RÉSUMÉ

P1100

Vanessa

Cinématique Du Point

Equations aux dimensions

masse [M]

mètre, longueur, surface, Volume [L]

temps [T]

Grandeurs Fondamentales

SI	G.F.
m	cm
Kg	g
s	s
N	dyne

Systeme d'unités

cgs	mksa
cm	m
g	Kg
s	s
	ampère.

$$\boxed{\vec{a}.\vec{dr} = \vec{v}\,\vec{dv}}$$

$\vec{a} \rightarrow \frac{dv}{dt}$ $\qquad$ $\vec{v} \rightarrow \frac{dr}{dt}$

Types De Mouvement

MRU
- $V = V_0 = cte$
- $a = 0$
- $x(t) = V_0 t + x_0$

MRU variée
(acceleré / decceleré)

$V \nearrow$ / $V \searrow$

- $x = \frac{1}{2} a t^2 + V_0 t + x_0$
- $V = a t + V_0$
- $V_f^2 - V_i^2 = 2a \underbrace{(x - x_0)}_{d}$

Erratique
$a\,dS = V\,dV$

Projectile

- On neglige la resistance de l'air
- $a = cte$ (dirigé vers le bas)
- $\vec{a} = \vec{g}$ $\begin{cases} a_x = 0 \Rightarrow V_x = cte \Rightarrow x = V_0 \cos\theta \, t \\ a_y = -g \Rightarrow V_y = -g t + V_0 \sin\theta \end{cases}$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin\theta \, t$

- On remplace t dans y tels que $t = \frac{x}{V_0 \cos\theta}$

$\Rightarrow$ Equ. de la trajectoire : $y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_0 \cos\theta}\right)^2 + V_0 \sin\theta \left(\frac{x}{V_0 \cos\theta}\right)$

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\theta} + x \tan\theta.$$

- La porte de tire : $x_A = \frac{2V_0}{g} \sin\theta \cos\theta$
- Coordonnées du sommet du parabole :

$$x_m = \frac{V_0^2}{g} \sin\theta \cos\theta \quad \text{et} \quad y_m = \frac{V_0^2}{2g} \sin^2\theta$$

Mouvement en coordonnées Cylindriques (ρ, θ, z)

Position : $\vec{r} = \rho\,\hat{e}_\rho + z\,\hat{k}$

Vitesse $\vec{V} = \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{z}\,\hat{k} = \vec{V}_\rho + \vec{V}_\theta + \vec{V}_z$

Longueur du trajet : $S = \int_0^t \text{module de } V\, dt = \int_0^t \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}\; dt$

Acceleration : $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\hat{e}_\theta + \ddot{z}\,\hat{k}$

$= \vec{a}_r + \vec{a}_\theta + \vec{a}_z$

acc radiale acc. orthoradiale

Mouvement en coordonnées Polaires $(r, \theta, z=0) \rightarrow (r, \theta)$

Position : $\vec{r} = r.\hat{e}_r$

Vitesse : $\vec{V} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$

Longueur du trajet : $S = \int_{t_1}^{t_2} dS = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2}\; dt$

Acceleration : $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$

acc. radiale acc. orthoradiale

D'autre façon :

$$\frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}$$

Accelération tangentielle et normale

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}$$

$$\dot{v}\,\hat{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\,\hat{n}$$

$\hat{\tau}$: Vecteur unitaire tangentielle, m sens avec le mobile

Vitesse : $\vec{V} = V.\hat{\tau}$

accélération : C'est la somme de deux vecteurs orthogonaux

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}$$

// à la vitesse donc tangente à la trajectoire

$\perp$ à la vitesse

Rayon de la courbure : $\rho = \dfrac{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{d^2y/dx^2}$

(equ. du traj. $y = f(x)$)

Mouvement Circulaire

Position : $\vec{r} = r.\hat{e}_r$

Vitesse : $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \omega.r.\hat{e}_t$

Accélération : $\vec{a} = \underbrace{\alpha.r.\vec{e_t}}_{\vec{a_t}} - \underbrace{\omega^2 r.\vec{e_r}}_{\vec{a_n}}$

Vitesse angulaire de rotation : $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

Accélération " " " : $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

Relation entre eux

$$\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$$

Période : $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Vanessa :)

