UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DES SCIENCES
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours: M1103
Examen: Session 1

Année: 2018-2019
Durée: 2 heures

Exercice 1 (20 points)

Soit m un nombre réel. En discutant suivant les valeurs du paramètre m, résoudre le système suivant:

$$(S_m) = \begin{cases} x - 2y + 3z = 1, \\ 2x + my + 6z = 6, \\ -x + 3y + (m-3)z = 0. \end{cases}$$

Exercice 2 (25 points)

Soit $E = \mathbb{R}^4$. On considère les vecteurs : $u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (1,0,-1,1)$, $u_3 = (1,0,0,1)$, $u_4 = (0,2,1,-2)$, $u_5 = (-2,1,0,1)$, $u_6 = (-2,3,1,-1)$ *et* $u_7 = (-4,4,1,0)$. On note $F = Vect\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ et $G = Vect\{u_5, u_6, u_7\}$.

1- Déterminer une base et la dimension de chacun des espaces F et G.

2- Peut-on avoir $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$?

3- Déterminer $F + G$ et en déduire $\dim(F \cap G)$.

4- Montrer que $\{u_4, u_5, u_6\}$ est liée ; donner une base de $F \cap G$.

Exercice 3 (25 points)

Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ sa base canonique. Soit f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = e_1 + 2e_3 \,,\; f(e_2) = 4e_1 + 3e_2 + 9e_3 \text{ et } f(e_3) = -2e_1 - e_2 - 4e_3 .$$

1- Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2- Calculer A^2 et A^3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

3- Montrer que $D = \{u \in E, f(u) = u\}$ est un sous-espace vectoriel de E et calculer sa dimension. Donner une base de D.

4- Soit $P = \{(x, y, z) \in E,\ x - 2y = 0\}$ un sous-espace vectoriel de E. Calculer sa dimension et donner une base de P.

5- A-t-on $P \oplus D = E$?

Exercice 4 (30 points)

Considérons la matrice carrée suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1- Déterminer l'endomorphisme f associé à cette matrice A dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DES SCIENCES
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours: M1103
Examen: Session 1 **Année: 2017-2018**
Durée: 2h30

Partiel sur 100 points.

Exercice 1 (35 points)

Considérons la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in M_3(R).$$

1- Calculer le déterminant de M, en déduire que M est inversible.
2- Appliquer la méthode de Gauss pour déterminer l'inverse M^{-1}.
3- Déduire de la question 2 une matrice X de $M_3(R)$ telle que:

$$2XM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (35 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1- Vérifier que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.
2- Exprimer B en fonction de A et de la matrice unité I_3.
3- En déduire les puissances B^k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 (30 points)

Soit m un nombre réel. En discutant suivant les valeurs du paramètre m, résoudre le système suivant:

$$(S_m) = \begin{cases} mx + my - z = 0 \\ mx + y - mz = 0 \\ x + my - mz = 0 \end{cases}$$

Final sur 100 points.

Exercice 4 (30 points)

Soit $E = \mathbb{R}^4$. Considérons les deux sous-espaces vectoriels de E:

$F = \{(x.y.z.t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = 0 \ et \ x - y + 2z - 2t = 0\}$ et

$G = \{(x.y.z.t) \in \mathbb{R}^4 | 5x + y + 7z - t = 0 \ et \ x - 3y + 3z - 5t = 0\}$.

1- Déterminer une base de F ;

2- Déduire que $F \subseteq G$

3- Est-ce que $F = G$? Justifier votre réponse.

Exercice 5 (30 points)

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x.y.z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0 \; et \; 2x - y - z = 0\}$ et $G = \{(x.y.z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1- Montrer que $u = (1,1,1)$ est une base de F et que $v = (1,0,1)$ et $w = (0,1,1)$ est une base G.

2- Montrer que $\{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3- A-t-on $G \oplus F = \mathbb{R}^3$.

4- Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Exprimer $e_1, e_2 \; et \; e_3$ dans la base $\{u, v, w\}$.

Exercice 6 (40 points)

On considère les deux applications linéaires :

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x.y.z) \to (2x - z . 3x + y + 2z) \text{ et}$$
$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x.y) \to (x + y. -y. 2x - y)$$

1- Déterminer la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Puis, déterminer la matrice B de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

2- Pourquoi f ne peut pas être injective ? f est-elle surjective ?

3- Pourquoi g ne peut pas être surjective ? g est-elle injective ?

4- Montrer que $f \circ g$ est un isomorphisme. Préciser $(f \circ g)^{-1}$.

5- Expliciter l'application $(f \circ g)^2$.

Soient $\mathcal{B}'$ une autre base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}'$ une autre base de $\mathbb{R}^2$.

6- Donner les formules de relations entre A et $A' = Mat_{\mathcal{B}' \mathcal{C}'} f$ ainsi entre B et $B' = Mat_{\mathcal{C}' \mathcal{B}'} g$.

7- Déduire que $A'B'$ est inversible.

BON COURAGE

UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DES SCIENCES
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours: M1103
Deuxième Session

Année: 2017-2018
Durée: 2h

Exercice 1 (15 points)

1. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$ où a, b et c sont des réels.
2. En déduire selon les valeurs de a, b et c, une base de F = vect(C_1,C_2,C_3) ainsi que dim F.

Exercice 2 (20 points)

Soit A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 .
2. Trouver un polynôme P de degré 2 tel que $P(A) = O$.
3. En déduire A^{-1} .
4. Retrouver A^{-1} par la méthode de Gauss.

Exercice 3 (30 points)

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs :

$v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3,4)$, $v_3 = (3,1,4,2)$, $v_4 = (10,4,13,7)$ et $v_5 = (1,7,8,14)$.

1. Sans effectuer aucun calcul, montrer que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) est une famille liée.
2. Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs.
3. En déduire une base et la dimension de F = vect (v_1, v_2, v_3, v_4 , v_5)
4. Déterminer un sous espace supplémentaire G de F dans $\mathbb{R}^4$.

T. P. S. V. P

Exercice 4 (35 points)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par, pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(u) = (-2x + y + z\,,\, x - 2y + z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$, en déduire $\dim(Im(f))$.
3. Donner une base de $Im(f)$
4. L'application f est elle injective? surjective?

Considérons les familles B' = { (1,-1,0) ; (0,1,-1) ; (1,0,1) } et C'={ (1,1) ;(1,-1) }

5. Montrer que B' (resp. C') est une base de $\mathbb{R}^3$ (resp. de $\mathbb{R}^2$)
6. Determiner $\text{Mat}_{B',C'}$ f.

Bon coura

Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : M 1103
Durée : 2 heures

Année : 2016-2017
Examen : Première session

Exercice 1 (35 pts.)
Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x+y-z=0 \text{ et } x-y-z=0\}$ et $G = \text{Vect}\{v = (1,1,1)\ ;\ w = (0,2,1)\}$ deux sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la dimension de F et G.
2. Déduire que $F = \text{Vect}\{u = (1,0,1)\}$.
3. Déterminer le système d'équations cartésiennes de G.
4. Montrer que $\{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déduire que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
5. Soit $r = (5,0,2)$. Exprimer r dans la base $\{u, v, w\}$.

Exercice 2 (35 pts.)
Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $f(e_1) = -3e_1 + 2e_2 - 4e_3$, $f(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3$ et $f(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
2. Montrer que $E = \{x \in \mathbb{R}^3\ ;\ f(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la dimension de E est 1 et donner un vecteur non nul $u \in E$.
3. Soit $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\ ;\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base $\{v, w\}$ de F.
4. Montrer que $B' = \{u, v, f(v)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Déterminer la matrice R de f dans la base B'.

Exercice 3 (30 pts.)
Soit $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = A - {}^tA$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Rappeler la dimension de $M_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer $\text{Ker} f$ et $\text{Im} f$ ainsi que $\dim(\text{Ker} f)$ et $\dim(\text{Im} f)$.
4. Est-ce-que $\text{Ker} f$ et $\text{Im} f$ sont supplémentaires ? Justifier votre réponse.

BON TRAVAIL

Université Linanaise
Faculté des sciences
Branche III - Tripoli

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours: Math 103
Durée: 2 heures

Examen: Final
Session: 2014 - 2015

Exercice 1 [16 = 3+5+(6+2) points].

1. Peut-on trouver un endomorphisme f de $\mathbb{R}^{15}$ tel que $Im(f) = Ker(f)$?
2. Soient E un k-espace vectoriel de *dimension finie* et f un endomorphisme de E tel que f^2 est *injective*. Montrer que f est un automorphisme.
3. Soit f un endomorphisme *non nul* de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer l'équivalence: $Im(f) = Ker(f) \Leftrightarrow f \circ f = 0$.
   (b) Donner un exemple d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ tel que $Im(f) = Ker(f)$.

Exercice 2 [32 = 4 × 8 points].

Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $f : E \longrightarrow E$ l'application définie par:

$$\forall\ P(X) \in E, \quad f\big(P(X)\big) = (X-1)P'(X) + P''(0).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $B = (1, X, X^2, X^3)$.
3. Déterminer une base de $Im(f)$ ainsi que le rang de f.
4. Donner un élément *non nul* de $Ker(f)$. En déduire une base pour $Ker(f)$.
5. Soit $F = \{Q(X) \in E\ ;\ Q(0) + Q'(0) = 0\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace de E.
   (b) Déterminer une base de F.
   (c) Montrer que $Im(f) \subset F$.
   (d) Déduire que $Im(f) = F$.

Exercice 3 [25 = 5 × 5 points].

Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $B = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.

On considère l'endomorphisme u de E défini par: $\left\{\begin{array}{rcl} u(e_1) & = & 2e_1 - 3e_2 + e_3 \\ u(e_2) & = & e_1 - e_2 \\ u(e_3) & = & e_2 - e_3 \end{array}\right.$.

1. Écrire la matrice A de u dans la base B. Calculer A^2 et A^3.

2. On pose $\begin{cases} e'_1 &= u^2(e_1) \\ e'_2 &= -u(e_3) \\ e'_3 &= e_3 \end{cases}$.

   (a) Montrer que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.

   (b) Calculer $u(e'_i)$ pour $i = 1, 2, 3$. Déduire la matrice A' de u dans la base B'.

3. Soit $P = Pass(B; B')$ la matrice de passage de B à B' (***notée aussi*** $P_{B \longrightarrow B'}$). Calculer P^2 et déduire P^{-1}.

4. Vérifier que $P^{-1}AP = A'$.

Exercice 4 [27 = 5+6+4+(3+9) points].
Dans la suite $M(f, B)$ ***est la matrice de*** f ***dans la base*** B***, ce qui est notée aussi*** $M_B(f)$.

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est A.

1. Déterminer les valeurs propres de A.

2. Déterminer, pour chaque valeur propre λ de A, l'espace propre correspondant E_λ.

3. Déterminer une base B' de $\mathbb{R}^3$ telle que $M(f, B')$ est diagonale.

4. On suppose que $B' = (v_1, v_2, v_3)$ telle que (v_1, v_2) est une base de F et (v_3) est une base de G, où F et G sont les espaces propres trouvés dans la question (2).

   Soient p la projection sur F parallèlement à G, et q la projection sur G parallélement à F.

   (a) Vérifier que $p + q = id_{\mathbb{R}^3}$.

   (b) Donner les matrices $M(p, B')$, $M(p, B)$ et en déduire $M(q, B)$.

Bon Travail

Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 103

Durée : 2 heures

Année : 2013 - 2014

Examen : Final

Exercice 1 (10 points).

1. Est-ce que la famille $F = (X^2 - X + 5, 4X^3 - X^2 + 5X, 3X + 2)$ engendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$ des polynômes réels de degré plus petit ou égal à 4 ?
2. Est-ce que la transformation linéaire $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]$ définie par $f(P(X)) = X^2P(X)$ est surjective ?

Exercice 2 (10 points). Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et f l'endomorphisme de E vérifiant $f^2 = -id_E$. Montrer que $\forall a \in E - \{0\}$ la famille $(a, f(a))$ est libre.

Exercice 3 (25 points). Soient F et G deux sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \; ; \; b - 2c + d = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \; ; \; a = d, \; b = 2c\}.$$

1. Donner des bases pour F et G.
2. Montrer que $F + G = \mathbb{R}^4$.
3. Donner une base pour $F \cap G$.
4. Déterminer un supplément de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4 (30 points). On considère l'espace réel $E = \mathbb{R}_3[X]$ et f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(P(X)) = P(X + 1) - P(X).$$

1. Déterminer la matrice de f par rapport à la base canonique $B = (1, X, X^2, X^3)$ de E. Calculer $f(8X^3 + 2X^2 - 5X + 1)$.
2. f est -elle injective ?
3. Montrer que $Im(f) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Déduire alors $Im(f)$.
4. On pose $N_0 = 1, N_1 = X, N_2 = \dfrac{X(X-1)}{2!}, N_3 = \dfrac{X(X-1)(X-2)}{3!}$ des éléments de E. Vérifier que $B' = (N_0, N_1, N_2, N_3)$ est une base de E. Donner la matrice de $M_{B'}(f)$.
5. Déterminer la matrice de passage P de B à B'.
6. Soit $Q = N_0 - 5N_1 + 2N_2 + 8N_3$ un élément de E. Déterminer les coordonnées de Q par rapport à B.

Exercice 5 (25 points). Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, par rapport à la b
canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$, est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les valeurs propres de A.Déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer l'automorphisme inverse f^{-1}.
4. Déterminer, pour toute valeur propre λ de A, une base et la dimension de l'espace propre associé E_λ.
5. Déduire que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$. Donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}DP$.
6. Donner une matrice diagonale complexe Δ vérifiant $\Delta^2 = D$. Déduire l'existence d'une matrice complexe M satisfaisant $M^2 = A$.

Bon Travail

Exercice 1 .

1. Non, car $dim(\mathbb{R}_4[X]) = 5$, et tout système générateur de $\mathbb{R}_4[X]$ doit contenir *au moins* 5 éléments (polynômes), mais ici F contient seulement 3.
2. Non. Si f est surjective, alors $Im(f) = \mathbb{R}_4[X]$, alors $dim(Im(f)) = 5 = dim(\mathbb{R}_4[X])$, alors la formule du rang $dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim(\mathbb{R}_2[X]) \Rightarrow dim(Ker(f)) = -2 < 0$. Contradiction !

