UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DES SCIENCES
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours: M1102
Examen: Partiel

Année: 2018-2019
Durée: 1 heure

Exercice 1 :

On considère la relation binaire définie dans $\mathbb{Z}$ par :

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x + y \text{ est un nombre pair.}$$

1- Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2- Donner la classe d'équivalence des éléments 0 , 1 et a où $a \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2 :

On munit $E = \mathbb{R}^2$ de la relation notée $<$ définie par :

$$(x, y) < (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

1. Démontrer que $<$ est une relation d'ordre sur E. L'ordre est-il total ?
2. Le disque fermé de centre O et de rayon 1 a-t-il des majorants ? un plus grand élément ? une borne supérieure ?

Exercice 3 :

Soit $E = \mathbb{R}$. On considère la relation binaire suivante :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1.$$

Dire si la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?

BAREMES : I- 35 ; II- 35 ; III- 30.

BON COURAGE

partiel

Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : M 1102
Durée : 2h 30mn

Année : 2017-2018
Session : Première

1 Partie P (100 pts) :

Exercice 1 (40 pts.)
On définit sur $\mathbb{R}^2$, la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante :

$$\forall\,(x,y),\,(x',y')\in\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow \Big[(\exists\, a>0\,;\ x'=ax) \text{ et } (\exists\, b>0\,;\ y'=by)\Big].$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence $\overline{(1,0)}$ et $\overline{(0,0)}$ de $(1,0)$ et de $(0,0)$ respectivement.
3. Montrer que $\overline{(2017,2018)}=\overline{(1,1)}$ et que $\overline{(5,6)}\neq\overline{(-14,9)}$.

Exercice 2 (60 pts.) Soit $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}^*$ une application injective.
On définit sur $\mathbb{N}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall\, n,\,m\in\mathbb{N},\quad n\mathcal{R}m \Leftrightarrow f(n)|f(m)\,.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
2. On pose maintenant $f(x)=x^2+1$, $\forall\, x\in\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que l'ordre $\mathcal{R}$ est partiel.
   (b) Soit $A=\{1,2,3,4\}$. Déterminer, s'ils existent, le plus petit élément, le plus grand élément, les éléments minimaux et les éléments maximaux de A par rapport à $\mathcal{R}$.
   (c) Déterminer $Inf(A)$ la borne inférieure de A dans $\mathbb{N}$ par rapport à $\mathcal{R}$. .

Tournez la page S.V.P. $\longrightarrow$

2 Partie F (100 pts) :

Exercice 3 (16 pts.) On définit sur $\mathbb{N}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :
$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \geq y^2 .$$

Étudier la reflexivité, la symétrie, l'antisymétrie et la transitivité de $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N}$.

Exercice 4 (24 pts.) Soit $E = \{\mathcal{I}_n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$, où $\mathcal{I}_n = \{1, .., n\}$.
On définit sur E la relation binaire suivante :
$$\forall X, Y \in E, \ X\mathcal{R}Y \Longleftrightarrow \exists \ f : X \to Y \text{une application injective.}$$

1. Montrer que R est une relation d'ordre totale sur E.
2. Montrer que l'application $f: \begin{array}{ccc} (\mathbb{N}^*, \leq) & \longrightarrow & (E, \subset) \\ n & \longmapsto & \mathcal{I}_n \end{array}$ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

Exercice 5 (30 pts.) **Dans cet exercice, $|E|$ représente le cardinal d'un ensemble fini E, et les questions sont indépendantes.**

1. Soient E et F deux ensembles finis. Montrer que $|\mathcal{P}(E \times F)| = |\mathcal{P}(E)|^{|F|}$.
2. Soient A et B deux ensembles finis tels que: $|A \cap B| = \dfrac{|A|}{3} = \dfrac{|B|}{4}$.
   Calculer $|A|$, $|B|$ et $|A \cup B|$ si $A \cap B$ est en bijection avec $C = \{n \in \mathbb{N}^* \ ; \ n \text{ divise } 10\}$.
3. Soient E et F deux ensembles finis tels que : $|\mathcal{P}(E)| = |\mathcal{P}(F)| + 4$.
   (a) Montrer que $|E| \geq 3$.
   (b) Calculer les cardinaux $|E|$ et $|F|$.

Exercice 6 (30 pts.) **Les questions suivantes sont indépendantes.**

1. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers naturels premiers. On considère l'ensemble $E = \mathbb{N} - \mathcal{P}$.
   (a) Montrer que l'ensemble $A = \{2^{n+2} \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ est infini.
   (b) En déduire que E est infini dénombrable.
2. Soit E un ensemble.
   (a) Montrer que s'il existe une application injective $f : \mathbb{Q} \to E$, alors E est infini.
   (b) Montrer que s'il existe une application surjective $g : \mathbb{Z} \to E$, alors E est au plus dénombrable
   (c) Montrer que s'il existe une application surjective $h : E \to \mathbb{R}$, alors E est infini non-dénombrable

Bon Travail

Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : M 1102
Durée : 1 heure

Année : 2015-2016
Examen : Partiel

Exercice 1 (32 pts.)
On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}^*$ et une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur E par :

$$\forall\, x, y \in E,\; x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
2. Déterminer $a \in E$ tel que la classe $\overline{a}$ de a modulo $\mathcal{R}$ est un singleton.
3. Déterminer l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$.