Changement de Referentiels

* 2 particules en mvt exp A / B ← mobile
↑
particule

Mouvement → Absolue ; dans le repère fixe

$\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r}$

$\vec{a_a} = \vec{a_o} + \vec{\alpha} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) + \vec{a_r} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{V_r}}_{\text{acc. de coriolice}}$

→ Relatif ; dans le repère mobile

→ D'entraînement ; du repère mobile par rapport au repère fixe

$\vec{V_e} = \vec{V_o} + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$

Dynamique Classique

Loi de Newton

1°/ loi : principe de l'inertie $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

2° loi : R.F.D $\vec{f} = m.\vec{a}$

3° loi : Principe d'action de la reaction : $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$

Analyse des forces

Gravifiques

(attractive)

$F_{A \to B} = -\frac{G m_A m_B}{r^2} \hat{r}$

A exerce sur B une force attractive

$\vec{F}_{A \to B} = -\frac{G m_A m_B}{r^2} \hat{r} = m_A \vec{g}$

$\to \vec{g} = -\frac{G m_B}{r^2} \hat{r}$

Electromagnetiques.

1. électrostatique force de Coulomb

charge A exerce sur charge B une force « coulomb ».

$\vec{F}_{A \to B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_A q_B}{r^2} \hat{r}$

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to 8,99.10^9 \ N m^2 C^2$

2. Lorentz

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$

3. force magnetique

$\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$ en tesla

1 tesla = 10^4

Une force exercée sur une particule chargée

Forces de frottement

Visqueux

Loi de stockes.

$$\vec{F}_{fr} = \begin{cases} -k\hat{v}v & \text{basse vitesse} \\ -\eta v^2 \hat{v} & \text{vitesse elevée} \end{cases}$$

Vitesse Limite

$$\vec{V_L}^n = \frac{\vec{F}_{ext}}{\lambda} ; \vec{F}_{fr} = -\vec{F}_{ext}$$

Sec

$$\vec{F}_{fr} = -\mu_c |\vec{N}| v$$

si $V = 0$ (cas statique)

si $V \neq 0$ (cas de glissement)

Équation du Mvt

Cartesienne

$$\sum F_x \hat{i} + \sum F_y \hat{j} + \sum F_z \hat{k} = m(a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k})$$

Normale Tangentiel

$$\sum F_t = m a_t$$

$$\sum F_n = m a_n$$

$$a_t = dV/dt$$

$$a_n = V^2/\rho$$

$$a_t \cdot dS = V \cdot dV$$

$$\rho = \left| \frac{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2}}{d^2y/dx^2} \right|$$

Polaire

$$\sum F_\rho = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$\sum F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

Probleme de 2 corps et dynamique de l'espace

Loi de la gravitation universelle

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \quad / \; G = 6{,}67.10^{-11}\, N.m^2 Kg^{-2}$$

propriétés 1- vitesse aréolaire : $\vec{h} = \vec{OP} \wedge \vec{V}$

2 - mouvement en coordonnées polaires

3 - 2ᵉ loi de Kepler : $dA = \frac{1}{2} h\, dt = cte$

tels que $h\, dt = r^2 d\theta$

4 - Energie totale est conservé

$$E_m = E_c + E_p = cte$$
$$= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{C}{r}$$

Moment angulaire est conservé

$$\vec{J} = \vec{r} \wedge m\vec{V} = m r^2 \dot{\theta} \hat{k}$$

Les trajectoires ou orbites

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2}\left[1 + \frac{Ah^2}{GM}\cos\theta\right]$$

$$\begin{cases} h = V_0 r_0 \\ A = \dfrac{1}{r_0} - \dfrac{GM}{V_0^2 r_0^2} \end{cases}$$

excentricité du conique : $e = \frac{Ah^2}{GM}$

$0 < e < 1$	$e = 0$	$e = 1$	$e > 1$
ellipse	cercle	parabole	hyperbole

Relation entre excentricité et energie totale

$$E_{totale} = -\frac{GM}{2a}$$

Vitesse de liberation : $V_\ell = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$

Vitesse sur une orbite circulaire $V_c = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$

periode de revolution $T = 2\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{GM}}$ (3° loi de Kepler)

Relation fondamentale de la dynamique dans un repère non galelien

$$m\vec{a_r} = \sum \vec{F}_{reelles} - m\vec{a_0} - m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM} - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{V_r}$$

- Dans R' particule au repos $\Rightarrow V_r = 0 \rightarrow$ force coriolice s'annule
- R et R' ont même origine $\Rightarrow \vec{a_0} = 0 \rightarrow \dot{\vec{\omega}} = 0$.
- R' ne tourne pas par rapport à R $\Rightarrow \omega = 0 \rightarrow \dot{\vec{\omega}} = 0$.

