UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DES SCIENCES
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours: M1103
Examen: Partiel

Année: 2018-2019
Durée: 1 heure

I- Considérons les matrices carrées suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1- Exprimer A en fonction de B et I_3.
2- Exprimer B^2 en fonction de B. En déduire A^2 et A^3 en fonction de B et I_3.
3- Montrer que $A^2 - 12A = -27I_3$.
4- En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
5- Montrer que pour tout $n \in IN$, on a $A^n = 3^n I_3 + 3^{n-1}(3^n - 1)B$.

II- Soit m un nombre réel, on considère le système linéaire suivant:

$$(S_m) = \begin{cases} x + 3y + mz = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

1. Ecrire le système sous la forme $AX = B$.
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles A est inversible. Dans ce cas, chercher A^{-1} par la méthode des cofacteurs et déduire une solution du système (S_m).
3. Résoudre (S_4) c.-à-d. pour $m = 4$.

III- Considérons la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$

1. Calculer $|A|$.
2. Etudier suivant les valeurs du paramètre a, l'inversibilité de la matrice A.

BON COURAGE

BAREMES : I- 35 ; II- 35 ; III- 30.

UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DES SCIENCES
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours: MI103
Examen: Session 1 **Année: 2017-2018**
Durée: 2h30

Partiel sur 100 points.

Exercice 1 (35 points)

Considérons la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1- Calculer le déterminant de M, en déduire que M est inversible.
2- Appliquer la méthode de Gauss pour déterminer l'inverse M^{-1}.
3- Déduire de la question 2 une matrice X de $M_3(\mathbb{R})$ telle que:

$$2XM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (35 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1- Vérifier que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.
2- Exprimer B en fonction de A et de la matrice unité I_3.
3- En déduire les puissances B^k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 (30 points)

Soit m un nombre réel. En discutant suivant les valeurs du paramètre m, résoudre le système suivant:

$$(S_m) = \begin{cases} mx + my - z = 0 \\ mx + y - mz = 0 \\ x + my - mz = 0 \end{cases}$$

Final sur 100 points.

Exercice 4 (30 points)

Soit $E = \mathbb{R}^4$. Considérons les deux sous-espaces vectoriels de E:
$F = \{(x.y.z.t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = 0 \; et \; x - y + 2z - 2t = 0\}$ et
$G = \{(x.y.z.t) \in \mathbb{R}^4 | 5x + y + 7z - t = 0 \; et \; x - 3y + 3z - 5t = 0\}$.

1- Déterminer une base de F

2- Déduire que $F \subseteq G$

3- Est-ce que $F = G$? Justifier votre réponse.

Exercice 5 (30 points)

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x.y.z) \in \mathbb{R}^3 | \ x + y - 2z = 0 \ et \ 2x - y - z = 0\}$ et $G = \{(x.y.z) \in \mathbb{R}^3 | \ x + y - z = 0\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1- Montrer que $u = (1,1,1)$ est une base de F et que $v = (1,0,1)$ et $w = (0,1,1)$ est une base G.

2- Montrer que $\{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3- A-t-on $G \oplus F = \mathbb{R}^3$.

4- Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Exprimer $e_1, e_2 \ et \ e_3$ dans la base $\{u, v, w\}$.

Exercice 6 (40 points)

On considère les deux applications linéaires :

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x.y.z) \to (2x - z . 3x + y + 2z) \text{ et}$$
$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x.y) \to (x + y. -y. 2x - y)$$

1- Déterminer la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Puis, déterminer la matrice B de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

2- Pourquoi f ne peut pas être injective ? f est-elle surjective ?

3- Pourquoi g ne peut pas être surjective ? g est-elle injective ?

4- Montrer que $f \circ g$ est un isomorphisme. Préciser $(f \circ g)^{-1}$.

5- Expliciter l'application $(f \circ g)^2$.

Soient $\mathcal{B}'$ une autre base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}'$ une autre base de $\mathbb{R}^2$.

6- Donner les formules de relations entre A et $A' = Mat_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'} f$ ainsi entre B et $B' = Mat_{\mathcal{C}'\mathcal{B}'} g$.

7- Déduire que $A'B'$ est inversible.