Exercice 2 (28 pts.)
On définit sur $E = \mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall\, x, y \in E,\; x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x - y| \leq 2.$$

Étudier la reflexivité, la symétrie, l'antisymétrie et la transitivité de $\mathcal{R}$.

Exercice 3 (40 pts.)
Soit $E = \mathbb{N}$. On définit sur $\mathcal{P}(E)$, la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante :

$$\forall\, X, Y \in \mathcal{P}(E),\; X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow Y \subset X.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
2. L'ordre $\mathcal{R}$ est-il total ? Justifier votre réponse.
3. Déterminer, s'ils existent, le plus petit et le plus grand élément de $\mathcal{P}(E)$ par rapport à $\mathcal{R}$.
4. On pose $A = \mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$.
   (a) Déterminer les éléments maximaux et minimaux de A par rapport à $\mathcal{R}$.
   (b) Déterminer , si elles existent, $Sup(A)$ et $Inf(A)$ par rapport à $\mathcal{R}$.

Bon Travail

Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : M 1102
Durée : 1 heure

Année : 2016-2017
Examen : Partiel

Exercice 1 (40 pts.) *Dans l'exercice suivant, $Re(z)$ et $Im(z)$ représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe z.*
On considère l'ensemble $E = \{z \in \mathbb{C}\,;\ Im(z) \geq 0\}$.
On définit sur E la relation binaire $\mathcal{R}$ comme suit :

$$\forall\ z,\ z' \in E,\quad z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| < |z'| \text{ ou } \Big(|z| = |z'| \text{ et } Re(z) \leq Re(z')\Big).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total sur E.
2. Déterminer le plus petit élément de E par rapport à $\mathcal{R}$.

Exercice 2 (20 pts.)
On définit sur $E = \mathbb{Z}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall\ x, y \in E,\quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \text{ est impair.}$$

Étudier la reflexivité, la symétrie, l'antisymétrie et la transitivité de $\mathcal{R}$ sur E.

Exercice 3 (40 pts.)
Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \neq 0,\ y \neq 0\}$. On définit sur E, la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante :

$$\forall\ (x, y),\ (a, b) \in E,\quad (x, y)\mathcal{R}(a, b) \Leftrightarrow xa > 0 \text{ et } yb > 0.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes $\overline{(1,1)}$ et $\overline{(-2,3)}$.
3. Déterminer, pourtout $(a, b) \in E$, la classe $\overline{(a, b)}$.
4. Déduire l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$.

Bon Travail

Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: Math 102 (Analyse Réelle)
Session: Partiel

Année: 2014-2015
Durée: 1h

Exercice I: (25 points).

1. Soient r un nombre rationnel, x un nombre irrationnel. Montrer que $r+x$ est irrationnel.
2. Appliquer la définition pour montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-1}{2n^2+n} = \frac{1}{2}$.

Exercice II: (30 points).
Soient $U_0 \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}U_n^2$.

1. Déterminer la limite possible de la suite $(U_n)_n$.
2. Montrer que la suite $(U_n)_n$ est monotone.
3. Etudier la convergence de la suite $(U_n)_n$.
   (*Indication* : Préciser les cas où $U_0 \leq 2$ et $U_0 > 2$)

Exercice III: (20 points).
Soit A un ensemble non vide de nombres réels positifs. On pose $A^2 = \{x^2 ; x \in A\}$.
Démontrer que, si A est majoré, alors A^2 est majoré et $\sup(A^2) = (\sup A)^2$.

Exercice IV: (25 points).
On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V_n = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{2+2^2} + \frac{1}{3+2^3} + \ldots + \frac{1}{n+2^n}.$$

1. Montrer que : $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+p} - V_n \leq \frac{1}{2^n}$.
2. Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Bonne Chance

Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: Math 102 (Analyse Réelle)
Session: Partiel

Année: 2013-2014
Durée: 1h

Exercice I: (25 points).

Soient a et b deux réels strictement positifs et $A = \left\{a + \frac{b}{n} ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Montrer que l'ensemble A est borné et trouver ses bornes.

Exercice II: (25 points).

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ de nombres réels définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1).n}$$

1. Montrer que : $\forall n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $u_{n+p} - u_n \leq \frac{1}{n}$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

Exercice III: (50 points).

On considère la suite $(u_n)_n$ de nombres réels définie par :

$$u_0 \in [-2,2] \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-2,2]$.
2. Quelles sont les limites possibles pour $(u_n)_n$?
3. Soit $(w_n)_n$ la suite définie par le terme général $w_n = |u_n - 1|$.
   (a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{w_{n-1}}{\sqrt{2-u_n}+1}$.
   (b) En déduire que $(w_n)_n$ est convergente. Soit α sa limite.
   (c) Montrer que $\alpha = 0$. (*Indication :* Raisonner par absurde.)
4. En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

Bonne Chance

Math102 (Partiel) . MP سنة أولى

Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: Math 102 (Analyse Réelle)
Session: Partiel

Année: 2012-2013
Durée: 1h

Exercice I: (20 points).

