UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences
Section 3

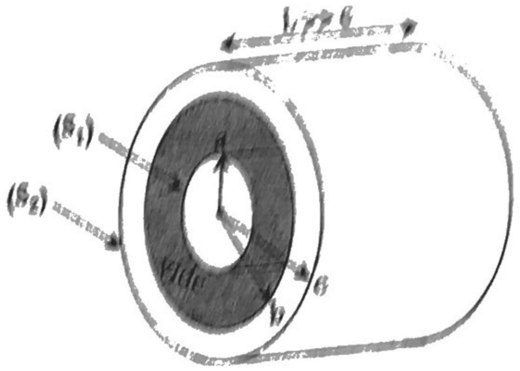
الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : P1101
Durée : 2 heures

Année : 2015-2016
Examen : 2ème session

Toutes les figures doivent être dessinées sur le propre de nouveau.

Exercice I : *(15 points)*



Soit un conducteur cylindrique plein (S_1) de rayon (a) et portant une charge (+Q) comme le montre la figure ci-contre. Un autre conducteur cylindrique mais creux (S_2), de rayons interne (b) et externe (c), avec une longueur (L>>c), et d'axe confondu avec celui du conducteur (S_1), contient initialement une charge (+Q). Les deux conducteurs sont séparés par du vide.

1) Calculer par influence électrostatique, la distribution des charges sur les conducteurs (S_1) et (S_2).

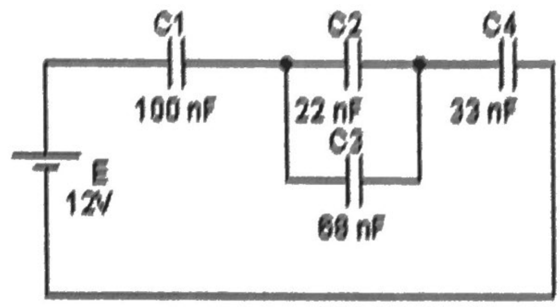
2) En appliquant le théorème de Gauss, trouver le champ électrique $\overrightarrow{E}$ en tout point de l'espace.

3) On relie le conducteur (S_1) à la terre. Donner :

a- la charge et le potentiel du conducteur (S_1).

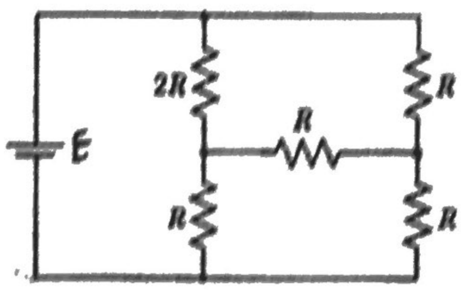
b- le champ électrique en tout point de l'espace.

Exercice II : *(15 points)*



1) Trouver la capacité équivalente du circuit ci-contre.
2) Calculer la charge et la tension aux bornes de chaque condensateur dans le circuit.
3) En déduire l'énergie emmagasinée dans le condensateur C_1 et C_4.

Exercice III : *(20 points)*



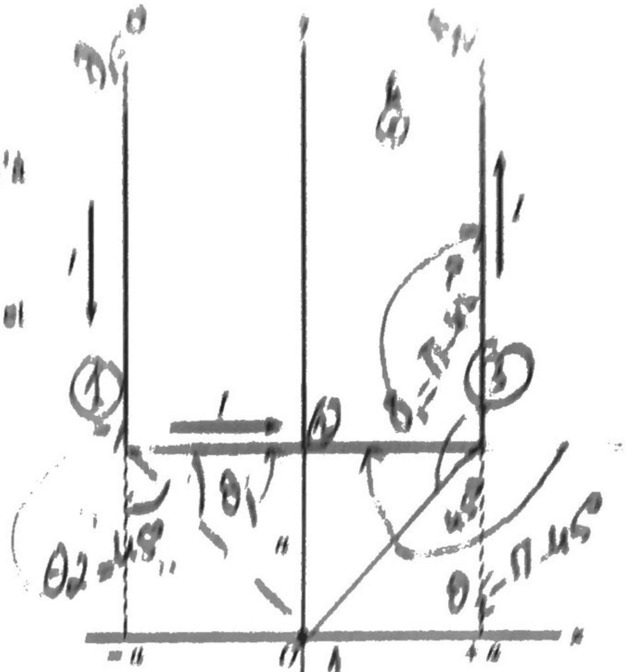
En appliquant la loi des nœuds et la loi des mailles, calculer le courant qui circule dans chaque branche du circuit ci-contre.

TSVP →

Exercice IV : (20 points)

Un cadre, parcouru par un courant I, s'étend jusqu'à l'infini comme le montre la figure ci-contre.

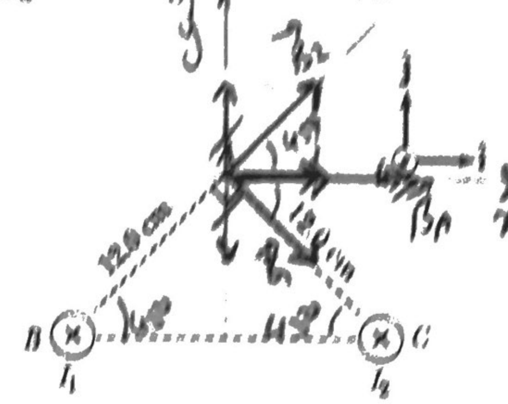
Déterminer le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ (module et direction) à l'origine O en fonction de I et a.



Exercice V : (15 points)

Dans la figure ci-contre, on considère deux fils, infiniment longs, parcourus par le même courant ($I_1 = I_2 = 4A$). Les deux fils sont placés aux sommets B et C d'un triangle rectangle ABC. Les deux courants sont dirigés suivant ($-\vec{k}$).

Trouver le champ magnétique résultant $\vec{B}$ au sommet A en fonction des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



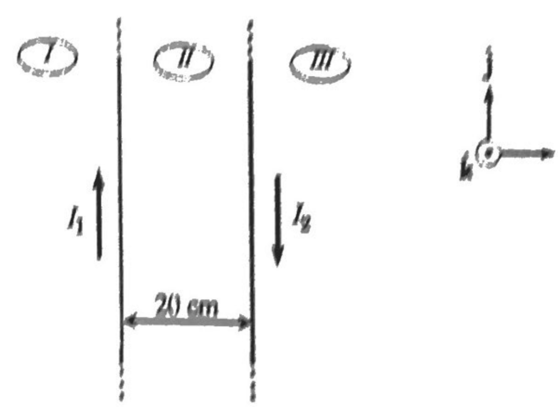
Exercice VI : (15 points)

Dans la figure ci-contre, deux fils, infiniment longs, sont suspendus à la verticale. Le fil (1) porte un courant I_1 de **1,5 A** orienté vers le haut. Le fil (2), situé à **20 cm** à droite du fil (1), porte un courant I_2 de **4 A** orienté vers le bas. Un troisième fil doit être suspendu à la verticale et placé à un endroit tel que, lorsqu'il porte un certain courant I_3, la force résultante sur chaque fil due aux deux autres courants est nulle.

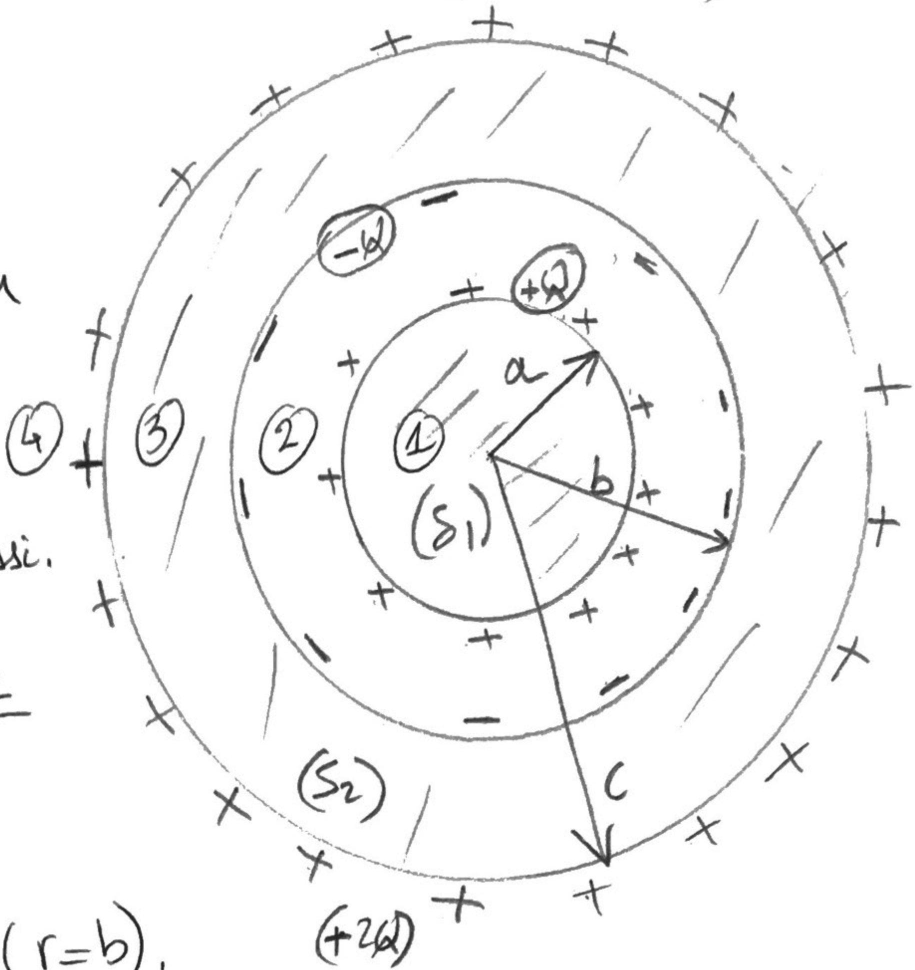
1) Dans quelle zone (**I, II ou III**) faut-il placer le troisième fil ? Expliquer sans faire de calcul.

2) Calculer la distance entre le fil (1) et le fil (3) et celle entre le fil (2) et le fil (3).

3) Trouver le module du courant I_3 et sa direction (vers le haut ou vers le bas).



Bonne Chance



ex 1 :

1) S_1 est un conducteur
$\Rightarrow$ (+Q) sur sa surface ($r=a$)

S_2 est un conducteur aussi. Il porte par influence une charge (−Q) sur sa surface interne ($r=b$).

Comme (S_2) contient (+Q), et (S_2) étant un conducteur isolé, alors sur la surface extérieure ($r=c$) il doit porter une charge (+2Q).

2) Th. de Gauss, $\phi_{\Sigma_G} = \oiint_{\Sigma_G} \vec{E}.\vec{ds} = \dfrac{\sum q_{int\ à\ \Sigma_G}}{\varepsilon_0}$.

* pour $r<a$; $q_{int}=0$ (pas de charges) $\Rightarrow \boxed{\vec{E}_1(r)=\vec{0}}$

* pour $a<r<b$; par sym (élec. et géom.) le champ $\vec{E}$ est radial : $\vec{E}(r)=E(r)\,\vec{u}_r$.

donc on prend la surface de Gauss Σ_G un cyl.

$\phi = E(r) \oiint_{\Sigma_G} ds$

$\iint_{\text{Sbase}}^{=0} + \iint_{\text{Sbase}}^{=0} + \iint_{\text{Slat cyl}}$

$\boxed{\vec{E}_2(r) = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 L}\dfrac{Q}{r}\,\vec{u}_r}$.

(2)

* $r = a$ $\boxed{\vec{E}(a) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 L}\frac{Q}{a}\vec{u}_r}$ (obtenu, par continuité, à partir de $\vec{E}_2(r)$)

* $b < r < c$ $Q_{int} = Q - Q = 0$.