Exercice 2 . On note que : $f^2 = -id_E \Leftrightarrow \forall x \in E,\ f\Big(f(x)\Big) = -x$.

Soit $a \in E - \{0_E\}$. Si $\Big(a, f(a)\Big)$ est liée, alors a et $f(a)$ sont colinéaires, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ telle que $f(a) = \lambda a \Rightarrow f\Big(f(a)\Big) = f(\lambda a) \Rightarrow -a = \lambda f(a) \Rightarrow -a = \lambda^2 a \Rightarrow (1+\lambda^2)a = 0_E \Rightarrow a = 0_E$ car $1 + \lambda^2 \neq 0$. Contradiction !

Exercice 3 .

1. $F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,;\, b = 2c - d = 0\} = \{(a, 2c-d, c, d) \,;\, a, c, d \in \mathbb{R}\}$
   $= \{a(1,0,0,0) + c(0,2,1,0) + d(0,-1,0,1) \,;\, a,c,d \in \mathbb{R}\}$
   $= Vect\Big(v_1 = e_1, v_2 = 2e_2 + e_3, v_3 = -e_2 + e_4\Big)$.
   Ces 3 vecteurs sont linéairement indépendants. En effet :
   Soient α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ telles que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Alors $(\alpha, 2\beta - \gamma, \beta, \gamma) = (0,0,0,0)$, donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
   (Ici, on ne peut pas utiliser le déterminant, parce qu'ils sont 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$!)
   Ensuite $B_1 = \Big(v_1, v_2, v_3\Big)$ est une base de F.
   $G = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,;\, a = d,\ b = 2c\} = \{(a, 2c, c, a) \,;\, a, c \in \mathbb{R}\}$
   $= \{a(1,0,0,1) + c(0,2,1,0) \,;\, a, c \in \mathbb{R}\}$
   $= Vect\Big(w_1 = e_1 + e_4, w_2 = 2e_2 + e_3\Big)$.
   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires i.e. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ w_1 \neq \lambda w_2$, alors ils sont linéairement indépendants. Par suite $B_2 = \Big(w_1, w_2\Big)$ est une base de G.
2. $F + G = Vect(v_1, v_2, v_3) + Vect(w_1, w_2) = Vect(v_1, v_2, v_3, w_1)$ car $v_2 = w_2$.
   Alors $F + G = \mathbb{R}^4$ si (v_1, v_2, v_3, w_1) est de rang égal à 4 i.e. $det(v_1, v_2, v_3, w_1) \neq 0$.
   On a $det(v_1, v_2, v_3, w_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. D'où $F + G = \mathbb{R}^4$.
3. On a $dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$, alors $dim(F \cap G) = 1$, donc tout non-nul vecteur commun à F et G constitue une base de $F \cap G$. Comme $v_2 = w_2 \in F \cap G - \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, alors $B_3 = (v_2 = 2e_2 + e_3)$ est une base de $F \cap G$.
4. On a $dim(F) = 3$, donc un supplément H de F dans $\mathbb{R}^4$ doit être de dimension 1. Ensuite, tout $\omega \in \mathbb{R}^4$ vérifiant $det(v_1, v_2, v_3, \omega) \neq 0$ engendre une telle H.
   Prendre $\omega = e_4$, on a alors $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.
   Par suite, $H = Span(\omega)$ vérifie, par construction, $F \oplus H = \mathbb{R}^4$.

Exercice 4 .

1. On a $f(1) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$, $f(X) = 1$, $f(X^2) = 1 + 2X$ et $f(X^3) = 1 + 3X + 3X^2$.

   Alors $M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\forall\, P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$,

   $$Mat_B(f(P)) = M_B(f) \times Mat_B(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c+d \\ 2c+3d \\ 3d \\ 0 \end{pmatrix},$$

   donc $f(a + bX + cX^2 + dX^3) = (b + c + d) + (2c + 3d)X + (3d)X^2$,

   donc $f(1 - 5X + 2X^2 + 8X^3) = 5 + 28X + 24X^2$.

2. <u>*1ère méthode :*</u> On peut remarquer que $f(1) = 1 - 1 = 0$ et $1 \neq 0_{\mathbb{R}_3[X]}$, alors $Ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}$, donc f n'est pas injective.

   <u>*2ème méthode :*</u> On a $\quad dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$, et $dim(Im(f)) = rk(M_B(f)) = 3$ (clair !), alors $dim(Ker(f)) = 1$, et f n'est pas injective.

3. En utilisant la partie 1),on a $\forall\, P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$, $f(P) = f(a + bX + cX^2 + dX^3) = (b + c + d) + (2c + 3d)X + (3d)X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

   Alors $Im(f) \subset \mathbb{R}_2[X]$.

   D'autre part, on a $dim(Im(f)) = rk(M_B(f)) = 3 = dim(\mathbb{R}_2[X])$. Alors $Im(f) = \mathbb{R}_2[X]$.

4. On a $N_0 = 1$, $N_1 = X$, $N_2 = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2$, $N_2 =$ et $N_3 = \frac{1}{3}X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3$.

   Comme $Card(B') = 4 = dim(\mathbb{R}_3[X])$, alors B' est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ si et seulement si B' est libre, ceci est équivalent à dire $det(N_0, N_1, N_2, N_3) \neq 0$.

   Comme $det(N_0, N_1, N_2, N_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{vmatrix} = \frac{1}{12} \neq 0$. Alors B' est une base.

   On a $f(N_0) = 0$, $f(N_1) = 1 = N_0$, $f(N_2) = X = N_1$ et $f(N_3) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}X = -\frac{1}{2}N_0 + \frac{1}{2}N_1$.

   Alors $M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $Pass_{B \longrightarrow B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

6. La formule du changement de base $\quad Mat_B(Q) = Pass_{B \longrightarrow B'} \times Mat_{B'}(Q) \quad$ implique que

   $$Mat_B(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{10}{3} \\ -5 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$ D'où $Q = 1 - \frac{10}{3}X - 5X^2 + \frac{4}{3}X^3$.

Exercice 5 .

1. On a $\forall\, V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\quad Mat_B(f(V)) = M_B(f) \times Mat_B(V)$

   alors $Mat_B(f(V)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y + z \\ x - y + z \\ x + y - z \end{pmatrix}$.

   Ensuite, $f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$.

2. On a $P_A(X) = det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -1-X & 1 & 1 \\ 1 & -1-X & 1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{vmatrix} = -(X-1)(X+2)^2.$

   Alors $Spec(A) = \{1, -2, -2\}$.
   Comme $0 \notin Spec(A)$, alors f est un automorphisme.
   [**Ou bien** : $|A| = \prod_{\lambda \in Spec(A)} = (1)(-2)(-2) = 4 \neq 0 \Rightarrow f$ est bijective $\Rightarrow f$ est autom.]

3. On a

$$M_B(f^{-1}) = \left(M_B(f)\right)^{-1} = A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(Com(A)\right)^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Alors $f^{-1}(a, b, c) = \frac{1}{2}(b + c, a + c, a + b)$.

4. $E_1 = \{W \in \mathbb{R}^3 \,;\, (A - (1)I_3 = (0)\} = Span\left(v_1 = (1,1,1)\right)$. [Calcul $\Rightarrow x = y = z$].
   Alors $B_1 = (v_1)$ est une base de E_1 car $v_1 \neq 0$ et $dim(E_1) = 1$.
   $E_{-2} = \{W \in \mathbb{R}^3 \,;\, (A - (-2)I_3 = (0)\} = Span\left(v_2 = (-1,1,0), v_3 = (-1,0,1)\right)$. [Calcul $\Rightarrow x + y + z = 0$]. Comme v_2 et v_3 ne sont pas colinéaires i.e. $\nexists\, \alpha \in \mathbb{R}$, $v_2 = \alpha v_3$, alors (v_2, v_3) est libre, alors $B_2 = (v_2, v_3)$ est une base de E_{-2} et $dim(E_{-2}) = 2$.

5. Puisque $P_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, et $dim(E_\lambda) = Om(\lambda)$, $\forall\, \lambda \in Spec(A)$, où $Om(\lambda)$ est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ dans $P_A(X)$ [i.e. l'exposant de $(X - \lambda)$] , alors A est diagonalisable.
   Par suite $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ une matrice diagonale et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $Pass_{B \longrightarrow B' = B_1 \cup B_2}$ une matrice inversible qui vérifient $D = P^{-1}AP$.

6. On considère $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \end{pmatrix}$. On a $\Delta^2 = D$.
   Comme $A = PDP^{-1}$, alors $M = P\Delta P^{-1}$ satisfait

$$M^2 = (P\Delta P^{-1})(P\Delta P^{-1}) = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 103 Année : 2012 - 2013

Durée : 2h30 Examen : Final

Exercice 1 (25 points). Soient E un k-espace vectoriel de dimension 4 et $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E. On pose $F = Vect_k(u_1, u_2, u_3, u_4)$ où

$$u_1 = e_1 + e_2 - e_3 + e_4 \ ; \ u_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4 \ ; \ u_3 = e_1 - e_2 + e_3 - e_4 \ ; \ u_4 = 2e_1 + 3e_2 + 2e_4.$$

1. Déterminer le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4). Déduire la dimension et donner une base pour F.
2. Déterminer l'équation de F.
3. Soit $G = Span_k(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$.
   (a) Donner une base de G et montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.
   (b) Déduire que $E = F \oplus G$.
   (c) Décomposer le vecteur $v = e_1 + e_2$ dans $F + G$.

Exercice 2 (20 points). Soit u l'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ défini par

$$u(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3 \ ; \ u(e_2) = e_2 \ ; \ u(e_3) = -4e_1 + 2e_3$$

où $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Écrire la matrice de u par rapport à $\mathcal{C}$.
2. Déterminer des bases pour $Im(u)$ et $Ker(u)$.
3. Calculer la dimension du sous-espace $Ker(u) + Im(u)$.
4. Déduire que $\mathbb{R}^3 = Ker(u) \oplus Im(u)$.

Exercice 3 (10 points). Soient E un k-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence.

$$Ker(f) = Ker(f^2) \ \Leftrightarrow \ Im(f) \cap Ker(f) = \{0_E\}.$$

Exercice 4 (25 points). On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice par rapport à la base canonique $B = (1, X, X^2)$, est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Soit $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Calculer l'image $f(P)$.
2. On pose $Q_1(X) = 1 + 2X + 3X^2$, $Q_2(X) = X + X^2$, $Q_3(X) = 1 + 2X^2$.
   Montrer que $B' = (Q_1, Q_2, Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Calculer $f(Q_1)$, $f(Q_2)$ et $f(Q_3)$ puis donner la matrice A' de f par rapport à B'. Déduire les valeurs propres de A et que f est ni injective ni surjective.
4. Pour quelle valeur du paramètre réel λ le système linéaire $(A - \lambda I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a au moins une solution non-nulle dans $\mathbb{R}^3$?
5. Calculer la matrice l'endomorphisme $g = f \circ f + f$ par rapport à B. Déduire que $f \circ f = -f$.

Exercice 5 (20 points). Soient $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 + 2e_3) \; ; \; f(e_2) = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3), \; ; \; f(e_3) = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3).$$

On pose $F = \{v \in \mathbb{R}^3 \, ; \, f(v) = v\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base et la dimension de F.
3. Déterminer deux sous-espaces **suppléments distincts** de F dans $\mathbb{R}^3$.
4. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer son inverse f^{-1}.

BON TRAVAIL

Exercice 1 .

1. Le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est celui de la matrice associée :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & u_1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & u_2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & u_3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & u_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & u_1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -u_1 + u_2 := u'_2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & \frac{1}{2}(-3u_1 + 2u_2 + u_3) := u'_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -u_1 - u_2 + u_4 \end{array}\right).$$

Alors $rk(u_i) = 3 = dim(F)$ et (u_1, u'_2, u'_3) est une base de F.

2. Soit $\omega = (x, y, z, t) \in F$. Alors $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ telles que $\omega = \alpha u_1 + \beta u'_2 + \gamma u'_3$. Ensuite, on obtient un système linéaire dont la matrice augmentée associée est la suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ -1 & 2 & 3 & z \\ 1 & 0 & -1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & -x+y \\ 0 & 0 & 1 & x+z \\ 0 & 0 & 0 & -2y+z+3t \end{array}\right).$$

Alors $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,;\ -2y + z + 3t = 0\}$.

3. (a) Comme $V = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \neq 0_E$, alors $\{V\}$ est libre, donc $\{V\}$ est une base de G. Soit $U \in F \cap G$. Alors $\exists\ \alpha \in k$ telle que $U = \alpha V = (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$ et U vérifie l'équation de F, alors $-2\alpha + \alpha + 3\alpha = 0$, alors $\alpha = 0$, alors $U = 0_E$. D'où $F \cap G = \{0_E\}$.

   (b) On a $dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G) = 3 + 1 + 0 = 4 = dim(E)$. Comme $F + G \subset E$, alors $F + G = E$, mais $F \cap G = \{0_E\}$, donc $F \oplus G = E$.

   (c) On va trouver $v_1 \in F$ et $v_2 \in G$ tels que $v = v_1 + v_2$.
   Il existe $\alpha, \beta, \gamma, \theta \in k$ tels que $v = \alpha u_1 + \beta u'_2 + \gamma u'_3 + \theta V$, alors on obtient un système linéaire dont la matrice augmentée associée est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

   D'où $v = (2u_1 + u'_3) - (V) \in F + G$.

Exercice 2 .

1. $M_C(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. On sait que $Im(u) = Vect\Big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\Big)$ car C est une base de $\mathbb{R}^3$. Maintenant, on va déterminer le rang de $\Big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\Big)$. On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & u(e_1) \\ 0 & 1 & 0 & u(e_2) \\ -4 & 0 & 2 & u(e_3) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & u(e_1) \\ 0 & 1 & 0 & u(e_2) \\ 0 & 0 & 0 & 2u(e_1) - 2u(e_1) + u(e_3) \end{array}\right).$$

Alors $rk\Big(u(e_i)\Big) = 2$ et $\Big(u(e_1), u(e_2)\Big)$ est une base de $Im(u)$.