Appliquer la définition pour montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+1}{n^3+n^2+2} = 1$.

Exercice II: (30 points).

1. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, -\frac{(x^2+y^2)}{2} \leq xy \leq \frac{(x^2+y^2)}{2}$.
2. Soit $E = \{xy\, ; \, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ et } x^2+y^2 \leq 1\}$.
   (a) Montrer que l'ensemble $E \neq \emptyset$.
   (b) Utiliser 1. pour montrer que l'ensemble E est borné.
   (c) Donner, avec preuve, les bornes supérieur et inférieur de E.

Exercice III: (20 points).

Pour chacune des assertions suivantes, donner une preuve si elle vraie et donner un contre exemple si elle est fausse.

1. $x \in \mathbb{Q}^*$ et $y \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \Longrightarrow xy \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
2. $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ et $y \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \Longrightarrow x + y \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
3. $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 3$ et n impair $\Longrightarrow \sqrt{n} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Exercice IV: (30 points).

On considère la suite $(u_n)_n$ de nombres réels définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$.
2. Résoudre : $-x^2 + x + 2 \geq 0$.
3. Utiliser 2. pour étudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$.
4. Donner la nature de la suite $(u_n)_n$ et déterminer sa limite si elle existe.

Bonne Chance

Solution 2012 - 2013 :

Exercice I : $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^3+n^2+2} = 1$

Soit $\varepsilon > 0$, il faut trouver $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq N$;

$\left|\frac{n^3+1}{n^3+n^2+2} - 1\right| \leq \varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{n^3+1}{n^3+n^2+2} - 1\right| = \left|\frac{n^3+1-n^3-n^2-2}{n^3+n^2+2}\right|$

$= \frac{n^2+1}{n^3+n^2+2} \leq \frac{n^2+n^2}{n^3+n^2+2} \leq \frac{2n^2}{n^3} = \frac{2}{n}$

Donc il suffit de prendre $N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$

Exercice II : 1) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a $(x+y)^2 \geq 0$ et $(x-y)^2 \geq 0$,
alors $x^2+y^2+2xy \geq 0$ et $x^2+y^2-2xy \geq 0 \Longrightarrow$
$x^2+y^2 \geq -2xy$ et $x^2+y^2 \geq 2xy \Longrightarrow \frac{1}{2}(x^2+y^2) \geq -xy$
et $xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Donc $-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

2) $E = \{xy \,;\, x, y \in \mathbb{R} \text{ et } x^2+y^2 \leq 1\}$

(a) $0^2+1^2 = 1 \leq 1 \Longrightarrow 0.1 = 0 \in E$. Donc $E \neq \emptyset$

(b) Soit $t \in E$, alors $\exists x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2+y^2 \leq 1$ et
$t = xy$. Donc $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq \frac{1}{2}$

Donc E est majoré par $\frac{1}{2}$ et minoré par $-\frac{1}{2}$, alors
E borné

(c) $\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \in E$

$-\frac{1}{2} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{2} \in E$

E borné et $\neq \emptyset \Rightarrow \sup E = M \exists$ et $\inf E = m \exists$

$\frac{1}{2}$ majorant de E et $\frac{1}{2} \in E \Longrightarrow M \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \leq M \Longrightarrow M = \sup E = \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}$ minorant de E et $\frac{-1}{2} \in E \Longrightarrow -\frac{1}{2} \leq m$ et $m \leq \frac{-1}{2} \Longrightarrow m = \inf E = -\frac{1}{2}$

Vraie : en effet : si non c-à-d $x.y \in \mathbb{Q}$, alors

$y = \underbrace{(xy)}_{\in \mathbb{Q}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\in \mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$ (comme produit de 2 rationnels)

Ce qui est impossible. Donc $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

2) $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Longrightarrow x+y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Fausse : en effet ; $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, mais

$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

3) $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq 3$ et m impair $\Longrightarrow \sqrt{m} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Fausse : en effet 9 impair et $\sqrt{9} = 3 \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Exercice IV : $(U_m)_m$ telle que $U_0 = 1$ et $U_{m+1} = \frac{3U_m + 2}{U_m + 2}$

1) Par récurrence : on a $0 \leq U_0 = 1 \leq 2$

Supposons que $0 \leq U_m \leq 2$, alors $U_{m+1} = \frac{3U_m+2}{U_m+2} \geq 0$

et $U_{m+1} - 2 = \frac{3U_m + 2}{U_m + 2} - 2 = \frac{3U_m + 2 - 2U_m - 4}{U_m + 2}$

$= \frac{U_m - 2}{U_m + 2} \leq 0$; donc $U_{m+1} \leq 2$ et alors $0 \leq U_{m+1} \leq 2$

2) $-x^2 + x + 2 \geq 0$, on a -1 et 2 sont les racines de l'équation $-x^2 + x + 2$. Donc

$-x^2 + x + 2 \geq 0$ si $x \in [-1 ; 2]$

x		-1		2	
	$-$	0	$+$	0	$-$

3) $U_{m+1} - U_m = \frac{3U_m + 2}{U_m + 2} - U_m = \frac{3U_m + 2 - U_m^2 - 2U_m}{U_m + 2}$

$= \frac{-U_m^2 + U_m + 2}{U_m + 2}$

Comme $\forall m \in \mathbb{N}$; $U_m \in [0, 2]$, alors, d'après 2, $U_{m+1} - U_m \geq 0$

et donc $(U_m)_m$?