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_3(r) = \vec{0}}$

* $r = b \Rightarrow \boxed{\vec{E}(b) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 L}\frac{Q}{b}\vec{u}_r}$ (par continuité à partir de $\vec{E}_2(r)$)

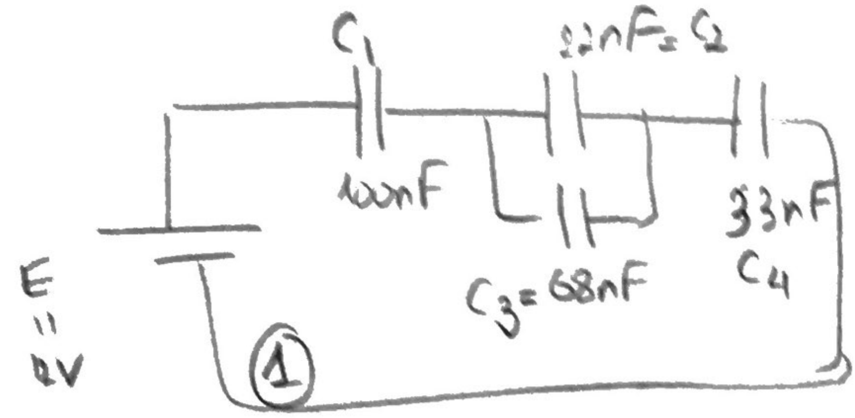
pour $r > c$: $\boxed{\vec{E}_4(r) = \frac{1}{\pi\varepsilon_0 L}\frac{Q}{r}\vec{u}_r}$

pour $r = c$: $\boxed{\vec{E}(r) = \frac{1}{\pi\varepsilon_0 L}\frac{Q}{c}\vec{u}(r)}$ (obtenu à partir de $\vec{E}_4(r)$ par continuité)

3) a) (S_1) étant mis au sol alors sa charge devient nulle, et son potentiel égal à celui de la terre : $V_{S_1} = V_0 = 0$

b) $r < c$ $\boxed{\vec{E}(r) = \vec{0}}$

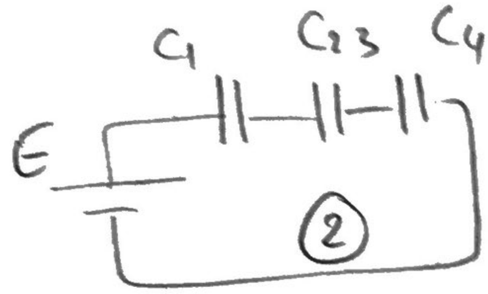
$r \geq c$ $\boxed{\vec{E}(r) = \frac{1}{\pi\varepsilon_0 L}\frac{Q}{r}\vec{u}_r}$.

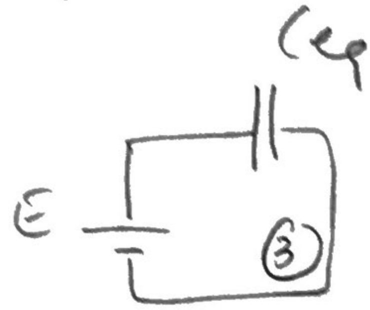


C_2 et C_3 sont montés en dérivation (en //) $\Rightarrow C_{23} = C_2 + C_3$ (2)
$= 22 + 68$
$= 90nF$

C_1, C_{23} et C_4 sont monté en série : $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} + \frac{1}{C_4}$

(3) $\Rightarrow \boxed{C_{eq}} = 19.45nF$





2) $Q_{eq} = C_{eq} E = 19.45nF \times 12 = 233.4nC$.

$Q_{eq} = \underline{Q_1} = \underline{Q_4} = Q_{23}$ car les 3 condensateurs sont en série

$Q_1 = C_1 V_1 \Rightarrow \underline{V_1} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{233.4nC}{100nF} = 2,334\,V$

$\underline{V_4} = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{233.4nC}{33nF} = 7,073\,V$

$V_{23} = \frac{Q_{23}}{C_{23}} = \frac{233.4nC}{90nF} = 2.593V$ ou $V_{23} = 12 - V_1 - V_4 = 2.593V$.

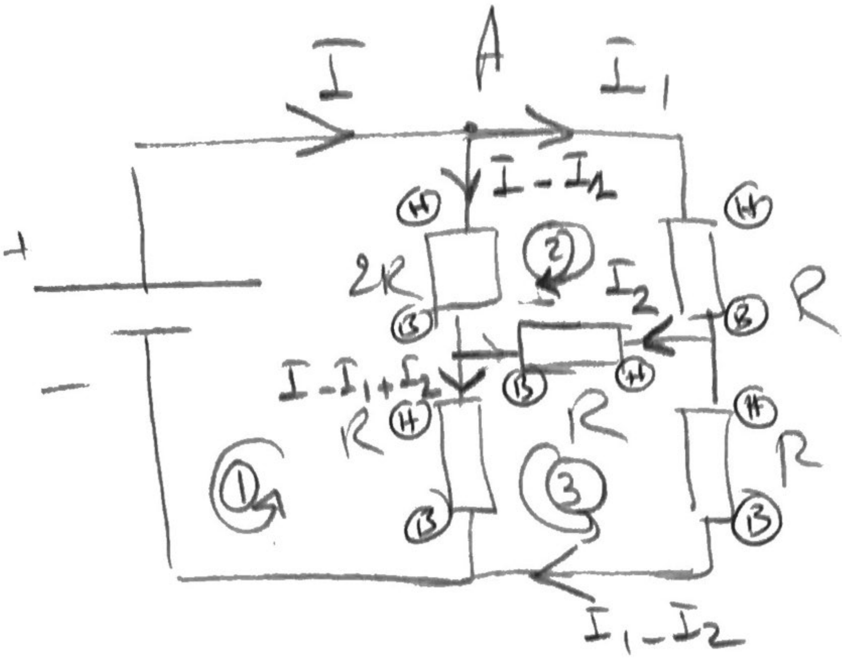
$\underline{Q_2} = C_2 V_2$ $(V_{23} = \underline{V_2} = \underline{V_3})$ donc $Q_2 = 22nF \times 2.593 = 57.05\,nC$

$$Q = Q_{23} - Q_2 = 233.4 - 57.05 = 176.35\,nC$$ ④

③ $$U_1 = \frac{1}{2}C_1V_1^2 = \frac{1}{2}(100\,10^{-9})(2334)^2 = 2.72\,10^{-7}\,J$$
$$= 0.272\,\mu J.$$

$$U_4 = \frac{1}{2}C_4V_4^2 = \frac{1}{2}(33\,10^{-9})(7073)^2 = 8.25\,10^{-7}\,J$$
$$= 0.825\,\mu J.$$

3!



$$①\quad E - R(I - I_1 + I_2) - 2R(I - I_1) = 0$$

$$E = 3RI - 3RI_1 + RI_2 \quad ①$$

$$②\quad RI_1 + RI_2 - 2R(I - I_1) = 0$$

$$-2RI + 3RI_1 + RI_2 = 0 \quad ②$$

$$③\quad R(I - I_1 + I_2) - R(I_1 - I_2) + RI_2 = 0$$

$$RI - 2RI_1 + 3RI_2 = 0 \quad ③$$

$$② + ③ \times 2 \Rightarrow -I_1 + 7I_2 = 0 \quad \boxed{I_1 = 7I_2} \text{ ds } ③$$

$$\cancel{R}I - 2\cancel{R}(7I_2) + 3\cancel{R}I_2 = 0 \Rightarrow \boxed{I = 11\, I_2}$$

$$① \to 33I_2 - 21I_2 + I_2 = E/R \Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{E}{13R}}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{7E}{13R}} \text{ et } \boxed{I = \frac{11E}{13R}}$$

4 :

$$\vec{B_0} = \vec{B_{①}} + \vec{B_{②}} + \vec{B_{③}}$$

$\vec{B_1} = B_1 \vec{k}$ règle de la main droite ⊙

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos 0° - \cos 45°\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\vec{B_2} = B_2(-\vec{k})$ règle de la main droite. ⊗

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos 45° - \overbrace{\cos(\pi - 45°)}^{-\cos 45°}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cancel{2}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sqrt{2}$$

$\vec{B_3} = B_3 \vec{k}$ règle de la main droite ⊙

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\overbrace{\cos(\pi - 45°)}^{-\cos 45°} - \overbrace{\cos \pi}^{-1}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\boxed{\vec{B_0}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{k} + \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sqrt{2}(-\vec{k}) + \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{k}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{k} - \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sqrt{2}\vec{k} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\vec{k}}.$$

(1)

5 :

direct^{o} de $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$: règle de la main droite (voir fig examen)

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$ m courant $I_1 = I_2 = I$

m $a = 12\text{cm}$.

$$\vec{B}_A = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 2B_1 \cos 45^{o}\, \vec{i}$$ (voir géométrie de la fig).

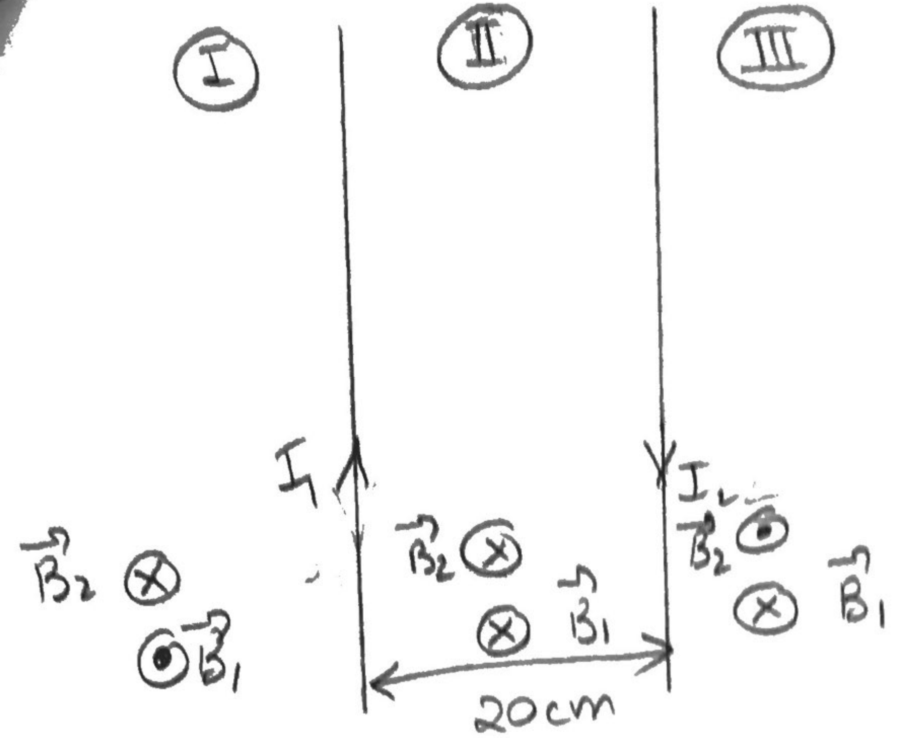
$$= 2\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\sqrt{2}\,\vec{i} = \frac{\cancel{4}\cancel{\pi}10^{-7}\times\cancel{4}}{\cancel{2}\cancel{\pi}\,\cancel{12}\,10^{-2}}\sqrt{2}\,\vec{i}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}10^{-5}\,\vec{i}\ (T).$$

$$= 9.4\,10^{-6}\,T\,(\vec{i}).$$

$$= \boxed{9.4\ \mu T\ (\vec{i})}$$



1) $I_1 = 1{,}5\,A$ $\quad I_2 = 4A$.

