t \notin A)$

A n'est pas fermé $\Leftrightarrow (\exists x \notin A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists t \in \mathbb{R})(x-\varepsilon < t < x+\varepsilon$ et $t \in A)$

II. On a :

$(x,y) \in (E \times F) - (G \times H) \Leftrightarrow (x,y) \in (E \times F)$ *et* $(x,y) \notin (G \times H)$

$\Leftrightarrow (x \in E$ et $y \in F)$ et $(x \notin G$ ou $y \notin H)$

$\Leftrightarrow [(x \in E$ et $y \in F)$ et $x \notin G]$ ou $[(x \in E$ et $y \in F)$ et $y \notin H)]$

$\Leftrightarrow [(x \in E$ et $x \notin G$ et $y \in F]$ ou $[(x \in E$ et $y \in F$ et $y \notin H)]$

$\Leftrightarrow [(x \in (E - G)$ et $y \in F]$ ou $[(x \in E$ et $y \in (F - H)]$

$\Leftrightarrow (x,y) \in (E - G) \times F$ ou $(x,y) \in E \times (F - H)$

$\Leftrightarrow (x,y) \in ((E - G) \times F) \cup (E \times (F - H))$.

D'où le résultat

III. On a :

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x\in\mathbb{N})(x\in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k) \Rightarrow (\exists x\in\mathbb{N})(\forall k\in\mathbb{N}, x\in A_k)$$

$$\Rightarrow (\exists x\in\mathbb{N})(\forall k\in\mathbb{N})(k\leq x\leq k+10) \Rightarrow (\exists x\in\mathbb{N})(\forall k\in\mathbb{N})(k\leq x)$$

$\Rightarrow (\exists x\in\mathbb{N})(x+1\leq x) \Rightarrow$ une absurdité. Donc $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \emptyset$

On a : $\forall k\in\mathbb{N}, A_k\subset\mathbb{N}$, donc $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \subset \mathbb{N}$. De plus, on a :

$\forall k\in\mathbb{N}, k\in A_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, donc $\mathbb{N}\subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$

Il résulte que : $\mathbb{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$

IV. 1) Soit $x\in(B-D)$, alors $x\in B$ et $x\notin D$, on a :

- $x\in C \Rightarrow x\in C-D\subset A \Rightarrow x\in A$
- $x\notin C \Rightarrow x\in B-C\subset A \Rightarrow x\in A$

D'où : $(\forall x)(x\in(B-D)\Rightarrow x\in A)$. Donc $(B-D)\subset A$

2) R est réflexive car on a :

$\forall X\in P(E)$, $X\Delta X = (X-X)\cup(X-X) = \emptyset \subset A \Rightarrow \forall X\in P(E)$, XRX

R est symétrique car on a : $\forall X,Y\in P(E)$,

$XRY \Leftrightarrow X\Delta Y\subset A \Rightarrow (X-Y)\cup(Y-X)\subset A \Rightarrow (Y-X)\cup(X-Y)\subset A$

$\Rightarrow Y\Delta X\subset A \Rightarrow YRX$

R est transitive car on a : $\forall X,Y,Z\in P(E)$

XRY et $YRZ \Rightarrow X\Delta Y\subset A$ et $Y\Delta Z\subset A$

$\Rightarrow (X-Y)\cup(Y-X)\subset A$ et $(Y-Z)\cup(Z-Y)\subset A$

$\Rightarrow (X-Y)\subset A$ et $(Y-X)\subset A$ et $(Y-Z)\subset A$ et $(Z-Y)\subset A$

$\Rightarrow (X-Y)\subset A$ et $(Y-Z)\subset A$ et $(Z-Y)\subset A$ et $(Y-X)\subset A$

$\Rightarrow (X-Y)\cup(Y-Z)\subset A$ et $(Z-Y)\cup(Y-X)\subset A$

$\Rightarrow (X-Z)\subset A$ et $(Z-X)\subset A$ (d'après 1))

$\Rightarrow (X-Z)\cup(Z-X)\subset A \Rightarrow X\Delta Z\subset A \Rightarrow XRZ$

Il en résulte que R est une relation d'équivalence sur P(E).

3) Soit $\overline{\emptyset}$ la classe d'équivalence de $\emptyset$, On a $\overline{\emptyset} = P(A)$ car :

$X\in\overline{\emptyset} \Leftrightarrow XR\emptyset \Leftrightarrow X\Delta\emptyset\subset A \Leftrightarrow (X-\emptyset)\cup(\emptyset-X)\subset A$

$\Leftrightarrow (X-\emptyset)\subset A$ et $(\emptyset-X)\subset A \Leftrightarrow (X-\emptyset)\subset A \Leftrightarrow X\subset A$

$\Leftrightarrow X\in P(A)$

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences
_ Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 100 | Année : 2012-2013
Durée : 1 heure | Examen : partiel

Exercice I :

a) P,Q étant deux propositions. Montrer que la proposition $[(P\vee Q)\Rightarrow(P\wedge Q)]\Leftrightarrow(P\Leftrightarrow Q)$ est une tautologie.

b) Ecrire la négation de la proposition suivante :

$$(\forall x\in\mathbb{R})(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall y\in\mathbb{R})\left[|x-y|<\delta\Rightarrow\left(|f(x)-f(y)|<\varepsilon \text{ ou } f(y)=0\right)\right]$$

Exercice II : E étant un ensemble et A,B,C,D des sous-ensembles de E.

Démontrer que :

a) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$.

b) $(A\,\Delta\, B=A\cap B)\Leftrightarrow A=B=\varnothing$.

c) $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$.

Exercice III :

a) Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N},(10)^n-(-1)^n$ est un mul ple de 11.

b) Montrer que la proposition ($\forall n\in\mathbb{N},2^n+3^n$ est premier) est fausse.

Exercice IV :

a) Soit $x\in\mathbb{N}^*$: Démontrer l'équivalence :

x est impair $\Leftrightarrow$ ($x=4k+r$ où $k\in\mathbb{N}$ et $r\in\{1,3\}$).

b) En déduire, en utilisant un raisonnement par contre-apposition que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ on a :

(n^2-1 n'est pas multiple de 8) $\Rightarrow n$ est pair.

BON TRAVAIL !

