Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : M 1105
Examen : Partiel

Année : 2018 - 2019
Durée : 1 heure

Exercice 1. (30 points)
Soit N l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$N(x,y) = |x-y| + |x+y|.$$

(1) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Montrer que les normes N et $||.||_1$ sont équivalentes.
On se rappelle que $||(x,y)||_1 = |x| + |y|$ pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2. (25 points)

(1) Montrer l'inégalité : $sh t \geq t, \ \forall t \in \mathbb{R}^+$.

(2) Soit f la fonction définie sur $(\mathbb{R}^2)^*$ par

$$f(x,y) = \frac{xy\sin(xy)}{sh\,(x^2) + sh\,(y^2)}.$$

f est-elle prolongeable par continuité en (0,0) ? Si oui, donner son prolongement

Exercice 3. (45 points)
Soit

$$f(x,y) = \frac{x\sqrt{1+x}}{y(x^2+y^2)}.$$

(1) Déterminer et tracer le domaine de définition D de f.

(2) D est-il borné ? ouvert ? fermé ? justifier votre réponse.

(3) Déterminer $\mathring{D}$, $\overline{D}$ et $\mathrm{Fr}(D)$.

Bonne Chance

Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : M 1105

Examen : Final+partiel

Année : 2017 - 2018

Durée : 2h 30m

مطلوب الاجابة على كل جزء بشكل متواصل و دون تداخل مع الجزء الاخر.

Partiel sur 100pts pour 45 minutes

Exercice 1. (40 points)

Soit la fonction $f(x,y) = \dfrac{\ln x}{x^2 + y^2 - 9}$

(1) Déterminer et tracer le domaine de définition D de f.

(2) D est-il ouvert ? justifier votre réponse.

(3) Déterminer la frontière de D.

Exercice 2. (20 points)

Soit la fonction

$$f(x,y) = \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

f est-elle prolongeable par continuité en (0,0) ? Si oui, déterminer son prolongement.

Exercice 3. (40 points)

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Chercher les dérivées partielles premières en (0,0).

(3) Montrer que f est différentiable en (0.0).

Final sur 100pts pour 105 minutes

Exercice 4. (30 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$.

(1) Déterminer les extremums locaux de f.

(2) Montrer que $f(x,y) \leq 2r^2 - \dfrac{r^4}{4}$ où $r^2 = x^2 + y^2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
En déduire que $f(x,y) \leq 4$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(3) Montrer que f admet une valeur maximale globale. Préciser en quels points, cette valeur est atteinte.

(4) Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to 0}} f(x,y)$.

f admet-elle un minimum global ?

Exercice 5. (15 points)
Soient f la fonction réelle à deux variables définie par :

$$f(x, y, z) = x^2 + xz + e^{xyz} + \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) - 3.$$

(1) Trouver le plan tangent à la surface $(S) : f(x, y, z) = 0$ au point $A = (1, 1, 0)$

(2) Montrer que la relation $f(x, y, z) = 0$ définit une fonction implicite $z = \varphi(x, y)$
point (1,1) telle que $\varphi(1, 1) = 0$.

(3) Calculer $\varphi'_x(1, 1)$ et $\varphi'_y(1, 1)$.

Exercice 6. (25 points)
Soit

$$W(x, y) = \left(\frac{y}{\cos^2 x} + \ln\left(1 + y^2\right)\right) dx + \left(g(x) + \frac{2xy}{1 + y^2}\right) dy$$

une forme différentielle définie sur $D = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}$.

(1) Déterminer la fonction $g : \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ telle que $g(0) = 0$ et W soit exacte.

(2) Chercher une primitive de W ainsi trouvée.

Exercice 7. (30 points)
Soient $f(x, y) = y^2 - x^2 y + x^2$ et $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\right\}$.
Représenter D et déterminer les extremums et les valeurs extrémales de f sur D.

Bonne Chance

Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 1105
Examen : Partiel

Année : 2016 - 2017
Durée : 1 heure

Exercice 1 (30 points) [Les 2 questions (1) et (2) sont indépendantes]

(1) Soit N l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$N(x,y) = \sup(|x-y|, |x+y|).$$

Démontrer que N est une norme.

(2) La fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$g(t) = \left(\frac{\sin t}{sht}, \frac{(t-1)|t|}{t}\right)$$

est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 2 (30 points)

Soit la fonction $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{-x^2-y^2+2}}{x^2-y^2}$

(1) Déterminer et tracer le domaine de définition D de f.

(2) D est-il ouvert ? justifier votre réponse.

(3) Déterminer la frontière de D.

Exercice 3 (40 points)

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{x^2+2y^2}\cos(xy) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1) Démontrer que f est continue en (0,0).

(2) Chercher les dérivées partielles premières en (0,0).

(3) f est-elle différentiable en (0,0) ?

(4) f'_x est-elle continue en (0,0) ?