$\vec F_3 = \vec F_{1/3} + \vec F_{2/3} = \vec 0 \Rightarrow \vec F_{2/3} = -\vec F_{1/3}$ sens opposé même direction

et $F_{2/3} = F_{1/3}$ même module

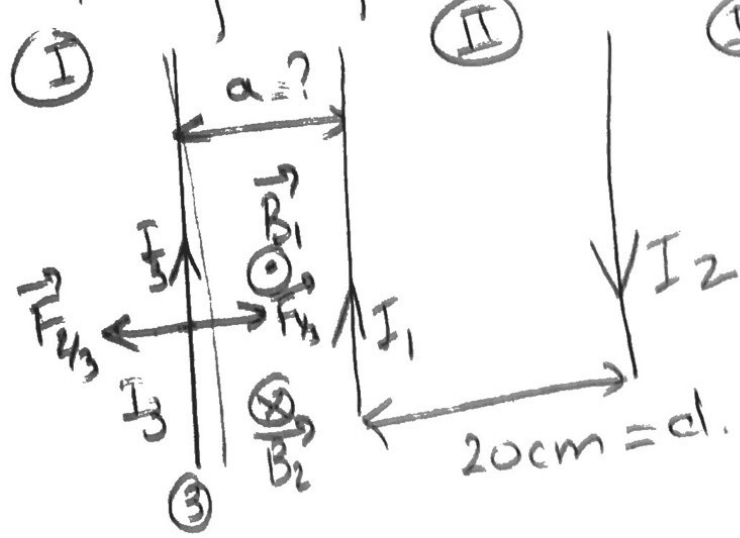
$\vec F_{1/3} = \int I_3 \vec{dl_3} \wedge \vec B_1$ et $\vec F_{2/3} = \int I_3 \vec{dl_3} \wedge \vec B_2$ (sens de $\vec B_1$ et $\vec B_2$ → règle de la main droite)

* pour que $\vec F_{1/3}$ et $\vec F_{2/3}$ soient de sens opposé il faut que $\vec B_1$ et $\vec B_2$ soient aussi de sens opposé donc le fil 3 ne peut pas être placé ds la zone II.
* Donc, il nous reste à choisir entre la zone I et la zone III. Concernant le sens de $\vec B_1$ et de $\vec B_2$, ils sont de sens opposés. mais il faut voir si on aura le même module pour $F_{1/3}$ et $F_{2/3}$

$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d_1}$ et $B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d_2}$ avec $I_2 > I_1$

il faut donc placer le fil 3 de côté du fil

... le courant le plus faible (car B est (9)
...ement proportionnel à la distance) en
d'autres termes pour que $B_1 = B_2$
il faut que $d_1 < d_2$ (car $I_1 < I_2$ et $B \propto \frac{I}{d}$)
Alors, il faut placer le fil (3) en zone (I).



ou

2) $F_{1/3} = F_{2/3}$ avec $\begin{cases} F_{1/3} = I_3 B_1 \ell = \dfrac{\mu_0 I_1 \cancel{I_3}}{2\pi a}\ell \\ F_{2/3} = I_3 B_2 \ell = \dfrac{\mu_0 \cancel{I_3} I_2}{2\pi(d+a)}\ell \end{cases}$

$\frac{I_1}{a} = \frac{I_2}{d+a} \Rightarrow \frac{1.5}{a} = \frac{4}{(a+20)} \Rightarrow \boxed{a = 12cm}$ et $\boxed{d+a = 32cm}$

3) $\vec{F_1} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{3/1} + \vec{F}_{2/1} = \vec{0} \Rightarrow F_{3/1} = F_{2/1} \Rightarrow B_3 \cancel{I_1}\ell = B_2 \cancel{I_1}\ell$

$\frac{\cancel{\mu_0} I_3}{\cancel{2\pi} a} = \frac{\cancel{\mu_0} I_2}{\cancel{2\pi} d} \Rightarrow I_3 = I_2 \frac{a}{d} = 4 \cdot \frac{12}{20} = \boxed{2.4A}$.

Le sens de courant I_3 peut être vers le haut ou vers le bas (voir fig)

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences
Section 3

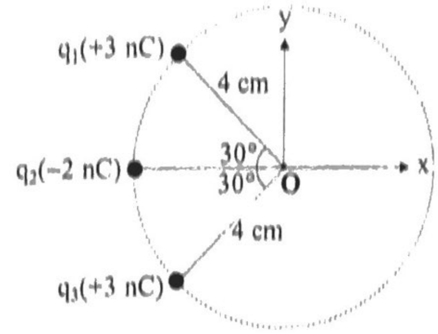
الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : P1101 | **Année : 2016-2017**
Durée : 2 heures | **Examen : 2ème session**

Toutes les figures doivent être dessinées sur le propre de nouveau.

Exercice I : *(20 points)*

Trois charges ponctuelles q_1, q_2, et q_3 sont placées sur un cercle de rayon 4 cm, tel que $q_1 = +3$ nC, $q_2 = -2$ nC, et $q_3 = +3$ nC (voir figure ci-contre).



1) Trouver le champ électrique et le potentiel électrique au point O créés par les charges q_1, q_2, et q_3.

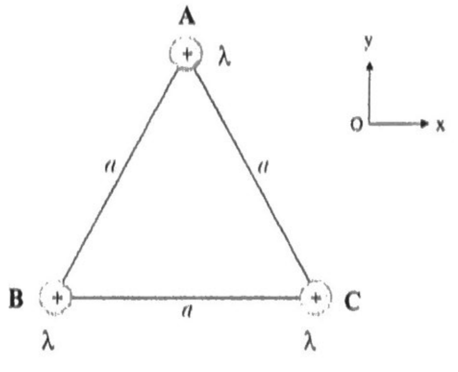
2) Calculer le travail électrique pour déplacer une charge de −5 nC de l'infini au point O (on suppose que le potentiel est nul à l'infini).

3) En quel point doit être placée une charge de −9 nC pour que le champ électrique résultant produit par les quatre charges q_1, q_2, q_3, et −9 nC soit nul au point O?

Exercice II : *(15 points)*

1) En utilisant le théorème de Gauss, déterminez le champ électrique à une distance r d'un fil chargé positivement de longueur infinie dont la densité linéique de charge λ est constante.

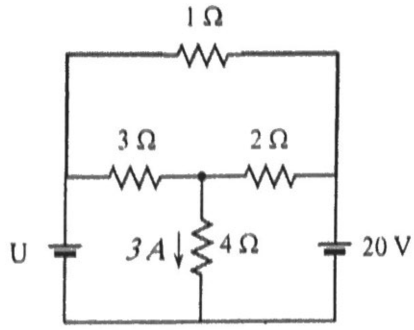
2) Trois fils parallèles infiniment longs sont chargés positivement, et portent la même densité linéique de charge λ. La figure ci-contre présente une vue dans un plan perpendiculaire aux trois fils parallèles. Dans ce plan, les fils passent par les sommets d'un triangle équilatéral ABC de côté a.
Déterminer le champ électrique créé par les trois fils chargés au centre de gravité du triangle équilatéral.



Exercice III : *(20 points)*

On considère le circuit de la figure ci-contre. Déterminer :

1) le courant à travers chacune des autres résistances,
2) la tension U,
3) la puissance délivrée au circuit par le générateur de 20 V.



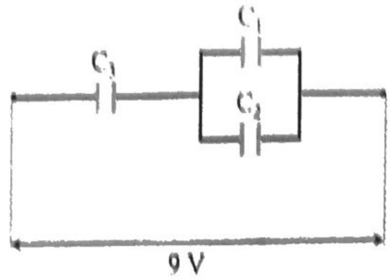
S.V.P tourner la page →

Exercice IV *: (15 points)*

Dans le circuit ci-contre, on donne les capacités suivantes : C_1=1µF, C_2=1µF, C_3=2µF. Calculer :

1) la capacité équivalente du circuit,

2) la charge dans chaque condensateur.



Exercice V *: (30 points)*

Les deux parties I et II sont indépendantes

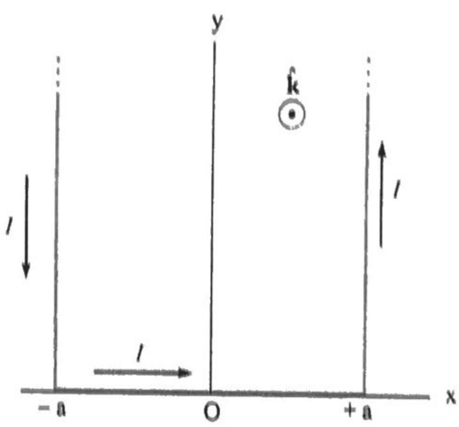
Partie I

1) Montrer, en appliquant la loi de Biot-Savart que le champ magnétique créé en un point P par un fil rectiligne et parcouru par un courant d'intensité I (figure ci-contre) est donné par :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4 \pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2).$$

2) Un cadre, parcouru par un courant I, s'étend jusqu'à l'infini comme le montre la figure ci-contre.

Déterminer le vecteur champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ (module et direction) à l'origine O en fonction de I et a.



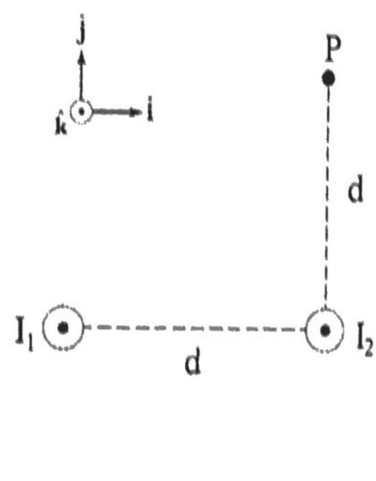
Partie II

1) Calculer en utilisant la loi d'Ampère le champ magnétique créé par un fil conducteur infini parcouru par un courant d'intensité I.

2) Dans la figure ci-contre, on considère deux fils, infiniment longs, parcourus par des courants I_1=3 A et I_2=5 A. Les deux courants sont dirigés dans le sens positif de l'axe des z.

Quels sont le module et la direction du champ magnétique au point P, situé à d=20,0 cm au-dessus du fil parcouru par du courant de 5 A.

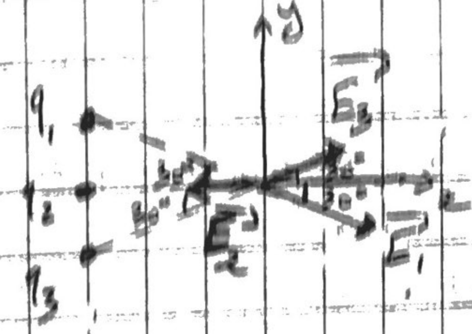
On donne : $\mu_0=4\pi.10^{-7}$ T.m.A^{-1}.