Barème : I : 20 pts. II : 30 pts. III : 25pts. IV : 25 pts

Solution de l'examen partiel du cours Math100 2012-2013

Par Dr Ziad Mawlawi

I. a) Il suffit de montrer que $(P\vee Q)\Rightarrow(P\wedge Q)$ et $P\Leftrightarrow Q$ ont même table de vérité. On a :

P	Q	$P\vee Q$	$\overline{P\vee Q}$	$P\wedge Q$	$(P\vee Q)\Rightarrow(P\wedge Q)$	$\overline{P}$	$\overline{P}\vee Q$	$\overline{Q}$	$\overline{Q}\vee P$	$P\Leftrightarrow Q$
V	V	V	F	V	**V**	F	V	F	V	**V**
V	F	V	F	F	**F**	F	F	V	V	**F**
F	V	V	F	F	**F**	V	V	F	F	**F**
F	F	F	V	F	**V**	V	V	V	V	**V**

D'où l'équivalence.

b) $(\exists x\in\mathbb{R})(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists y\in\mathbb{R})\,[\,|x-y|<\delta$ et $(|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$ et $f(y)\neq 0)\,]$

II. a) Car on a :

$x\in(A-B)\cap(C-D)\Leftrightarrow x\in(A-B)$ et $x\in(C-D)\Leftrightarrow(x\in A$ et $x\notin B)$ et $(x\in C$ et $x\notin D)$

$\Leftrightarrow(x\in A$ et $x\in C)$ et$(x\notin B$ et $x\notin D)\Leftrightarrow x\in(A\cap C)$ et $x\notin(B\cup D)$

$\Leftrightarrow x\in(A\cap C)-(B\cup D)$

<u>Autre méthode</u> : Si $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E. On a :

$$(A-B)\cap(C-D)=(A\cap\overline{B})\cap(C\cap\overline{D})=(A\cap C)\cap(\overline{B}\cap\overline{D})=(A\cap C)\cap(\overline{B\cup D})$$

$$=(A\cap C)-(B\cup D)$$

b) <u>La condition est nécessaire</u> : On remarque d'abord que $A\Delta B=\emptyset$ car :

$A\Delta B\neq\emptyset\Rightarrow(\exists x)(x\in A\Delta B)$

$x\in A\Delta B$ et $A\cap B=A\Delta B\Rightarrow x\in A\cup B-A\cap B$ et $x\in A\cap B\Rightarrow x\notin A\cap B$ et $x\in A\cap$

Ce qui est absurde. Donc $A\Delta B=A\cap B=\emptyset$

Solution de l'examen partiel du cours Math100 2012-2013

Par Dr Ziad Mawlawi

I. a) Il suffit de montrer que $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$ et $P \Leftrightarrow Q$ ont même table de vérité. On a :

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$	$\overline{P}$	$\overline{P} \vee Q$	$\overline{Q}$	$\overline{Q} \vee P$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	F	V	**V**	F	V	F	V	**V**
V	F	V	F	F	**F**	F	F	V	V	**F**
F	V	V	F	F	**F**	V	V	F	F	**F**
F	F	F	V	F	**V**	V	V	V	V	**V**

D'où l'équivalence.

b) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists y \in \mathbb{R})\,[\,|x - y| < \delta$ et $(|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$ et $f(y) \neq 0)\,]$

II. a) Car on a :

$x \in (A - B) \cap (C - D) \Leftrightarrow x \in (A - B)$ et $x \in (C - D) \Leftrightarrow (x \in A$ et $x \notin B)$ et $(x \in C$ et $x \notin D)$
$\Leftrightarrow (x \in A$ et $x \in C)$ et $(x \notin B$ et $x \notin D) \Leftrightarrow x \in (A \cap C)$ et $x \notin (B \cup D)$
$\Leftrightarrow x \in (A \cap C) - (B \cup D)$

__Autre méthode__ : Si $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E. On a :

$$(A - B) \cap (C - D) = (A \cap \overline{B}) \cap (C \cap \overline{D}) = (A \cap C) \cap (\overline{B} \cap \overline{D}) = (A \cap C) \cap \overline{(B \cup D)}$$

$$= (A \cap C) - (B \cup D)$$

b) __La condition est nécessaire__ : On remarque d'abord que $A \Delta B = \emptyset$ car :

$A \Delta B \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x)(x \in A \Delta B)$

$x \in A \Delta B$ et $A \cap B = A \Delta B \Rightarrow x \in A \cup B - A \cap B$ et $x \in A \cap B \Rightarrow x \notin A \cap B$ et $x \in A \cap B$

Ce qui est absurde. Donc $A \Delta B = A \cap B = \emptyset$

$A\Delta B = \emptyset \Rightarrow (A-B) \cup (B-A) = \emptyset \Rightarrow (A-B) = \emptyset$ et $(B-A) = \emptyset$

$\Rightarrow A - A\cap B = \emptyset$ et $B - B\cap A = \emptyset \Rightarrow A - \emptyset = A = \emptyset$ et $B - \emptyset = B = \emptyset$

La condition est suffisante :

$A = B = \emptyset \Rightarrow (A\cup B) = \emptyset$ et $(A\cap B) = \emptyset \Rightarrow A\Delta B = (A\cup B) - (A\cap B) = \emptyset = A\cap B$

c) On a :

$(x,y) \in (A-B)\times C \Rightarrow x \in (A-B)$ et $y \in C \Rightarrow x \in A$ et $x \notin B$ et $y \in C$

$\Rightarrow x \in A$ et $y \in C$ et $x \notin B$ et $y \in C \Rightarrow (x,y) \in A\times C$ et $(x,y) \notin B\times C$

$\Rightarrow (x,y) \in A\times C - B\times C$. D'où $(A-B)\times C \subset (A\times C) - (B\times C)$

$(x,y) \in A\times C - B\times C \Rightarrow (x,y) \in A\times C$ et $(x,y) \notin B\times C$

$\Rightarrow (x \in A$ et $y \in C)$ et $(x \notin B$ ou $y \notin C)$

$\Rightarrow [(x \in A$ et $y \in C)$ et $x \notin B)]$ ou $[(x \in A$ et $y \in C)$ et $y \notin C)]$

$\Rightarrow [(x \in A$ et $y \in C)$ et $x \notin B)]$ [car $[(x \in A$ et $y \in C)$ et $y \notin C)]$ est fausse]

$\Rightarrow (x \in A$ et $x \notin B)$ et $y \in C] \Rightarrow x \in (A-B)$ et $y \in C$

$\Rightarrow (x,y) \in (A-B)\times C$ D'où : $(A\times C) - (B\times C) \subset (A-B)\times C$

Il en résulte : $(A-B)\times C = (A\times C) - (B\times C)$

III. a) On raisonne par récurrence sur n

La propriété est vraie pour $n = 0$ (car $10^0 - (-1)^0 = 1 - 1 = 0 = 11.0 \in 11.\mathbb{N}$)

Supposons sa vérité pour n, c.à.d. $(10)^n - (-1)^n = 11.\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}$, on a alors :

$(10)^n - (-1)^n = (10)^n + (-1)^{n+1} = 11.\alpha \Rightarrow (10)^n = 11\alpha - (-1)^{n+1}$

$(10)^{n+1} - (-1)^{n+1} = 10(10^n) - (-1)^{n+1} = 10(11\alpha - (-1)^{n+1}) - (-1)^{n+1}$

$= 11(10\alpha - (-1)^{n+1}) \in 11.\mathbb{N}$

D'où $(10)^{n+1} - (-1)^{n+1}$ est un multiple de 11

b) On a $3 \in \mathbb{N}$ et $2^3 + 3^3 = 35$ n'est pas premier.