D'après la formule du rang $dim(Im(u)) + dim(Ker(u)) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on obtient $dim(Ker(u)) = 1$, donc tout non-nul vecteur de $Ker(u)$ détermine une base de $Ker(u)$. De plus, on a $2u(e_1) - 2u(e_1) + u(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow u(2e_1 - 2e_1 + e_3) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 2e_1 - 2e_1 + e_3 \in Ker(u) - \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Par suite, $(\omega := 2e_1 - 2e_1 + e_3)$ est une base de $Ker(u)$.

3. On a $Ker(u) + Im(u) = Vect\Big(u(e_1), u(e_2)\Big) + Vect(\omega) = Vect\Big(u(e_1), u(e_2), \omega\Big) \subset \mathbb{R}^3$.

Comme $det\Big(u(e_1), u(e_2), \omega\Big) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Alors $\Big(u(e_1), u(e_2), \omega\Big)$ est de

rang 3, alors $Ker(u) + Im(u)$ est de dimension 3. Par conséquence, $Ker(u) + Im(u) = \mathbb{R}^3$

4. Comme $Ker(u) + Im(u) = \mathbb{R}^3$ et

$$3 = dim\Big(Ker(u) + Im(u)\Big) = dim\Big(Ker(u)\Big) + dim\Big(Im(u)\Big),$$

alors $Ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 3 . Notons que : $Ker(f) = Ker(f^2) \Longleftrightarrow \Big(\forall x \in E,\ f(x) = 0_E \Longleftrightarrow f^2(x) = 0_E\Big)$.

$\Rightarrow]$ Soit $z \in Im(f) \cap Ker(f)$.

Alors $\Big(\exists x \in E\Big)\Big(z = f(x),\ f(z) = 0\Big) \Rightarrow f^2(x) = 0 \overset{Hyp}{\Longrightarrow} f(x) = 0 \Rightarrow z = 0$.

$\Leftarrow]$ Soit $x \in E$.

$\subseteq)$ $x \in Ker(f) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = f(0) \Rightarrow f^2(x) = 0 \Rightarrow x \in Ker(f^2)$.

$\supseteq)$ $x \in Ker(f^2) \Rightarrow f^2(x) = 0 \Rightarrow f\Big(f(x)\Big) = 0 \Rightarrow f(x) \in Im(f) \cap Ker(f) \overset{Hyp}{=}$

$\{0_E\}$ $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in Ker(f)$.

Exercice 4 .

1. On a $Mat_B\Big(f(P)\Big) = M_B(f) \times Mat_B(P) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-c \\ 4a+b-2c \\ 6a+3b-4c \end{pmatrix}$,

   donc $f(P) = \Big(a+b-c, 4a+b-2c, 6a+3b-4c\Big)$.

2. Comme $card(B') = 3 = dim(\mathbb{R}_2[X])$, alors B' est une base $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si B' est libre $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si $det\Big(B'\Big) \neq 0$.

   On a $det\Big(B'\Big) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Alors B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. En utilisant le calcul précédent, on obtient $f(Q_1) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$, $f(Q_2) = -X - X^2 = -Q_2$ et $f(Q_3) = -1 - 2X^2 = Q_3$. Alors $M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   On remarque que $f(Q_1) = 0 \cdot Q_1$ alors 0 est une valeur propre de f. De même, $f(Q_2) = -Q_2$ et $f(Q_3) = -Q_3$ impliquent que -1 est une valeur propre double et par suite $Spec(f) = \{0, -1, -1\}$.

   Comme $0 \in Spec(f)$, alors f n'est ni injective ni surjective et ni bijective, parce que f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

4. La question est équivalente à : quelles sont les valeurs propres de $A = M_B(f)$? Comme les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sont les mêmes pour n'importe qu'elle base, alors $Spec(f) = Spec(A) = Spec(A')$ où $A = M_B(f)$ et $A' = M_{B'}(f)$. D'où $Spec(f) = \{0, -1, -1\}$.

5. $$\begin{aligned} M_B(f \circ f + f) &= M_B(f) \times M_B(f) + M_B(f) \\ &= A^2 + A = A(A + I_3) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

   alors $f \circ f + f = 0$ $\Big($ l'application linéaire nulle de $End(\mathbb{R}_2[X])$ $\Big)$, donc $f \circ f = -f$.

Exercice 5 .

1. <u>1ère méthode :</u> F est exactement l'espace propre associé à la valeur propre 1, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   <u>2ème méthode :</u> Classique
   — $0_{\mathbb{R}^3} \in F$, car $f(0) = 0$.
   — Soient v et v' deux vecteurs de F, et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   On a $f(\alpha v + v') = \alpha f(v) + f(v') = \alpha v + v'$, donc $\alpha v + v' \in F$.
   Alors F est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

2. On a $A = M_B(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Alors $\forall\ V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$V \in F \Rightarrow f(V) = V \Rightarrow AV = V \Rightarrow (A - I_3)V = (0)$$
$$\Rightarrow \left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, alors $x = y = z$, alors $V \in Vect(w = (1, 1, 1))$.

Ensuite, $F = Vect(w = (1, 1, 1))$ et (w) est une base de F car $w \neq 0$, et alors $dim(F) = 1$.

3. On doit trouver 2 sous-espaces G et H tels que $F \oplus G = \mathbb{R}^3 = F \oplus H$ avec $G \neq H$. On remarque que G et H sont de dimension 2 chacun.

   En utilisons la méthode d'échelonnement on obtient $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & w \\ 0 & 1 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 1 & e_3 \end{array}\right)$. Donc on peut prendre $G = Vect(e_2, e_3)$.
   Comme $F \oplus H = \mathbb{R}^3$, alors on doit choisir 2 vecteurs u et v tels que (w, u, v) forme une base pour $\mathbb{R}^3$.
   On considère $u = (1, -1, 1)$, $v = (1, 2, -1)$ et $H = Vect(u, v)$.
   On a :
   — $det(w, u, v) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ donc (w, u, v) est vraiment une base de $\mathbb{R}^3$
   i.e. H est un supplément de F dans $\mathbb{R}^3$.
   — $H \neq G$, car $u \in H - G$. Notons qu'un élément $\omega \in G$ est forcément de la forme $\alpha e_2 + \beta e_3 = (0, \alpha, \beta)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4. On a $|A| = |M_C(f)| = \left|\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\right| = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left|\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\right| = 1 \neq 0$,
   donc A est inversible et f est un automorphisme.
   On a $M_C(f^{-1}) = (M_C(f))^{-1} = A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Com(A))^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = A$
   i.e. $f = f^{-1}$!

Exercice 1 (25 pts) :

Soient E un K-e.v de dimension 4 et $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E.

On pose : $u_1 = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$, $u_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$,
$u_3 = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$ et $u_4 = 2e_1 + 3e_2 + 2e_4$.

Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

1) Déterminer le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4). Donner la dimension et une base de F.
2) Déterminer une équation cartésienne qui définit F.
3) Soit $G = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$.
   i. Donner une base de G et montrer que $F \cap G = \{0\}$.
   ii. En déduire que $E = F \oplus G$.
   iii. Décomposer le vecteur $e_1 + e_2$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exercice 2 (20 pts) :

Soit u l'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{cases} u(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3 \\ u(e_2) = e_2 \\ u(e_3) = -4e_1 + 2e_3 \end{cases}$$

$\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Ecrire la matrice de u relativement à la base $\mathcal{C}$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$ et une base de $\ker(u)$.
3. Calculer la dimension de $\ker(u) + \mathrm{Im}(u)$.
4. En déduire que $\mathbb{R}^3 = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 3 (10 pts) :

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Démontrer l'équivalence :

$$\ker(f) = \ker(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$$

Exercice 4 (25 pts) :

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice, dans la base canonique $B=(1,$ ...

$\mathbb{R}_2[X]$, est donnée par $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 4 & 1 & -2\\ 6 & 3 & -4\end{pmatrix}$.

1) Soit $P(X)=a+bX+cX^2\in\mathbb{R}_2[X]$. Calculer le polynôme $f(P)$.
2) On donne : $Q_1(X)=1+2X+3X^2$, $Q_2(X)=X+X^2$ et $Q_3(X)=1+2X^2$.
   Montrer que $B'=(Q_1,Q_2,Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3) Calculer $f(Q_1)$, $f(Q_2)$ et $f(Q_3)$ et donner la matrice A' de f dans B'. En déduire les ... propres de A et que f est ni injective, ni surjective.
4) Pour quelles valeurs du paramètre réel λ le système linéaire $(A-\lambda I_3)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ poss...

   des solutions non nulles ?
5) Calculer la matrice de $f\circ f+f$ dans la base B. En déduire que $f\circ f=-f$.

Exercice 5 (20 pts) :

Soient $C=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que :
$f(e_1)=\frac{1}{3}(-e_1+2e_2+2e_3)$, $f(e_2)=\frac{1}{3}(2e_1-e_2+2e_3)$ et $f(e_3)=\frac{1}{3}(2e_1+2e_2-e_3)$.
On considère l'ensemble $F=\{v\in\mathbb{R}^3; f(v)=v\}$.

1- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2- Déterminer une base et la dimension de F.
3- Déterminer dans $\mathbb{R}^3$ deux sous-espaces vectoriels différents, supplémentaires de F.
4- Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer son inverse f^{-1}.

Bon ...

Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 103

Durée : 2.5 heures

Année : 2011 - 2012

Examen : Final

Exercice 1 (15 points). On considère dans $\mathbb{R}^3$ les sous-espaces F, G et H définis par :
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x = 0, \; y = z\}$,
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; y = 0\}$,
$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z = 0\}$.

1. Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces F, G et H.
2. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \neq F \cap (G + H)$.

Exercice 2 (15 points). Soient F et G deux sous-espaces de $\mathbb{R}^5$ tels que $F = Vect(u_1, u_2)$ et $F = Vect(u_3, u_4)$ où :
$u_1 = (1, 0, -2, 0, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 4, 5, 0)$, $u_3 = (0, 1, -5, 2, 4)$ et $u_4 = (2, 1, -16, -1, \alpha)$ $\quad [\alpha \in \mathbb{R}]$.

1. Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel α, le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4).
2. Pour quelle valeur de α, la somme $F + G$ est directe ?

Exercice 3 (15 points). Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \; ; \; b = -a \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base pour F.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de M par rapport à B.

Exercice 4 (20 points). Soit $B = (1, X, X^2)$ la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$f(a + bX + cX^2) = (3a - b + c) + (4a - b + 2c)X + (-2a + b)X^2.$$

1. Écrire la matrice A de f par rapport à B.
2. Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces $Im(f)$ et $Ker(f)$.
3. Soit $g = f \circ f$. Écrire la matrice de g par rapport à B. Déduire que $g = f$.
4. On pose $h = f - id_{\mathbb{R}_2[X]}$. Donner la matrice de h par rapport à B.
5. Montrer que $Ker(h) \subset Im(f)$.
6. Déterminer la dimension de $Ker(f)$, et déduire que $Ker(h) = Im(f)$.

Exercice 5 (20 points). Soit E un k-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout $a \neq 1$, on considère l'endomorphisme f de E dont la matrice par rapport à B est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ une famille de vecteurs de E telle que :

$$\begin{cases} e'_1 &= a^2e_1 + ae_2 + e_3 \\ e'_2 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 &= 2e_1 + e_2 \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de a, f est un automorphisme ?
2. Montrer que B' est une base de E.
3. Calculer $f(e'_1)$, $f(e'_2)$ et $f(e'_3)$. Déduire la matrice de f par rapport à B'.
4. On pose $a = 4$. Déterminer, dans ce cas, l'automorphisme inverse f^{-1}.

Exercice 6 (15 points). On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ F et G tels que :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x = z\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x + z = 0,\ y = 0\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. Soit (v_1, v_2) une base de F et (v_3) une base de G. Montrer que $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. Écrire la matrice de s par rapport à B.
4. Soit p la projection sur F et parallèlement à G. Déterminer la matrice de p par rapport à B.

BON TRAVAIL

Exercice 1 .

1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x=0, \; y=z\} = \{(0,y,y) \; ; \; y \in \mathbb{R}\} = \{y(0,1,1) \; ; \; y \in \mathbb{R}\}$
   $= Vect\big(v_1 = (0,1,1)\big)$. Comme $v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, alors (v_1) est libre, alors $B_1 = (v_1)$ est une base de F et $dim(F) = 1$.
   $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; y = 0\} = \{(x,0,z) \; ; \; x, z \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,0) + z(0,0,1) \; ; \; x, z \in \mathbb{R}\}$
   $= Vect(e_1, e_3)$. Comme (e_1, e_3) est une partie d'une base (canonique), alors elle est libre, donc $B_2 = (e_1, e_3)$ est une base de G et $dim(G) = 1$.
   $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z = 0\} = \{(x,y,0) \; ; \; x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,0) + y(0,1,0) \; ; \; x, y \in \mathbb{R}\}$
   $= Vect(e_1, e_2)$. Comme (e_1, e_2) est une partie d'une base (canonique), alors elle est libre, donc $B_3 = (e_1, e_2)$ est une base de H et $dim(H) = 1$.
2. $F \cap G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x = 0, \; y = z, \; y = 0\} = \{(0,0,0)\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
   $F \cap H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x = 0, \; y = z, \; z = 0\} = \{(0,0,0)\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
   Alors $(F \cap G) + (F \cap H) = \{0_{\mathbb{R}^3}\} + \{0_{\mathbb{R}^3}\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
   $G + H = Vect(e_1, e_3) + Vect(e_1, e_2) = Vect(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$, car (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors $F \cap (G+H) = F \cap \mathbb{R}^3 = F$ parce que $F \subset \mathbb{R}^3$.
   Il en résulte que $(F \cap G) + (F \cap H) \subsetneq F \cap (G + H)$.

Exercice 2 .