Bonne Chance

Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 105

Durée : 1 heure

Année : 2014 - 2015

Examen : Partiel

Exercice 1 (35 points). Soit u, v et f définies par

$$u(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} \quad , \quad v(x) = \sqrt{x^2+x+1}$$
$$f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1}$$

1. Donner le développement limité de u, v et f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
2. En déduire l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse 0 et la position de cette tangente par rapport à la courbe.
3. Trouver l'équation de l'asymptote en $-\infty$ à la courbe d'équation $y = f(x)$; puis préciser la position de cette asymptote par rapport à la courbe.

Exercice 2 (35points).

1. Montrer que $(1+t)^{\frac{1}{t}} = e - \frac{e}{2}t + \frac{11e}{24}t^2 + t^2\epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\epsilon(t) = 0$.
2. En déduire le développement limité de $(1+\frac{1}{x})^x$ au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 2.
3. En déduire

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right].$$

Exercice 3 (30 points). Calculer

1. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$,
2. $\displaystyle\int \frac{3-\sin x}{2\cos x + 3\tan x}\,\mathrm{d}x$.

Cours : Math 105
Session : Partiel

(1)

Année : 2014-2015
Durée : 1 h.

EXI $u(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}$, $v(x) = \sqrt{x^2+x+1}$, $f(x) = u(x) - v(x)$

1. $u(x) = (1+x+x^2+x^3)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}(x+x^2+x^3) + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}(x+x^2+x^3)^2 + x^2\varepsilon_1$

$= 1 + \frac{1}{3}x + x^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) + x^2\varepsilon_2(x)$

$= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + x^2\varepsilon_2(x).$

$v(x) = (1+x+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(x+x^2) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}(x+x^2)^2 + x^2\varepsilon_3(x)$

$= 1 + \frac{1}{2}x + x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) + x^2\varepsilon_4(x)$

$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon_4(x)$

$f(x) = u(x) - v(x) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{2}{9} - \frac{3}{8}\right)x^2 + x^2\varepsilon_5(x)$

$= \frac{-1}{6}x - \frac{11}{72}x^2 + x^2\varepsilon_5(x).$

2. Donc $y = \frac{-1}{6}x$ eq. tang. à l'origine. De plus $f(x) - y \underset{0}{\sim} -\frac{11}{72}x^2 < 0$, donc la courbe est au dessous de la tangente au vois. de 0.

3. $f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1} = x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - |x|\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} \underset{t=\frac{1}{x}}{=\!=} (1+t+t^2+t^3)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}t + \frac{2}{9}t^2 + t^2\varepsilon_2(t)$

$= 1 + \frac{1}{3x} + \frac{2}{9x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_6(x)$

$\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{t=\frac{1}{x}}{=\!=} (1+t+t^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + t^2\varepsilon_4(t)$

$= 1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_7(x)$

Donc $f(x) = x\left[1 + \frac{1}{3x} + \frac{2}{9x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_6(x)\right] - (-x)\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_7(x)\right)$

$$f(x) = x\left[2 + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{9}+\frac{3}{8}\right) + \frac{1}{x^2}\varepsilon_8(x)\right]$$

$$= 2x + \frac{5}{6} + \frac{43}{72}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon_8(x)$$

c'est le $dl_{g_1}(-\infty)$.

Donc $Y = 2x + \frac{5}{6}$ éq. de l'asymptote en $-\infty$ et comme $f(x) - Y \underset{-\infty}{\sim} \frac{43}{72}\cdot\frac{1}{x} < 0$, alors la courbe est au dessous de l'asymptote au vois. de $-\infty$.

$\boxed{EX\,II}$ 1. $(1+t)^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)} = e^{\frac{1}{t}\left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^3\varepsilon_1(t)\right]}$

$$= e^{1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + t^2\varepsilon_1(t)} = e\cdot e^{-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+t^2\varepsilon_1(t)}$$

c'est le $dl_2^{(0)}$

$$= e\left[1 + \left(-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}\right) + \frac{t^2}{2\cdot 4} + t^2\varepsilon_2(t)\right]$$

$$= e\left[1 - \frac{t}{2} + t^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right) + t^2\varepsilon_2(t)\right]$$

$$= e\left[1 - \frac{t}{2} + \frac{11}{24}t^2 + t^2\varepsilon_2(t)\right]$$

2. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \underset{x=\frac{1}{t}}{=\!=} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e\left[1 - \frac{t}{2} + \frac{11}{24}t^2 + t^2\varepsilon_2(t)\right]$

$$= e\left[1 - \frac{1}{2x} + \frac{11}{24\cdot x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_2\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

c'est le $dl_2^{(+\infty)}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right] =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[e\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{11}{24x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_2\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 4e\left(1 - \frac{1}{4x} + \frac{11}{24\cdot 4x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_3\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right.$

$\left. + 3e\left(1 - \frac{1}{6x} + \frac{11}{24\cdot 9x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_4\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[\frac{e}{x}\left(\frac{-1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{e}{x^2}\left(\frac{11}{24} - \frac{11}{24} + \frac{11}{3\cdot 24}\right) + \frac{1}{x^2}\varepsilon_5(x)\right]$

$$= \frac{11}{72}e.$$

$\boxed{EX\,III}$ 1.