IV: la condition est nécessaire Soit $x \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que x est impair. la division euclidien de x par 4 donne $x = 4k+r$ avec $r \in \{0,1,2,3\}$. On a :

$r = 0 \Rightarrow x = 4k = 2(2k) \in 2\mathbb{N} \Rightarrow x$ est pair $\Rightarrow$ contradiction

$r = 2 \Rightarrow x = 4k + 2 = 2(2k+1) \in 2\mathbb{N} \Rightarrow x$ est pair $\Rightarrow$ contradiction

D'où $x = 4k + r$ avec $r \in \{1,3\}$

La condition est suffisante On a :

$r = 1 \Rightarrow x = 4k + 1 = 2(2k) + 1$ où $2k \in \mathbb{N} \Rightarrow x$ est impair

$r = 3 \Rightarrow x = 4k + 3 = 2(2k+1) + 1$ où $2k+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow x$ est impair

b) On suppose que n est impair, alors il existe $(k,r) \in \mathbb{N} \times \{1,3\}$ tel que $n = 4k + r$, on a :

$r = 1 \Rightarrow n^2 = 16k^2 + 1 + 8k \Rightarrow n^2 - 1 = 16k^2 + 8k = 8(2k^2 + 4k) \in 8\mathbb{N}$

$r = 3 \Rightarrow n^2 = 16k^2 + 9 + 24k \Rightarrow n^2 - 1 = 16k^2 + 24k + 8 = 8(2k^2 + 3k + 1) \in 8\mathbb{N}$

D'où n impair $\Rightarrow n^2 - 1$ est multiple de 8.

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 100
Durée : 1 heure

Année : 2011-2012
Examen : partiel

Exercice I :

a) Montrer que $\forall p,q \in \mathbb{N}^*,\ 2^p \neq 3^q$.

b) Déduire que le réel $\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$ n'est pas rationnel.

Exercice II : On définit sur l'ensemble $\mathbb{R}$ la relation binaire R par :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ xRy \Leftrightarrow xy^2 + x = yx^2 + y.$$

a) Montrer que R est une relation d'équivalence.

b) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminer la classe d'équivalence de a modulo R.

Exercice III : E étant un ensemble et A, B, C des sous-ensembles de E.

On pose : $X = (A - B) - C$ et $Y = A - (B - C)$.

a) Montrer que $X = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

b) Montrer que $Y = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C)$.

c) En déduire que $X \subset Y$.

d) Montrer que si $A \cap C = \varnothing$ alors $X = Y$.

e) Donner un exemple montrant que l'inclusion trouvée dans c) peut être stricte.

BON TRAVAIL !

Barème : I : 20 pts, II : 30 pts, III : 50 pts

Solution de L'examen partiel Math 100 2011-2012
Par Dr. Ziad Mawlawi

Exercice I : a) On raisonne par l'absurde. S'il existe $p,q\in\mathbb{N}^*$ tel que $2^p=3^q$ alors 2 qui divise 2^p doit diviser 3^q, ce qui implique que 2 est un multiple de 3, ce qui est absurde.

b) La relation ($\frac{\ln 3}{\ln 2}\in\mathbb{Q}$) est vraie $\Rightarrow$ $\exists p,q\in\mathbb{N}^*/\ \frac{\ln 3}{\ln 2}=\frac{p}{q}$

$\Rightarrow \exists p,q\in\mathbb{N}^*/\ q\ln 3=p\ln 2$ $\Rightarrow$ $\exists p,q\in\mathbb{N}^*\ /\ \ln 3^q=\ln 2^p$

$\Rightarrow \exists p,q\in\mathbb{N}^*\ /\ 3^q=2^p$ $\Rightarrow$ une contradiction avec a)

Donc la relation ($\frac{\ln 3}{\ln 2}\in\mathbb{Q}$) est fausse.

Exercice II : a) R est **réflexive** car on a :
$\forall x\in\mathbb{R},\ xx^2+x=xx^2+x \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}, xRx$
R est **symétrique** car on a :
$\forall x,y\in\mathbb{R},\ xRy \Rightarrow xy^2+x=yx^2+y \Rightarrow yx^2+y=xy^2+x \Rightarrow yRx$
R est **transitive** : Soit $x,y,z\in\mathbb{R}$ tel que xRy et yRz.
xRy et yRz $\Rightarrow xy^2+x=yx^2+y$ et $yz^2+y=zy^2+z \Rightarrow$
$z(xy^2+x)+x(yz^2+y)=z(yx^2+y)+x(zy^2+z) \Rightarrow x(yz^2+y)=z(yx^2+y)$
$\Rightarrow y(xz^2+x)=y(zx^2+z)$
Si $y\neq 0$, alors $(xz^2+x)=(zx^2+z)$ et xRz.
Si $y=0$ alors : xRy et yRz $\Rightarrow$ $x=0$ et $z=0 \Rightarrow$ xRz.
D'où : $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ xRy et yRz $\Rightarrow$ xRz.
R réflexive, symétrique et transitive, donc c'est une relation d'équivalence.

b) $x\in\bar{a}\Leftrightarrow xRa \Leftrightarrow xa^2+x=ax^2+a \Leftrightarrow (xa^2-ax^2)=(a-x)$
$\Leftrightarrow xa(a-x)=(a-x) \Leftrightarrow (a-x)(xa-1)=0 \Leftrightarrow a-x=0$ ou $xa-1=0 \Leftrightarrow x\in\{a,\frac{1}{a}\}$

Donc $\bar{a}=\{a,\frac{1}{a}\}$

Exercice III. a) $X=(A-B)-C=(A\cap\bar{B})\cap\bar{C}=A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$

b) $Y=A-(B-C)=A-(B\cap\bar{C})=A\cap\overline{(B\cap\bar{C})}=A\cap(\bar{B}\cup\bar{\bar{C}})=A\cap(\bar{B}\cup C)$