4) La suite $(U_n)_n \nearrow$ et majorée par 2, alors $(U_n)_n$ conv et soit ℓ sa limite. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{3U_n+2}{U_n+2}$, alors à la limite, on a $\ell = \dfrac{3\ell+2}{\ell+2} \Rightarrow \ell^2+2\ell = 3\ell+2$

$\Rightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \Rightarrow \ell = -1$ ou $\ell = 2$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0 \Rightarrow \ell \geq 0$ et donc $\ell = 2$

Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: Math 102 (Analyse Réelle)
Session: Partiel

Année: 2011-2012
Durée: 1h

Exercice I: (20 points).
En utilisant la définition de la limite, montrer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-2}{n^2+n+1} = 1.$$

Exercice II: (25 points).
Soit $E = \left\{1 - \frac{1}{2n} ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Montrer que E est bornée et trouver ses bornes.

Exercice III: (25 points).
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ de nombres réels définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad u_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \ldots + \frac{\ln n}{n}.$$

1. Montrer que : $\forall n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $u_{n+p} - u_n \geq \frac{p}{n+p}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ n'est pas convergente.

Exercice IV: (30 points).
Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. On définit 2 suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ par les relations de récurrence suivantes :

$$x_0 = a;\ y_0 = b,\ x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n + y_n},\ y_{n+1} = \frac{y_n^2}{x_n + y_n}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$ et $y_n > 0$.
2. Prouver que la suite $(w_n)_n$ définie par le terme général $w_n = y_n - x_n$ est une suite stationnaire de valeur k à déterminer.
3. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est convergente. En déduire que la suite $(y_n)_n$ l'est aussi.
4. Calculer les limites des suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ dans les cas suivants:
   (a) $a > b$
   (b) $a = b$
   (c) $a < b$

Bonne Chance

$n > \frac{1}{2(1-M)}$ alors $2n > \frac{1}{1-M}$ et $1-M > \frac{1}{2n}$, donc
$M < 1 - \frac{1}{2n}$ et on a $1-\frac{1}{2n} \in E$ et $M = \operatorname{Sup} E$ ce qui est
impossible. D'où $M = \operatorname{Sup} E = 1$

$\boxed{\text{EX III}}$ (a) Pour $n, p \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$;

$$U_{n+p} - U_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{\ln(n+2)}{n+2} + \cdots + \frac{\ln(n+p)}{n+p}$$

$$\geq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p}$$ (car $n \geq 2 \Rightarrow n+1 \geq 3$ et $\ln(n+1) \geq \ln 3 > 1$ de même pour les autres)

$$\geq \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \cdots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}.$$

(b) Prendre $\varepsilon = \frac{1}{4}$, soit $N \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, prendre $p = 2N$ et $q = N$, on a $p \geq N$ et $q \geq N$ et

$$|U_p - U_q| = U_{2N} - U_N \underset{\text{d'après (a)}}{\geq} \frac{N}{2N} = \frac{1}{2} > \varepsilon = \frac{1}{4}$$

Donc $(U_n)_n$ non suite de Cauchy, alors $(U_n)_n$ non convergente.

$\boxed{\text{EX IV}}$ (a) Par récurrence ; $x_0 = a > 0$ et $y_0 = b > 0$.

Supposons que $x_n > 0$ et $y_n > 0$ alors

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n + y_n} > 0 \text{ et } y_{n+1} = \frac{y_n^2}{x_n + y_n} > 0$$

(b) $$\omega_{n+1} = y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{y_n^2}{x_n + y_n} - \frac{x_n^2}{x_n + y_n}$$

$$= \frac{y_n^2 - x_n^2}{x_n + y_n} = y_n - x_n = \omega_n$$

$n > \frac{1}{2(1-M)}$ alors $2n > \frac{1}{1-M}$ et $1-M > \frac{1}{2n}$, donc $M < 1 - \frac{1}{2n}$ et on a $1-\frac{1}{2n} \in E$ et $M = \operatorname{Sup} E$ ce qui est impossible. D'où $M = \operatorname{Sup} E = 1$

$\boxed{\text{Ex III}}$ (a) Pour $n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$;

$$U_{n+p} - U_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{\ln(n+2)}{n+2} + \dots + \frac{\ln(n+p)}{n+p}$$

$$\geq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p}$$ (car $n \geq 2 \Rightarrow n+1 \geq 3$ et $\ln(n+1) \geq \ln 3 > 1$ de même pour les autres)

$$\geq \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \dots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}.$$

(b) Prendre $\varepsilon = \frac{1}{4}$, soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, prendre $p = 2N$ et $q = N$, on a $p \geq N$ et $q \geq N$ et

$$|U_p - U_q| = U_{2N} - U_N \underset{\text{d'après (a)}}{\geq} \frac{N}{2N} = \frac{1}{2} > \varepsilon = \frac{1}{4}$$

Donc $(U_n)_n$ non suite de Cauchy, alors $(U_n)_n$ non convergente.