BON COURAGE

UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DES SCIENCES
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours: M1103
Examen: Partiel

Année: 2016-2017
Durée: 1 heure

I- Considérons la matrice suivante :

$$A=\begin{pmatrix} m+3 & -1 & 1 \\ 5 & m-3 & 1 \\ 6 & -6 & m+4 \end{pmatrix}, \text{ où } m\in\mathbb{R}.$$

1- Calculer le déterminant de A.
2- Pour quelle(s) valeur(s) de m, A n'est pas inversible ?
3- Vérifier que pour m=1, A est inversible et calculer par la méthode de déterminant l'inverse de A.
4- En déduire la solution du système $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
5- Soit m=2. Pour quelle(s) valeur(s) de a, le système $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ admet des solutions? Déterminer les solutions dans ce cas.

II- Considérons la matrice suivante :

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1- Soit la matrice N=A+ I_3. Trouver le plus petit entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que:

$$N^m=(A+I_3)^m=0.$$

2- En déduire :
a) l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
b) que A est inversible. Donner son inverse.

BAREMES : I- 65 ; II- 35.

BON COURAGE

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours :Math103
Durée : 1 H

Année : 2009-2010
Examen : Partiel

Exercice 1 (65 pts)

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :
$v_1 = (1,2,0,1),\ v_2 = (1,0,2,1),\ v_3 = (2,0,4,2),$
$w_1 = (1,2,1,0),\ w_2 = (-1,1,1,1),\ w_3 = (2,-1,0,1),\ w_4 = (2,2,2,2).$

A)

1) Montrer que la famille $L = \{v_1, v_2, v_3\}$ est liée. Déterminer son rang ainsi que la relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de L.
2) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

B) Soient $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et $G = \text{Vect}(w_1, w_2, w_3, w_4)$.

1) Montrer que $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et déterminer les équations qui définissent F.
2) Donner un supplémentaire H de F dans $\mathbb{R}^4$.
3) Déterminer une base de G ainsi que sa dimension.
4) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^4$. Cette somme est-elle directe ?
5) Montrer que $v_1 + v_2 \in F \cap G$ et déduire une base de $F \cap G$.

Exercice 2 (15 pts)

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,1,0)$ et $(0,2,1)$ et G_x la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(1,0,x)$, $(x \in \mathbb{R})$. A quelle condition sur x, G_x est-elle supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3 (20 pts)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, distincts, de dimension 2.
Quelles sont les dimensions de $F + G$ et de $F \cap G$?

Exercice 1

A)

1) On a : $v_3 = 2v_2$, donc L est liée.
v_1 et v_2 linéairement indépendants, donc $rg(L) = 2$ et $v_3 = 2v_2$ est la relation de dépendance.

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, donc $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^4$.

B)

1) $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \text{Vect}(v_1, v_2, 2v_2) = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

$$(x,y,z,t) \in F \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}; (x,y,z,t) = \alpha v_1 + \beta v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = 2\alpha \\ z = 2\beta \\ t = \alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y - 2x = -2\beta \\ z + y - 2x = 0 \\ t - x = 0 \end{cases}$$

Les équations de F sont donc :
$z + y - 2x = 0$ et $t = x$.

2) Soit $H = \text{Vect}(w_1, w_2)$. On a :
   a) $\dim(H) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(F)$
   b) $\mathbb{R}^4 = F + H$ puisque $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

   H est donc supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

3) Après échelonnement, on trouve :
$w_1 + w_2 + w_3 - w_4 = 0$, et $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre, donc $\{w_1, w_2, w_3\}$ est une base de G et $\dim(G) = 3$.

4) D'après A) 2), pour tout x de $\mathbb{R}^4$:
$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 w_1 + \alpha_4 w_2 \in F + G.$$
Donc $F + G = \mathbb{R}^4$.
$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) = 2 + 3 - 4 = 1$.
Donc $F \cap G \neq \{0\}$ et la somme $F + G$ n'est pas directe.

5) $v_1 + v_2 = w_4$ donc $v_1 + v_2 \in F \cap G$. Comme $\dim(F \cap G) = 1$, $\{w_4\}$ est une base de $F \cap G$.

Exercice 2

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 2x + 1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -\frac{1}{2}$.

Exercice 3

$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ et $2 \leq \dim(F + G) \leq 3$.

Si $\dim(F + G) = 2$, alors $F = F + G = G$, impossible.

D'où $\dim(F + G) = 3$ et $\dim(F \cap G) = 1$.