1. On a

$$\left(\begin{array}{rrrrr|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & u_1 \\ -1 & 1 & 4 & 5 & 0 & u_2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 4 & u_3 \\ 2 & 1 & -16 & -1 & \alpha & u_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & u_1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 1 & u_1 + u_2 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & 3 & -u_1 - u_2 + u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 9 & -u_1 + u_2 - 2u_3 + u_4 \end{array}\right).$$

   Il est évident de voir que le rang de (u_1, u_2, u_3, u_4) dépend de la valeur de "$\alpha - 9$".
   Si $\alpha = 9$, alors $R_k(u_1, u_2, u_3, u_4) = 3$, et le rang est égal à 4 lorsque $\alpha \neq 9$.
2. On a $F + G = Vet(v_1, v_2)Vect(v_3, v_4) = Vect(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
   Comme (v_1, v_2) est libre, car $v_1 \neq \lambda v_2$, $\forall \, \lambda \in \mathbb{R}$, alors c'est une base de F. De même, (v_3, v_4) est une base de G.
   La somme $F + G$ est directe si et seulement si le rang de (v_1, v_2, v_3, v_4) est égal à leur cardinal 4. Ceci est équivaut à dire, d'après 1), que $\alpha \neq 9$.
   [Ceci vient du fait que : $F + G$ est directe $\Leftrightarrow dim(F + G) = dim(F) + dim(G)$].
   On peut aussi utiliser [$F + G$ est directe $\Leftrightarrow F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^5}\}$].

Exercice 3 .

1. On remarque facilement que

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \; ; \; b = -a \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ c & d \end{pmatrix} \; ; \; a, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

— On a : $\quad 0_{M_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$, alors $F \neq \emptyset$.

— Soient $\begin{pmatrix} a & -a \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & -a' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ 2 éléments de F, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

On a : $\quad \alpha \begin{pmatrix} a & -a \\ c & d \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & -a' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & -(\alpha a + \beta a') \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + \beta d' \end{pmatrix} \in F.$

Alors F est un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$.

3. $M_B(g) = M_B(f \circ f) = M_B(f) \times M_B(f) = A \times A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$. Alors $M_B(g) = M_B(f) \Leftrightarrow g = f$.

4. $M_B(h) = M_B(f - id_{\mathbb{R}_2[X]}) = M_B(f) - M_B(id_{\mathbb{R}_2[X]}) = M_B(f) - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Soit $q(X) \in \mathbb{R}_2[X]$.
$q(X) \in Ker(h) \Rightarrow h(q(X)) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Rightarrow f - id_{\mathbb{R}_2[X]}(q(X)) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Rightarrow f(q(X)) - q(X) = 0$
$\Rightarrow q(X) = f(q(X)) \in Im(f)$. Alors $Ker(h) \subset Im(f)$.

6. On a
$$dim(Im(h)) + dim(Ker(h)) = dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3,$$
alors il suffit de calculer $dim(Im(h)) = R_k(M_B(h))$.
On a $M_B(h) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Alors $R_k(M_B(h)) = 1$, donc $dim(Im(h)) = 1$, donc $dim(Ker(h)) = 2$.
Finalement, $Ker(h) \subset Im(f)$ et $dim(Ker(h)) = dim(Im(f)) = 2$, alors $Ker(h) = Im(f)$.

Exercice 5 .

1. f est un automorphisme $\Leftrightarrow$ f est un endomorphisme (donné) et bijective $\Leftrightarrow M_B(f) = M$ est inversible $\Leftrightarrow det(M) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$.

2. On a $Card(B') = 3 = dim(E)$, alors B' est base de $E \Leftrightarrow B'$ est libre $\Leftrightarrow det(e'_1, e'_2, e'_3) \neq 0$.
On a $det(e'_1, e'_2, e'_3) = \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(a-1)^2 \neq 0$ (car $a \neq 1$). Par suite B' est une base.

3. On a $Mat_B(f(\epsilon)) = M_B(f) \times Mat_B(\epsilon), \forall \epsilon \in E$.
$f(e'_1) = a^3 e_1 + a^2 e_2 + a e_3 = a(a^2 e_1 + a e_2 + e_3) = a e'_1$, $f(e'_1) = e_1 + e_2 + e_3 = e'_2$ et $f(e'_3) = 3e_1 + 2e_2 + e_3 = e'_2 + e'_3$.
Alors $M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $a = 4 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $a \neq 0$, alors f est un automorphisme et on a
$$M_B(f^{-1}) = \left(M_B(f)\right)^{-1} = M^{-1} = \frac{1}{|M|}\left(Com(M)\right)^T \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$
D'où, $\forall\ V = (a,b,c) \in E$, $f^{-1}(a,b,c) = \frac{1}{2}(2b, 2c, a - 4b + 5c)$.

Exercice 6 .

2. B est une base de F si et seulement si B est libre et $F = Vect(B)$ [i.e B est un système générateur de F].

— **Libre :** Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ telles que $\alpha\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Alors $\begin{pmatrix}\alpha & -\alpha\\ 2\alpha+3\beta & \alpha+\beta+\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Il est simple de trouver que $\alpha=\beta=\gamma=0$.

— **Sys. Gen. :** Soit $\begin{pmatrix}a & -a\\ c & d\end{pmatrix}\in F$. On va trouver $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{pmatrix}a & -a\\ c & d\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ceci revient à résoudre, en fonction de a, c et d, l'identification

$$\begin{pmatrix}\alpha & -\alpha\\ 2\alpha+3\beta & \alpha+\beta+\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -a\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Alors $\alpha = a$, $\quad \beta=\frac{1}{3}(-2a+c)\quad$ et $\quad \gamma=-\frac{1}{3}(a+c-3d)$.
Ensuite, B est un système générateur de F. D'où B est une base de F.

3. On utilise le résultat trouvé dans la partie **Sys. Gen.** appliqué à $M=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Ici $(a,c,d)=(2,3,4)$, donc les coordonnées de M par rapport à B sont $(\alpha,\beta,\gamma)=(2,-\frac{1}{3},\frac{7}{3})$.
[On peut aussi utiliser une autre méthode mais plus longue :
$Mat_B(M)=Pass_{B\longrightarrow C}\times Mat_C(M)$ où $C=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ est la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$].

Exercice 4 .

1. On a $f(1)=3+4X-2X^2$, $f(X)=-1-X+X^2$ et $f(X^2)=1+2X$.
Alors $A=M_B(f)=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 4 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

2. Comme $B=(1,X,X^2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, alors

$$Im(f)=Vect(f(1),f(X),f(X^2)).$$

On va trouver le rang de $M_B(f)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 4 & -1 & f(1)\\ -1 & -1 & 1 & f(X)\\ 1 & 1 & 0 & f(X^2)\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 4 & -2 & f(1):=q_1(X)\\ 0 & 1 & 1 & f(1)+3f(X):=q_2(X)\\ 0 & 0 & 0 & f(1)+2f(X)-f(X^2)\end{array}\right).$$

Comme $R_k\Big(f(1),f(X),f(X^2)\Big)=2$, alors $B_1=(q_1(X),q_2(X)$ est une base de $Im(f)$ et $dim(Im(f))=2$.
Maintenant, on utilise la formule du rang : $dim(Im(f))+dim(Ker(f))=dim(\mathbb{R}_2[X])=3$, donc $dim(Ker(f))=1$, donc tout élément (polynomial) non-nul de $Ker(f)$ constitue une base.
En revenant sur la matrice précédente, on a $f(1)+2f(X)-f(X^2)=0_{\mathbb{R}_2[X]}$, alors $f(1+2X-X^2)=0_{\mathbb{R}_2[X]}$, alors $1+2X-X^2\in Ker(f)-\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$.
Donc $B_2=(p(X)=1+2X-X^2)$ est une base de $Ker(f)$.

3. $M_B(g) = M_B(f\circ f) = M_B(f)\times M_B(f) = A\times A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$. Alors $M_B(g) = M_B(f) \Leftrightarrow g = f$.

4. $M_B(h) = M_B(f - id_{\mathbb{R}_2[X]}) = M_B(f) - M_B(id_{\mathbb{R}_2[X]}) = M_B(f) - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Soit $q(X)\in\mathbb{R}_2[X]$.
$q(X)\in Ker(h) \Rightarrow h(q(X)) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Rightarrow f - id_{\mathbb{R}_2[X]}(q(X)) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Rightarrow f(q(X)) - q(X) = 0$
$\Rightarrow q(X) = f(q(X)) \in Im(f)$. Alors $Ker(h)\subset Im(f)$.

6. On a
$$dim(Im(h)) + dim(Ker(h)) = dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3,$$
alors il suffit de calculer $dim(Im(h)) = R_k(M_B(h))$.
On a $M_B(h) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Alors $R_k(M_B(h)) = 1$, donc $dim(Im(h)) = 1$, donc $dim(Ker(h)) = 2$.
Finalement, $Ker(h)\subset Im(f)$ et $dim(Ker(h)) = dim(Im(f)) = 2$, alors $Ker(h) = Im(f)$.

Exercice 5 .

1. f est un automorphisme $\Leftrightarrow$ f est un endomorphisme (donné) et bijective $\Leftrightarrow M_B(f) = M$ est inversible $\Leftrightarrow det(M)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0$.

2. On a $Card(B') = 3 = dim(E)$, alors B' est base de $E \Leftrightarrow B'$ est libre $\Leftrightarrow det(e'_1, e'_2, e'_3)\neq 0$.
On a $det(e'_1, e'_2, e'_3) = \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(a-1)^2 \neq 0$ (car $a\neq 1$). Par suite B' est une base.

3. On a $Mat_B(f(\epsilon)) = M_B(f)\times Mat_B(\epsilon)$, $\forall\, \epsilon\in E$.
$f(e'_1) = a^3e_1 + a^2e_2 + ae_3 = a(a^2e_1 + ae_2 + e_3) = ae'_1$, $f(e'_1) = e_1 + e_2 + e_3 = e'_2$ et $f(e'_3) = 3e_1 + 2e_2 + e_3 = e'_2 + e'_3$.
Alors $M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $a = 4 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $a\neq 0$, alors f est un automorphisme et on a
$$M_B(f^{-1}) = \left(M_B(f)\right)^{-1} = M^{-1} = \frac{1}{|M|}\left(Com(M)\right)^T \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$
D'où, $\forall\, V = (a,b,c)\in E$, $f^{-1}(a,b,c) = \frac{1}{2}(2b, 2c, a-4b+5c)$.

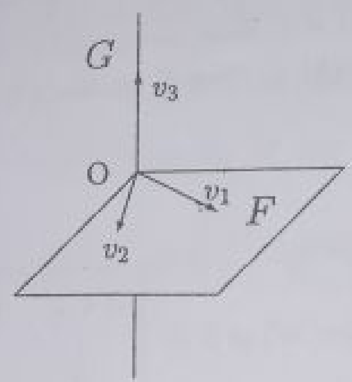
Exercice 6 .

1. $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,;\, x=z\}=\{(x,y,x)\,;\, x,y\in\mathbb{R}\}=\{x(1,0,1)+y(0,1,0)\,;\, x,y\in\mathbb{R}\}$
$=Vect(v=e_1+e_3,e_2)$.
Comme v_1 et e_2 ne sont pas colinéaires i.e. $\nexists\,\lambda\in\mathbb{R}$, tel que $v_1\neq e_2$, alors (v_1,e_2) est libre et alors $B_1=(v_1,e_2)$ est une base de F.
$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\, x+z=0,\ y=0\}=\{(x,0,-x)\,;\, x\in\mathbb{R}\}=\{x(1,0,-1)\,;\, x\in\mathbb{R}\}$
$=Vect(w=e_1-e_3)$. Comme $w\neq 0_{\mathbb{R}^3}$, alors (w) est libre, et $B_2=(w)$ est base de G.
$F\oplus G=\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow B_1\cup B_2=\{v,e_2,w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Comme $dim(\mathbb{R}^3)=3=Card(v,e_2,w)$, alors F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si (v,e_2,w) est libre i.e. $det(v,e_2,w)\neq 0$.

On a $det(v,e_2,w)=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=-2\neq 0$. Alors $F\oplus G=\mathbb{R}^3$.

2. Une question générale!
Comme $card(B)=dim(\mathbb{R}^3)=3$, alors il suffit de montrer que B est libre. Soient α,β et $\gamma\in\mathbb{R}$ telles que $\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0_{\mathbb{R}^3}$, alors $\alpha v_1+\beta v_2=-\gamma v_3\in F\cap G=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, alors $\alpha v_1+\beta v_2=0$ et $\gamma v_3=0$, mais (v_1,v_2) est libre (base de F), alors $\alpha=\beta=0$. De même $\gamma=0$,. Il en résulte que B est libre.

3. <u>Réfléchir géométriquement!</u>



On remarque que $s(v_1)=v_1$, $s(v_2)=v_2$ et $s(v_3)=-v_3$.
Alors $M_B(s)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

4. Maintenant, pour déterminer $M_B(p)$ on peut utiliser une des deux méthodes suivantes.
<u>1ère méthode :</u> On continue avec la géométrie; on obtient $p(v_1)=v_1$, $p(v_2)=v_2$ et $p(v_3)=0_{\mathbb{R}^3}$.
Alors $M_B(p)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.
<u>2ème méthode :</u> on a la formule $s=2p-id_{\mathbb{R}^3}$, alors $p=\frac{1}{2}(s+id_{\mathbb{R}^3})$, alors
$M_B(p)=\frac{1}{2}\Big(M_B(s)+M_B(id)\Big)=\frac{1}{2}\Big(M_B(s)+I_3\Big)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$
$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(1.) Math 103 11_12 Dr. Samir Farah

Ex 1 a) $(x,y,z) \in F \Leftrightarrow x=0$ et $y=z$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (0,y,y) = y(0,1,1)$

Donc $\{(0,1,1)\}$ est une base de F et $\dim_{\mathbb{R}}(F) = 1$.

$(x,y,z) \in G \Leftrightarrow y = 0$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (x,0,z) = x\underbrace{(1,0,0)}_{e_1} + z\underbrace{(0,0,1)}_{e_3}$

Donc $\{e_1, e_3\}$ est une base de G et $\dim_{\mathbb{R}}(G) = 2$.