$=(A\cap\bar{B})\cup(A\cap C)$

c) On a : $X=(A\cap\bar{B})\cap\bar{C}\subset(A\cap\bar{B})\subset(A\cap\bar{B})\cup(A\cap C)=Y$

d) On note: $A=A\cap E=A\cap(C\cup\bar{C})=(A\cap C)\cup(A\cap\bar{C})=\varnothing\cup(A\cap\bar{C})=A\cap\bar{C}$

D'où: $X=(A\cap\bar{C})\cap\bar{B}=A\cap\bar{B}=(A\cap\bar{B})\cup\varnothing=(A\cap\bar{B})\cup(A\cap C)=Y$

e) Soient $E=\{1,2,3\}$, $A=\{1\}$, $B=\{3\}$ et $C=\{1,2\}$. On a :

$A-B=\{1\}$ et $X=(A-B)-C=\{1\}-\{1,2\}=\varnothing$

$B-C=\{3\}$ et $Y=A-(B-C)=\{1\}-\{3\}=\{1\}$

D'où: $X\subset Y$ et $X\neq Y$

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 100
Durée : 1 heure

Année : 2010-2011
Examen : Partiel

Exercice I : P, Q et R étant des propositions. Démontrer que la proposition suivante est une tautologie :

$$[P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \Rightarrow R].$$

Exercice II : Soient x, y deux nombres rationnels $(x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q})$. Démontrer, en utilisant le principe de contre-apposition l'implication suivante :

$$\sqrt{x} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) \notin \mathbb{Q}.$$

Exercice III : E étant un ensemble et A, B et C des sous-ensembles de E. Démontrer que :

$$(A \cap B = A \cap C) \Leftrightarrow \left(A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}\right).$$

Exercice IV: Soit $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$. L'objectif de cet exercice est de montrer que D n'est pas la forme $A \times B$ avec $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$. Pour cela, on suppose, par l'absurde, que $D = A \times B$ avec $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$.

1) Vérifier que $(1, 0) \in D$ et $(0, 1) \in D$.
2) En déduire que $(1, 1) \in D$.
3) Conclure.

Exercice V: Soient E un ensemble, $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$ deux familles de sous-ensembles de E.

1) Démontrer que : $\bigcup\limits_{i \in I} (A_i - B_i) \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i - \bigcap\limits_{i \in I} B_i$.
2) Utiliser les ensembles suivants pour montrer que cette inclusion peut être stricte : $E = \{1, 2\}$; $A_1 = \{2\}$; $A_2 = \{1\}$; $B_1 = \{2\}$; $B_2 = E$.

BON TRAVAIL !

Barème: I : 20pts ; II : 20pts ; III : 20points ; IV : 20 pts ; V : 20 pts.

Solution de L'examen partiel Math 100 2010-2011

Par Dr. Ziad Mawlawi

Exercice I: On a :

$[P\Rightarrow(Q\Rightarrow R)] \Leftrightarrow [\overline{P} \vee (\overline{Q} \vee R)] \Leftrightarrow [(\overline{P} \vee \overline{Q}) \vee R)] \Leftrightarrow [(\overline{P \wedge Q}) \vee R]$

$\Leftrightarrow [(P \wedge Q) \Rightarrow R]$

Exercice II : On a :

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y}) = \frac{x-y}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \in \mathbb{Q}$$

$(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \in \mathbb{Q}$ et $(\sqrt{x}-\sqrt{y}) \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2\sqrt{x} = (\sqrt{x}+\sqrt{y}) + (\sqrt{x}-\sqrt{y}) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$

Exercice III : $\Rightarrow$) On a :

$x \in A \cap \overline{B} \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in A$ et $x \notin B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \notin A \cap B \Leftrightarrow$

$x \in A$ et $x \notin A \cap C$ (car $A \cap B = A \cap C$) $\Leftrightarrow x \in A$ et $x \notin C \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in \overline{C}$

$\Leftrightarrow x \in A \cap \overline{C}$

D'où : $(\forall x)(x \in A \cap \overline{B} \Leftrightarrow x \in A \cap \overline{C})$ donc $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.

$\Leftarrow$) $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \Rightarrow A \cap \overline{\overline{B}} = A \cap \overline{\overline{C}}$ [d'après ce qui précède $\Rightarrow$)]

$\Rightarrow A \cap B = A \cap C$ (car $\overline{\overline{B}} = B$ et $\overline{\overline{C}} = C$).

Exercice IV : 1) On a : $1^2+0^2 \le 1$ et $0^2+1^2 \le 1 \Rightarrow (1,0) \in D$ et $(0,1) \in D$

2) $(1,0) \in D = A \times B$ et $(0,1) \in D = A \times B \Rightarrow 1 \in A$ et $1 \in B \Rightarrow (1,1) \in A \times B = D$

3) $1^2+1^2 \succ 1 \Rightarrow (1,1) \notin D$. on a une absurdité car on a supposé que D est de la forme $A \times B$

Exercice V : 1) on a :

~~$x \in \bigcup_{i \in I}(A_i - B_i) \Rightarrow (\exists i \in I)(x \in A_i$ et $x \notin B_i) \Rightarrow (\exists i \in I)(x \in A_i)$ et $(\exists i \in I)(x \notin B_i)$~~

~~$\Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ et $x \notin \bigcap_{i \in I} B_i$~~ $\Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} A_i - \bigcap_{i \in I} B_i$

On en déduit que : $\bigcup_{i \in I}(A_i - B_i) \subset \bigcup_{i \in I} A_i - \bigcap_{i \in I} B_i$

2) $A_1 - B_1 = \{2\} - \{2\} = \varnothing$, $A_2 - B_2 = \{1\} - \{1,2\} = \varnothing$, $\bigcup_{1 \le i \le 2} A_i = \{2\} \cup \{1\} = \{1,2\}$

$\bigcap_{1 \le i \le 2} B_i = \{2\} \cap \{1,2\} = \{2\}$ et $\bigcup_{1 \le i \le 2} A_i - \bigcap_{1 \le i \le 2} B_i = \{1,2\} - \{2\} = \{1\}$

$\bigcup_{1 \le i \le 2}(A_i - B_i) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

D'où $\bigcup_{1 \le i \le 2} A_i - \bigcap_{1 \le i \le 2} B_i \not\subset \bigcup_{1 \le i \le 2}(A_i - B_i)$

LEBANESE UNIVERSITY
Faculty of Science
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Course : Math100
Duration : 1 H

ENGLISH

Year : 2009-2010
Exam : Partial

Exercise I : Using the fact that $\sqrt{2}$ is not rational, prove that there is no rational numbers a and b such that $\sqrt{3}=a+b\sqrt{2}$ *(Hint : calculate the power2 !)*

Exercise II : Prove that $\forall n\in\mathbb{N}$, we have : $3^{2n+2}-2^{n+1}$ is divisible by 7.