$\boxed{\text{Ex IV}}$ (a) Par récurrence ; $x_0 = a > 0$ et $y_0 = b > 0$.

Supposons que $x_n > 0$ et $y_n > 0$ alors

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n + y_n} > 0 \text{ et } y_{n+1} = \frac{y_n^2}{x_n + y_n} > 0$$

(b) $$\omega_{n+1} = y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{y_n^2}{x_n + y_n} - \frac{x_n^2}{x_n + y_n}$$

$$= \frac{y_n^2 - x_n^2}{x_n + y_n} = y_n - x_n = \omega_n$$

$(x_n)_n$ minorée par 0 (d'après a), alors $(x_n)_n$ convergente. Soit $\ell = \lim_{n \to \infty} x_n$. De plus $\forall n \in \mathbb{N}$; $y_n - x_n = b - a$ alors $y_n = x_n + b - a$ ce qui donne que $(y_n)_n$ est convergente et si $\ell' = \lim_{n \to \infty} y_n$, alors $\boxed{\ell' = \ell + b - a}$

(d) Comme $\forall n \in \mathbb{N}$; $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{x_n + y_n}$, alors à la limite, on obtient $\ell = \dfrac{\ell^2}{\ell + \ell'} \Rightarrow \ell^2 + \ell\ell' = \ell^2$ et $\ell\ell' = 0$ et d'après (a). on a $\ell \geq 0$ et $\ell' \geq 0$

D'où, on a $\begin{cases} \ell \geq 0 \ , \ \ell' \geq 0 \\ \text{et } \ell\ell' = 0 \Rightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell' = 0 \\ \text{et } \ell' = \ell + b - a \end{cases}$

* <u>$a > b$</u>: Alors $\ell' = 0$ et $\ell = a - b > 0$ (car si $\ell = 0$, dans ce cas $\ell' = b - a < 0$ impossible)
* <u>$a = b$</u>: Alors $\ell = \ell' = 0$
* <u>$a < b$</u>: Alors $\ell = 0$ et $\ell' = b - a$ (car si $\ell' = 0$, alors $\ell = a - b < 0$ impossible

Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: Math 102 (Analyse Réelle) Année: 2009-2010
Session: Partiel Durée: 1h

Exercice I: (20 points).

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
2. Soient $(u_n)_n$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \Longrightarrow |u_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |l|.$$

Exercice II: (25 points).

Soit $E = \left\{ 1 - \frac{1}{n^2} \,;\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que E est bornée et trouver ses bornes.

Exercice III: (25 points).

En utilisant la critère de Cauchy, démontrer la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec

$$x_n = \frac{\sin 3}{3} + \frac{\sin 3^2}{3^2} + \ldots + \frac{\sin 3^n}{3^n}.$$

Exercice IV: (30 points).

On considère la suite $(u_n)_n$ de nombres réels définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = -\frac{1}{u_n + 3} + 3$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2\sqrt{2}$.
2. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$.
3. Donner la nature de la suite $(u_n)_n$ et déterminer sa limite si elle existe.

Bonne Chance

Solution 2009 - 2010 :

Exercice I : 1) $|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x-y|$ (1)

$|y| = |y-x+x| \leq |y-x| + |x| = |x-y| + |x| \Rightarrow$

$|y| - |x| \leq |x-y|$ (2)

or $||x|-|y|| = \max\{|x|-|y| ; |y|-|x|\}$; donc, d'après (1) et (2),

$||x|-|y|| \leq |x-y|$

2) Soit $\varepsilon > 0$, comme $U_n \xrightarrow[n]{} \ell$ alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que

$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N \Rightarrow |U_n - \ell| \leq \varepsilon)$

Donc $\forall n \geq N$; $||U_n| - |\ell|| \leq |U_n - \ell| \leq \varepsilon$

D'où $|U_n| \xrightarrow[n]{} |\ell|$

Exercice II : $E = \{1 - \frac{1}{n^2} ; n \in \mathbb{N}^*\}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $0 < \frac{1}{n^2} \leq 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$: $-1 \leq \frac{-1}{n^2} < 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq 1 - \frac{1}{n^2} < 1$

Donc 0 minorant de E et 1 majorant de E, ce qui donne que E est minoré et majoré, donc borné.

$E \neq \emptyset$ et majoré par 1 $\Rightarrow \sup E = M \exists$ et $M \leq 1$

$E \neq \emptyset$ et minoré par 0 $\Rightarrow \inf E = m \exists$ et $0 \leq m$

$0 = 1 - \frac{1}{1^2} \in E \Rightarrow m \leq 0$ et on $0 \leq m$, donc

$$\boxed{m = \inf E = 0}$$

on a $M \leq 1 \Rightarrow M = 1$ ou $M < 1$.