Bonne Chance

Final P110] – 2ème session – 2016-2017

Ex 1



1) $\vec{E_0} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E_3}$

$= (\vec{E_1} + \vec{E_3}) + \vec{E_2} = (2 E_1 \cos 30 \vec{i}) - E_2 \vec{i}$

$E_1 = \dfrac{K \cdot q_1}{(4_{cm})^2} = \dfrac{K_0 \; 3 \times 10^{-9} C}{(4 \times 10^{-2})^2} = 16875 \; V/m$

$E_2 = \dfrac{K q_2}{(4)^2} = \dfrac{9 \cdot 10^9 \times 2 \times 10^{-9}}{(0{,}04)^2} = 11250 \; V/m$

$\vec{E_0} = \left(2 \times 16875 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 11250\right) \vec{i}$

$\vec{E_0} = 17978{,}36 \; V/m \; (\vec{i})$

* $V_0 = V_1 + V_2 + V_3 = \dfrac{K_0}{(0{,}04)} \times (3 - 2 + 3) \times 10^{-9}$

$V_0 = \dfrac{9 \times 4}{0{,}04} = 900 \; V$

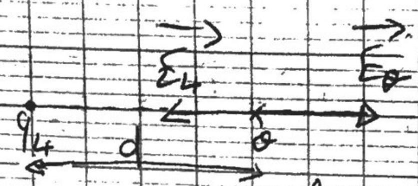
2) $W_{\vec{F}_{élect}, \infty \to O} = q\,(V_\infty - V_O)$

$= -5 \times 10^{-9} C\,(0 - 900)$

$W_{\vec{F}_{élec}} = 4,5\ 10^{-6}\ J$

3)

Soit $q_4 = -9\,nC$

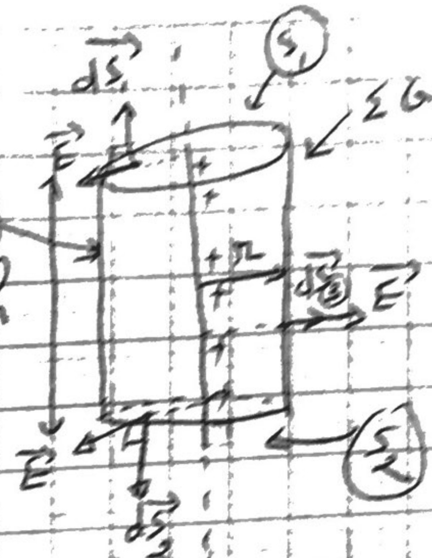


Le champ s'annule en O si la charge q_4 se trouve à gauche de l'origine O sur l'axe des x, et à distance qui vérifie la relation suivante :

$E_4 = E_O \Rightarrow \dfrac{K_0\,|q_4|}{d^2} = 17978,36$

$d^2 = \dfrac{9.10^9 \times 9 \times 10^{-9}}{17978,36} \Rightarrow \boxed{d = 6,7\ cm}$

Ex 2



1) À cause des symétries géométrique et électrique, le champ créé en tout point de l'espace est radial, et son module ne dépend que de r : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

(01)

coordonnées cylindriques

Surface de Gauss = cylindre de rayon r, de hauteur h, et d'axe le fil chargé !

(1) + (01)

$$\phi_{\Sigma G} = \oint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \underbrace{\int_{S_1}\vec{E}\cdot\vec{dS_1} + \int_{S_2}\vec{E}\cdot\vec{dS_2}}_{=0 \text{ car } \vec{E}\perp\vec{dS}} + \int_{S_3}\vec{E}\cdot\vec{dS_3}$$ (01)

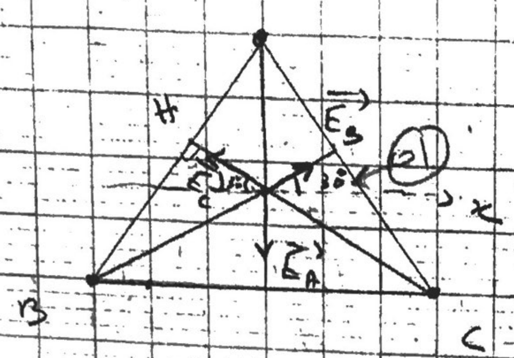
$$\phi_{\Sigma G} = \int_{S_3}\vec{E}\cdot\vec{dS_3} = E\times S_3 = E\times 2\pi r\times h$$ (02)

Th. de Gauss : $\phi_{\Sigma G} = \oint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{\text{int de } \Sigma G}$

$$E\times 2\pi r\times h = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda h$$ (01)

$$\Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$ (01)

2)



01

$\boxed{E_A = E_B = E_C}$

$\vec{E}_G = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$ 01

$\vec{E}_B + \vec{E}_C = 2 E_C \sin 30 \, \vec{j}$ 01

$E_C = \dfrac{d}{2\pi\varepsilon_0 [CG]}$ 01

$[CG] = \dfrac{2}{3} [CH]$; $BC^2 = BH^2 + HC^2$

$a^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + HC^2$

$(HC)^2 = \dfrac{3}{4} a^2$

$HC = \dfrac{\sqrt{3}}{2} a$

$[CG] = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} a = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ 01

$E_C = \dfrac{d}{2\pi\varepsilon_0 \frac{a}{\sqrt{3}}} \Rightarrow E_C = \dfrac{d.\sqrt{3}}{2\pi\varepsilon_0 a}$

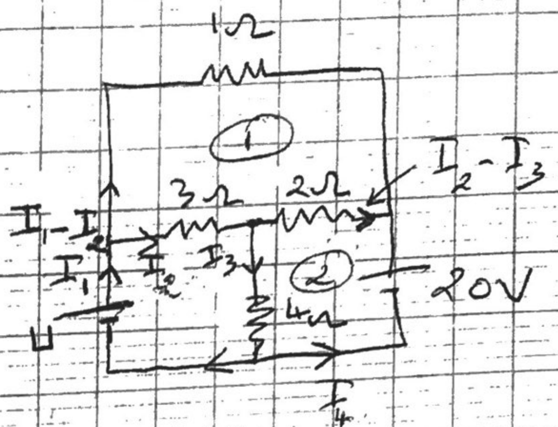
$\vec{E}_A = E_C (-\vec{j})$ 01

$\vec{E}_G = E_C \left(2 \times \dfrac{1}{2} - 1 \right) = \vec{0}$ 01

4

Ex 3

$I_3 = 3A$



maille (1) :

$3I_2 + 2(I_2 - I_3) - (I_1 - I_2) = 0$

$6I_2 - 2I_3 - I_1 = 0$

maille (2) : $-20 - 2(I_2 - I_3) + 4I_3 = 0$

$-2I_2 + 6I_3 = 20$

$2I_2 = 6I_3 - 20 = 6 \times 3 - 20$

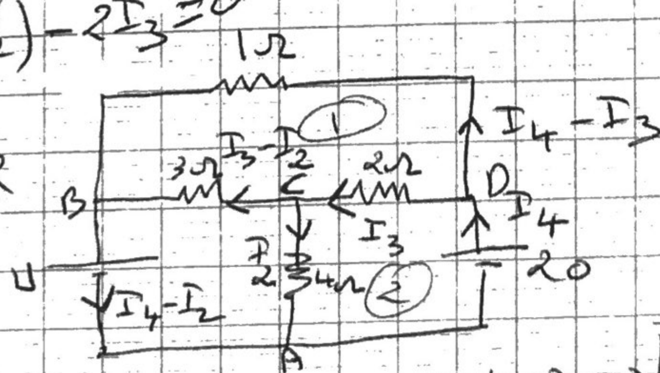
$\Rightarrow \boxed{I_2 = -1A}$

$I_1 = 6I_2 - 2I_3 = -6 - 2 \times 3 \Rightarrow \boxed{I_1 = -12A}$

$I_2 = 3A$

maille (1) :

$I_4 - I_3 - 3(I_3 - I_2) - 2I_3 = 0$



$I_4 - 6I_3 = -3I_2$

$I_4 + 3I_2 = 18$

maille (2) :

$-20 + 2I_3 + 4I_2 = 0 \Rightarrow 2I_3 = 20 - 4 \times 3 \Rightarrow \boxed{I_3 = 4A}$

$I_4 = -3 \times 3 + 6 \times 4 \Rightarrow \boxed{I_4 = 15A}$

5

$I_4 - I_3 = 11A$ (Branche BD)

$I_3 - I_2 = 4 - 3 = 1A$ (Branche BC)

$I_4 - I_2 = 12A$ (Branche BA)

2) $U = V_B - V_A = (V_B - V_C) + (V_C - V_A)$ plus

$U = -3(I_3 - I_2) + 4 \times I_2$

$= -3 \times 1 + 4 \times 3A \Rightarrow \boxed{U = 9V}$

3) $P(\text{générateur } 20V) = 20 \times I_4$

$= 20 \times 15 = 300$ watts

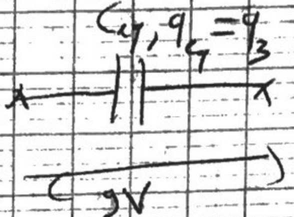
La batterie U joue ici le rôle d'un récepteur !!!

Ex 4

1) $C_{12} = C_1 + C_2 = 2\,\mu F$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{C_{eq} = 1\,\mu F}$$

2)



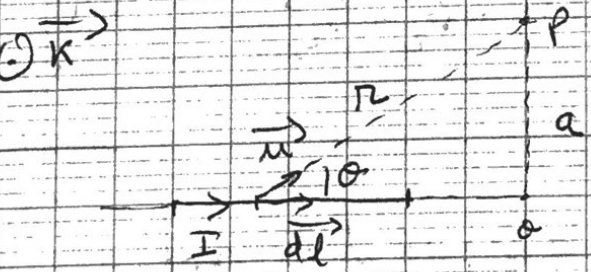
$$C_{eq} = \frac{q_3}{9V} \Rightarrow \boxed{q_3 = 9\,\mu C}$$

$$q_{123} = q_3 = q_1 + q_2 = 2q_1 \Rightarrow \boxed{q_1 = q_2 = \frac{9}{2}\,\mu C}$$

Ex 5

Partie I

1)



$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} |\vec{dl}||\vec{u}| \cdot \sin\theta \, \vec{K}$$

Puisque tous les éléments de courant $I\vec{dl}$ se situent dans le plan de la page, ils produisent tous un champ magnétique sortant de la page au point P. D'où $\vec{B}(P) = B(P)\,\vec{K}$

$$dB(p) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin\theta}{r^2}$$

$$dl = dx$$

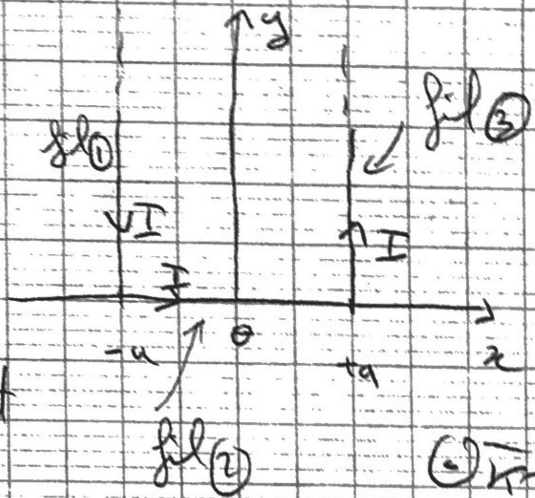
$$\sin\theta = \frac{a}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{a}{-x} \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \frac{a}{\sin^2\theta} \Rightarrow dx = \frac{a}{\sin^2\theta} d\theta$$

$$B(p) = \int dB = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin\theta \, d\theta$$

$$B(p) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \quad \text{c.q.f.d}$$

2)



$$\vec{B_0} = \vec{B_1} + \vec{B_2} + \vec{B_3}$$

$\vec{B_1}$ $\odot$

$\vec{B_2} = \vec{0}$; $\vec{dl}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\vec{B_3} \leftrightarrow \odot \vec{K}$

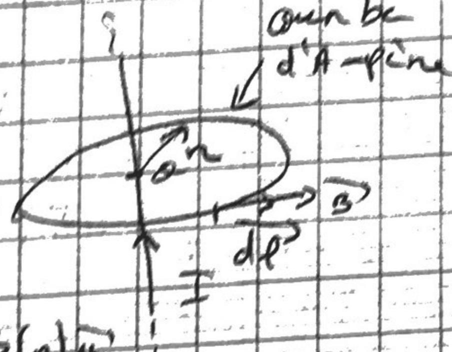
$$\vec{B_1} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos 0 - \cos \tfrac{\pi}{2}) \vec{K} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \vec{K}$$

$$\vec{B_3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \tfrac{\pi}{2} - \cos\pi) \vec{K} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \vec{K}$$

$$\vec{B}_O = 2\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\vec{k} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\vec{k}$$