Exercise III : E is a set and A, B are two subsets of E. Prove that:

1) $(A\cup B)\cap\overline{B}=A\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$.
2) $(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\subset(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$.

Exercise IV : A binary relation R is defined on $\mathbb{R}$ as follows :

$$\forall x,y\in\mathbb{R}\quad xRy\Leftrightarrow x^2-y^2-4x+4y=0$$

1) Prove that R is an equivalence relation on $\mathbb{R}$.
2) Let $a\in\mathbb{R}$. Determine the equivalence class $\overline{a}$ of a modulo R.
3) Deduce the quotient set $\mathbb{R}/R$.

Marking scheme: I :15pts II : 15pts III : 35pts IV : 35 pts.

Good luck

Solution de l'examen partiel du cours Math100 2009-2010

Par Dr Ziad Mawlawi

Exercice I. S'il existe $a,b \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$, on aurait :

$$\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} \Rightarrow 3 = (a + b\sqrt{2})^2 = a^2 + b^2 + 2\sqrt{2}\ ab \Rightarrow \frac{3 - a^2 - 2b^2}{2ab} = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ une absurdité.

Donc on ne peut pas trouver $a,b \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$.

Exercice II. On sait que : $\forall a,b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-(n-2)}b^{n-3} + a^{n-(n-1)}b^{n-2} + a^{n-n}b^{n-1})$$

D'où $3^{2n+2} - 2^{n+1} = (3^2)^{n+1} - 2^{n+1} = (3^2 - 2)(9^n + 9^{n-1}2 + \ldots + 2^n)$

Comme $(3^2 - 2) = 7$ et l'autre facteur $(9^n + 9^{n-1}2 + \ldots + 2^n)$ est un entier, alors $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.

Exercice III. 1) On remarque d'abord:

$(A \cup B) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup \varnothing = A \cap \overline{B}$. D'où

$\Rightarrow) (A \cup B) \cap \overline{B} = A \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \Rightarrow A \subset \overline{B} \Rightarrow A \cap B \subset \overline{B} \cap B = \varnothing$.

$\Rightarrow A \cap B = \varnothing$

$\Leftarrow) A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \subset \overline{B} \Rightarrow A \cap \overline{B} = A \Rightarrow (A \cup B) \cap \overline{B} = A$

2) On a :

$x \in (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \Rightarrow x \in (A \cap \overline{B})$ ou $x \in (\overline{A} \cap B) \Rightarrow$

$(x \in A$ et $x \in \overline{B})$ ou $(x \in \overline{A}$ et $x \in B) \Rightarrow$

$[(x \in A$ et $x \in \overline{B})$ ou $x \in \overline{A}]$ et $[(x \in A$ et $x \in \overline{B})$ ou $x \in B] \Rightarrow$

$[(x \in A$ ou $x \in \overline{A})$ et $(x \in \overline{B}$ ou $x \in \overline{A})]$ et $[(x \in A$ ou $x \in B)$ et $(x \in \overline{B}$ ou $x \in B)]$

$\Rightarrow (x \in \overline{B}$ ou $x \in \overline{A})$ et $(x \in A$ ou $x \in B) \Rightarrow x \in (\overline{A} \cup \overline{B})$ et $x \in (A \cup B) \Rightarrow$

$x \in (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.

On en déduit l'inclusion.

Exercice IV : 1) R est réflexive car on a :

$\forall x \in \mathbb{R},\quad x^2 - x^2 - 4x + 4x = 0 \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\quad x R x$

R est symétrique car on a :

$\forall x, y \in \mathbb{R}\quad xRy \Rightarrow x^2 - y^2 - 4x + 4y = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 - 4y + 4x = 0 \Rightarrow yRx$

R est transitive car on a :

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\quad xRy$ et $yRz \Rightarrow x^2 - y^2 - 4x + 4y = 0$ et $y^2 - z^2 - 4y + 4z = 0 \Rightarrow$

$(x^2 - y^2 - 4x + 4y) + (y^2 - z^2 - 4y + 4z) = 0 \Rightarrow x^2 - z^2 - 4x + 4z = 0 \Rightarrow xRz$

R étant réflexive, symétrique et transitive, donc c'est une relation d'équivalence.

2) On a :

$x \in \bar{a} \Leftrightarrow xRa \Leftrightarrow x^2 - a^2 - 4x + 4a = 0 \Leftrightarrow (x-a)(x+a) - 4(x-a) = 0$

$\Leftrightarrow (x-a)[(x+a) - 4] = 0 \Leftrightarrow (x-a) = 0$ ou $(x+a) - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a+4 \Leftrightarrow x \in \{a, -a+4\}$

Il en résulte : $(\forall x)(x \in \bar{a} \Leftrightarrow x \in \{a, -a+4\})$ donc $\bar{a} = \{a, -a+4\}$

3) $\mathbb{R}/R = \{\bar{a} ; a \in \mathbb{R}\} = \{\{a, -a+4\} ; a \in \mathbb{R}\}$

Université Libanaise | *Math100* | *Examen partiel*
Faculté des sciences III | *Durée : 1 heure* | *2008-2009*

I

On considère les ensembles suivants :

$A = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, i < j\}$

$B = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, i = j\}$

$C = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, i > j\}$

Montrer que A, B, C forment une partition de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

20 pts

II

Soit (P) la proposition suivante:

$(\forall a \in \mathbb{N}^*)(\forall b \in \mathbb{N}^*)(a \cdot b$ est impair $\Rightarrow a$ et b sont impairs$)$

1) Ecrire la négation de (P).

2) En utilisant le principe de contre-apposition, donner une proposition équivalente à (P).

20 pts

III

On considère l'ensemble $E = \mathbb{N} - \{0\}$. On définit sur l'ensemble $E \times E$ la relation binaire $\mathfrak{R}$ par :

$\forall (x,y),(x',y') \in E \times E \quad (x,y)\mathfrak{R}(x',y') \Leftrightarrow x = x'$ *et* y divise y'

1) Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre sur $E \times E$ et que cet ordre est partiel.

2) Soit $A = \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,6)\}$. Déterminer, lorsqu'ils existent, les éléments spéciaux suivants de A : plus petit élément, plus grand élément, les éléments minimaux et les éléments maximaux.

30pts

IV

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathfrak{R}$ par :

$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow x^4 = y^4)$.

1) Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer les classes d'équivalence modulo $\mathfrak{R}$ de 0 et de 1.

3) Déterminer la classe d'équivalence de tout élément non nul a de $\mathbb{R}$.

30pts

Bonne chance!