2.

EXIII

1. $\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx = \int \sqrt{(x+1)^2+4}\,dx$ ②

$\overset{x+1=2\,sh\,t}{\underset{dx=2\,ch\,t\,dt}{=}} \int \sqrt{4\,sh^2t+4}\cdot 2\,ch\,t\,dt$

$= \int 2\sqrt{ch^2t}\cdot 2\,ch\,t\,dt = 4\int ch^2t\,dt$

$= 4\int \frac{ch\,2t+1}{2}\,dt = 2\int (ch\,2t+1)\,dt$

$= 2\left[\frac{1}{2}sh\,2t+t\right]+c$

$= 2\,sh\,t\,ch\,t+2t+c$

$= 2\,\frac{x+1}{2}\sqrt{1+\frac{(x+1)^2}{4}}+2\,\arg sh\left(\frac{x+1}{2}\right)+c.$

$= (x+1)\sqrt{\frac{x^2+2x+5}{4}}+2\arg sh\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$

$= \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+2\arg sh\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$

2. $\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x}\,dx = \int \frac{(3-\sin x)\cos x\,dx}{(2\cos x+3\tan x)\cos x}$

$= \int \frac{(3-\sin x)\cos x\,dx}{2\cos^2x+3\sin x} = \int \frac{(3-\sin x)\cos x\,dx}{2-2\sin^2x+3\sin x} \overset{t=\sin x}{\underset{dt=\cos x\,d}{=}}$

$= \int \frac{(3-t)\,dt}{2-2t^2+3t} = \int \frac{(t-3)\,dt}{2t^2-3t-2} = \int \frac{(t-3)\,dt}{(2t+1)(t-2)}$

$= \int \left(\frac{\frac{7}{5}}{2t+1}-\frac{\frac{1}{5}}{t-2}\right)dt = \frac{7}{5}\cdot\frac{1}{2}\ln|1+2t|-\frac{1}{5}\ln|t-2|+$

$= \frac{7}{10}\ln|1+2\sin x|-\frac{1}{5}\ln|\sin x-2|+c$

Exercice 1 .

1. On a

$$u(x) = (1+x+x^2+x^3)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}(x+x^2+x^3) + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}(x+x^2+x^3) + x^2\varepsilon_1(x)$$
$$= 1 + \frac{x}{3} + \frac{2}{3}x^2 + x^2\varepsilon_2(x),$$

$$v(x) = (1+x+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(x+x^2) - \frac{1}{8}(x+x^2) + x^2\varepsilon_3(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon_4(x),$$

et

$$f(x) = u(x) - v(x) = -\frac{x}{6} - \frac{11}{72}x^2 + x^2\varepsilon_5(x).$$

2. Donc $y = -\frac{1}{6}$ est l'équation de la tangente à l'origine. De plus $f(x) - y \underset{0}{\sim} -\frac{11}{72}x^2 < 0$, donc la courbe est en dessous de sa tangente au voisinage de 0.

3. Soit $t = \frac{1}{x}$. On a

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1} = x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} - |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$
$$= \frac{1}{t}(1+t+t^2+t^3)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{|t|}(1+t+t^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{t}\left(1+\frac{t}{3}+\frac{2t^2}{9}+t^2\varepsilon_6(t)\right) + \frac{1}{|t|}\left(1+\frac{t}{2}+\frac{3t^2}{8}+t^2\varepsilon_7(t)\right)$$
$$= x\left(1+\frac{1}{3x}+\frac{2}{9x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon_8(x)\right) - x\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon_9(x)\right)$$
$$= 2x + \frac{5}{6} + \frac{43}{72x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x).$$

Donc $Y = 2x + \frac{5}{6}$ est l'équation de l'asymptote en $-\infty$ et comme $f(x) - Y \underset{-\infty}{\sim} \frac{43}{72x} < 0$ alors $f(x)$ est en dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

Exercice 2 .