Partie (2)

1) $\oint \vec{B}\,\vec{dl} = \sum I$ enlacée par la courbe d'Ampère

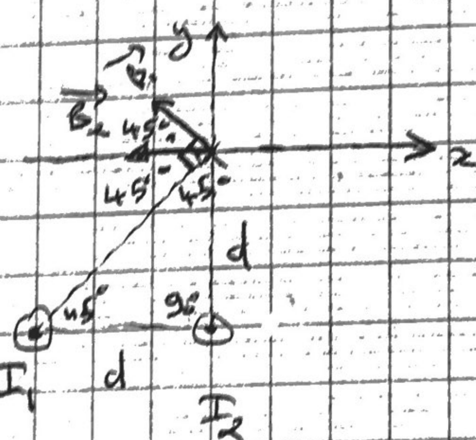


Par raison de symétries : $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$

$$\oint \vec{B}\,\vec{dl} = \oint \overset{cte}{\vec{B}}\,dl = B \times 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

2)



$$\vec{B}_2 = \frac{-\mu_0 I_1}{2\pi d}\vec{x}$$

$$\vec{B}_1 = B_1(-\cos 45\,\vec{x} + \sin 45\,\vec{y})$$

$$= \frac{\mu_0 I_2}{2\pi\sqrt{d^2+d^2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{x} + \vec{y})$$

$$\vec{B}_p = \left(\frac{-\mu_0 I_1}{2\pi d} - \frac{\mu_0 I_2 \times \sqrt{2}}{2\pi \sqrt{2d^2} \times 2} \right) \vec{i}$$

$$+ \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \sqrt{2d^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

$$\vec{B}_p = 4\cancel{\pi} \times 10^{-7} \left(\frac{-3}{2\cancel{\pi} \times 0{,}2} - \frac{5 \times \cancel{\sqrt{2}}}{4\cancel{\pi} \cancel{\sqrt{2}} \times 0{,}2} \right) \vec{i}$$

$$+ 4\cancel{\pi} \times 10^{-7} \left(\frac{5 \times \cancel{\sqrt{2}}}{4\cancel{\pi} \cancel{\sqrt{2}} \times 0{,}2} \right) \vec{j}$$

$$= 4 \times 10^{-7} \left[-7{,}5 - 6{,}25 \right] \vec{i}$$

$$+ 4 \times 10^{-7} (6{,}25) \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{B}_p = 4 \times 10^{-7} \left(-13{,}75 \vec{i} + 6{,}25 \vec{j} \right) \text{Tesla}}$$

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

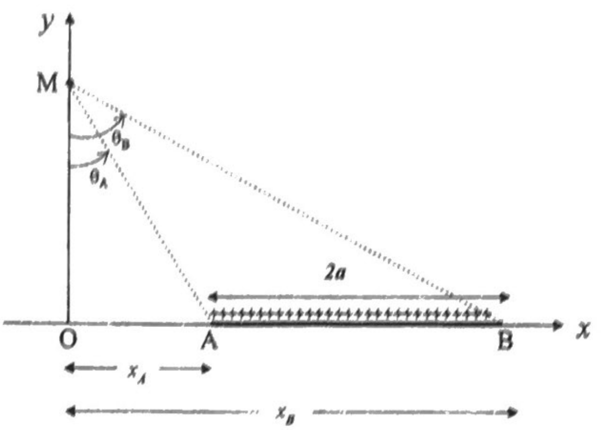
Cours : P1101 | **Année : 2017-2018**
Durée : 2 heures | **Examen : $2^{ème}$ session**

<u>Toutes les figures doivent être dessinées sur le propre de nouveau.</u>

Exercice I : (20 points)

1) On considère un fil rectiligne ***AB*** de longueur finie ***2a***, portant une densité uniforme linéique de charges $\lambda > 0$ (voir fig). Montrez que le champ électrique créé par le fil au point ***M(y)*** vaut :

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{K\lambda}{y}(\cos\theta_B - \cos\theta_A) = \dfrac{K\lambda}{y}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x_B^2+y^2}} - \dfrac{y}{\sqrt{x_A^2+y^2}}\right) \\ E_y = \dfrac{K\lambda}{y}(\sin\theta_B - \sin\theta_A) = \dfrac{K\lambda}{y}\left(\dfrac{x_B}{\sqrt{x_B^2+y^2}} - \dfrac{x_A}{\sqrt{x_A^2+y^2}}\right) \end{cases}$$



2) En déduire le champ en ***M(y)*** dans chacun des cas suivants :

a) le point ***M(y)*** est sur la médiatrice de ***AB***,

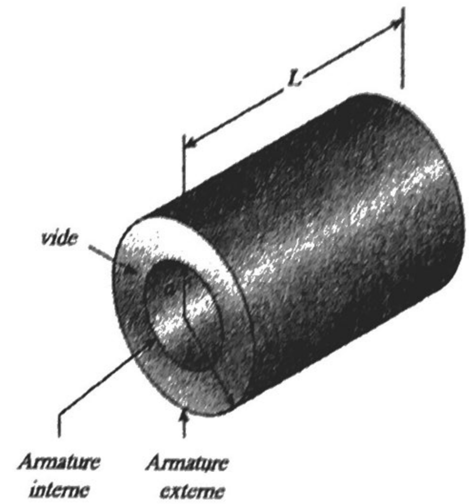
b) le fil a une longueur infinie.

Exercice II : (15 points)

On considère un condensateur cylindrique formé de deux armatures métalliques coaxiales, de rayons ***a*** et ***b*** (avec $a < b$), et de hauteur ***L*** ($L >> b$), (voir fig). On note **+ *Q*** la charge de l'armature interne.

1) Déterminer le vecteur champ électrique en un point situé à une distance ***r*** ($a < r < b$).

2) Déterminer la différence de potentiel entre les armatures, et en déduire la capacité ***C***.



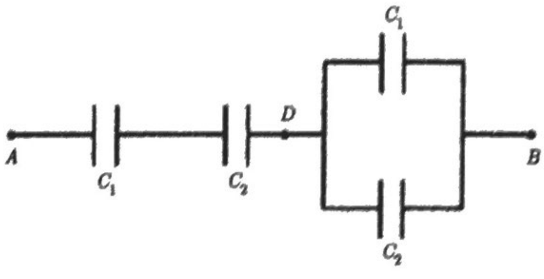
Exercice III : (15 points)

Soit le groupement de condensateurs ci-contre.

1) Déterminer la capacité C_2 en fonction de C_1 pour que la capacité équivalente C_e entre A et B vaut $C_2/2$.

A.N. : $C_1 = 8\ \mu F$.

2) Une tension $u_{AB} = 500$ **V** est appliquée entre les points *A* et *B*. Calculer les tensions aux bornes de chaque condensateur ainsi que les charges qu'ils portent.



S.V.P tourner la page →

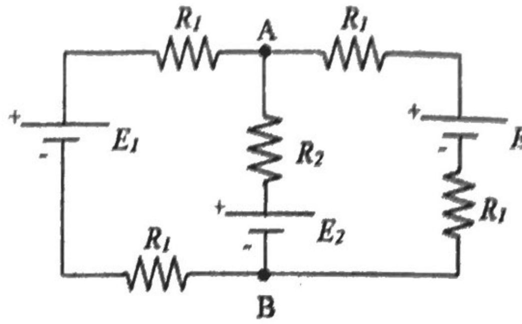
Exercice IV : *(15 points)*

On considère le circuit électrique de la figure ci-contre.

On donne : $E_1 = 2V$, $E_2 = E_3 = 4V$, $R_1 = 1\Omega$ et $R_2 = 2\Omega$.

1) Calculer les courants circulants dans les différentes branches du circuit.

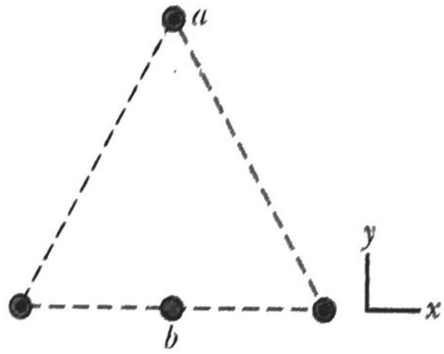
2) Calculer la différence de potentiel aux bornes de la branche AB.



Exercice V : *(20 points)*

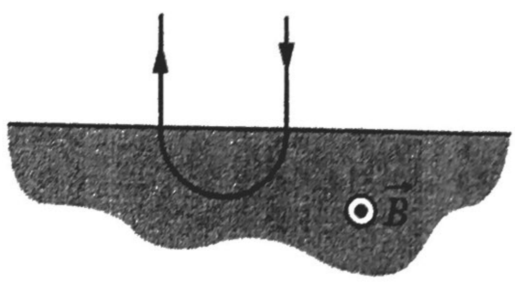
1) Calculer en utilisant la loi d'Ampère le champ magnétique créé par un fil conducteur infini parcouru par un courant d'intensité ***I***.

2) Trois longs fils sont parallèles à l'axe des z, et chacun porte un courant de **10 A** orienté dans la direction des z positifs ($\odot z$). Leurs points d'intersection avec le plan xy forment un triangle équilatéral de **50 cm** de côté (voir fig). Un quatrième fil (fil b) passe au milieu de la base du triangle et est parallèle aux trois autres fils. Si le champ magnétique résultant sur le fil (a) est nul, déterminer : ***i)*** la valeur et ***ii)*** la direction (+z ou - z) du courant dans le fil (b).



Exercice VI : *(15 points)*

Une particule chargée entre dans une région où se trouve un champ magnétique uniforme, effectue un demi-cercle, et puis sort de la région (voir fig). La particule est un proton ou un électron. Elle passe **130 ns** dans cette région. ($m_{e^-} = 9.11\times10^{-31}$ kg, $m_p = 1.67\times10^{-27}$ kg)



1) S'agit-il d'un proton ou d'un électron ? Justifiez votre réponse.

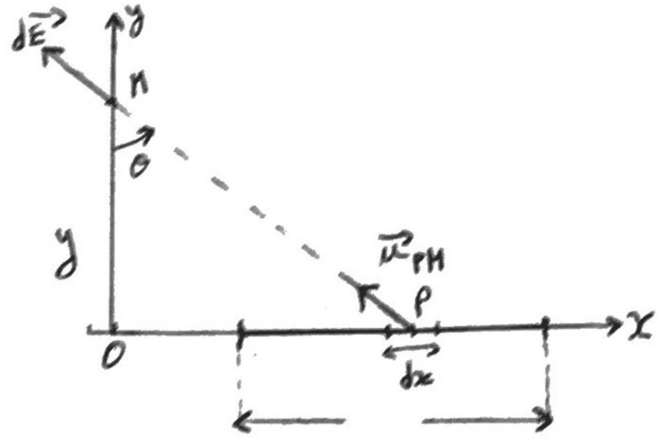
2) Quelle est la valeur du champ magnétique ?

3) Si la particule est envoyée de nouveau à travers le même champ magnétique (le long de la même trajectoire) mais avec une énergie cinétique deux fois plus grande, combien de temps dure son passage dans cette région ?