Solution de l'examen partiel de Math100 (08-09)

(Dr. Ziad Mawlawi)

I. A, B, C forment une partition de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ si on a :

1) $A\neq\phi$, $B\neq\phi$ et $C\neq\phi$

2) $A\cap B=\phi$, $B\cap C=\phi$ et $A\cap C=\phi$

3) $A\cup B\cup C=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

En effet : 1) $(1,2)\in A$, $(1,1)\in B$ et $(2,1)\in C\Rightarrow A\neq\phi$, $B\neq\phi$ et $C\neq\phi$

2) $A\cap B\neq\phi\Rightarrow[\exists(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}/(i,j)\in A\cap B]\Rightarrow[\exists(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}/(i,j)\in A$ et $(i,j)\in B]$

$\Rightarrow[\exists(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}/ i<j$ et $i=j]\Rightarrow$ une absurdité

Donc $A\cap B=\phi$. De même on démontre $B\cap C=\phi$ et $A\cap C=\phi$

3) $\forall(i,j)$ $[(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}]\Rightarrow[i<j$ ou $i=j$ ou $j<i]\Rightarrow[(i,j)\in A$ ou $(i,j)\in B$ ou $(i,j)\in C]$

$\Rightarrow[(i,j)\in A\cup B\cup C$

D'où $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\subseteq A\cup B\cup C$. Comme $A\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $B\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et $C\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ alors

$A\cup B\cup C\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Il en résulte $A\cup B\cup C=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

II. 1) $(\exists a\in\mathbb{N}^*)(\exists b\in\mathbb{N}^*)$ (a.b impair et [a ou b est pair])

2) $(\forall a\in\mathbb{N}^*)(\forall b\in\mathbb{N}^*)$ (a ou b est pair $\Rightarrow$ a.b est pair)

III. 1) pour tout $(x,y)\in E$, notons x divise y par x/y.

R est une relation d'équivalences dans $E\times E$ car :

a) R est réflexive : $\forall(x,y)\in E\times E$ $x=x$ et $y/y\Rightarrow(x,y)R(x,y)$.

b) R est antisymétrique : $\forall(x,y),(x',y')\in E\times E$, on a :

$[(x,y)R(x',y')$ et $(x',y')R(x,y)]\Rightarrow[(x=x'$ et $y/y')$ et $(x'=x$ et $y'/y)]\Rightarrow[x=x'$ et $y=y']$

$\Rightarrow[(x,y)=(x',y')]$.

c) R est transitive : $\forall(x,y),(x',y'),(x'',y'')\in E\times E$, on a :

$(x,y)R(x',y')$ et $(x',y')R(x'',y'')\Rightarrow[x=x''$ et y/y' et $x'=x''$ et $y'/y'']\Rightarrow[x=x''$ et $y/y'']$

$\Rightarrow(x,y)R(x'',y'')$

- L'ordre R est partiel car (1,2) et (2,1) sont 2 éléments de $E\times E$ non comparables

(On n'a pas : [(1,2) R$(2,\overline{1})$ ou (2,1) R(1,2))

2) - A n'a pas un plus petit élément et un plus grand élément car on a les relations :

(a, b) plus petit élément de A $\Rightarrow$ [(a, b) R (1,2) et (a ,b) R (2,3)] $\Rightarrow$ a = 1 et a = 2.

Ce qui est absurde.

(a, b) plus grand élément de A $\Rightarrow$ [(1,2) R (a, b) et (2,3) R (a, b)] $\Rightarrow$ a = 1 et a =2.

Ce qui est absurde.

- (1 ,1) et (2 ,3) sont les éléments minimaux de A car on a les relations :
$\forall$ (x, y) $\in$ A, [(x, y) R (1 ,1)] $\Rightarrow$ [x = 1 et y/1] $\Rightarrow$ [x = 1 et y =1] $\Rightarrow$ [(x, y)=(1,1)]
[Car les éléments de A dont la première composante est 1 sont (1 ,2) et (1 .3)]
$\forall$ (x, y) $\in$ A, [(x, y) R (2 ,3)] $\Rightarrow$ [x = 2 et y/3] $\Rightarrow$ [x = 2 et y =3] $\Rightarrow$ [(x, y)=(2,3)]
(Car les éléments de A dont la première composante est 2 sont (2 ,3) et (2 .6)]

- (1 ,2) et (2 ,6) sont les éléments maximaux de A car on a les relations :
$\forall$ (x, y) $\in$ A, [(1, 2) R (x, y)] $\Rightarrow$ [x = 1 et 2/y] $\Rightarrow$ [x = 1 et y=2] $\Rightarrow$ [(x, y)=(1,2)]
[Car les éléments de A dont la première composante est 1 sont (1 ,2) et (1 .3)]
$\forall$ (x, y) $\in$ A, [(2; 6) R (x, y)] $\Rightarrow$ [x = 2 et 6/y] $\Rightarrow$ [x = 2 et y=6] $\Rightarrow$ [(x, y)=(2,6)]
(Car les éléments de A dont la première composante est 2 sont (2 ,3) et (2 .6)]

IV. 1) R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ car :

a) R est réflexive : $\forall x\in \mathbb{R}$, $(x^4=x^4)$ $\Rightarrow x\,R\,x$

b) R est symétrique : $\forall x, y\in \mathbb{R}$, $x\,R\,y \Rightarrow (x^4=y^4) \Rightarrow (y^4=x^4) \Rightarrow y\,R\,x$

c) R est transitive : $\forall x, y, z\in \mathbb{R}$, $(x\,R\,y$ et $y\,R\,z) \Rightarrow (x^4=y^4$ et $y^4=z^4) \Rightarrow (x^4=z^4)$
$\Rightarrow x\,R\,z$

2) Si $\overline{0}$ et $\overline{1}$ désignent les classes de 0 et 1 modulo R respectivement, on a :

$x\in \overline{0} \Leftrightarrow x\,R\,0 \Leftrightarrow x^4=0^4 \Leftrightarrow x=0 \Leftrightarrow x\in\{0\}$. Donc $\overline{0}=\{0\}$.

$x\in \overline{1} \Leftrightarrow x\,R\,1 \Leftrightarrow x^4=1^4 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1 \Leftrightarrow x\in\{1,-1\}$. Donc $\overline{1}=\{1,-1\}$.

3) Si $\overline{a}$ désigne la classe d'un élément non nul a de $\mathbb{R}$ modulo R, on a :

$x\in \overline{a} \Leftrightarrow x\,R\,a \Leftrightarrow x^4=a^4 \Leftrightarrow x=a$ ou $x=-a \Leftrightarrow x\in\{a,-a\}$. Donc $\overline{a}=\{a,-a\}$.