1. On a

$$(1+t)^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)} = e^{\frac{1}{t}\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+t^3\varepsilon_1(t)\right)} = e^{1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+t^2\varepsilon_1(t)} = e\cdot e^{-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+t^2\varepsilon_1(t)}$$
$$= e\left(1+\left(-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}\right)^2+t^2\varepsilon_2(t)\right) = e\left(1-\frac{t}{2}+\frac{11}{24}t^2+t^2\varepsilon_3(t)\right).$$

2. Soit $t = \frac{1}{x}$. On a

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = (1+t)^{\frac{1}{t}} = e\left(1-\frac{t}{2}+\frac{11}{24}t^2+t^2\varepsilon_3(t)\right) = e\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon_4(x)\right).$$

3. On a

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right) =$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24x^2}\right) - 4e\left(1-\frac{1}{4x}+\frac{11}{24\cdot 4x^2}\right) + 3e\left(1-\frac{1}{6x}+\frac{11}{24\cdot 9x^2}\right) + \frac{1}{x^2}\varepsilon_5(x)\right) =$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{11}{72}ex^2 + \frac{1}{x^2}\varepsilon_5(x)\right) = \frac{11}{72}e$$

Exercice 3 .

1. Soit $x+1 = 2\,\mathrm{sh}\,t$, donc $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t$ et $t = \mathrm{argsh}\,\frac{x+1}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{(x+1)^2+4}\,\mathrm{d}x = \int 2\,\mathrm{ch}\,t\cdot 2\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t = 4\int \mathrm{ch}^2\,t\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int(\mathrm{ch}\,2t+1)\,\mathrm{d}t = 2\left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2t+t\right)+c = 2\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t+2t+c\\ &= 2\cdot\frac{x+1}{2}\sqrt{1+\tfrac{(x+1)^2}{4}}+2\,\mathrm{argsh}\,\tfrac{x+1}{2}+c\\ &= \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+2\,\mathrm{argsh}\,\tfrac{x+1}{2}+c.\end{aligned}$$

2. Soit $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$ (Bioche). Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(3-\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x}{2\cos^2 x+3\sin x} = \int \frac{3-t}{2-2t^2+3t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t-3}{(2t+1)(t-2)}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{7}{5}\int\frac{\mathrm{d}t}{2t+1}-\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}t}{t-2} = \frac{7}{5}\cdot\frac{1}{2}\ln|2t+1|-\frac{1}{5}\ln|t-2|+c\\ &= \frac{7}{10}\ln|2\sin x+1|-\frac{1}{5}\ln|\sin x-2|+c.\end{aligned}$$

Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: Math 105
Session: Partiel

Année: 2010-2011
Durée: 1h

Exercice I: (25 points).
Utiliser les développements limités pour calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^4 x}\left[\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\sin x}{1+\sin x}\right].$$

Exercice II: (20points).
Trouver l'équation de l'asymptote en $+\infty$ (resp. $-\infty$) à la courbe d'équation $y = (x-2)e^{\frac{1}{x-3}}$; puis préciser la position de cette asymptote par rapport à la courbe.

Exercice III: (25 points).

1. Donner le développement limité de la fonction $f(x) = \arctan(e^x)$ au point 0 et jusqu'a d'ordre 3.
(*Indication* : Utiliser la fonction $f'(x)$)
2. En déduire l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'absisse 0 et la position de cette tangente par rapport à la courbe.

Exercice IV: (30 points).
Calculer :

1. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}dx$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-x+1}}$.

Bonne Chance

cours Math 105

Durée : 1 h

(1)

Année : 2010–2011

Partiel

$\boxed{\text{EX I}}$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sin^4 x}\left[\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\sin x}{1+\sin x}\right]$

$\frac{x}{1+x} = x\left[1 - x + x^2 - x^3 + x^3 \varepsilon_1(x)\right] = x - x^2 + x^3 - x^4 + x^4 \varepsilon_1(x)$

$\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) = x - x^2 + x^3 - x^4 - \frac{1}{6}\left[x - x^2 + x^3 - x^4\right]^3 + x^4 \varepsilon_2(x)$

$= x - x^2 + \left(1 - \frac{1}{6}\right)x^3 + x^4\left(-1 + \frac{1}{2}\right) + x^4 \varepsilon_3(x)$

$= x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{x^4}{2} + x^4 \varepsilon_3(x)$

$\frac{\sin x}{1+\sin x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon_4(x)}{1 + x - \frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon_4(x)} = x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{4}{6}x^4 + x^4 \varepsilon_5(x)$

$$\begin{array}{r|l} x - \frac{x^3}{6} & 1 + x - \frac{x^3}{6} \\ \cline{2-2} -x + \frac{x^4}{6} - x^2 & x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{4}{6}x^4 \\ \hline -x^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} & \\ + x^2 + x^3 & \\ \hline \frac{5}{6}x^3 + \frac{x^4}{6} & \\ -\frac{5}{6}x^3 - \frac{5x^4}{6} & \\ \hline -\frac{4}{6}x^4 & \end{array}$$

Donc $\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\sin x}{1+\sin x} =$

$-\frac{x^4}{2} + \frac{4x^4}{6} + x^4 \varepsilon_6(x)$

$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{4}{6}\right)x^4 + x^4 \varepsilon_6(x)$

$= \frac{1}{6}x^4 + x^4 \varepsilon_6(x)$

et $\sin^4 x = x^4 + x^4 \varepsilon_7(x)$

D'où $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sin^4 x}\left[\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\sin x}{1+\sin x}\right]$

$= \frac{1}{6}$.