  $\rightarrow$ force fictive se reduit à celle de translation $-m\vec{a_0}$.

La Conservation De L'Énergie

Puissance : $P = \vec{F}.\vec{V}$ (en watt).

Rendement

$$\mathcal{E} = \frac{\text{Puissance sortie}}{\text{Puissance entrée}}$$

$$\mathcal{E} = \frac{\text{Energie sortie}}{\text{Energie entrée}}$$

toujours < 1

Travail

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.\vec{V}.\,dt = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_2} \vec{F}.\,d\vec{r} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_2} F\cos\theta\,dr \text{ (en joule).}$$

- en coordonnées cartésiennes : $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$W = \int F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

- en coordonnées cylindriques : $\vec{F} = F_\rho\hat{e}_\rho + F_\theta\hat{e}_\theta + F_z\hat{k}$

$$d\vec{r} = d\rho\,\hat{e}_\rho + \rho\,d\theta\,\hat{e}_\theta + dz\,\hat{k}$$

$$W = \int F_\rho\,d\rho + F_\theta\,\rho\,d\theta + F_z\,dz$$

- en coordonnés sphériques : $\vec{F} = F_\rho\hat{e}_\rho + F_\theta\hat{e}_\theta + F_\varphi\hat{e}_\varphi$

$$d\vec{r} = d\rho\,\hat{e}_\rho + \rho\,d\theta\,\hat{e}_\theta + \rho\sin\theta\,d\varphi\,\hat{e}_\varphi$$

$$W = \int F_\rho\,d\rho + F_\theta\,\rho\,d\theta + F_\varphi\,\rho\sin\theta\,d\varphi$$

Forces

Conservatives

- Corps retourne vers son point de départ
- Travail le long de toute courbe fermée est nul

$$W_{A\to B} + W_{B\to A} = 0.$$

- Travail produit est independant du chemin suivit.
- $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, U$

Vecteur dérivée partielle

$$= \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

- Le rotationnel de F est nul

$$\overrightarrow{rot}\, F = \overrightarrow{grad} \wedge \vec{F} = 0$$

Donc la force est irrotationnelle

Nom Conservatives

$$\Delta E_c + \sum \Delta U = W_f$$

$$\Delta E = E_f - E_i = W_f < 0.$$

$$\to E_f < E_i.$$

Energie potentielle

Travail de la force

- de pesenteur : $\omega = mgh_A - mgh_B$
- gravitationnelle :
$$\omega_{A\to B} = \frac{GMm}{r_A} - \frac{GMm}{r_B}$$
- Coulomb : $\omega_{A\to B} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_A} - \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_B}$

En general le travail d'une force conservative ;

$$\omega_{A\to B} = \int \vec{f}\cdot\vec{dr} = U_A(r) - U_B(r).$$

Gradient de l'Energie potentiel

La variation de l'Energie potentiel d'un point vers un point.

$$\Delta U = -\int_{r_0}^{r} \vec{f(r)}\cdot\vec{dr}$$

$$dU = -f(r)\cdot\vec{dr} \Rightarrow f(r) = -\frac{dU}{d\vec{r}}$$

$$f(x) = -\frac{dU}{dx} \quad \text{(mvt à une dimension).}$$

La differentielle de l'Energie potentiel :

$$dU = -(f_x dx + f_y dy + f_z dz)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

$$\vec{f} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} = -\overrightarrow{grad\,U}$$

Surface equipotentielle $\rightarrow U(x,y,z) = cte \Rightarrow$ Toute pt de cette surface, $\vec{f}(r)$ est normale au dép. $\vec{dr}$

$$U = cte \rightarrow dU = 0 \rightarrow \vec{f}(r).\vec{dr} = 0 \Rightarrow \vec{f} \perp \vec{dr}$$

Diagrame de l'Energie potentielle

- $\vec{F}(r) = grad U \Rightarrow F_x = -\frac{dU}{dx}$
- Maximum, minimun où la force s'annule $\frac{dU}{dx} = 0$
- $U'(x) = cte \rightarrow U''(x) \perp 0$ equilibre stable
  $U'(x) = cte \rightarrow U''(x) < 0$ equilibre instable
- $Et = cte \Rightarrow Ec + Ep = cte$ (néglige frott.)