UNIVERSITÉ LIBANAISE

Faculté des Science

Section 3

الجامعة اللبنانية

كلية العلوم

الفرع الثالث

Cours : Math 100

Durée : 1 heures

Année : 07- 08

Examen : partiel

Exercice 1. E étant un ensemble et A,B,C trois sous ensemble de E . Montrer que

1) $(A\cup B = A\cup C) \Leftrightarrow (B\subset A \text{ et } A\subset C)$

2) $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$

Exercice 2.

1) Soit E un ensemble. Existe-t-il un ensemble A tel que $A\in P(E)$ et $A\subset P(E)$?

2) Soit E un ensemble et A une partie de E. Trouver un ensemble B tel que $A\in B$ et $A\subset B$.

Exercice 3. On définit sur l'ensemble $\mathbb{R}$ la relation binaire R par :

$$\forall x, y\in\mathbb{R} \quad xRy \Leftrightarrow (x=y \text{ ou } x^2-y^2\leq 3)$$

Etudier la réflexivité, l'antisymétrie et la transitivité de R.

Exercice 4. Sur l'ensemble $\mathbb{Q}$, on définit la relation binaire R par :

$$\forall x, y\in\mathbb{Q} \quad xRy \Leftrightarrow (x-y\in\mathbb{N})$$

a) Montrer que R est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{Q}$.

b) Soit $A=\{\frac{1}{2}, 1,2,3\}$. Donner (lorsqu'ils existent) le plus petit élémen le plus grand élément , les éléments maximaux et les éléments minim de A.

c) A est elle majoré dans $\mathbb{Q}$ pour la relation R ? minoré ? Justifier.

d) $\mathbb{N}$ admet-il un plus grand élément pour cette relation ? Si oui trouve

Solution de l'examen partiel du cours Math100 2007-2008

Par Dr Ziad Mawlawi

Exercice 1 .1) On a :

$\Rightarrow$) $B \subset A \cup B$ et $A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \cap C \Rightarrow B \subset A$ et $B \subset C \Rightarrow B \subset C$

$A \subset A \cup B$ et $A \cup B = A \cap C \Rightarrow A \subset A \cap C \Rightarrow A \subset A$ et $A \subset C \Rightarrow A \subset C$

$\Leftarrow$) $B \subset A$ et $A \subset C \Rightarrow A \cup B = A$ et $A \cap C = A \Rightarrow A = A \cup B = A \cap C$

2) $A - (B \cup C) = A \cap (\overline{B \cup C}) = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C})$

$= (A - B) \cap (A - C)$

On note que : pour $X \subset E$, $\overline{X}$ est le complémentaire de X dans E

Exercice 2.

1) Oui car si $A = \varnothing$, on a : $A \in P(E)$ et $A \subset P(E)$?

2) Si $B = A \cup \{A\}$ alors $A \in B$ et $A \subset B$.

Exercice 3. R est réflexive car on a :

$\forall x \in \mathbb{R}, x = x \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x = x$ ou $x^2 + x^2 \le 3 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \ xRx$

~~R n'est pas antisymétrique car on a :~~

$1, \sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $1R\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}R1$ et $1 \ne \sqrt{2}$.

R n'est pas transitive car on a :

$\sqrt{2}, 0, \sqrt{3} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2}R0$ et $0R\sqrt{3}$ et on n'a pas $\sqrt{2}R\sqrt{3}$

$(\sqrt{2}^2 + 0^2 \le 3$ et $0^2 + \sqrt{3}^2 \le 3$ et $\sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2 > 3)$

Exercice 4. a) R est réflexive car on a :

$\forall x \in \mathbb{Q}, x - x = 0 \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{Q}, \ xRx$

R est antisymétrique car on a : $\forall x, y \in \mathbb{Q}$,

xRy et $yRx \Rightarrow x - y \in \mathbb{N}$ et $y - x \in \mathbb{N} \Rightarrow x - y \in \mathbb{N}$ et $-(x-y) \in \mathbb{N} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$ -

<u>R est transitive</u> car on a : $\forall x,y,z \in \mathbb{Q}$,

$x R y$ et $y R z \Rightarrow x-y \in \mathbb{N}$ et $y-z \in \mathbb{N} \Rightarrow (x-y)+(y-z) \in \mathbb{N} \Rightarrow x-z \in \mathbb{N} \Rightarrow x R z$

R étant réflexive, antisymétrique et transitive, donc c'est une relation d'ordre.

<u>R est partiel</u> car il existe deux éléments de $\mathbb{Q}$ ne sont pas comparables par R.

En effet :

$1, \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $(\frac{1}{2}-1) \notin \mathbb{N}$ et $(1-\frac{1}{2}) \notin \mathbb{N}$ donc. on n'a pas $(\frac{1}{2} R 1$ ou $1 R \frac{1}{2})$

b) <u>A est sans un plus petit élément et sans un plus grand élément</u>. En effet ;

$\frac{1}{2}$ n'est pas le plus petit élément car $(\frac{1}{2}-1) \notin \mathbb{N}$ c.à.d. $\frac{1}{2} R 1$ n'est pas vraie.

$\frac{1}{2}$ n'est pas le plus grand élément car $(1-\frac{1}{2}) \notin \mathbb{N}$ c.à.d. $1 R \frac{1}{2}$ n'est pas vraie.

1 n'est pas le plus petit élément car $(1-2) \notin \mathbb{N}$ c.à.d. $1 R 2$ n'est pas vraie.

1n'est pas le plus grand élément car $(\frac{1}{2}-1) \notin \mathbb{N}$ c.à.d. $\frac{1}{2} R 1$ n'est pas vraie.

2 n'est pas le plus petit élément car $(2-3) \notin \mathbb{N}$ c.à.d. $2 R 3$ n'est pas vraie.

2 n'est pas le plus grand élément car $(\frac{1}{2}-2) \notin \mathbb{N}$ c.à.d. $\frac{1}{2} R 2$ n'est pas vraie.

3 n'est pas le plus petit élément car $(3-\frac{1}{2}) \notin \mathbb{N}$ c.à.d. $3 R \frac{1}{2}$ n'est pas vraie.

3 n'est pas le plus grand élément car $(\frac{1}{2}-3) \notin \mathbb{N}$ c.à.d. $\frac{1}{2} R 3$ n'est pas vraie.