$(x,y,z) \in H \Leftrightarrow z = 0$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (x,y,0) = x\underbrace{(1,0,0)}_{e_1} + y\underbrace{(0,1,0)}_{e_2}$

Donc $\{e_1, e_2\}$ est une base de H et $\dim_{\mathbb{R}}(H) = 2$.

b) $(x,y,z) \in F \cap G \Leftrightarrow (x,y,z) \in F$ et $(x,y,z) \in G$

$\Leftrightarrow x = 0, y = z$ et $y = 0$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$.

Donc $F \cap G = \{(0,0,0)\}$.

De même $F \cap H = \{(0,0,0)\}$.

Donc $(F \cap G) + (F \cap H) = \{(0,0,0)\}$.

D'autre part, $G + H = Vect(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$

Donc $F \cap (G+H) = F \cap \mathbb{R}^3 = F$.

Par suite $(F \cap G) + (F \cap H) \neq F \cap (G+H)$.

Ex 2 Par échelonnement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -16 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -12 & -1 & \alpha-2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -6 & \alpha-3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-9 \end{pmatrix}$$

Si $\alpha-9\neq 0$ $(\alpha\neq 9)$, alors $rg(u_1,u_2,u_3,u_4)=4$

si $\alpha=9$, $rg(u_1,u_2,u_3,u_4)=3$.

2) $F+G=\text{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$

Si (u_1,u_2,u_3,u_4) est libre ($\alpha\neq 9$), alors (u_1,u_2,u_3,u_4) est une base de $F+G$ et $\dim_{\mathbb{R}}(F+G)=4$.

Or $\dim_{\mathbb{R}}(F)=2$ puisque (u_1,u_2) libre,

et $\dim_{\mathbb{R}}(G)=2$ " (u_3,u_4) libre

et $\dim_{\mathbb{R}}(F+G)=\dim_{\mathbb{R}}(F)+\dim_{\mathbb{R}}(G)-\dim_{\mathbb{R}}(F\cap G)$

Donc $\dim(F\cap G)=0$ et $F\cap G=\{0\}$.

Par suite ~~la~~ somme $F+G$ est directe

Si $\alpha=9$, $F\cap G\neq\{0\}$, donc $F+G$ n'est pas directe

Ex3 $F=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}) \,/\, b=-a\right\}$.

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in F$

Si $\begin{pmatrix} a & -a\\ c & d\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & -a'\\ c' & d'\end{pmatrix}\in F$, alors

$$\begin{pmatrix} a & -a\\ c & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a' & -a'\\ c' & d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+a' & -(a+a')\\ c+c' & d+d'\end{pmatrix}\in F$$

Si $\begin{pmatrix} a & -a\\ c & d\end{pmatrix}\in F$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, alors $\alpha\begin{pmatrix} a & -a\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a & -\alpha a\\ \alpha c & \alpha d\end{pmatrix}\in F$.

D'où F est un sev de $M_2(\mathbb{R})$.

2) Montrons d'abord que $\dim(F)=3$.

Soit $\begin{pmatrix} a & -a\\ c & d\end{pmatrix}\in F$. Alors $\begin{pmatrix} a & -a\\ c & d\end{pmatrix}=a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{E_1}+c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{E_2}+d\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{E_3}$

Donc (E_1,E_2,E_3) est une famille génératrice de F.

Cette famille est libre. En effet :

Soit $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ / $\alpha\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=0$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=0$$

Comme $\text{Card}(B)=3$, il suffit de démontrer que B est libre

Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ / $\alpha\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ 2\alpha+3\beta & \alpha+\beta+\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha+3\beta = 0 \\ \alpha+\beta+\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

On en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de F.

3) $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in F$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ 2\alpha+3\beta = 3 \\ \alpha+\beta+\gamma = 4 \end{cases} \Rightarrow \left(\alpha = 2,\ \beta = -\tfrac{1}{3} \text{ et } \gamma = \tfrac{7}{3}\right).$$

Ex 4 $f(a+bX+cX^2) = (3a-b+c)+(4a-b+2c)X+(-2a+b)X^2$.

1) $f(1) = 3+4X-2X^2$, $f(X) = -1-X+X^2$ et $f(X^2) = 1+2X$

Donc $A = \underset{\mathcal{B}}{M}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2))$.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} f(X^2) \\ f(X) \\ f(1) \end{array} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} f(X^2) \\ f(X)+f(X^2) \\ f(1)-3f(X^2) \end{array} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} f(X^2) \\ f(X)+f(X^2) \\ f(1)+2f(X)-f(X^2). \end{array} \end{array}$$

Donc $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$

et Une base de $\mathrm{Im} f$ est $(1+2X, X+X^2)$.

Th. du rang $\Rightarrow \dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker} f)$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker} f) = 3-2 = 1$.

D'après la ligne nulle de la matrice échelonnée :

$f(1)+2f(X)-f(X^2) = 0 \Rightarrow f(1+2X-X^2) = 0$ f lin.

$\Rightarrow 1+2X-X^2 \in \mathrm{Ker} f$.

D'où $\{1+2X-X^2\}$ est une base de $\mathrm{Ker} f$.

3) $g = f \circ f \Rightarrow M_B(g) = M_B(f) \cdot M_B(f) = A^2 = \dots = A = M_B(f)$

$\Rightarrow g = f$.

4) $h = f - id \Rightarrow M_B(h) = M_B(f) - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5) $a + bX + cX^2 \in \operatorname{Ker} h \iff h(a + bX + cX^2) = 0$

$\iff f(a+bX+cX^2) - (a+bX+cX^2) = 0$

$\iff (2a - b + c) + (4a - 2b + 2c)X + (-2a + b - c)X^2 = 0$

$\iff c = -2a + b$.

Donc $a + bX + cX^2 = a + bX + (-2a+b)X^2$

$= a\underbrace{(1 - 2X^2)}_{P_1} + b\underbrace{(X + X^2)}_{P_2}$

Il est clair que (P_1, P_2) est libre donc c'est une base de $\operatorname{Ker}(h)$.

$\operatorname{Ker}(h) = \operatorname{Vect}(1 - 2X^2, X + X^2)$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(1 + 2X, X + X^2)$

$X + X^2 \in \operatorname{Im} f$ et $1 - 2X^2 = 1 + 2X - 2(X + X^2) \in \operatorname{Im} f$

Donc $\operatorname{Ker}(h) \subset \operatorname{Im}(f)$.

6) $\dim(\operatorname{Ker} h) = 2$ car (P_1, P_2) est une base de $\operatorname{Ker}(h)$

$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Im} f \\ \dim(\operatorname{Ker} h) = \dim(\operatorname{Im} f) \end{array}\right| \Longrightarrow \operatorname{Ker} h = \operatorname{Im} f$

Ex 5 1) f autom. de $E \iff M$ inv $\iff \det(M) \neq 0 \iff a \neq 0$

2) $\dim(E) = 3 = \operatorname{card}(B')$, il suffit donc de dém. que B' est libre.

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ / $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0$

$\iff (\alpha a^2 + \beta + 2\gamma)e_1 + (\alpha a + \beta + \gamma)e_2 + (\alpha + \beta)e_3 = 0$

$\iff \begin{cases} \alpha a^2 + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha a + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$ puisque (e_1, e_2, e_3) libre.

$\iff \begin{cases} -(a-1)^2 \beta = 0 \\ \gamma = \beta(a-1) \\ \alpha = -\beta \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0 \quad (a \neq 1)$.

3) $f(e'_1) = a^2 f(e_1) + a f(e_2) + f(e_3)$

$= a^2[(a+2)e_1 + e_2] + a[-2(2a+1)e_1 + e_3] + a e_1$

$= a e'_1$.

⑤

De m̃ $f(e'_2) = f(e_1)+f(e_2)+f(e_3) = e'_2$

$f(e'_3) = 2f(e_1)+f(e_2) = e'_2+e'_3$.

Donc $\underset{B'}{M}(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $a=2$ donc f est un autom. (f inversible).

et $\underset{B'}{M}(f^{-1}) = \left(\underset{B'}{M}(f)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $f^{-1}(xe'_1+ye'_2+ze'_3) = \frac{1}{2}xe'_1+(y-z)e'_2+ze'_3$.

Ex 6

1) $(x,y,z) \in F \iff (x,y,z) = (x,y,x) = x(1,0,1)+y(0,1,0)$

donc $\dim(F) = 2$. De m̃ $\dim(G) = 1$

$(x,y,z) \in F\cap G \iff x = z$ et $x+z = 0$ et $y = 0$

$\iff x = y = z = 0$. Donc $F\cap G = \{0\}$

$\left.\begin{array}{l} \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(F)+\dim(G) \\ F\cap G = \{0\} \end{array}\right| \Rightarrow \mathbb{R}^3 = F\oplus G$.

2) $\left.\begin{array}{l} (v_1,v_2) \text{ base de } F \\ (v_3) \text{ base de } G \end{array}\right| \Rightarrow (v_1,v_2,v_3)$ base de $\overbrace{F+G}^{\mathbb{R}^3}$ puisque cette somme est directe

3). $s(v_1) = v_1$, $s(v_2) = v_2$ car $v_1, v_2 \in F$.

$s(v_3) = -v_3$ car $v_3 \in G$.

Donc $\underset{B}{M}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4) $p(v_1) = v_1$ et $p(v_2) = v_2$ puisque $v_1, v_2 \in F$

$p(v_3) = 0$ puisque $v_3 \in G$.

Donc $\underset{B}{M}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DES SCIENCES
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 103
Session : final

Année : 2010-2011
Durée : 2 heures

I- On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ où $J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1- Calculer J^3 et J^4. En déduire J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > 4$.
2- Développer algébriquement l'expression $(I_4 + J)(I_4 - J + J^2 - J^3)$.
3- En déduire que la matrice $(I_4 + J)$ est inversible et expliciter son inverse.

II- Considérons le système : $(S)\begin{cases} x - y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y + 2z = c \end{cases}$

1- Montrer que (S) est un système de Cramer
2- Déduire par la méthode de déterminant la solution de (S)
3- Déduire A^{-1} où A est la matrice associée à (S).

III- Considérons le système suivant de paramètre <u>complexe</u> m :

$$\begin{cases} -x + my - z = 1 \\ mx + y - mz = -1 \\ mx - m^2 y + z = 0 \end{cases} \quad \text{où } m \in \mathbb{C}.$$

1- Déterminer la matrice associée au système et calculer son déterminent.
2- Discuter selon les valeurs de m la nature et l'ensemble de solutions du système (en utilisant la méthode de déterminant).

IV- Considérons le polynôme complexe :

$$P(X) = X^4 - (1+3i)X^3 + 3(i-1)X^2 + (i+3)X - i$$

1- Montrer que i est une racine de P(X) et déterminer sa multiplicité
2- Donner le développement de la formule de Taylor de P(X) en 1.
3- Déduire la factorisation de P(X) dans $\mathbb{C}[X]$.

V- Montrer les polynômes $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ de degré 2 tels que $P'(X)$ (la dérivé de P(X)) divise P(X) sont de la forme : $P(X) = \lambda(X-a)^2$, où $\lambda, a \in \mathbb{C}$.

Barème : I- 20 ; II- 20 ; III- 30 ; IV- 20 ; V- 10.

Solution de L'examen final Math 101 2010-2011
Par Dr. Ziad Mawlawi

<u>Exercice I</u>: 1) On a : $J^3 = J^2.J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^4 = J^2.\ J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > 4$, alors $k - 4 \in \mathbb{N}^*$, comme $J^k = (J^4.\ J^{k-4}) = (O.\ J^{k-4}) = 0$
on peut déduire que tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > 4$, $J^k = O$.

2) $(I_4 + J)(I_4 - J + J^2 - J^3) = I_4 - J + J^2 - J^3 + \cancel{J} - \cancel{J^2} + \cancel{J^3} - J^4 = I_4$

3) La relation $(I_4 + J).(I_4 - J + J^2 - J^3) = I_4$ montre que $(I_4 + J)$ est inversible et son inverse est $(I_4 - J + J^2 - J^3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Exercice II :</u> 1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Le système (S) s'écrit : $A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$,

comme $|A| = 3 \neq 0$, alors (S) est un système de Cramer

2) $\Delta_x = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ b & 2 & 1 \\ c & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(a+b-c)$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 2 \end{vmatrix} = -a+b$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = -a-2b+3c$

Donc $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = a+b-c$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{-a+b}{3}$ et $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{-a-2b+3c}{3}$

3) Comme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$

4^{ieme} cas : $m = -i$

On considère le système $(S_{-i})\begin{cases} -x - iy - z = 1 \\ -ix + y + iz = -1 \\ -ix + y + z = 0 \end{cases}$

Soit $M_{-i} = \begin{pmatrix} -1 & -i & -1 \\ -i & 1 & i \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a : rg $M_{-i} = 2$ .Comme $\begin{vmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, On prend y et z comme variables principales . Le determinant caracteristique est

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2-2i \neq 0$. Donc on n'a pas une solution.

<u>Exercice VI</u> : 1) $P(i) = 0 \Rightarrow$ i est une racine de $P(X)$

$P'(X) = 4X^3 - 3(1+3i)X^2 + 6(i-1)X + i+3 \quad \Rightarrow P'(i) = 0$

$P''(X) = 12X^2 - 6(1+3i)X + 6(i-1) \quad \Rightarrow P''(i) = 0$

$P'''(X) = 24X - 6(1+3i) \quad \Rightarrow P'''(i) = 6(i-1) \neq 0$

Il résulte que i est une racine de $P(X)$ d'ordre de multiplicité 3

2) $P(1) = 0$, $P'(1) = -2(1+i)$, $P''(1) = -12i$, $P'''(1) = 18(1-i)$, $P''''(1) = 24$

D'où

$$P(X) = P(1) + \frac{(X-1)}{1!}P'(1) + \frac{(X-1)^2}{2!}P''(1) + \frac{(X-1)^3}{3!}P'''(1) + \frac{(X-1)^4}{4!}P''''(1)$$

$$= -2(1+i)(X-1) - 6i(X-1)^2 + 3(1-i)(X-1)^3 + (X-1)^4$$

3) $P(X)$ étant un polynôme divisible par $(X-1)$ et $(X-i)^3$ donc par leur produit $(X-1)(X-i)^3$, étant de plus unitaire et de degré 4 donc $P(X) = (X-1)(X-i)^3$

<u>Exercice V :</u> $P(X)$ étant un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré 2 alors il s'écrit :

$P(X) = \alpha(X-a)(X-b)$ où $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $a, b \in \mathbb{C}$.