$\boxed{\text{EX II}}$ $y = f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x-3}}$ $\quad DL g_2(\pm\infty)$

$\frac{y}{x} = \left(\frac{x-2}{x}\right)e^{\frac{1}{x-3}}$ $\quad DL_2(\pm\infty)$

$\quad DL_2(0)$

$\varphi(t) \underset{x = \frac{1}{t}}{\equiv} (1-2t)e^{\frac{t}{1-3t}}$

$t[1+3t+t\varepsilon_1(t)] = t+3t^2+t^2\varepsilon_1(t)$

$\frac{t}{1+3t} = t[1+3t+t^2\varepsilon_1(t)]$

$e(t) = (1-2t)(1+t+3t^2+\frac{t^2}{2}+t^2\varepsilon_2(t)]$

$= (1-2t)(1+t+\frac{7}{2}t^2+t^2\varepsilon_2(t)]$

$= 1-t+t^2[\frac{7}{2}-2]+t^2\varepsilon_3(t] = 1-t+\frac{3}{2}t^2+t^2\varepsilon_3(t)$

Donc $\frac{y}{x} = 1-\frac{1}{x}+\frac{3}{2x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon_3(\frac{1}{x})$ et $y = x-1+\frac{3}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon_3(\frac{1}{x})$

$Y = x-1$ asym. et $y - Y \underset{\infty}{\sim} \frac{3}{2x}$.

<u>Au voisinage de $+\infty$</u> $\frac{3}{2x} > 0$; donc courbe est au dessus de l'asym.

<u>Au voisinage de $-\infty$</u> $\frac{3}{2x} < 0$; donc courbe est au dessous de l'asym.

$\boxed{EX\ III}$ 1) $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ $DL_2(0)$

$$= \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)}{1+[1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1(x)]^2}$$

$$= \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)}{1+1+x^2+2x+x^2+x^2\varepsilon_1(x)} = \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1(x)}{2+2x+2x^2+x^2\varepsilon(x)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1(x)}{1+x+x^2+x^2\varepsilon_2(x)} = \frac{1}{2}\left[1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_3(x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}+x^2\varepsilon_4(x).$$

$$\begin{array}{r|l} 1+x+\frac{x^2}{2} & 1+x+x^2 \\ \hline -1-x-x^2 & 1-\frac{x^2}{2} \\ -\frac{x^2}{2} & \end{array}$$

Donc $f(x) = \text{Arctan}\, e^0 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + x^3\varepsilon_5(x)$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + x^3\varepsilon_5(x)$

2) Donc $Y = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$ Tang.

$f(x) - y \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{12}$. (2)

Au voisinage de 0 et $x<0$: On a $-\frac{x^3}{12} > 0$ et la courbe est au dessus de la tang.

Au voisinage de 0 et $x>0$: On a $-\frac{x^3}{12} < 0$ et la courbe est au ~~dessous~~ dessous de la Tang.

Donc $(0, \frac{\pi}{4})$ est un point d'inflexion.

$\boxed{EX\ IV}$ (a) $I(x) = \int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\, dx$

$u(x) = \ln^2(x) \Rightarrow du(x) = 2\frac{\ln x}{x}\, dx$.

$dv = \frac{1}{x^2}\, dx \Rightarrow v = -\frac{dx}{x}$.

$$I(x) = \frac{-\ln^2 x}{x} + 2\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$

$$\left.\begin{aligned} u(x) &= \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv &= \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = \frac{-1}{x} \end{aligned}\right\} \int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2}.$$

$$\text{Donc } I(x) = -\frac{\ln^2 x}{x} + 2\left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right] + ct.$$

(b) $I(x) = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-x+1}}$. On pose $\sqrt{x^2-x+1} = x + t$

$\Rightarrow x^2 - x + 1 = x^2 + t^2 + 2tx \Rightarrow x(2t+1) = 1-t^2 \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{2t+1}$

$$dx = \frac{-2t(2t+1) - 2 + 2t^2}{(2t+1)^2}\, dt = \frac{-2t^2 - 2t - 2}{(2t+1)^2}\, dt$$

$$I(x) = \int -2 \, \frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2} \cdot \frac{(2t+1)^2}{(1-t^2)^2} \cdot \frac{1}{t+\frac{1-t^2}{2t+1}} \, dt$$

$$= \int -2 \, \frac{t^2+t+1}{(1-t^2)^2} \cdot \frac{2t+1}{2t^2+t+1-t^2} \, dt$$

$$= \int \frac{-2(2t+1)}{(1-t^2)^2} \, dt = -2 \int \frac{2t}{(1-t^2)^2} \, dt - 2 \int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$$