Supposons que $M < 1$ alors $1 - M > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-M}} > 0$ et d'après le principe d'Archimède. $\exists n \in \mathbb{N}^* / \frac{1}{\sqrt{1-M}} < n \Rightarrow$

$\frac{1}{n} < \sqrt{1-M} \Rightarrow \frac{1}{n^2} < 1 - M$ et $M < 1 - \frac{1}{n^2}$

et comme $1 - \frac{1}{n^2} \in E$ et $M = \sup E$ alors il y a une contradiction et $\boxed{M = \sup E = 1}$

$\cdots + \dfrac{\sin 3^m}{3^m}$

Soit $m, p \in \mathbb{N}^*$: on a $|x_{m+p} - x_m| = \left| \dfrac{\sin 3^{m+1}}{3^{m+1}} + \dfrac{\sin 3^{m+2}}{3^{m+2}} + \cdots + \dfrac{\sin 3^{m+p}}{3^{m+p}} \right|$

$\leq \dfrac{1}{3^{m+1}} + \dfrac{1}{3^{m+2}} + \cdots + \dfrac{1}{3^{m+p}} = \dfrac{1}{3^{m+1}} \left[1 + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{3^{p-1}} \right] \leq \dfrac{1}{3^m}$

or comme $\dfrac{1}{3^m} \xrightarrow[m]{} 0$ alors $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(m \geq N \Rightarrow \dfrac{1}{3^m} \leq \varepsilon)$

Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists N \in \mathbb{N} / m \geq N \Rightarrow \dfrac{1}{3^m} \leq \varepsilon$

Donc si $p > q \geq N$, alors $|x_p - x_q| = |x_{q+p-q} - x_q|$ $\leq \dfrac{1}{3^q} \leq \varepsilon$ c.q.f.d. D'où $(x_m)_m$ suite de Cauchy et alors $(x_m)_m$ conv

---

Exercice IV : $U_0 = 1$ et $U_{m+1} = \dfrac{-1}{U_m + 3} + 3$

1) Par récurrence : Pour $m = 0$ on a $0 \leq U_0 = 1 \leq 2\sqrt{2}$

Supposons que $0 \leq U_m \leq 2\sqrt{2}$, alors $U_{m+1} = \dfrac{-1}{U_m + 3} + 3 \geq 0$

(car $U_m + 3 \geq 3 \Rightarrow \dfrac{1}{U_m + 3} \leq \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{-1}{3} \leq \dfrac{-1}{U_m + 3} \Rightarrow$

$0 \leq 3 - \dfrac{1}{3} \leq 3 - \dfrac{1}{U_m + 3}$)

De plus $U_{m+1} - 2\sqrt{2} = \dfrac{-1}{U_m + 3} + 3 - 2\sqrt{2} = \dfrac{-1 + (3 - 2\sqrt{2})(U_m + 3)}{U_m + 3}$

$= \dfrac{-1 + 3U_m + 9 - 2\sqrt{2}U_m - 6\sqrt{2}}{U_m + 3} = \dfrac{(3 - 2\sqrt{2})U_m + 8 - 6\sqrt{2}}{U_m + 3}$

$U_{m+1} - 2\sqrt{2} = \dfrac{(3 - 2\sqrt{2})U_m + 2\sqrt{2}(2\sqrt{2} - 3)}{U_m + 3}$

$= \dfrac{(3 - 2\sqrt{2})(U_m - 2\sqrt{2})}{U_m + 3} \leq 0$ $\left(\begin{array}{l} \text{car } 3 - 2\sqrt{2} \geq 0,\ U_m + 3 \geq 0 \\ \text{et } U_m - 2\sqrt{2} \leq 0 \end{array} \right)$

D'où $U_{m+1} \leq 2\sqrt{2}$ c.q.f.d

2) $U_{m+1} - U_m = \dfrac{-1}{U_m + 3} + 3 - U_m = \dfrac{-1 + 9 - U_m^2}{U_m + 3} = \dfrac{8 - U_m^2}{U_m + 3}$

$= \dfrac{(2\sqrt{2} - U_m)(2\sqrt{2} + U_m)}{U_m + 3} = \dfrac{(2\sqrt{2} - U_m)(2\sqrt{2} + U_m)}{U_m + 3} \geq 0$

$\left(\begin{array}{l} \text{car } 2\sqrt{2} - U_m \geq 0 ;\ 2\sqrt{2} + U_m \geq 0 \\ \text{et } U_m + 3 \geq 0 \end{array} \right)$

D'où $(U_m)_m \nearrow$

4) La suite $(U_n)_n \nearrow$ et majorée par 2, alors $(U_n)_n$ conv et soit ℓ sa limite. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{U_n + 2}$, alors à la limite, on a $\ell = \frac{3\ell + 2}{\ell + 2} \Longrightarrow \ell^2 + 2\ell = 3\ell + 2$

$\Longrightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \Longrightarrow \ell = -1$ ou $\ell = 2$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0 \Longrightarrow \ell \geq 0$ et donc $\ell = 2$

Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: Math 102 (Analyse Réelle)
Session: Partiel

Année: 2008-2009
Durée: 1h

Exercice I: (20 points).
Soit S un ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}_+$. On définit l'ensemble $aS = \{ax; x \in S\}$. Montrer que Sup $(a\,S) = a$ Sup S.