D'où $P'(X) = \alpha[(X-a)+(X-b)] = \alpha[2X-a-b] = 2\alpha[(X - \frac{a+b}{2})]$

$P'(X)$ divise $P(X) \Rightarrow (X - \frac{a+b}{2}) = (X-a)$ ou $(X - \frac{a+b}{2}) = (X-b) \Rightarrow a = b$

$\Rightarrow P(X) = \alpha(X-a)^2$

1. i est une racine de $P \iff P(i)=0$

$P(i) = i^4 - 3i^4 - i^2 - 3i^2 - 2 = -2i^4 - 4i^2 - 2 = \dots$

$\cdot\ P'(X) = 4X^3 - 9iX^2 - 2X - 3i \Rightarrow P'(i) = 4i^3 - 9i^3 - 2i - 3i = -5i^3 - 5i = 5i - 5i = 0$

$\cdot\ \boxed{P''(X) = 12X^2 - 18iX - 2} \Rightarrow P''(i) = 12i^2 - 18i^2 - 2 = -6i^2 - 2 = 6 - 2 = \boxed{4} \neq 0$

Alors i est d'ordre de multiplicité 2.

2. $P(X) = P(-i) + \frac{P'(-i)}{1!}(X+i) + \frac{P''(-i)}{2!}(X+i)^2 + \frac{P'''(-i)}{3!}(X+i)^3 + \frac{P^{(4)}(-i)}{4!}(X+i)^4$.

$P(-i) = (-i)^4 - 3i(-i)^3 - (-i)^2 - 3i(-i) - 2 = i^4 + 3i^4 - i^2 + 3i^2 - 2 = 4i^4 + 2i^2 - 2 = 4 - 2 - 2 = \boxed{0}$

$P'(-i) = 4(-i)^3 - 9i(-i)^2 - 2(-i) - 3i = 4i + 9i + 2i - 3i = \boxed{12i}$

$P''(-i) = 12(-i)^2 - 18i(-i) - 2 = -12 - 18 - 2 = \boxed{-32}$

$\boxed{P'''(X) = 24X - 18i} \Rightarrow P'''(-i) = 24(-i) - 18i = \boxed{-42i}$

$\boxed{P^{(4)}(X) = 24} \Rightarrow P^{(4)}(-i) = \boxed{24}$

Alors $P(X) = 12i(X+i) - 16(X+i)^2 - 7i(X+i)^3 + (X+i)^4$.

3. $1^{ère}$ méthode : On a i une racine double et $-i$ une racine simple
Alors $P(X)$, qui est unitaire (le coefficient de X^4 est 1), peut être écrit
$P(X) = (X-i)^2(X+i)(X-\alpha)$ on fait ensuite un développement puis on identifie les 2 écritures.

$2^{ème}$ méthode : On profite de la formule de Taylor appliquée maintenant sur la racine $X = i$.

Donc $P(X) = P(i) + \frac{P'(i)}{1!}(X-i) + \frac{P''(i)}{2!}(X-i)^2 + \frac{P'''(i)}{3!}(X-i)^3 + \frac{P^{(4)}(i)}{4!}(X-i)^4$

On a $P(i) = P'(i) = 0$; $P''(i) = \boxed{4}$, $P'''(i) = 24i - 18i = \boxed{6i}$ et $P^{(4)}(i) = \boxed{24}$

Ensuite $P(X) = 2(X-i)^2 + i(X-i)^3 + (X-i)^4$

$= (X-i)^2\left[2 + i(X-i) + (X-i)^2\right] = (X-i)^2\left(X^2 - 2iX - 1 + iX + \dots\right.$

$= (X-i)^2(X^2 - iX + 2)$

$= \boxed{(X-i)^2(X+i)(X-2i)}$

$X^2 - iX + 2 = 0$

$\Delta = (-i)^2 - 4\times1\times2$
$= -1 - 8 = -9$
$= (3i)^2$

Alors $X_1 = \frac{i - 3i}{2} = -i$

$X_2 = \frac{i + 3i}{2} = 2i$

$X^2 - iX + 2 = (X+i)(X-2i)$

1. i est une racine de $P \iff P(i)=0$.

$P(i) = i^4 - 3i^4 - i^2 - 3i^2 - 2 = -2i^4 - 4i^2 - 2 = -2 + 4 - 2 = \boxed{0}$

$\boxed{P'(X) = 4X^3 - 9iX^2 - 2X - 3i} \Rightarrow P'(i) = 4i^3 - 9i^3 - 2i - 3i = -5i^3 - 5i$

$\boxed{P''(X) = 12X^2 - 18iX - 2} \Rightarrow P''(i) = 12i^2 - 18i^2 - 2 = -6i^2 - 2 = 6 - 2 = \boxed{4} \neq 0$

Alors i est d'ordre de multiplicité (2).

2. $P(X) = P(-i) + \frac{P'(-i)}{1!}(X+i) + \frac{P''(-i)}{2!}(X+i)^2 + \frac{P'''(-i)}{3!}(X+i)^3 + \frac{P^{(4)}(-i)}{4!}(X+i)^4.$

$P(-i) = (-i)^4 - 3i(-i)^3 - (-i)^2 - 3i(-i) - 2 = i^4 + 3i^4 - i^2 + 3i^2 - 2 = 4i^4 + 2i^2 - 2$
$= 4 - 2 - 2 = \boxed{0}$

$P'(-i) = 4(-i)^3 - 9i(-i)^2 - 2(-i) - 3i = 4i + 9i + 2i - 3i = \boxed{12i}$

$P''(-i) = 12(-i)^2 - 18i(-i) - 2 = -12 - 18 - 2 = \boxed{-32}$

$\boxed{P'''(X) = 24X - 18i} \Rightarrow P'''(-i) = 24(-i) - 18i = \boxed{-42i}$

$\boxed{P^{(4)}(X) = 24} \Rightarrow P^{(4)}(-i) = \boxed{24}$

Alors $P(X) = 12i(X+i) - 16(X+i)^2 - 7i(X+i)^3 + (X+i)^4.$

3. 1ère méthode : On a i une racine double et $-i$ une racine simple.
Alors $P(X)$, qui est unitaire (le coefficient de X^4 est 1), peut être écrit
$P(X) = (X-i)^2(X+i)(X-\alpha)$ on fait ensuite un développement puis on identifie les 2 écritures.

2ème méthode : On profite de la formule de Taylor appliquée maintenant sur la racine $x = i$.

Donc $P(X) = P(i) + \frac{P'(i)}{1!}(X-i) + \frac{P''(i)}{2!}(X-i)^2 + \frac{P'''(i)}{3!}(X-i)^3 + \frac{P^{(4)}(i)}{4!}(X-i)^4$

On a $P(i) = P'(i) = 0$, $P''(i) = \boxed{4}$, $P'''(i) = 24i - 18i = \boxed{6i}$ et $P^{(4)}(i) = \boxed{24}$

Ensuite $P(X) = 2(X-i)^2 + i(X-i)^3 + (X-i)^4$

$= (X-i)^2[2 + i(X-i) + (X-i)^2] = (X-i)^2(X^2 - 2iX - 1 + iX + 1$

$= (X-i)^2(X^2 - iX + 2)$

$= \boxed{(X-i)^2(X+i)(X-2i)}$

$X^2 - iX + 2 = 0$

$\Delta = (-i)^2 - 4\times1\times2$
$= -1 - 8 = -9$
$= (3i)^2$

Alors $X_1 = \frac{i-3i}{2} = -i$

$X_2 = \frac{i+3i}{2} = 2i$

Alors $X^2 - iX + 2 = (X+i)(X-2i)$.

Si $x \in \mathbb{R}$, $a_0, \dots, a_n$

$$|A - xI_n| = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1}-x \end{vmatrix} = \Delta_n$$

Méthode: Par récurrence sur n

Si $n=2$, alors $|A - xI_2| = \begin{vmatrix} -x & a_0 \\ 1 & a_1 - x \end{vmatrix} = \boxed{-a_0 - a_1x + x^2}$

Si $n=3$, alors $|A - xI_3| = \begin{vmatrix} -x & 0 & a_0 \\ 1 & -x & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 - x \end{vmatrix} = \boxed{a_0 + a_1x + a_2x^2 - x^3}$

Si $n=4$, alors $|A - xI_4| = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & -x & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -x & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 - x \end{vmatrix} = \boxed{-a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3 + x^4}$

On peut remarquer que $\Delta_2 = (-1)^{2-1}(a_0 + a_1x - x^2)$

$\Delta_3 = (-1)^{3-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 - x^3)$

$\Delta_4 = (-1)^{4-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 - x^4)$

Donc on suppose que cette égalité est vraie jusqu'à l'ordre n i.e. $\forall 2 \le k \le n$

On a $\Delta_k = (-1)^{k+1}(a_0 + a_1x + \dots + a_{k-1}x^{k-1} - x^k)$

Montrons cette égalité à l'ordre $n+1$ i.e. On va montrer que $\Delta_{n+1} = (-1)^n(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n - x^{n+1})$

$$\Delta_{n+1} = |A - xI_{n+1}| = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -x & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 1 & -x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n - x \end{vmatrix} \underset{\text{sur la 1ère ligne}}{\overset{\text{en dév}}{=}} (-x)\begin{vmatrix} -x & \cdots & a_1 \\ 1 & \ddots & a_2 \\ 0 & & \vdots \\ 0 & \cdots 0 \; 1 & a_n - x \end{vmatrix} + (-1)^{n+2}a_0 \begin{vmatrix} 1 & -x & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix}$$

On applique l'hyp. de récurrence mais en faisant attention sur les indices des a_i ; la position de a_0 est $A_{1,n+1}$; triangulaire supérieure

$(-1)^{n+2} = (-1)^2(-1)^n = (-1)^n$

$= (-x)\cdot(-1)^{n-1}(a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1} - x^n) + (-1)^n a_0$

$= (-1)^n(a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n - x^{n+1}) + (-1)^n a_0$

$= (-1)^n(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n - x^{n+1})$ cqfd.

Méthode:

$$\Delta_n = |A - xI_n| = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -x & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 1 & -x & 0 & a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} - x \end{vmatrix} \underset{\substack{L_i \leftarrow L_i + xL_{i+1} \\ 1 \le i \le n-1}}{\overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + xL_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + xL_3 \\ \vdots}}{=}} \begin{vmatrix} 0 & -x^2 & 0 & \cdots & 0 & a_0 + a_1x \\ 1 & 0 & -x^2 & \cdots & 0 & a_1 + a_2x \\ 0 & 1 & 0 & -x^2 \cdots & 0 & a_2 + a_3x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \; -x^2 & 0 & a_3 + a_4x \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 \; 0 & -x^2 & a_{n-3} + a_{n-2}x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \; 1 & 0 & a_{n-2} + a_{n-1}x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \; 0 & 1 & a_{n-1} - x \end{vmatrix}$$

Méthode directe :

$$\Delta_n = |A - xI_n| = \begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -x & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & a_2 \\ \vdots & & \ddots & -x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1}-x \end{vmatrix}$$

En développant suivant la dernière colonne

$$= (-1)^{n+1} a_0 \begin{vmatrix} 1 & -x & & 0 \\ 0 & 1 & -x & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+2} a_1 \begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -x & \\ & & \ddots & -x \\ & 0 & & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+3} a_2 \begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ & 0 & & \ddots \ -x \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{n+4} a_3 \begin{vmatrix} -x & 0 & & \\ & -x & 0 & \\ & & -x & 0 \\ & & 1 & -x \\ & 0 & & \ddots \ -x \\ & & & 1 \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+n-1} a_{n-2} \begin{vmatrix} -x & & \\ & -x & \\ & 0 & \ddots \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$+ (-1)^{n+n} (a_{n-1} - x) \begin{vmatrix} -x & & \\ & -x & \\ 0 & & \ddots \ -x \end{vmatrix}_{n-1}$$

$(-1)^{n+n-1} \times (-1)^{n-2} = (-1)^{\dots}$

$(-1)^{n+n} \cdot (-1)^{n-1}$

$(n+1)+2(n-2)$

$$= (-1)^{n+1} a_0 + (-1)^{n+3} a_1 x + (-1)^{n+5} a_2 x^2 + (-1)^{n+7} a_3 x^3 + \cdots + (-1)^{(n+1)+2(n-2)} a_{n-2} x^{n-2} + (-1)^{\dots} a_{n-1} \dots$$

$$(-1)^{n+1} a_0 + (-1)^{n+1} a_1 x + (-1)^{n+1} a_2 x^2 + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n-2} x^{n-2} + (-1)^{n+1} a_{n-1} x^{n-1} +$$

$(-1)^{n+1} \cdot (-1) \cdot x^n$

$$\boxed{= (-1)^{n+1} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} - x^n \right)}$$

F) <u>Exercice V Final 2010-2011</u> : Mq les polynômes $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ de degré 2 tq $P' | P$ sont de la forme $P(X) = \lambda (X-a)^2$ où $\lambda, a \in \mathbb{C}$.