Bonne Chance

Final 2017 - 2018 - $2^{ème}$ session

Ex 1



1) Soit $d\vec{E}$ le champ créé par un élément de fil de longueur dx autour de P.

$$d\vec{E} = K_0 \frac{\lambda dx}{(PM)^2} \vec{u}_{PM}$$

Dans le triangle PMO, on a :

$$\tan\theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{dx}{y}$$

et $y = PM.\cos\theta$

$$\Rightarrow d\vec{E} = \frac{K_0 \lambda d\theta}{y} \vec{u}_{PM}$$

$$d\vec{E} \begin{cases} dE_x = -\frac{K\lambda}{y}\sin\theta\, d\theta \Rightarrow E_x = -\frac{K\lambda}{y}\int_{\theta_A}^{\theta_B}\sin\theta\, d\theta \\ dE_y = +\frac{K\lambda}{y}\cos\theta\, d\theta \Rightarrow E_y = +\frac{K\lambda}{y}\int_{\theta_A}^{\theta_B}\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

En posant : $\theta_A = (\vec{MO}, \vec{MA})$, $\theta_B = (\vec{MO}, \vec{MB})$

$$E_x = \frac{K\lambda}{y}(\cos\theta_B - \cos\theta_A) = \frac{K\lambda}{y}\cdot\left(\frac{y}{\sqrt{x_B^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x_A^2+y^2}}\right)$$

$$E_y = \frac{K\lambda}{y}(\sin\theta_B - \sin\theta_A) = \frac{K\lambda}{y}\cdot\left(\frac{x_B}{\sqrt{x_B^2+y^2}} - \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2+y^2}}\right)$$

2)

a) M sur la médiatrice de AB :

$$x_A = -x_B \Rightarrow \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \frac{2K\lambda}{y}\cdot\frac{\overset{a}{x_B}}{\sqrt{\underset{a^2}{x_B^2}+y^2}} = \frac{2K\lambda}{y}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}} \end{cases}$$

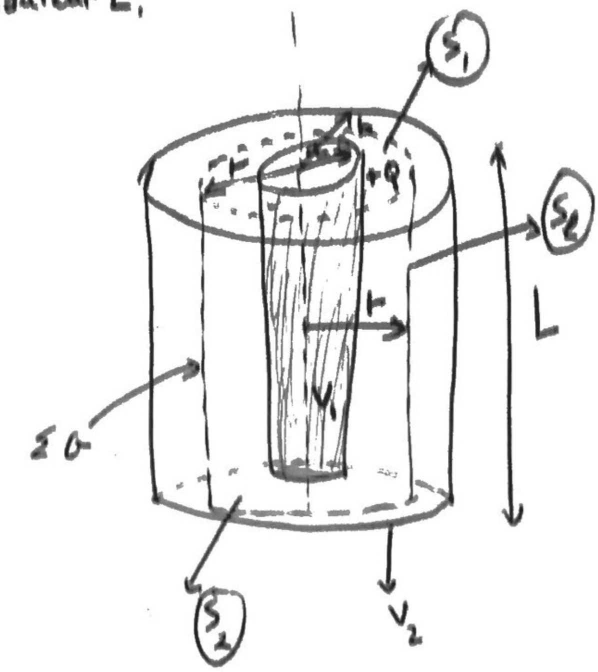
b) fil ∞

$$\left.\begin{array}{l} x_A \to -\infty \\ x_B \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} E_x = 0 \\ E_y = \dfrac{2K\lambda}{y} \end{array}\right.$$

Ex 2

1) À cause des symétries électrique et géométrique, le champ $\vec{E}$ est radial et son module ne dépend que de r : $\boxed{\vec{E} = E(r)\cdot\vec{u}_r}$

- Surface de Gauss = cylindre de rayon r, et de hauteur L. $(a < r < b)$



- $$\phi_{\Sigma G} = \oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \underbrace{\iint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{0\ (\vec{E}\perp d\vec{S})} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{0\ (\vec{E}\perp d\vec{S})} + \iint_{S_\ell} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\phi_{\Sigma G} = \iint_{S_\ell} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_\ell} E\cdot dS = E\cdot S_\ell$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_{\Sigma G} = E\cdot 2\pi r\cdot L}$$

- Th. de Gauss :

$$\phi_{\Sigma G} = \frac{\sum q_{\text{int. de } \Sigma G}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cdot 2\pi r L = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r L}}$$

2) $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_a^b E\cdot dr \Rightarrow V_2 - V_1 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\cdot \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\boxed{V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\boxed{C =} \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \boxed{\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

Ex 3

1)
$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{\frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}}$$

$$\frac{1}{0{,}5\,C_2} = \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{(C_1 + C_2)}{C_1 \cdot C_2}$$

$\vdots$

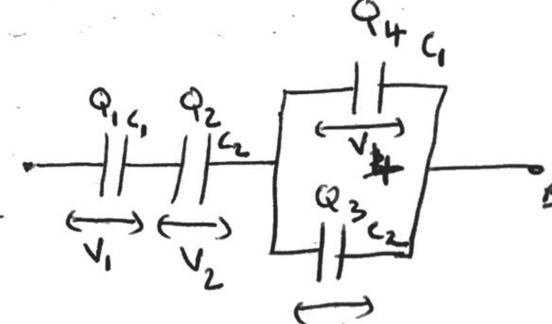
$$\Rightarrow C_2^2 + C_1 C_2 - C_1^2 = 0$$

$\Delta = 5 C_1^2$ → seule la racine positive est acceptable :

$$\boxed{C_2 = \frac{-C_1 + C_1 \cdot \sqrt{5}}{2}}$$

A.N. $\quad C_2 = 4{,}94\ \mu F$

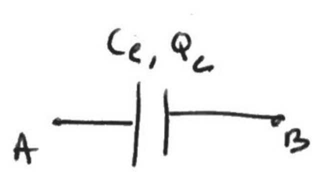
2)



$$U_{AB} = \frac{Q_e}{C_e} \Rightarrow Q_e = 500\,V \times \frac{C_2}{2}$$

$$Q_e = \frac{500}{2} \times 4{,}94$$

$$Q_e = 1235\ \mu C$$



- $\boxed{Q_1 = Q_2} = Q_e = \boxed{1235\ \mu C}$
- $\boxed{V_1} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{1235}{8} = \boxed{154{,}4\ V}$

  $\boxed{V_2} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{1235}{4{,}94} = \boxed{250\ V}$

$\boxed{V_3 = V_4} = \frac{Q_e}{C_1 + C_2} = \frac{1235}{12{,}94}$

$= \boxed{95{,}4\ V}$

$$\boxed{Q_3} = C_2 \times V_3 = 4{,}94 \times 95{,}4 = \boxed{471{,}3\ \mu C}$$

$$\boxed{Q_4} = C_1 \times V_4 = 8 \times 95{,}4 = \boxed{763{,}2\ \mu C}$$

Ex 4

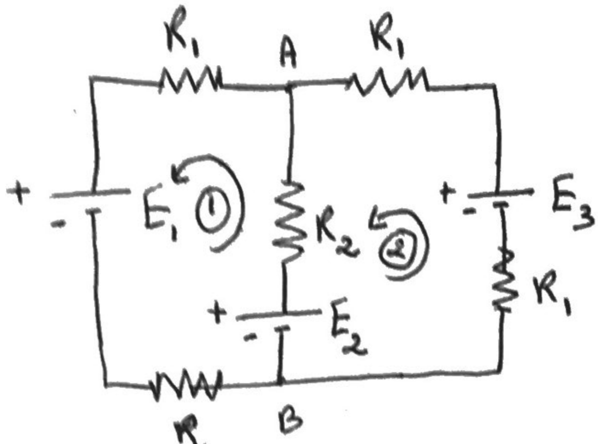
$E_1 = 2V$

$E_2 = 4V$

$E_3 = 4V$

$R_1 = 1\Omega$

$R_2 = 2\Omega$



1) loi des noeuds $\Rightarrow \boxed{I_1 = I_2 + I_3}$ (1)

Maille (1) $\Rightarrow R_1 I_1 + E_1 + R_1 I_1 - E_2 + R_2 I_2 = 0$

$\Rightarrow 2I_1 + 2I_2 = E_2 - E_1$

$\Rightarrow \boxed{I_1 + I_2 = 1}$ (2)

Maille (2) $\Rightarrow R_1 I_3 - R_2 I_2 + E_2 + R_1 I_3 - E_3 = 0$

$\Rightarrow 2I_3 - 2I_2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{I_3 = I_2}$ (3)

(1) et (3) $\Rightarrow I_1 = 2I_2 \Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{I_1}{2}}$ (4)

(2) et (4) $\Rightarrow I_1 + \frac{I_1}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{2}{3} A}$

(4) $\Rightarrow \boxed{I_2 = I_3 = \frac{1}{3} A}$

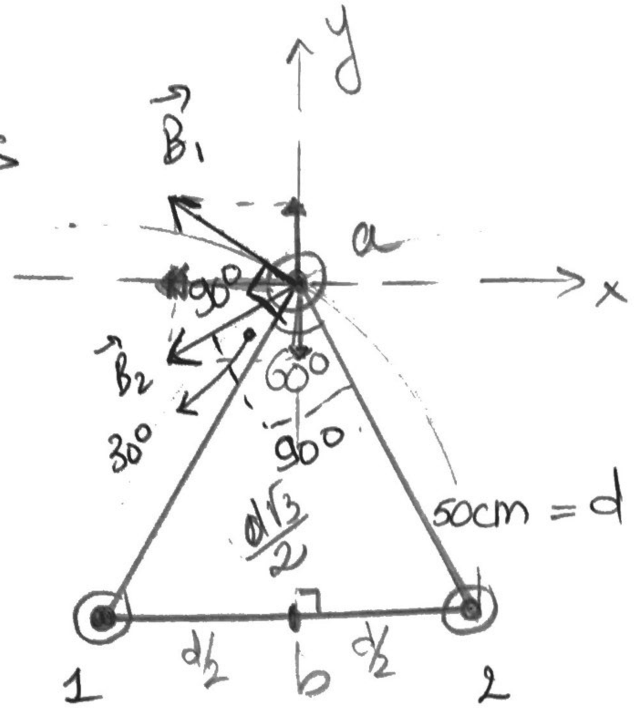
2) $U_{AB} = V_A - V_B = E_2 - R_2 I_2 = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$ volts

$\Rightarrow \boxed{U_{AB} = \frac{10}{3} V}$

Ex5

1) cours

2)



$I = 10A$

$\vec{B}_a = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$

direct° de $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$: règle de la main droite (voir fig)

$\vec{B}_{1y} + \vec{B}_{2y} = \vec{0}$; $\vec{B}_a = 2\vec{B}_{1x} = 2\vec{B}_{2x}$

$= 2 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \times \cos 30° (-\vec{i})$

$= \cancel{2} \frac{4\pi 10^{-7} \cdot 10}{\cancel{2\pi} \, 50 \cdot 10^{-2}} \cos 30° (-\vec{i})$ $\cos 30° = \sqrt{3}/2$

$= 0.692 \, 10^{-5} T$

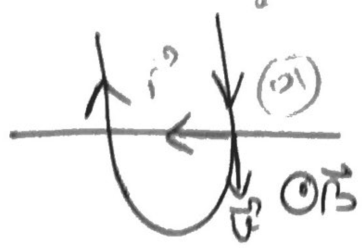
au pt b le courant doit être ds le sens negatif de l'axe des z ⊗ ⟶ $\vec{B}_b (\longrightarrow)$ suivant $\hat{i}$ (regle de la main droite)

en plus $B_a = B_b$ pour que la force au pt a soit nulle.