- $\displaystyle \int \frac{2t}{(1-t^2)^2} \, dt = \frac{1}{1-t^2} + Ch.$

- $\displaystyle \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \int \frac{1-t^2+t^2}{(1-t^2)^2} \, dt = \int \frac{dt}{1-t^2} + \int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} \, dt$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \int t \cdot \frac{t}{(1-t^2)^2} \, dt$$

$u = t \Rightarrow du = dt$

$dv = \frac{t}{(1-t^2)^2} dt \Rightarrow v = \frac{1}{2(1-t}$

$$\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} \, dt = \frac{t}{2(1-t^2)} - \int \frac{1}{2(1-t^2)} \, dt$$

$$= \frac{t}{2(1-t^2)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + Ch.$$

$$I(x) = -2 \left[\frac{1}{1-t^2} + \text{Angth}\, t + \frac{t}{2(1-t^2)} - \frac{1}{2} \text{Angth}\, t \right] + Ch$$

$$= -2 \left[\frac{2+t}{2(1-t^2)} + \frac{1}{2} \text{Angth}\, t \right] + Ch$$

$$= \frac{2+t}{t^2-1} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + Ch$$

$$= \frac{2+t}{t^2-1} + \ln \sqrt{\left| \frac{1-t}{1+t} \right|} + Ch$$

Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 105
Durée : 1 heure

Année : 2010 - 2011
Examen : Partiel

Exercice 1 (25 points). Utiliser les développements limités pour calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^4 x}\left(\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\sin x}{1+\sin x}\right)$$

Exercice 2 (20 points). Trouver l'équation de l'asymptote en $\pm\infty$ à la courbe d'équation $y = (x-2)e^{\frac{1}{x-3}}$ puis préciser la position de cette asymptote par rapport à la courbe.

Exercice 3 (25 points).

1. Donner le développement limité de la fonction $f(x) = \arctan(e^x)$ au point 0 à l'ordre 3.
   Indication : utiliser $f'(x)$.
2. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de $f(x)$ au point d'abscisse 0 et la position de cette tangente par rapport à la courbe.

Exercice 4 (30 points). Calculer

1. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-x+1}}$

Exercice 1 . Le développement limité du dénominateur commence par x^4, on va développer à l'ordre 4. On a

$$\frac{x}{1+x} = x\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon_1(x)\right) = x - x^2 + x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x).$$

Donc

$$\sin\left(\tfrac{x}{1+x}\right) = x - x^2 + x^3 - x^4 - \tfrac{1}{3!}\left(x - x^2 + x^3 - x^4\right)^3 + x^4\varepsilon_2(x) = x - x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{x^4}{2} + x^4\varepsilon_3(x).$$

Et

$$\frac{\sin x}{1+\sin x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_4(x)}{1 + x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_4(x)} \overset{\text{division}}{=} x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{4}{6}x^4 + x^4\varepsilon_5(x).$$

Donc $\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) - \dfrac{\sin x}{1+\sin x} = \dfrac{x^4}{6} + x^4\varepsilon_6(x)$. En plus $\sin^4(x) = x^4 + x^4\varepsilon_7(x)$. Donc la limite demandée égale à $\dfrac{1}{6}$.

Exercice 2 . Soit $t = \dfrac{1}{x}$. On a

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{t}(1-2t)e^{\frac{t}{1-3t}} = \frac{1}{t}(1-2t)e^{t+3t^2+t^2\varepsilon_1(t)} = \frac{1}{t}(1-2t)\left(1 + t + \tfrac{7}{2}t^2 + t^2\varepsilon_2(t)\right) \\ &= \frac{1}{t} - 1 + \frac{3}{2}t + t\varepsilon_3(t) = x - 1 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Donc $Y = x - 1$ est l'équation de l'asymptote en $\pm\infty$. En plus $y - Y \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{3}{2x}$ qui est > 0 au voisinage de $+\infty$ et < 0 au voisinage de $-\infty$, donc y est en dessus de Y au voisinage de $+\infty$ et en dessous de Y au voisinage de $-\infty$.

Exercice 3 .

1. On a

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)}{1 + 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)}{2 + 2x + 2x^2 + x^2\varepsilon_2(x)}$$

$$\overset{\text{division}}{=} \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + x^2\varepsilon_3(x)$$

Donc

$$f(x) = \arctan e^0 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + x^3\varepsilon_4(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + x^3\varepsilon_4(x).$$

2. $f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + x^3\varepsilon_4(x)$. Donc $Y = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$ est l'équation de la tangente et $f(x) - Y \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{12}$ qui est > 0 si $x < 0$ et < 0 si $x > 0$. Par suite la courbe de $f(x)$ est en dessus de sa tangente si $x < 0$ et au dessous de sa tangente si $x > 0$.