$\{\frac{1}{2}, 1\}$ est **l'ensemble de éléments maximaux de** A car on a :

$\forall x \in A, \frac{1}{2} R x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ et $\forall x \in A, 1 R x \Rightarrow x = 1$

Et 2 (resp. 3) n'est pas maximal dans A car on a $2 R 1$ (resp. $3 R 2$)

$\{\frac{1}{2}, 3\}$ **est l'ensemble de éléments minimaux de A** car on a :

$\forall x \in A,\ xR\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ et $\forall x \in A,\ xR3 \Rightarrow x = 3$

Et 1 (resp. 2) n'est pas minimal dans A car on a $2R1$ (resp. $3R2$).

c) S'il existe un majorant m de A dans $\mathbb{Q}$, on aurait : $1R\,m$ et $\frac{1}{2}R\,m$

$1R\,m$ et $\frac{1}{2}R\,m \Rightarrow (1-m) \in \mathbb{N}$ et $(\frac{1}{2}-m) \in \mathbb{N} \Rightarrow (1-m)-(\frac{1}{2}-m) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$

Ce qui est absurde.

Donc il n'existe pas un majorant de A dans $\mathbb{Q}$.

S'il existe un minorant n de A dans $\mathbb{Q}$, on aurait : $nR\frac{1}{2}$ et $n\,R\,1$

$nR\frac{1}{2}$ et $n\,R\,1 \Rightarrow (n-\frac{1}{2}) \in \mathbb{N}$ et $(n-1) \in \mathbb{N} \Rightarrow (n-\frac{1}{2})-(n-1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$

Ce qui est absurde

Donc il n'existe pas un minorant de A dans $\mathbb{Q}$.

d) 0 est le plus grand élément de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ pour la relation R car on a :

$0 \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{N}$, on a : $x\,R\,0$ (car $x-0 = x \in \mathbb{N}$)

Jniversité Libanaise
Faculté des sciences III
Tripoli — Liban

ours: Math100
xamen : Partiel

Date: 4 janvier 2007
Durée : 1 heure

Exercice I (60 points)

Soit E un ensemble non vide et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1) Pour $X, Y \in \mathcal{P}(E)$, démontrer l'équivalence :

$$X \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow X \subseteq \complement Y$$

où $\complement Y$ désigne le complémentaire de Y dans E

2) On pose $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$. On définit sur $\mathcal{F}$ une relation binaire $\mathcal{R}$ telle que :
$\forall X, Y \in \mathcal{F} \qquad X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \cap \complement Y = \emptyset$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}$. L'ordre $\mathcal{R}$ est-il total ? Justifier.

b) La relation $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$? Justifier.

c) Montrer que l'ensemble ordonné $\mathcal{F}$ admet un plus grand élément que l'on détrminera.

d) Donner au moins un élément minimal de $\mathcal{F}$ pour la relation $\mathcal{R}$.

Exercice II (40 points)

Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $X_n = \{n\} \times \mathbb{Z}$.

1) Montrer que la famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une partition de E.

2) On définit dans E une relation binaire S telle que :
$\forall (a,b),(c,d) \in E \qquad (a,b) S (c,d) \Leftrightarrow a = c$ et $|b| = |d|$

a) Montrer que S est une relation d'équivalence dans E.

b) Determiner la classe d'equivalence modulo S d'un élément $(a,b) \in E$ dans les cas où $b = 0$ et $b \neq 0$.

Bonne Chance

Solution de l'examen partiel du cours Math100 2006-2007

Par Dr Ziad Mawlawi

Exercice I. 1) D'après le principe de la contre apposition Il suffit de démontrer l'équivalence : $X \cap Y \neq \varnothing \Leftrightarrow X \not\subset \complement Y$.

$X \cap Y \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists x ; x \in X$ et $x \in Y \Leftrightarrow \exists x ; x \in X$ et $x \notin \complement Y \Leftrightarrow X \not\subset \complement Y$

2) On remarque d'abord que : $\forall X, Y \in P(E)$
$XRY \Leftrightarrow X \cap \complement Y = \varnothing \Leftrightarrow X \subset \complement\complement Y = Y$.

a) R est réflexive car on a : $\forall X \in F, X \subset X \Rightarrow \forall X \in F, XRX$

b) R est antisymétrique car on a : $\forall X, Y \in F$

XRY et $YRX \Rightarrow X \subset Y$ et $Y \subset X \Rightarrow X = Y$

c) R est transitive car on a : $\forall X, Y, Z \in F$

XRY et $YRZ \Rightarrow X \subset Y$ et $Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z \Rightarrow XRZ$

R étant réflexive, antisymétrique et transitive, donc c'est une relation d'ordre.

R n'est pas total car il existe deux éléments d'un ensemble F incomparables par R. En effet : Pour $E = \{a,b\}$, $F = P(E) - \{\varnothing\}$, $X = \{a\}$ et $Y = \{b\}$ ne sont pas comparables.

b) R n'est pas symétrique, donc elle n'est pas une relation d'équivalence.

En effet : Pour $E = \{a,b\}$, $F = P(E) - \{\varnothing\}$, $X = \{a\}$ et $Y = E$ on a : XRY et non YRX.

c) $E \in F$ et c'est le plus grand élément de F car on : $\forall X \in F$, XRF

d) Soit $a \in E$ (a existe car $E \neq \varnothing$). On a : $\{a\} \in F$ et c'est un élément minimal de F, car si $X \in F$ tel que $XR\{a\}$ alors $X \subset \{a\}$. Comme $X \neq \varnothing$ alors $X = \{a\}$.

Exercice II. 1) On a $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une patition de E car on a :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n,n) \in X_n \Rightarrow X_n \neq \varnothing$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \subset E \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \subset E$. De plus, on a :

Lebanese University
Faculty of Sciences III - Tripoli - Lebanon

Course: Math 102 (Real Analysis)
Session: Partial

Year: 2014-2015
Duration: 1h

Exercise I: (25 points).

1. Let r be a rational number, x be an irrational number. Show that $r+x$ is irrational.

2. Apply the definition to show that : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-1}{2n^2+n} = \dfrac{1}{2}$.

Exercise II: (30 points).
Let $U_0 \in \mathbb{R}^+$ and for all $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}U_n^2$.

1. Find the possible limit of the sequence $(U_n)_n$.

2. Show that the sequence $(U_n)_n$ is monotone.

3. Study the convergence of the sequence $(U_n)_n$.
   (*Hint :* Specify the cases when $U_0 \leq 2$ and $U_0 > 2$)

Exercise III: (20 points).
Let A be a nonempty set of positive real numbers. We set $A^2 = \{x^2 ; x \in A\}$.
Show that, if A is bounded above, then A^2 is bounded above and $\sup(A^2) = (\sup A)^2$.

Exercise IV: (25 points).
We consider the sequence $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ of real numbers defined by :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V_n = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{2+2^2} + \frac{1}{3+2^3} + \ldots + \frac{1}{n+2^n}.$$

1. Show that : $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+p} - V_n \leq \dfrac{1}{2^n}$.

2. Show that the sequence $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ is convergent.

Good Luck