Rq La question est identique à : On donne $P(X) \in \mathbb{C}[X]$. Montrer l'équivalence

$$\deg(P) = 2 \ \& \ P' | P \iff \exists \lambda, a \in \mathbb{C} \text{ tq } P(X) = \lambda (X-a)^2.$$

$\Leftarrow$ $P'(X) = 2\lambda (X-a)^{2-1} \times (X-a)' = 2\lambda(X-a)$

On a $P(X) = 2\lambda(X-a) \times \frac{1}{2}(X-a) = P'(X)\left[\frac{1}{2}(X-a)\right]$

Alors $P' | P$ et c'est clair que $\deg(P) = 2$

$\Rightarrow$ $\deg(P) = 2 \Rightarrow \exists \lambda, b, c \in \mathbb{C}$ tq $P(X) = \lambda (X-b)(X-c)$

(Réfléchir à un trinôme du second degré)

$P(X) = \lambda(X^2 - (b+c)X + bc) \Rightarrow P'(X) = \lambda(2X - (b+c))$

$= 2\lambda\left(X - \frac{b+c}{2}\right)$

On a $P' | P$ et $\left(X - \frac{b+c}{2}\right) | P'$ alors $\left(X - \frac{b+c}{2}\right) | P$. Mais $\left(X - \frac{b+c}{2}\right)$ est <u>unitaire</u> alors il s'identifie à $X-b$ <u>ou bien</u> $X-c$

$\begin{cases} X - \frac{b+c}{2} = X - b \\ \text{ou} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b+c}{2} = b \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c = 2b \\ \text{ou} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dots \\ \text{ou} \end{cases}$

Faculté des Sciences ...NAISE

section3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 103
Durée : 2H

Année : 2010-2011
Examen : Final

Exercice 1 (30 pts)

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$f(x,y,z) = (-x+y, x-y, -x+z, -y+z)$$

1) Montrer que f est linéaire.
2) Soient $B = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Ecrire la matrice de f dans les bases B et B'.
3) Montrer que la famille $(e_1, e_2, f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
4) Ecrire la matrice de f dans les bases B et $(e_1, e_2, f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2))$.

Exercice 2 (30 pts)

Soient $B = (e_1, e_2, e_3)$la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $w_1 = (1,-2,0)$, $w_2 = (-1,2,0)$, $w_3 = (0,0,2)$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(e_1) = w_1, f(e_2) = w_2, f(e_3) = w_3$$

1) Trouver une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.
2) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.
3) Déterminer $\operatorname{Ker}(f - id)$ et $\operatorname{Im}(f - id)$ où id désigne l'identité de $\mathbb{R}^3$.
4) En déduire que $f - id$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 (25 pts)

Soient $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé àA dans la base B.

1) Déterminer les valeurs propres de A et déduire que A est inversible.
2) Déterminer, sans calculer les espaces propres, deux vecteurs u et $v$de $\mathbb{R}^3$tels que $f(u) = 2u$ et $f(v) = u + 2v$.
3) Soit e un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(e) = e$.
   Démontrer que la famille (e, u, v) est une base de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de f dans cette base.
4) A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? (Justifier).

Exercice 4 (15 pts)

Soient E et F deux$K$-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $u \circ v = id_F$.
Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} v$

① Math 103 10_11 Dr. Samir Farkh

Ex 1 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \,/\, f(x,y,z) = (-x+y, x-y, -x+z, -y+z)$.

1) f est linéaire (clair).

2) $$\underset{B,B'}{M}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{R}).$$

3) Est-ce que $B'' = (e_1, e_2, f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2))$ base de $\mathbb{R}^4$?

Comme $\mathrm{Card}(B'') = 4 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$, il suffit de dém que B'' est libre. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \,/\, \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma f(\varepsilon_1) + \delta f(\varepsilon_2) = 0$

$$\Rightarrow (\alpha - \gamma + \delta)e_1 + (\beta + \gamma - \delta)e_2 - \gamma e_3 - \delta e_4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \gamma + \delta = 0 \\ \beta + \gamma - \delta = 0 \\ \gamma = \delta = 0 \end{cases} \text{ car } (e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ libre}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

4) $$f(\varepsilon_1) = 0e_1 + 0e_2 + f(\varepsilon_1) + 0f(\varepsilon_2)$$
$$f(\varepsilon_2) = 0e_1 + 0e_2 + 0f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2)$$
$$f(\varepsilon_3) = -f(\varepsilon_1) - f(\varepsilon_2).$$

Donc $$\underset{B,B''}{M}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ex 2 $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \,/\, f(e_1) = \omega_1$, $f(e_2) = \omega_2$ et $f(e_3) = \omega_3$.

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3)$$
$$= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3), \quad f \text{ lin}$$
$$= (x-y, -2x+2y, 2z)$$

1) $(x,y,z) \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow f(x,y,z) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = (x,x,0) = x(1,1,0)$$

Donc $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}((1,1,0))$ et $\{(1,1,0)\}$ est une base de $\mathrm{Ker} f$.

$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{Vect}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ donc $\{(1,-2,0), (0,0,1)\}$ base de $\mathrm{Im} f$.

2) $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f \overset{(*)}{=} \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,-2,0),(0,0,1))$

Il est clair que ces vecteurs sont libres ind. (par échelon)

donc $\dim(\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Comme $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ $(f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3))$

on en déduit que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f$ ①

Or $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f)$ ②

① et ② $\Rightarrow \mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.

3) $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f - id) \Leftrightarrow (f - id)(x,y,z) = 0$

$\Leftrightarrow f(x,y,z) - (x,y,z) = 0$

$\Leftrightarrow (-y, -2x+y, z) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow x = y = z = 0$.

Donc $\mathrm{Ker}(f - id) = \{(0,0,0)\}$.

$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim \mathrm{Ker}(f - id) + \dim \mathrm{Im}(f - id)$ (Th. du rang)

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}(f - id) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Or $\mathrm{Im}(f - id)$ sev de $\mathbb{R}^3$.

Donc $\mathrm{Im}(f - id) = \mathbb{R}^3$.

4) D'après 3), $f - id$ est bijective (et elle est linéaire)

Donc $f - ~~id~~$ est un autom. de $\mathbb{R}^3$.

Ex 3 $\quad A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Les v.p. de A sont les racines du polynôme caractéristique

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X)^2$$

Donc $\lambda_1 = 1$ est v.p. simple et $\lambda_2 = 2$ est v.p. double.

0 n'est pas v.p. de A ; donc A est inversible.

2) On remarque d'après la matrice A que

$f(e_2) = 2e_2$ et $f(e_3) = e_2 + 2e_3$

Donc ~~on~~ peut prendre $u = e_2$ et $v = e_3$.

3) $e = (x, y, z)$, $f(e) = e \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ -x + 2y + z = y \\ 2z = z \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y$ et $z = 0$.

Le vecteur $e = (1, 1, 0)$ convient.

Il est clair que la (e, u, v) est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de f ds cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4) $P_f(X)$ est scindé ds $\mathbb{R}$.

A est diagonalisable $\Leftrightarrow \dim(E_2) = 2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow (A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = z = 0$

Donc $E_2 = \text{Vect}((0, 1, 0))$ et $\dim(E_2) = 1$.

$\dim(E_2) \neq 2$ (= ordre de multiplicité de $\lambda = 2$)

Donc A n'est pas diagonalisable ds $M_3(\mathbb{R})$.

Ex 4

$\left.\begin{array}{l} \text{Ker } u \text{ est un sev de } E \\ \text{Im } v \text{ " " " de } E \end{array}\right| \Rightarrow \text{Ker } u + \text{Im } v$ est un sev de E

Récip. $\forall x \in E$,

$F \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} F$, $u \circ v = id_F$

$x = \underbrace{x - v(u(x))}_{\in \text{Ker } u \text{ car:}} + \underbrace{v(u(x))}_{\in \text{Im } v}$.

$u(x - v \circ u(x))$

$= u(x) - (\underbrace{u \circ v}_{id} \circ u)(x)$

$= u(x) - u(x) = 0$.

Donc $E = \text{Ker } u + \text{Im } v$.

$x \in \text{Ker } u \cap \text{Im } v \Leftrightarrow x \in \text{Ker } u$ et $x \in \text{Im } v$

$\Leftrightarrow u(x) = 0$ et $x = v(y) / y \in F$.

$\Rightarrow u(v(y)) = 0$

$\Rightarrow (u \circ v)(y) = 0$

$\Rightarrow y = 0$ et $x = v(y) = v(0) = 0$.

Donc $\text{Ker } u \cap \text{Im } v = \{0\}$

Finalement $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } v$.

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des Sciences

Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 103
Durée : 2 H

Année : 2009-2010
Examen : Final

Exercice 1 (30 pts)

Soit λ un paramètre réel. On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants :

$$u = (1,-1,2,2), v = (1,1,0,2), w_\lambda = (1,-3,4,\lambda).$$

1) Déterminer, suivant les valeurs de λ, une base, la dimension et un système d'équations du sous-espace vectoriel F_λ engendré par les vecteurs u, v et w_λ.
2) Soit $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; x + y - 2z + 2t = 0\}$. Déterminer une base et la dimension de G.
3) Trouver une base de $G \cap F_0$.
4) En déduire que $\mathbb{R}^4 = G + F_0$ et que les sous-espaces G et F_0 ne sont pas supplémentaires.

Exercice 2 (20 pts)

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

1) Donner la base canonique B de $\mathbb{R}_3[X]$ et la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$.
2) Montrer que la famille $B' = (X^3 + 1, X^3 - 1, X^2 + X, X^2 - X)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3) Ecrire la matrice de passage de B à B'.
4) Donner les coordonnées du polynôme $X^3 + 2X + 1$ dans la base B'.

Exercice 3 (25 pts)

Soient V un K-espace vectoriel et E, F deux sous-espaces vectoriels de dimension finie. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : E \times F &\longrightarrow V \\ (e, f) &\longmapsto e - f \end{aligned}$$

1) Montrer que φ est linéaire.
2) Montrer que $Im\ \varphi = E + F$.
3) Montrer que $Ker\ \varphi = \{(x, x); x \in E \cap F\}$.
4) En déduire la relation entre les dimensions des espaces $E \times F, E + F$ et $E \cap F$.

Exercice 4 (25 pts)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

1) Montrer que $Im\ f \subset Ker\ f$
2) Montrer que $\dim(Ker\ f) = 2$.
3) Soient $v_1, v_2 \in E$ tels que $f(v_1) = v_2 \neq 0$.
   Montrer que $v_2 \in Ker\ f$.
4) Soit $v_3 \in E$ tel que (v_2, v_3) est une base de $Ker\ f$.
   Montrer que $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.
5) Ecrire la matrice de f dans la base B.

Final Math 103

UNIVERSITE LIBANAISE
FACULTE DES SCIENCES
BRANCHE: 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math103

Examen : Final

Date : 15/06/09

Durée : 2h

Ex1 (30 pts)

On considère l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$f(P) = (X-1)P' - P$$

1) Déterminer $\operatorname{Ker} f$.
2) L'équation $f(P) = Q$ a-t-elle toujours des solutions dans $\mathbb{R}_3[X]$ pour un Q de $\mathbb{R}_3[X]$?
3) Soit $B = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$
   a) Montrer que B est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
   b) Trouver une base de $\operatorname{Im} f$.
   c) Déterminer la matrice de f relativement à la base B.

Ex2 (30 pts)

On considère les bases canoniques B et B' de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ respectivement.

Soient $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ les applications linéaires définies par :

$$f(x,y,z,t) = (2x - y + z - t, -x + y - z, -y + z - t)$$

$$g(x,y,z) = (x+z, -y+2z, 2y+3z, 2x+3y+2z)$$

1) Donner les matrices de f et g relativement aux bases B et B'.
2) Soit $h = f \circ g$.
   a) Sans calculer explicitement $h(x,y,z)$, montrer que la matrice de h dans B est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   b) Déduire que h est bijective.
   c) Déterminer le polynôme caractéristique de A et déduire que A est inversible.
   d) A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?

Ex3 (15 pts)

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E tel que

$$f^3 = id_E.$$

1) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^3$.
2) Déduire la dimension de $\operatorname{Ker} f$.
3) f est-elle surjective ?

Ex4 (25pts)

Considérons dans l'espace $\mathbb{R}^3$, le plan $P=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \ 2x+y-z=0\right\}$ et la droite $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \ \frac{x}{2}=y=-z\right\}$.

1) Trouver une base B_1 de P et une base B_2 de D.

2) Démontrer que $B=B_1\bigcup B_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathbb{R}^3=P\oplus D$.

3) Soit p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D :

   a) Déterminer la matrice de p par rapport à la nouvelle base B.

   b) Déduire la matrice de p par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

4) Soit s la symétrie par rapport à P parallèlement à D.

   Déterminer la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Ex1

1. $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \ker f$

$\Leftrightarrow f(P) = 0$

$\Leftrightarrow (X-1)P' - P = 0$

$\Leftrightarrow (X-1)(a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2) - (a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) = 0$

$\Leftrightarrow (-a_1 - a_0) + (-2a_2)X + (a_2 - 3a_3)X^2 + (2a_3)X^3 = 0$

$\Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0.$

D'où $P = a_1(X-1)$, par suite $\ker f = \text{Vect}\,(X-1)$.

2. D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{R}_3[X]) = \dim(\text{Im}\, f) + \dim(\ker f)$$

Donc $\dim(\text{Im}\, f) = 3 \neq 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$. Donc f n'est pas surjective.

Par conséquent l'équation $f(P) = Q$ n'a pas toujours des solutions dans $\mathbb{R}_3[X]$.

3.

a. $B = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ (voir exercice 2.13).

b. $\text{Im} f = \text{Vect}\,(f(1), f(X-1), f(X-1)^2, f(X-1)^3)$

$= \text{Vect}\,(-1, 0, (X-1)^2, 2(X-1)^3)$.

Donc :

$$\text{Im} f = \text{Vect}\,(-1, (X-1)^2, 2(X-1)^3)$$

$\dim(\text{Im}\, f) = 3$ et $(-1, (X-1)^2, 2(X-1)^3)$ est une base de $\text{Im}\, f$.

c. $M_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ex2

1. $M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $M_{B,B'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.

a. $M_B(h) = M_{B,B'}(f)M_{B,B'}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b. $|M_B(h)| = -6 \neq 0$, donc $M_B(h)$ est inversible et h est bijective.

c. $P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -3-\lambda & -2 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda)(\lambda^2+\lambda+2)$.

Le déterminant de la matrice A est le terme constant dans le polynôme $P(\lambda)$, donc $\det(A) = -6$. Par suite A est inversible.

d. A admet une seule valeur propre dans $\mathbb{R}$, donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Ex3

1. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $f(x) = 0$. Donc :
$$f^3(x) = f^2(f(x)) = f^2(0) = 0.$$
D'où $x \in \operatorname{Ker} f^3$ et donc $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^3$.
2. D'après 1) :
$$\dim(\ker f) \leq \dim(\ker f^3) = \dim(\ker id) = \dim(\{0\}) = 0.$$
D'où $\dim(\ker f) = \{0\}$.
3. Comme f est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie, f est alors surjectif.