$B_b = \frac{\mu_0 I_b}{2\pi d \sqrt{3}/2} \Rightarrow I_b = \frac{2\pi d \sqrt{3}/2 \times 0.692 10^{-5}}{4\pi 10^{-7}} \approx 30 A$. ($d = 50 \cdot 10^{-2}$)

Ex6 :

a) $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ (01), règle des 3 doigts de la main droite (01) $\longrightarrow$ proton ($q>0$) (01)



b) $\Delta t = 130\,ns$ demi-cercle $D = \pi R$

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ (01)

$qvB = m\dfrac{v^2}{R}$ (02) $\Rightarrow$ $\boxed{v = \dfrac{qBR}{m}}$ (01)

et $v = \dfrac{D}{\Delta t}$ (01) $= \dfrac{\pi R}{\Delta t}$ (01)

$\Rightarrow$

$\dfrac{qBR}{m} = \dfrac{\pi R}{\Delta t}$ (01) $\Rightarrow B = \dfrac{\pi m}{q\Delta t}$

$= \dfrac{\pi \times 1.67\,10^{-27}}{1.6\,10^{-19} \times 130\,10^{-9}}$

$= 0.252\,T$ (01)

c) Δt ne dépend pas de la vitesse (01)

$\Delta t = \dfrac{\pi m}{qB}$ (01). donc $\bar{v}$ Δt. (01)

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

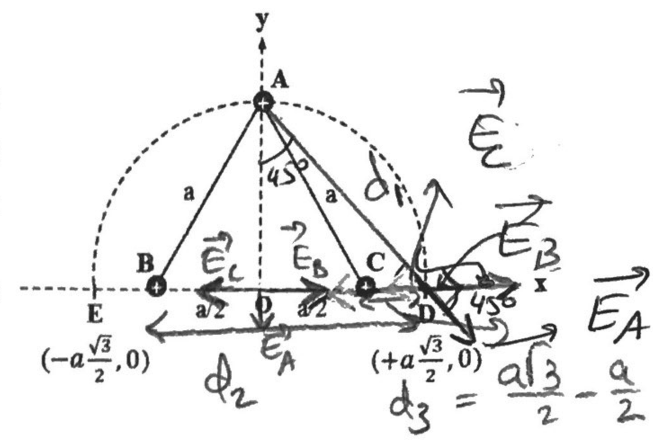
Cours : P1101
Durée : 1 heure

Année : 2017 -2018
Examen : Partiel

<u>Toutes les figures doivent être dessinées sur le propre de nouveau.</u>

<u>Exercice I</u> : *(35 points)*

Trois charges ponctuelles positives, chacune de valeur **+q**, sont placées aux sommets **A, B** et **C** d'un triangle équilatéral **ABC** de côté **a**, comme le montre la figure ci-contre. **O** est le milieu de **[BC]** et aussi le centre de cercle de rayon $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. On suppose que le potentiel à l'infini est nul.



$d_3 = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$

1- Déterminer le champ électrique créé au point **O (0,0)** en fonction de **a** et **q**.

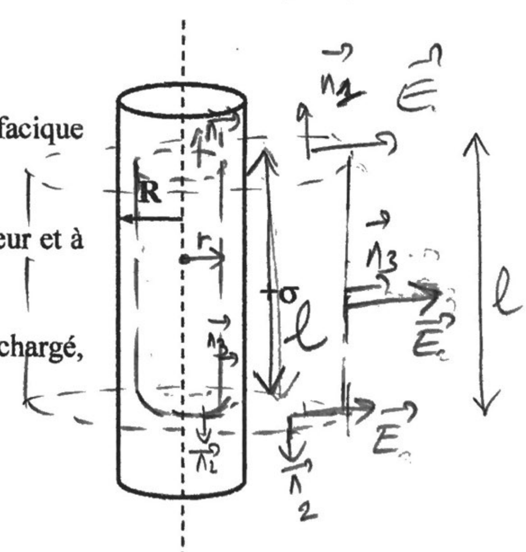
2- Trouver le champ électrique et le potentiel électrostatique au point **D** en fonction de **a** et **q**.

3- On place une charge **(-5q)** au point **D**. Déterminer la force exercée sur cette charge.

4- Calculer le travail électrique pour déplacer la charge +**q** du point **A** au point **E**.

<u>Exercice II</u> : *(25 points)*

Un cylindre infini de rayon **R** est uniformément chargé ayant une densité surfacique positive +σ.



a) En appliquant le théorème de Gauss, trouver le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre chargé.

b) Trouver le potentiel électrique à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre chargé, sachant que **V=V₀** pour **r = R₁** tel que **R₁>R**.

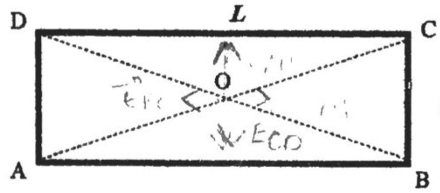
<u>TSVP →</u>

Exercice III : *(40 points)*

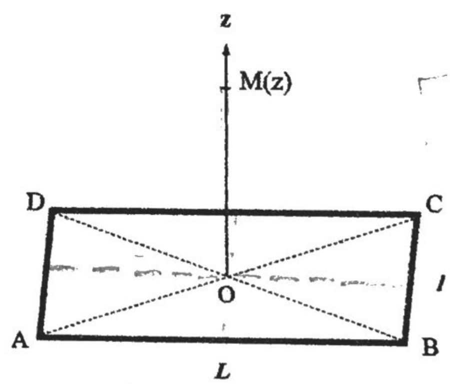
1- Démontrer que le champ électrique créé par une tige de longueur L, uniformément chargée de densité linéique positive $+\lambda$, en un point **P** situé sur sa médiatrice à une distance y du fil est donné par :

$$E = \frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{y(L^2+4y^2)^{1/2}}$$

2- On considère un fil chargé positivement de densité linéique uniforme $+\lambda$ de forme rectangulaire **ABCD** de longueur L et de largeur l. Déduire le champ électrique en son centre **O**.



3- Dans la figure ci-contre, on considère le même rectangle. Déduire le champ électrique résultant au point **M(z)** de l'axe **[oz)**.



Bonne Chance

Solution partiel PH01 2016-2017

Ex 1 :

12 pts $V(\infty)=0$.

1) $\vec{E}_0 = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$.

02 FG

$\boxed{E_A = k_0 \frac{q}{d^2}}$ où $d^2 + a^2/4 = a^2 \Rightarrow d^2 = \frac{3a^2}{a} = \quad d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

ou d = rayon du cercle $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

02

$E_A = \frac{k_0 q}{3a^2/4} = \frac{4 k_0 q}{3a^2}$; $E_B = \frac{k_0 q}{a^2/4}$ (01) $= 4\frac{k_0 q}{a^2}$ (01) $= E_C$.

* $E_A = 1.33 \frac{k_0 q}{a^2}$ $\quad E_B = E_C = 4\frac{k_0 q}{a^2}$

avec $\vec{E}_A = E_A(-\vec{j})$ (02) ; $\vec{E}_B = E_B(\vec{i})$ (01) $\vec{E}_C = E_C(-\vec{i})$ (01)

$\vec{E}_0 = E_A(-\vec{j}) + \underbrace{E_B(\vec{i}) + E_C(-\vec{i})}_{0} = E_A(-\vec{j})$.

(01)

$\vec{E}_0 = \frac{4}{3}\frac{k_0 q}{a^2}(-\vec{j})$.

(01)

2) (12 pts) $\vec{E}_D = ?$ $V_D = ?$

$\vec{E}_D = \vec{E}_A + \vec{B}_B + \vec{E}_C$

$E_A = k_0 \frac{q}{d_1^2}$ 02 $\boxed{d_1} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\cancel{2}\cdot\frac{a^2 3}{\cancel{4}}} = \boxed{a\sqrt{3/2}}$

$E_B = k_0 \frac{q}{d_2^2}$ 02 $\boxed{d_2} = a + d_3 = a + \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$

$= \boxed{\frac{a(\sqrt{3}+1)}{2}}$.

$E_C = k_0 \frac{q}{d_3^2}$ 02 $\boxed{d_3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2} = \boxed{\frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}}$.

$\vec{E}_D = E_A(\underbrace{\cos 45°}_{02}\vec{i} - \cos 45° \vec{j}) + E_B(+\vec{i}) + E_C(\vec{i})$ 02 01 01

$= \left(E_A \frac{\sqrt{2}}{2} + E_B + E_C\right)\vec{i} + \left(-E_A \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$

$= \left(k_0 \frac{q}{\frac{3a^2}{\cancel{2}}} \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} + k_0 \frac{q}{\frac{a^2(\sqrt{3}+1)^2}{4}} + k_0 \frac{q}{\frac{a^2(\sqrt{3}-1)^2}{4}}\right)\vec{i} + \frac{k_0 q}{\frac{3a^2}{\cancel{2}}}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}(-\vec{j})$

$= \frac{k_0 q}{a^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \overbrace{\frac{4}{(\sqrt{3}+1)^2} + \frac{4}{(\sqrt{3}-1)^2}}^{8}\right)\vec{i} + \frac{k_0 q}{a^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)(-\vec{j})$

$= \frac{k_0 q}{a^2}\underbrace{\left(\frac{\overset{24}{24+\sqrt{2}}}{3}\right)}_{8,47}\vec{i} + \frac{k_0 q}{a^2}\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)}_{0,47}(-\vec{j})$

(2)

$$V_D = V_A + V_B + V_C$$

02 FG

$$= \frac{k_0 q}{d_1} + \frac{k_0 q}{d_2} + \frac{k_0 q}{d_3}$$

$$= \frac{k_0 q}{a\sqrt{3}/2} + \frac{k_0 q}{\frac{a}{2}(\sqrt{3}+1)} + \frac{k_0 q}{\frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)}$$

01 01 01

$$= \frac{k_0 q}{a}\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}+1} + \frac{2}{\sqrt{3}-1}\right) = \frac{k_0 q}{a}\left(\frac{\sqrt{6}+6\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 4{,}28\,\frac{k_0 q}{a}.$$

3pts

02 FG 01

3) $$\vec{F}_D = q_D \vec{E}_D = -5q\vec{E}_D$$

8pts

02 FG

4) $$W_{A\to E} = -Q\Delta V = -Q(V_f - V_i)$$

$$= +Q(V_i - V_f) =$$

$$V_i = V_A \qquad V_f = V_E$$

02

$$V_A = V_B + V_C = \frac{k_0 q}{a} + \frac{k_0 q}{a} = \frac{2k_0 q}{a}$$

02 01

$$V_E = V_B + V_C = \frac{k_0 q}{\frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}} + \frac{k_0 q}{\frac{a(\sqrt{3}+1)}{2}} = \frac{2k_0 q}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) = \frac{2k_0 q}{a}\,\frac{2\sqrt{3}+1-1}{3-1} = \frac{2k_0 q\sqrt{3}}{a}$$

$$V_E = \cancel{2}\frac{k_0 q}{a}\left(\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{\underbrace{3-1}_{\cancel{2}}}\right)$$

$$= \frac{k_0 q}{a}\,2\sqrt{3}.$$

$$W = q\left(\frac{2k_0 q}{a} - \frac{2k_0 q}{a}\sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{2k_0 q^2}{a}\left(1-\sqrt{3}\right)$$

Exercice II :

Cylindre infini de rayon R $\sigma = cst$ et $\sigma > 0$

a) Loi de Gauss : $\Phi = \oiint_{\Sigma_G} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$.

Vue la sym. géom. et élec, le champ électrique est radial $\vec{E}(r) = E(r)\,\hat{r}$ avec $E = cst$ pour $r = cst$

↳ surface de gauss est un cylindre de rayon r et de longueur l

pour $r < R$, pas de charges à l'int. du cyl.

