M1104

Chapitre 1 : Calcule des primitives

* on peut chercher l'intégrale par changement de variable, en remplaçons par exemple x par $\varphi(t)$
$dx = \varphi'(t)dt$.

* par Primitivation par parties
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

* utilisation pratique : si f polynôme et g est : e^{ax}, $ch\,ax$, $sh\,ax$, $\sin ax$, $\cos ax$ $\quad a \in \mathbb{R}^*$

dérivée   primitive

0

* Si on a $\frac{P(x)}{Q(x)}$ et $P(x)$ et $Q(x)$ de polynômes
avec $deg(P(x)) < deg(Q(x))$, on cherche a, b, c, ... (décomposition en elements simples)

mais si $deg(P(x)) \geqslant deg(Q(x))$, on fait une division euclidienne jusqu'avoir $deg(\text{numérateur}) < deg(\text{dénominateur})$. et je continue la décomposition en elements simples.

* $$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$$

* $\int \cos^m x \sin^n x \, dx$ $\quad m,n \in \mathbb{N}$.

* Si m est impaire on prendre $t = \sin x$
$dt = \cos x \, dx$

* Si n est impaire on prendre $t = \cos x$
$dt = -\sin x \, dx$.

* Si n et m paire on peut utiliser les formules suivants :
$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$

* Regle de Bioche :
$\int \underbrace{f(\sin x, \cos x)}_{F} dx$

* Si F ne varie pas en changeant x par $-x$ alors on prend $t = \cos x$
* Si F ne varie pas en changeant x par $\pi - x$ alors on prend $t = \sin x$
* Si F ne varie pas en changeant x par $\pi + x$ alors on prend $t = \tan x$

* et si elle varie avec tout ces cas, on prend $t = \tan \frac{x}{2}$ avec : $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

et $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$.

* Si F se calcule avec $t = \cos x$ alors $f(\text{sh}x, \text{ch}x)$ se calcule avec $t = \text{ch}x$
de m̂ si $t = \sin x$ alors $t = \text{sh}x$
de m̂ si $t = \tan x$ alors $t = \text{th}x$

* si $t = th\frac{x}{2}$; $shx = \frac{2t}{1+t^2}$; $chx = \frac{1+t^2}{1-t^2}$; $dx = \frac{2}{1-t^2} dt$

* fonction rationnelle en $e^{\alpha x}$
  on prend $t = e^{\alpha x}$ $dt = \alpha \frac{e^{\alpha x}}{t} dx$; $dx = \frac{1}{\alpha t} dt$

* fonction rationnelle en $x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{r/s}$
  on prend $x = t^k$ où k est le dénominateur commun de $1, \frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$

* fonction rationnelle en $x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}$
on prend
$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = t^k$$ où k est encore le denominateur commun.

* $\int \frac{2}{t^2-1} dt = \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|$

$$\int \frac{2}{x^2-1} dx = \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$$

* fonctions rationnelle en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$
si $a>0$, on prend $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t$.

si $a<0$ et $\Delta>0$ on prend $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\underset{\text{un racine}}{\alpha})$

* Si on a : (irrationnel).
* $\int S(t, \sqrt{1-t^2})$, on prend $\sin u = t$
* $\int S(t, \sqrt{t^2-1})$, on prend $t = \overset{\text{signe}(t)}{\varepsilon}\, ch u$
* $\int S(t, \sqrt{t^2+1})$, on prend $t = sh u$

Chapitre 2 : L'intégrale de Reiman

Somme de Reiman : $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Somme de Reiman $= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k)$

* $f \in C([a,b]) \Rightarrow f \in R([a,b])$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n}}_{= \sum_{k=0}^{n-1}} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\, dx$$

en particulier si f est continue sur $[0,1]$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n}}_{= \sum_{k=0}^{n-1}} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\, dx$$

* Théorème de la moyenne

1er th. de la moyenne :

Si f et $g \in R([a,b])$
et g garde une signe cst sur $[a,b]$
} Alors $\exists$ $k \in [m, M]$

sup $f(x)$

inf $f(x)$

Si de plus $f \in C([a,b])$ alors
$\exists \xi \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)\, dx.$$

formule de moyenne :

$f \in C[a,b]$, g gard une signe constante sur $[a,b]$ alors $\exists\ \xi \in [a,b] \,/\, \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$

$$= f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx.$$

Chapitre 3: Intégrales impropres

Intégrale impropre de 1ère espèce : $\int_a^{+\infty} f(t)dt$

$f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$

Si $\int_a^X f(t)dt \xrightarrow[X \to +\infty]{} = \ell$ ∃ et finie ⟹ convergent ; ∄ et ∞ ⟹ divergent.

Intégrale impropre de 2ème espèce : $\int_a^b f(t)dt$

$f : [a, b[\to \mathbb{R}$

Si $\int_a^\alpha f(t)dt \xrightarrow[\alpha \to b]{} = \ell$ ∃ et finie ⟹ convergent ; ∄ et ∞ ⟹ divergent.

* Etude d'une intégrale de 1ère espèce :

* Si $a' > a \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_{a'}^{+\infty} f(x)dx$ de m̂ nature

* Critère de Cauchy :

pS. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ convergente ssi $\int_{X_1}^{X_2} f(x)dx \xrightarrow[\substack{X_1 \to +\infty \\ X_2 \to +\infty}]{} 0$

* $0 \leq f \leq g$

Si $\int_a^{+\infty} g(x)$ convergente $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ convergente

Si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ divergente $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ divergente

* Si $f \sim_{+\infty} g \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ ont m̂ nature

* $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ convergente ssi $\alpha > 1$

* règle de $x^\alpha f(x)$.

① Si $\exists \ell \in \mathbb{R}^* / x^\alpha f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \ell$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)$ et $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ de m̂ nature

alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ conv. ssi $\alpha > 1$.