Exercice II: (20 points).
Appliquer la définition pour montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5n+6}{n+2} = 5$.

Exercice III: (30 points).

1. Montrer que toute suite convergente dans $\mathbb{R}$ est une suite de Cauchy.
2. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles définit par :

$$x_n = \frac{n+1}{n} \quad \text{et} \quad y_n = (-1)^n$$

Appliquer la définition pour montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy, mais la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite de Cauchy.

Exercice IV: (30 points).
On considère la suite $(u_n)_n$ de nombres réels définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n}{1+3u_n}$$

1. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$.
2. Donner la nature de la suite $(u_n)_n$ et déterminer sa limite si elle existe.

Bonne Chance

Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: Math 102 (Analyse Réelle)
Session: Partiel

Année: 2007-2008
Durée: 1h

Exercice I: (15 points).
Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

Exercice II: (30 points).
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \{q \in \mathbb{Q} ; q \leq \alpha\}$ et $B = \{q \in \mathbb{Q} ; q \geq \alpha\}$.

1. Montrer que la borne supérieure de A existe.
2. Montrer que la borne inférieure de B existe.
3. Montrer que $\mathrm{Sup}A = \mathrm{Inf}B$.

Exercice III: (25 points).
Appliquer la définition pour montrer que :

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2+1}{x-2} = -1$$

Exercice IV: (30 points).
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que : $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+p} - u_n \geq \dfrac{p}{n+p}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas convergente.

Bonne Chance

Solution 2007 - 2008 :

Exercice I : Soit $x, y \in \mathbb{R}$

$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Longrightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$ ①

$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| \Longrightarrow |y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$ ②

or $\big||x| - |y|\big| = \max\{|x| - |y|, |y| - |x|\} \leq |x - y|$

d'après ① et ②

Exercice II : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; $A = \{x \in \mathbb{Q} ; x \leq \alpha\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Q} ; x \geq \alpha\}$

1) on a $A \neq \emptyset$ et majorée par α, donc $\operatorname{Sup} A \ \exists$ et $\operatorname{Sup} A \leq \alpha$

2) on a $B \neq \emptyset$ et minorée par α, donc $\operatorname{Inf} A \ \exists$ et $\operatorname{Inf} A \geq \alpha$

3) on va démontrer que $\operatorname{Sup} A = \alpha = \operatorname{Inf} A$.

on a $\operatorname{sup} A \leq \alpha$. Si $\operatorname{Sup} A < \alpha$, alors $\exists x \in \mathbb{Q} /$

$\operatorname{Sup} A < x < \alpha$ et donc $x \in A$ et $\operatorname{sup} A < x$ ce qui impossible

D'où $\operatorname{Sup} A = \alpha$

de même on a $\operatorname{Inf} A \geq \alpha$. Si $\operatorname{Inf} A > \alpha$, alors $\exists x \in \mathbb{Q} /$

$\operatorname{Inf} A > x > \alpha$ et donc $x \in A$ et $x < \operatorname{Inf} A$ ce qui est imp

D'où $\operatorname{Inf} = \alpha$.

Exercice III : $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + 1}{x - 2} = -1$

Soit $\varepsilon > 0$; il faut trouver $\delta > 0 / \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$|x + 1| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) + 1| \leq \varepsilon$

$$|f(x) + 1| = \left| \frac{2x^2 + 1}{x - 2} + 1 \right| = \left| \frac{2x^2 + 1 + x - 2}{x - 2} \right| = \left| \frac{2x^2 + x - 1}{x - 2} \right|$$

$$= \frac{|(x + 1)(2x - 2)|}{|x - 2|} = \frac{|x + 1| \cdot |2x - 1|}{|x - 2|}$$

$-2 \leq x \leq 0$. Alors $-4 \leq x-2 \leq -2$ et donc

$|x-2| = -(x-2) \geq 2 \Longrightarrow \frac{1}{|x-2|} \leq \frac{1}{2}$

De plus $-2 \leq x \leq 0 \Longrightarrow -4 \leq 2x \leq 0 \Longrightarrow -5 \leq 2x-1 \leq -1$

$\Longrightarrow |2x-1| \leq 5$

D'où $|f(x)+1| \leq \frac{|x+1| \cdot 5}{2}$ il suffit de prendre $\delta = \min\{1, \frac{2\varepsilon}{5}\}$

Exercice IV : $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$

1) $U_{n+p} - U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \dots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}$

2) Prendre $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, alors prendre $p = 2N$ et $q =$

on a $p \geq N$, $q \geq N$ et $|U_p - U_q| = |U_{2N} - U_N|$

$= U_{2N} - U_N = U_{N+N} - U_N \underset{\text{d'après 1)}}{\geq} \frac{N}{N+N} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon$

Ce qui montre que $(U_n)_n$ n'est pas suite de Cauchy

Ce qui donne que $(U_n)_n$ n'est pas convergente

Code : M102 Durée 1h. partiel 1/12/2005

Ex I (15 pts) : Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leq |x| + |y|$

Ex II (20 pts) Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} \; ; \; 1 \leq x \leq \sqrt{3}\}$.
Trouver la borne supérieure et la borne inférieure de A.