Exercice 4 :
1. $I=\int \frac{\ln^2 x}{x^2}$. Par parties : soit

$$u=\ln^2 x \quad \Rightarrow \quad u'=\frac{2\ln x}{x}$$
$$v'=\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad v=-\frac{1}{x}$$

Donc $I=-\frac{\ln^2 x}{x}+2\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$. Soit

$$u=\ln x \quad \Rightarrow \quad u'=\frac{1}{x}$$
$$v'=\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad v=-\frac{1}{x}$$

Donc $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx=-\frac{\ln x}{x}+\int \frac{dx}{x^2}=-\frac{\ln x+1}{x}+c$. Par suite

$$I=-\frac{\ln^2 x+2\ln x+2}{x}+c.$$

2. Soit $J=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-x+1}}$. On pose $\sqrt{x^2-x+1}=x+t$. Donc

$$x^2-x+1=x^2+t^2+2tx \Rightarrow x(2t+1)=1-t^2 \Rightarrow x=\frac{1-t^2}{2t+1}$$

et

$$dx=\frac{-2t(2t+1)-2+2t^2}{(2t+1)^2}\,dt=-2\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2}\,dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} J&=-2\int \frac{1}{\frac{(1-t)^2}{(2t+1)^2}\cdot\left(t+\frac{1-t^2}{2t+1}\right)}\cdot\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2}\,dt=-2\int \frac{2t+1}{(1-t^2)^2}\,dt\\ &=-2\int \frac{2t\,dt}{(1-t^2)^2}-2\int \frac{dt}{(1-t^2)^2}.\end{aligned}$$

Or

$$\int \frac{2t\,dt}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{1-t^2}+c$$

et

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{(1-t^2)^2}&=\int \frac{1-t^2+t^2}{(1-t^2)^2}\,dt=\int \frac{dt}{1-t^2}+\int \frac{t^2\,dt}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\int t\cdot\frac{t\,dt}{(1-t^2)^2}\\ &=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{t}{2(1-t^2)}-\int \frac{dt}{2(1-t^2)}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\frac{t}{2(1-t^2)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c\end{aligned}$$

(intégration par parties avec $u=t$ et $v'=\frac{t}{(1-t^2)^2}$. On peut aussi utiliser la formule donnée dans le cours pour calculer $\int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$).
Donc $J=\frac{2+t}{t^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c$, avec $t=\sqrt{x^2-x+1}-x$.

Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 105
Durée : 1 heure

Année : 2009 - 2010
Examen : Partiel

Exercice 1 (25 points). Utiliser les développements limités pour calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\ln(\operatorname{ch} x) - \ln(\cos x))^2}{\sqrt{\operatorname{ch} x} + \sqrt{\cos x} - 2}$$

Exercice 2 (25 points). Trouver l'équation de l'asymptote en $\pm\infty$ à la courbe d'équation

$$y = \frac{x+2}{x}\sqrt{x^2-1}$$

puis préciser la position de cette asymptote par rapport à la courbe.

Exercice 3 (25 points). Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a \neq b$. Trouver l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = \ln(a^x + b^x)$ au point $(0, \ln 2)$ puis préciser la position de cette tangente par rapport à la courbe.

Exercice 4 (25 points). Calculer

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x + 9\sin^2 x}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2-1}}$

Exercice 1 . On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{\operatorname{ch} x}+\sqrt{\cos x}-2 &= \left(1+\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon_1(x)\right)^{\frac12}+\left(1-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon_2(x)\right)^{\frac12}-2\\
&=\left(1+\tfrac{x^2}{4}+\tfrac{x^4}{2\cdot 4!}-\tfrac18\left(\tfrac{x^2}{2}\right)^2+x^4\varepsilon_3(x)\right)+\left(1-\tfrac{x^2}{4}+\tfrac{x^4}{2\cdot 4!}-\tfrac18\left(\tfrac{-x^2}{2}\right)^2+x^4\varepsilon_4(x)\right)-2\\
&=-\frac{x^4}{48}+x^4\varepsilon_5(x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\ln(\operatorname{ch} x)-\ln(\cos x) &= \ln\left(1+\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon_4(x)\right)-\ln\left(1-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon_5(x)\right)\\
&=\left(\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^4}{4!}-\tfrac12\left(\tfrac{x^2}{2}\right)^2+x^4\varepsilon_6(x)\right)-\left(-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^4}{4!}-\tfrac12\left(\tfrac{-x^2}{2}\right)^2+x^4\varepsilon_7(x)\right)\\
&=x^2+x^4\varepsilon_8(x)
\end{aligned}$$

Donc $(\ln(\operatorname{ch} x)-\ln(\cos x))^2=x^4+x^4\varepsilon_9(x)$ et

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\operatorname{ch} x)-\ln(\cos x))^2}{\sqrt{\operatorname{ch} x}+\sqrt{\cos x}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{48}}{x^4}=-48$$