② Si $\exists \alpha \in]1, +\infty[/ x^\alpha f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ convergent.

③ $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$ converg. ssi $\alpha > 1$

car $x^{\left(1+\frac{\alpha-1}{2}\right)>1} \cdot \frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln x}{x^{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)>0}} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow$ convergente.

* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est absolument convergente ssi $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ est convergente

* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ convergente $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ convergente
(=absolument convergent)

* Si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ convergent et non absolument convergente alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est semi convergente.

* Critère d'Abel.

$\left.\begin{array}{l} g \text{ monotone et borné sur } [a, +\infty[\\ \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergente} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ est convergent

Critère de Dirichlet :

p.10 • g monotone et tend vers 0 quand $x \longrightarrow +\infty$

• $F : X \longrightarrow \int_a^X f(x)\,dx$ est bornée sur $[a, +\infty[$

alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ est convergente.

Etude d'une intégrale de 2^{e} espèce :

• $0 \leq f \leq g$

Si $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge $\Longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ divergente

Si $\int_a^b g(x)\,dx$ convergente $\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ convergente

• $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ est convergente ssi $\alpha < 1$ $[a, b[$

$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ convergente encore ssi $\alpha < 1$ $]a, b]$

• règle de $(b-x)^\alpha f(x)$

• Si $\exists\, l \in \mathbb{R}^* \,/\, (b-x)^\alpha f(x) \xrightarrow[x \to b^-]{} l$, alors $\int_a^b f(x)$ et $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ sont de même nature, et par suite $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente ssi $\alpha < 1$

2) Si $\exists \alpha \in]-\infty,1[\; / \; (b-x)^{\alpha} f(x) \xrightarrow[x \to b^-]{} 0$ alors

$\int_a^b f(x)\,dx$ convergente

- Critère de Cauchy : $[a,b[$

$\int_a f(x)\,dx$ convergente ssi $\int_{X_1}^{X_2} f(x)\,dx \xrightarrow[\substack{X_1 \to b^- \\ X_2 \to b^-}]{} 0$

- $\int_a^b f(x)\,dx$ est absolument divergent ssi $\int_a^b |f(x)|\,dx$ est converg.

- $\int_a^b |f(x)|\,dx$ convergent $\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ convergent.

Chapitre 4 : Série numeriques.

* Si (S_n) (somme) est convergente alors la serie $\sum U_n$ est convergente, et si elle diverge, elle est divergente.

* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (la serie est convergent et sa somme est e).

* Serie geometrie de raison q :
* si $q=1$ alors $S_n \longrightarrow \infty$ et la ~~se~~ série divergente
* Si $|q| \geq 1 \Rightarrow q^{n+1} \longrightarrow \infty$ et $S_n \longrightarrow \pm\infty \Rightarrow$ la serie diverge
* Si $|q| < 1 \Rightarrow q^{n+1} \longrightarrow 0$ et $S_n \longrightarrow \frac{1}{1-q} \Rightarrow$ la serie est convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

la limite du somme est la reponse de la serie

* $\sum U_n$ converge $\Longrightarrow U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$U_n \cancel{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \Longrightarrow \sum U_n$ diverge.

* $\sum U_n$ une S.T.P. $\sum U_n$ diverge $\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

* $\sum U_n$ et $\sum V_n$ sont S.T.P et $0 < U_n \leq V_n$

$\sum U_n$ diverge $\Rightarrow \sum V_n$ diverge

$\sum V_n$ converge $\Rightarrow \sum U_n$ converge

* $\sum \frac{1}{n^p}$ est $\to$ convergent $p \geq 2$

$\searrow$ divergent si $p=1$

- $\sqrt[n]{U_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{regle de Cauchy}} \ell$
  $\Rightarrow$ si $\ell < 1 \Rightarrow \sum U_n$ converge
  $\Rightarrow$ si $\ell > 1 \Rightarrow \sum U_n$ diverge
  $\Rightarrow$ si $\ell = 1 \Rightarrow$ rien à conclure

- Regle de Alembert:

$\sum U_n$ est STP et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \ell$

on peut l'appliquer sur factorielle.

Si $\ell < 1 \Rightarrow \sum U_n$ converge
Si $\ell > 1 \Rightarrow \sum U_n$ diverge
si $\ell = 1 \Rightarrow$ rien à conclure

- $f > 0$, continue, decroissant sur $[0, +\infty[$ donc $\int_0^{\infty} f(x)dx$ et $\sum\limits_{n\geq 0} f(n)$ sont de même nature.

on peut l'appliquer sur seri de Rieman $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$

Regle de $n^\alpha U_n$

Si $\exists \alpha > 1 \,/\, \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha U_n = 0 \Rightarrow \sum U_n$ converge

Si $\exists\ 0 < \alpha \leq 1 \,/\, \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha U_n = +\infty \Rightarrow \sum U_n$ diverge

$\frac{U_n}{1/n^\alpha}$ (diverge)

Si $\exists \alpha > 0 \,/\, \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha U_n = \ell \Rightarrow \sum U_n$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ de même nature

- $\sum U_n$ absolument convergente $\Rightarrow \sum |U_n|$ converge

$\sum U_n$ semi convergente $\Rightarrow \sum U_n$ convergent et non absolument convergent.

absolument convergent $\Rightarrow$ convergent.

* théorème des séries alternés.
Soit u_n suite >0 tq (u_n) décroissante et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$
alors $\sum (-1)^n u_n$ converge.

* Critère de majoration : Si $|u_n| \leq k v_n$ où $\sum v_n$ STP convergente alors $\sum |u_n|$ conv et $\Longrightarrow \sum U_n$ convergente.

* Bertrand :

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} \text{ convergente} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$