Ex III (20 pts) Appliquer la définition pour montrer que
$\lim_{x \to 1} x^2 - x + 1 = 3$

Ex IV (45 pts) On considère la suite $(u_n)_n$ de nombres réels définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{4} < u_n < \frac{3}{4}$.

2) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$.

3) Donner la nature de la suite $(u_n)_n$ et déterminer sa limite si elle existe !

Solution 2005 (Partiel) :

Exercice n° I :

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ on a : $\left.\begin{array}{l} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{array}\right\}$

alors $(-|x| + |y|) \leq x+y \leq |x| + |y|$

Donc $x+y \leq |x| + |y|$ et $-(x+y) \leq |x| + |y|$. or

$|x+y| = \max\{-(x+y), (x+y)\}$ donc $|x+y| \leq |x| + |y|$

Exercice II :

$$A = \{x \in \mathbb{Q} ; 1 \leq x \leq \sqrt{3}\} = \mathbb{Q} \cap [1, \sqrt{3}]$$

on a 1 minorant de A et $A \neq \phi \Longrightarrow m = \inf A$ existe et $1 \leq m$ De plus $1 \in A$ donc $m \leq 1$ D'où $m = 1 = \inf A$

on a $\sqrt{3}$ majorant de A et $A \neq \phi \Longrightarrow M = \sup_A$ existe et $M \leq \sqrt{3}$ si $M < \sqrt{3}$ alors il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $M < r < \sqrt{3}$ (Car entre deux réels il $\exists$ une infinité des rationnels) donc $1 \leq M < r \leq \sqrt{3}$ et $r \in \mathbb{Q}$ ce qui donne que $r \in A$ et $M < r$ ce qui est impossible car $M = \sup A$ donc $M = \sup A = \sqrt{3}$

Exercice III :

Posons $f(x) = x^2 - x + 1$ pour démontrer que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$, il faut démontrer que

soit $\varepsilon > 0$, il faut trouver $\delta > 0$ / $(\forall x \in \mathbb{R})$

$(|x+1| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - 3| \leq \varepsilon)$

$$|f(x) - 3| = |x^2 - x + 1 - 3| = |x^2 - x - 2|$$
$$= |(x+1)(x-2)|$$
$$= |x+1|\,|x-2|$$
$$= |x+1|\,|x+1-3| \leq |x+1|\,[|x+1| + 3]$$

Donc il suffit de prendre $\delta > 0 / \delta(\delta+3) = \varepsilon$

Si $\delta^2 + 3\delta - \varepsilon = 0$ alors $D = 9 + 4\varepsilon$, donc

δ : $\dfrac{-3+\sqrt{9+4\varepsilon}}{2} > 0$

$\dfrac{-3-\sqrt{9+4\varepsilon}}{2} < 0$ (inacceptable)

Exercice IV :

$U_0 = \frac{1}{2}$; $U_{m+1} = U_m^2 + \frac{3}{16}$

1) par récurrence : pour $m=0$, on a $\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$

$\Longrightarrow \frac{1}{4} < U_0 < \frac{3}{4}$

Supposons que la propriété est vrai pour m et démontrons qu'elle est vrai pour $m+1$ comme $\frac{1}{4} < U_m < \frac{3}{4}$, alors $\frac{1}{16} < U_m^2 < \frac{9}{16}$ donc $\frac{1}{16} + \frac{3}{16} < U_m^2 + \frac{3}{16} < \frac{9}{16} + \frac{3}{16}$

alors $\frac{4}{16} < U_{m+1} < \frac{12}{16}$ et donc $\frac{1}{4} < U_{m+1} < \frac{3}{4}$ c.q.f.d

2) $U_{m+1} - U_m = U_m^2 - \frac{3}{16} - U_m = \dfrac{(4U_m - 1)(4U_m - 3)}{16}$

Comme $\frac{1}{4} < U_m < \frac{3}{4}$ alors $4U_m - 1 > 0$ et $4U_m - 3 < 0$

donc $U_{m+1} - U_m < 0$, $\forall m$ Donc $(U_m)_m$ est $\searrow$.

3) $(U_m)_m \searrow$ minorée par $\frac{1}{4}$ alors $(U_m)_m$ convergente

$\ell = \ell^2 + \frac{3}{16}$ alors $(4\ell - 1)(4\ell - 3) = 0$

$\ell = \frac{1}{4}$ ou $\ell = \frac{3}{4}$ or $\ell \leq U_m \leq U_0 < \frac{3}{4}$ $\forall m$ donc

$\ell \neq \frac{3}{4}$ alors $\ell = \frac{1}{4} = \lim\limits_{m \to \infty} U_m$