↳ $q_{int} = 0 \Rightarrow \Phi = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_I = \vec{0}}$ $r<R$

pour $r > R$, $\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS}$

$$= \underbrace{\cancel{\iint \vec{E}.\vec{dS_1}}}_{0,\ \vec{E} \perp \vec{n}_1} + \underbrace{\cancel{\iint \vec{E}.\vec{dS_2}}}_{0,\ \vec{E} \perp \vec{n}_2} + \iint \vec{E}.\vec{dS_3}$$

$$= \iint E\, dS_3 \cos(0°) = E \iint dS_3 = E\, 2\pi r l$$

et $\frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\, 2\pi R l}{\varepsilon_0}$.

$$E\, \cancel{2\pi} r \cancel{l} = \frac{\sigma\, \cancel{2\pi} R \cancel{l}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R}{r}.$$

$$\boxed{\vec{E}_{II} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R}{r} \cdot \vec{r}} \quad r > R$$

b) $V = ?$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

$$E = -\frac{dV}{dr}$$

pour $r < R$ $\quad V_I = cst_1$ car $E_I = 0$.

pour $r > R$ $\quad \int dV = \int -E\,dr \Rightarrow V_{II} = -\int \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R}{r}\,dr \Rightarrow$

$$V_{II} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} R \ln(r) + cst_2 .$$

continuité du potentiel à la traversée de la surface $\quad V_I(r=R) = V_{II}(r=R)$

$$cst_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} R \ln R + cst_2 .$$

avec $\quad V = V_0$ pour $r = R_1$ tq $(R_1 > R)$

$$\left.\begin{array}{l} V_{II}(r=R_1) = V_0 \\ \text{et } V_{II}(r=R_1) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} R \ln(R_1) + cst_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$V_0 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} R \ln(R_1) + cst_2 \Rightarrow cst_2 = V_0 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R \ln R_1$$

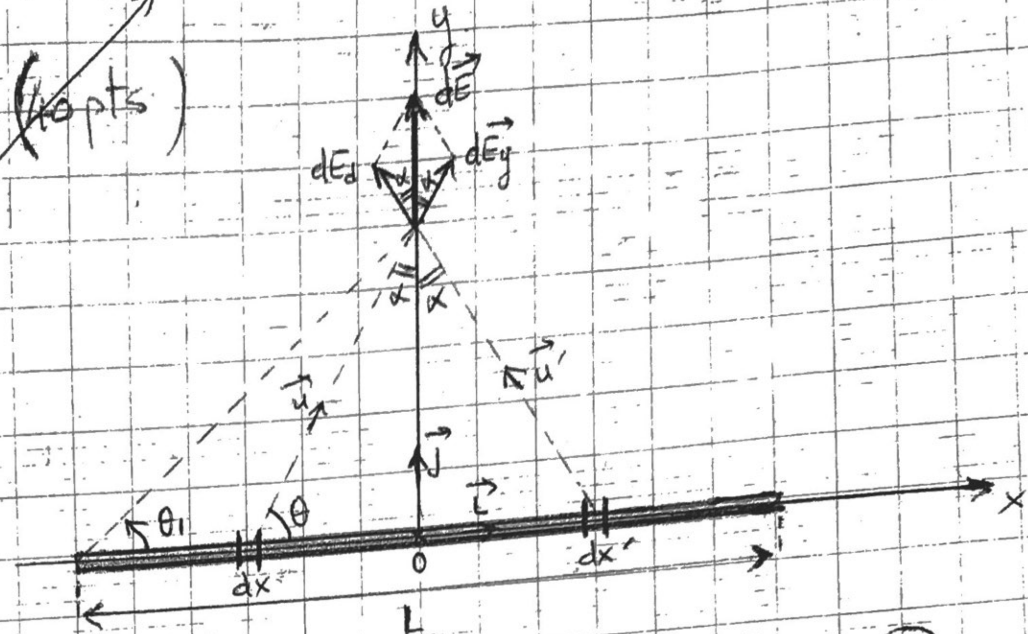
$$\text{et } cst_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} R \ln(R) + V_0 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R \ln(R_1)$$

$$cst_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R \ln\left(\frac{R_1}{R}\right) + V_0$$

$$V_I = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R \ln\left(\frac{R_1}{R}\right) + V_0 \;;\; V_{II} = +\frac{\sigma}{\varepsilon_0} R \ln\left(\frac{R_1}{r}\right) + V_0 .$$

Exercice 3 (~~10 pts~~) 45

⟨26⟩ 1
⟨16+10⟩



$dx \longrightarrow dq = \lambda dx \longrightarrow d\vec{E}_g = K_0 \dfrac{\lambda dx}{(x^2+y^2)}\vec{u}$; ②

dx' sym. de $dx \longrightarrow dq = \lambda dx \longrightarrow d\vec{E}_d = K_0 \dfrac{\lambda dx}{(x^2+y^2)}\vec{u}'$; ②

$|d\vec{E}_g| = |d\vec{E}_d| \longrightarrow$ (sym. géom. et électrique) ②

② $d\vec{E} = d\vec{E}_g + d\vec{E}_d = K_0 \dfrac{\lambda dx}{(x^2+y^2)}(\vec{u}+\vec{u}') = K_0 \dfrac{\lambda dx}{(x^2+y^2)} 2\sin\theta \vec{J}$; ②

② $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{J}$

② $\vec{u}' = -\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{J}$

$= K_0 \dfrac{\lambda dx}{(x^2+y^2)} 2\cos\alpha \vec{J}$;

② $\Rightarrow \vec{E} = \displaystyle\int_0^{L/2} d\vec{E} = 2K_0\lambda \int_0^{L/2} \frac{dx \sin\theta}{(x^2+y^2)}\vec{J} = 2K_0\lambda \int_0^{L/2} \frac{dx}{(x^2+y^2)} \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\vec{J}$ ②

1ère méthode $\Rightarrow \vec{E} = 2K_0\lambda y \displaystyle\int_0^{L/2} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\vec{J}$ ou $= 2K_0\lambda y \displaystyle\int_{-L/2}^{0} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\vec{J}$;

or : $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}} + \text{cteu}$; ② ②

② $\Rightarrow \vec{E} = 2K_0\lambda y \left[\dfrac{x}{y^2(x^2+y^2)^{1/2}}\right]_0^{L/2}\vec{J} = \dfrac{2K_0\lambda}{y} \dfrac{L/2}{((L/2)^2+y^2)^{1/2}}\vec{J}$;

②

$\Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0 y} \dfrac{1}{\sqrt{L^2+4y^2}}\vec{J} = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 y} \dfrac{1}{\sqrt{L^2+4y^2}}\vec{J}$;

2ème méthode

$$\vec{E} = 2K_0\lambda \int_{tige/2} \frac{dx \sin\theta}{(x^2+y^2)} \vec{j}$$

⊛ $tg\theta = \frac{-y}{x} \Rightarrow \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = d(tg\theta) = y\,d\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{y}{x^2}dx$

$\Rightarrow dx = \frac{x^2}{y}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$; 2

⊛ $\sin^2\theta = \frac{y^2}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{\sin^2\theta}{y^2}$ 2

$$\Rightarrow \vec{E} = 2K_0\lambda \int_{\theta_1}^{\pi/2} \left(\frac{x^2}{y}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\right)\left(\frac{\sin^2\theta}{y^2}\right)\sin\theta\,\vec{j}$$

$$= 2K_0\lambda \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{y^2}\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\sin\theta\, d\theta\, \vec{j}$$ 2

$$= 2K_0\lambda \int_{\theta_1}^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta\, \vec{j} = 2K_0\lambda \Big[-\cos\theta\Big]_{\theta_1}^{\pi/2} \vec{j}$$ 2

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\cos\theta_1\,\vec{j} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\frac{L/2}{(y^2+L^2/4)^{1/2}}\vec{j}$$

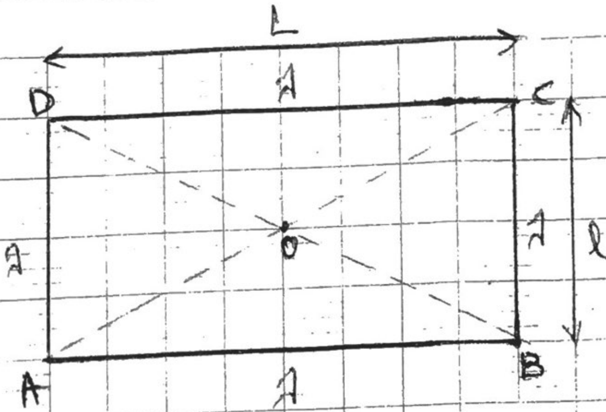
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0 y}\frac{1}{(4y^2+L^2)^{1/2}}\vec{j}$$ 2

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 y}\frac{1}{(4y^2+L^2)^{1/2}}\vec{j}$$

<6> 2.

Par Sym. géométrique et électrique, $\vec{E}_0 = \vec{0}$.

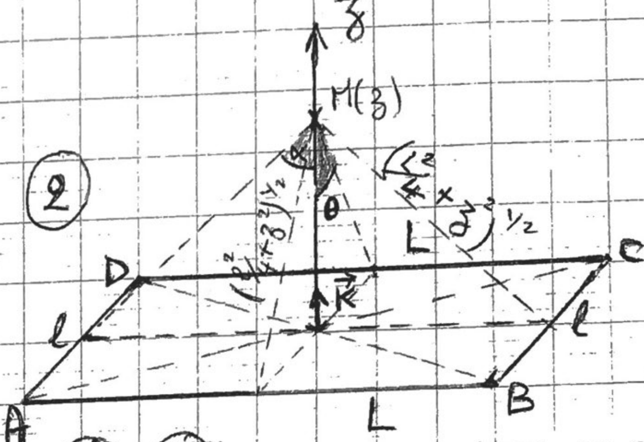
2 + 2 + 2



<13> 3.

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_{AB} + \vec{E}_{BC} + \vec{E}_{CD} + \vec{E}_{DA} \quad 2$$

$$= (\vec{E}_{AB} + \vec{E}_{CD}) + (\vec{E}_{BC} + \vec{E}_{DA})$$



1 1

$$|\vec{E}_{AB}| = |\vec{E}_{CD}| \;\&\; |\vec{E}_{BC}| = |\vec{E}_{DA}|$$

1 1

$$E_1 \leftarrow |\vec{E}_{AB}| = |\vec{E}_{CD}| = \frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0 \left(z^2+\frac{l^2}{4}\right)^{1/2}} \frac{1}{\left(4\left(\frac{l^2}{4}+z^2\right)+L^2\right)^{1/2}} = \frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left(z^2+\frac{l^2}{4}\right)^{1/2}\left(l^2+L^2+4z^2\right)^{1/2}}$$

1 1

$$E_2 \leftarrow |\vec{E}_{BC}| = |\vec{E}_{DA}| = \frac{\lambda l}{2\pi\varepsilon_0 \left(z^2+\frac{L^2}{4}\right)^{1/2}} \frac{1}{\left(4\left(\frac{L^2}{4}+z^2\right)+l^2\right)^{1/2}} = \frac{\lambda l}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left(z^2+\frac{L^2}{4}\right)^{1/2}\left(l^2+L^2+4z^2\right)^{1/2}}$$

$$\vec{E}_{(z)} = \left(2E_1\cos\theta + 2E_2\cos\alpha\right)\vec{K}; \quad 1 \quad 1$$

$$1 \quad \cos\theta = \frac{z}{\left(\frac{l^2}{4}+z^2\right)^{1/2}}, \quad \cos\alpha = \frac{z}{\left(\frac{L^2}{4}+z^2\right)^{1/2}} \quad 1$$

$$\vec{E} = 2\frac{\lambda z}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{L}{\left(z^2+\frac{l^2}{4}\right)\left(l^2+L^2+4z^2\right)^{1/2}} + \frac{l}{\left(z^2+\frac{L^2}{4}\right)\left(l^2+L^2+4z^2\right)^{1/2}}\right]\vec{K}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(4z^2+L^2+l^2\right)^{1/2}}\left[\frac{L}{\left(z^2+\frac{l^2}{4}\right)} + \frac{l}{\left(z^2+\frac{L^2}{4}\right)}\right]\vec{K}; \quad 1$$