Theoreme de l'Energie Cinétique

$$W = f.x = m.a\,x = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_0^2$$

$$W = Ec - Ec_0$$

Conservation de l'Energie mécanique

$\Downarrow$

$Ec + U$

(independants du temps)

Si les forces extérieurs sont conservatives

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = cte$$

$$\frac{d(Ec + U)}{dt} = 0.$$

Quantité De Mouvement De Translation

<u>Centre de masse</u> $\vec{OG} = \frac{\sum m_i \vec{OP_i}}{\sum m_i}$

position $\vec{r}_{c.m} = \frac{\int \vec{r_i} dm_i}{\int dm_i}$

<u>Quantité de mouvement</u> $\vec{P} = m.\vec{V}$

- 2eme Loi de Newton (R.F.D.) $\sum \vec{F}ext = \frac{d\vec{P}}{dt}$
- Integration $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}ext \, dt = \vec{P_2} - \vec{P_1} \Rightarrow \vec{P_1} + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}ext \, dt = \vec{P_2}$
- Conservation de la qté de mvt $\sum \vec{F}ext = 0 ; \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{P} = cte$

<u>Mouvement d'un corps à masse variable</u>

$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}ext - \vec{V_r} \frac{dm_e}{dt}$

Si $m = cte \rightarrow \frac{dm}{dt} = 0 \rightarrow \vec{F}ext = m.\vec{a}$

<u>Collision</u>

Systeme isolé $(\sum \vec{F}ext = \vec{0}) \rightarrow$ Conservation de la qté de mvt !

$\sum P_i$ avant $= \sum P_f$ après

Coefficient de restitution : $e = -\dfrac{V_{2f} - V_{1f}}{V_{2i} - V_{1i}} \geq 0$

1

choc elastique
Conservation de la qté de mvt et de l'energie cinetique

0

choc mou
pas de cons-ervation de l'energie cinetique

$0 \leq e < 1$

choc inelastique
il y a conservation de qté de mvt et non pour l'energie cinetique

R.F.D. dans le cas d'une rotation

Moment de la force : $\vec{\mathcal{M}} = m_o \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ $\neq 0$ rotation
$= 0$ ne tourne pas

Moment angulaire $\vec{J} = \vec{r} \wedge \vec{P}$; $\vec{r} \wedge \vec{F} = \dfrac{d\vec{J}}{dt} \Longrightarrow \vec{\mathcal{M}} = \dfrac{d\vec{J}}{dt}$

Systeme de Particules $\vec{J}_0 = \underbrace{\vec{OG} \wedge \vec{P}}_{\text{moment orbitale}} + \underbrace{\vec{J}_G}_{\text{moment angulaire intrinsèque}}$

Principe de moment angulaire :

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathcal{M}}_i \, dt = \vec{J}_2 - \vec{J}_1 \longrightarrow \vec{J}_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathcal{M}}_i \, dt = \vec{J}_2$$

Moment d'Inertie

$V = \omega r$; $E_C = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$

tel que $I = m r^2$.

(Cas du solide) $I = \int_V r^2 \, dm$

Relation entre moment Force / moment d'Inertie

Travail : $dW = \vec{F} . d\vec{S}$, $dW = \mathcal{M} \circ d\theta$

Puissance : $P = \vec{\mathcal{M}} \circ \omega$

$\vec{\mathcal{M}} = I . \vec{\alpha} \rightarrow I \vec{\alpha} = \frac{d\vec{J}}{dt}$

Conservation du moment angulaire

$\vec{\mathcal{M}} = 0 \longrightarrow I \vec{\alpha} = \vec{0} \longrightarrow \frac{d\vec{J}}{dt} = 0 \rightarrow J = cte$

$I \omega = I_0 \omega_0 = constante$.