Exercice 2 . Soit $t=\frac{1}{x}$. On a

$$\begin{aligned}
f(x)=\frac{x+2}{x}\sqrt{x^2-1} &= (1+\tfrac{2}{x})\cdot|x|\sqrt{1-\tfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{|t|}(1+2t)(1-t^2)^{\frac12}\\
&=\frac{1}{|t|}(1+2t)\left(1-\tfrac{t^2}{2}+t^2\varepsilon_1(t)\right)=\frac{1}{|t|}\left(1+2t-\tfrac{t^2}{2}+t^2\varepsilon_2(t)\right)\\
&=|x|\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon_3(x)\right)
\end{aligned}$$

- Au voisinage de $+\infty$ $|x|=x$, donc $f(x)=x+2-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon_3(x)$. Par suite
  — $y=x+2$ est l'équation de l'asymptote, et
  — $f(x)-y\underset{+\infty}{\sim}-\frac{1}{2x}<0$. Donc la courbe est au dessous de l'asymptote.
- Au voisinage de $-\infty$ $|x|=-x$, donc $f(x)=-x-2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon_4(x)$. Par suite
  — $y=-x-2$ est l'équation de l'asymptote, et
  — $f(x)-y\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2x}<0$. Donc la courbe est au dessous de l'asymptote.

Exercice 3 . Le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f(x)$ est

$$\begin{aligned}
f(x)=\ln(a^x+b^x) &= \ln\left(e^{x\ln a}+e^{x\ln b}\right)\\
&=\ln\left(\left(1+x\ln a+\tfrac12x^2\ln^2a+x^2\varepsilon_1(x)\right)+\left(1+x\ln b+\tfrac12x^2\ln^2b+x^2\varepsilon_2(x)\right)\right)\\
&=\ln\left(2+x\ln ab+\tfrac12x^2(\ln^2a+\ln^2b)+x^2\varepsilon_3(x)\right)\\
&=\ln 2+\ln\left(1+\tfrac12x\ln ab+\tfrac14x^2(\ln^2a+\ln^2b)+x^2\varepsilon_4(x)\right)\\
&=\ln 2+\left(\tfrac12x\ln ab+\tfrac14x^2(\ln^2a+\ln^2b)\right)-\tfrac12\left(\tfrac{x^2}{4}\ln^2ab\right)+x^2\varepsilon_4(x)\\
&=\ln 2+n\ln\sqrt{ab}+\frac{x^2}{8}(\ln a-\ln b)^2+x^2\varepsilon_5(x).
\end{aligned}$$

Donc

— $y = \ln 2 + x \ln \sqrt{ab}$ est l'équation de la tangente,et
— $f(x) - y \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{8}(\ln a - \ln b)^2 > 0$. Donc la courbe est au dessus de la tangente.

Exercice 4 :
— $I = \int \frac{dx}{\cos^2 x + 9\sin^2 x}$. La fonction $\frac{dx}{\cos^2 x + 9\sin^2 x}$ ne change pas en remplaçant x par $\pi + x$. Posons donc $t = \tan x$. Comme $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$ alors

$$I = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{1 + 9\tan^2 x} = \int \frac{dt}{1+9t^2} = \int \frac{dt}{1+(3t)^2} = \frac{1}{3}\arctan(3t) + c = \frac{1}{3}\arctan(3\tan x) + c$$

— $J = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2-1}}$.
Première méthode : Soit $x = \varepsilon \operatorname{ch} t$. Alors $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 t} = \varepsilon \operatorname{sh} t$ et $dx = \varepsilon \operatorname{sh} t\, dt$. Donc

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\varepsilon \operatorname{sh} t\, dt}{\varepsilon \operatorname{ch} t + \varepsilon \operatorname{sh} t} = \int \frac{\operatorname{sh} t\, dt}{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t} = \frac{1}{2}\int 1 - e^{-2t}\, dt = \frac{t}{2} - \frac{e^{-t^2}}{4} + c \\ &= \frac{\varepsilon}{2}\operatorname{argch} x - \frac{1}{4}e^{-argch^2 x} + c \end{aligned}$$

Deuxième méthode : soit $t + x = \sqrt{x^2-1}$. Alors $(t+x)^2 = x^2 - 1 \Rightarrow t^2 + x^2 + 2tx = x^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{-1-t^2}{2t}$, et $dx = -\frac{1}{2}\frac{2t^2-1-t^2}{t^2}\, dt = \frac{1-t^2}{2t^2}\, dt$. Par suite

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\frac{1-t^2}{2t^2}}{\frac{-1-t^2}{2t} + t + \frac{-1-t^2}{t}}\, dt = \frac{1}{2}\int t - \frac{1}{t}\, dt = \frac{t^2}{4} - \frac{1}{2}\ln|t| + c \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2 - x\sqrt{x^2-1} - \ln\left|\sqrt{x^2-1} - x\right|\right) + c \end{aligned}$$