Ex4

1. $(x,y,z) \in P \Leftrightarrow (x,y,z) = (x,y,2x+y)$
$$= x(1,0,2) + y(0,1,1) = xu_1 + yu_2.$$
Il est clair que la famille $B_1 = (u_1, u_2)$ est libre, donc B_1 est une base du plan P.
$$(x,y,z) \in D \Leftrightarrow (x,y,z) = \left(x, \frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) = x\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = xu_3.$$
Donc $B_2 = (u_3)$ est une base de la droite D.

2. Il est clair que la famille $B = (u_1, u_2, u_3)$ est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
On a $P \cap D = \{0\}$, en effet :
$$(x,y,z) \in P \cap D \Leftrightarrow \left(z = 2x + y \text{ et } \frac{x}{2} = y = -z\right)$$
$$\Leftrightarrow x = y = z = 0.$$
D'autre part,
$$\dim(P) + \dim(D) = \dim(\mathbb{R}^3).$$
Par suite $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

3. a. $M_B(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique C de $\mathbb{R}^3$ à la base B, on a :

$$M_C(p) = P.M_B(p).P^{-1}$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

4. On a :

$$s = 2p - id_{\mathbb{R}^3}$$

Donc :

$$M_C(s) = 2M_C(p) - I_3$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

UNIVERSITÉ LIBANAISE
Faculté des sciences III – TRIPOLI

Juillet 2008
Durée : 2H

Examen final- MAT103

Exercice 1 :(20 points)

On note $M_3(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$ – espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à cœfficients réels. Considérons l'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} ; a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
2) Déterminer une base de F et la dimension de F.
3) Trouver un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ dans F.

Exercice 2 :(20 points)

On considère les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^4$:
$e_1 = (-1, m, 1, -1)$; $e_2 = (0,0,0,-1)$; $e_3 = (-1,2,1,0)$ et $e_4 = (n,0,0,-1)$ où m et n sont deux paramètres réels.

1) Trouver les conditions que doivent vérifier m et n pour que ces quatre vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^4$.
2) Etudier, selon les valeurs de m, le rang du système (e_1, e_2, e_3).
3) En déduire la condition que doit vérifier m pour que e_1 appartienne au plan vectoriel engendré par e_2 et e_3.

Exercice 3 :(25 points)

Dans le $\mathbb{R}$ – espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $e_1=(-1,1,1,-1); e_2=(0,0,0,-1); e_3=(-1,2,1,0)$ et $e_4=(1,0,0,-1)$. On admet que la famille $B=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$f(e_1)=3e_1$; $f(e_2)=-e_1-e_2-e_4$; $f(e_3)=2e_2$ et $f(e_4)=e_1+2e_2+2e_4$.

1) Donner la matrice A de f dans la base B
2) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $Ker(f)$.
3) Le vecteur $u=e_1-e_2$ appartient-il à $Ker(f)$?
4) Montrer que le vecteur $u=e_1-e_2$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4:(35 points)

On considère l'endomorphisme f du $\mathbb{R}$ – espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, dont la matrice associée par rapport à la base canonique $B=(1;X;X^2)$ est
$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 4 & 1 & -2\\ 6 & 3 & -4\end{pmatrix}.$$

1) Soit $P(X)=a+bX+cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Calculer le polynôme $f(P)$.
2) Calculer le rang de A, en déduire $\dim(\mathrm{Im}(f))$ et $\dim(Ker(f))$
3) On donne : $Q_1(X)=1+2X+3X^2$; $Q_2(X)=X+X^2$ et $Q_3(X)=1+2X^2$.
Calculer $f(Q_1)$, $f(Q_2)$ et $f(Q_3)$.
4) Montrer que $B'=(Q_1,Q_2,Q_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5) Ecrire la matrice A' de f par rapport à la base B'. Donner une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP=A'$.
6) Calculer la matrice de $f\circ f$ par rapport à B'. En déduire que $f\circ f=-f$.
7) Montrer alors que $\mathbb{R}_2[X]=Ker(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.

Cours : M103

Examen : Final

[illegible] : 20%

Durée : 2 heures

Exercice 1 :

$M_3(\mathbb{R})$; $\dim_{M_3(\mathbb{R})} = 3.3 = 9 = n \times p$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

1) * $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in F \Rightarrow F \neq \emptyset$; $(a = b = 0 \in \mathbb{R})$

* $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a' & 0 & 0 \\ a' & b' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a+a' & 0 & 0 \\ \underbrace{a+a'}_{\in \mathbb{R}} & \underbrace{b+b'}_{\in \mathbb{R}} & 0 \end{pmatrix} \in F$$

* $$\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha a & 0 & 0 \\ \underbrace{\alpha a}_{\in \mathbb{R}} & \underbrace{\alpha b}_{\in \mathbb{R}} & 0 \end{pmatrix} \in F$$

Donc F est un s.e.v. de $M_3(\mathbb{R})$

2) $A \in F \iff A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U_2}$

$\Rightarrow \{U_1 ; U_2\}$ partie génératrice de F.

* $\underbrace{\alpha}_{\in \mathbb{R}} U_1 + \underbrace{\beta}_{\in \mathbb{R}} U_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$, donc $\{U_1 ; U_2\}$ est libre

D'où $\{U_1, U_2\}$ base de F ; dim F = 2.

3) $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} F$

$(a,b) \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$ de même dim $\Rightarrow$ il faut démontrer que φ est linéaire et φ est surjectif

* φ est linéaire :

$\varphi((a,b)+(a',b')) = \varphi(a,b) + \varphi(a',b')$

$\varphi(\lambda(a,b)) = \lambda\varphi(a,b)$

* Soit $A \in F$; $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} = \varphi(a,b)$

Donc φ est surjective

φ surjective et linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans F et dim $\mathbb{R}^2$ = dim F

Donc φ est un isomorphisme.

Exercice 2 :

1) $\begin{vmatrix} -1 & m & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ m & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & m & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ m & 0 & 0 \end{vmatrix} = -m(m-2)$.

il faut que $m \neq 0$ et $m \neq 2$, pour que ces quatres vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^4$

2) $\begin{pmatrix} -1 & m & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & m & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2-m & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$\begin{pmatrix} -1 & m & 1 & -1 \\ 0 & 2-m & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 1er cas: Si m = 2

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$

donc ; rg = 2

2ème cas: Si $m \neq 2$. $rg = 3$

3) $e_1 \in Vect(e_2; e_3)$.

* Si $m=2$: $rg(e_1; e_2; e_3) = 2 \Rightarrow (e_1, e_2, e_3)$ liée, donc $e_1 \in Vect(e_2, e_3)$; $e_1 = e_2 + e_3$

* Si $m \neq 2$: $rg(e_1; e_2, e_3) = 3 \Rightarrow e_1 \notin Vect(e_2, e_3)$.

D'où $m=2$, pour que $e_1 \in Vect(e_2, e_3)$.

Exercice 4 :

1) $f(P) = a f(1) + b f(X) + c f(X^2)$

$f(P) = a(1+4X+6X^2) + b(1+X+3X^2) + c(-1-2X-4X^2)$

$= (a+b-c) + (4a+b-2c)X + (6a+3b-4c)X^2$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2 = \dim \operatorname{Im} f$.

* $\underbrace{\dim \mathbb{R}_2[X]}_{3} = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow$

$\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$

3) $f(Q_1) = f(1) + 2f(X) + 3f(X^2) = 0$

$f(Q_2) = -X - X^2 = -Q_2$

$f(Q_3) = -1 - 2X^2 = -Q_3$

4) * $\alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3 = 0 \Rightarrow (\alpha+\gamma) + (2\alpha+\beta)X + (3\alpha+\beta+2\gamma)X^2 = 0$.

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

5) $A' = M_{B'}(f) = \begin{array}{c|ccc} & f(Q_1) & f(Q_2) & f(Q_3) \\ Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ Q_2 & 0 & 1 & 0 \\ Q_3 & 0 & 0 & -1 \end{array}$ En fonction de Q_3

$*\; P \,?\, / \, A' = P^{-1} A P \;;\; P = P(B,B') = \begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ X & 2 & 1 & 0 \\ X^2 & 3 & 1 & 2 \end{array}$

6) $M_{B'}(f \circ f) = \underbrace{M_{B'}(f)}_{A'} \cdot \underbrace{M_{B'}(f)}_{A'}$

$A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{déduction}} -A' = -M_{B'}(f) = M_{B'}(-f)$

$\Rightarrow M_{B'}(f \circ f) = M_{B'}(-f)$

$\Rightarrow f \circ f = -f$

7) $\mathbb{R}_2[X] = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$

$*\; \forall P \in \mathbb{R}_2[X] ;\; P = \underbrace{P + f(P)}_{\in \operatorname{Ker} f\, ?} - \underbrace{f(P)}_{} \;\; = f(P) \in \operatorname{Im} f$

$f(P + f(P)) =$

$f(P) + \underbrace{f^2(P)}_{-f(P)} = 0$

$\Rightarrow \mathbb{R}_2[X] = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$

$*\; \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f) = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f)$

car f est endomorphisme

donc $3 = 2 + 1 - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f)$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$

D'où $\mathbb{R}_2[X] = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$

Exercice 1 :(25 points)

Dites dans chacun des cas suivants si l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E. Justifier vos réponses.

a) $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / y=x^3\}$; $E=\mathbb{R}^3$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) $F=\{a+bX+cX^2 / a,b,c\in\mathbb{Q}\}$; $E=\mathbb{R}_2[X]$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

c) $F=\{z\in\mathbb{C} / z=\overline{z}\}$; $E=\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. ($\overline{z}$ étant le conjugué de z).

Exercice 2 :(40 points)

Soit $E=\{(3\alpha+2\beta,-\beta,-2\alpha-5\beta) / \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, donner une base de E et préciser sa dimension.

b) Quelle valeur faut-il donner au paramètre réel a pour que le vecteur $(a,-1,3)$ appartienne à E ?

c) Montrer que la famille $((3,0,-2),(2,-1,-5),(1,-1,3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

d) Soit D la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,-1,3)$. A-t-on $E\oplus D=\mathbb{R}^3$? Pourquoi ?

e) Soit $u=(1,1,1)$. Trouver alors $(u_1,u_2)\in E\times D$ tel que $u=u_1+u_2$. Cette décomposition est-elle unique ?

Exercice 3 :(35 points)

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E=M_{2\times2}(\mathbb{R})$, et les deux $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels de E : $F=\{A\in E / A={}^tA\}$ et $G=\{A\in E / A=-{}^tA\}$. (${}^tA$: Transposée de A)

a) Déterminer, sans démonstration, les bases canoniques de E, F et G et préciser la dimension de chaque espace.

b) Montrer que $F\oplus G=E$.

c) Soit $B=\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ et $H=vect(B)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par les éléments de B.

1. Trouver une base de $H\cap F$.
2. Trouver un sous-espace vectoriel I supplémentaire de H dans E.

Bon travail

Université libanaise
Faculté des sciences 3
Examen final du cours : Math 103
Date : le 16/07/07

Année : 06-07
Durée : 2 heures

I. Soient E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ sa base canonique .
On pose $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ où $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (-2, 0, 1)$ et $v_3 = (1,1,0)$.
1) Montrer que B' est une base de E.
2) Donner le matrice de passage P de la base B à la base B'.
3) Donner le matrice de passage Q de la base B' à la base B .
4) On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice associée relativement à la base B est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (c.à.d $A = M(f, A)$)
Calculer f(x, y, z) pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
5) f est-elle un automorphisme de E ? Justifier.
6) Donner $A' = M(f, B')$ la matrice associée à f relativement à la base B'.
7) Donner une matrice H de $M_3(\mathbb{R})$ telle que $A' = H^{-1}AH$ .En déduire A^5.

II. Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriels des matrices carrées d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$ .On considère les applications T et D de E dans E telles que $T(A) = A - {}^tA$ et $D(A) = |\mathbf{A}|$ pour tout $A \in E$.
1) Montrer que T est linéaire. D est-elle linéaire ? Justifier.
2) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de E .Calculer T(A).
3) Trouver une base de ImT et une base de KerT. En déduire leurs dimensions.
4) On considère la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de E où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donner M(T,B) la matrice associée à T relativement à la base B .
5) On pose $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ où
$s_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $s_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $s_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que S est une base E.
b) Calculer $T(s_i)$ pour $i = 1,2,3,4$. En déduire que $E = \operatorname{Im} T \oplus \operatorname{Ker} T$.

Tournez la page s.v.p

III On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

1)Trouver le rang de A.

2) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ sur le corps $\mathbb{R}$ .Soit F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendre par les vecteurs $u_1 = (1, 0, 2, -1)$, $u_2 = (1, 1, 0, 2)$, $u_3 = (2, 1, 2, 1)$ et $u_4 = (1, -1, 4, -4)$.

a) Montrer que $F \neq \mathbb{R}^4$ et trouver une base B_1 de F.

b) Chercher une partie libre B_2 de $\mathbb{R}^4$ telle que $B_1 \cup B_2$ soit une base de $\mathbb{R}^4$.

c) On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ telle que $f(e_i) = u_i$ pour tout i =1,2,3,4. ($(e_i)_{1 \leq i \leq 4}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$).

On pose $p = e_1 + e_2 - e_3$ et $q = 2e_1 - e_2 - e_4$

(i) Montrer que Imf = F.

(ii) calculer f(p) et f(q). En déduire que {p, q} forme une base de Kerf.

IV. Soient E un espace vectoriel reel et u un endomorphisme de E tel que $u \circ u = -u$.

1) Montrer que pour tout $x \in E$, $(x + u(x)) \in \mathrm{Ker}\, u$. En Déduire que : $E = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Ker}\, u$.

2) Démontrer que : $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$

3) Déduire que : $E = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, u$.

Bonne chance

Barème: I(36=4+4+5+3+5+6+9)pts
II(28=8+8+4+4+4)pts
III(24=4+20)pts
IV(12=6+4+2)pts

Ex 1 :

1) $|M(v_1, v_2, v_3)| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = $ [illegible]

Donc B' est linéairement independant mais Card $B' = 3 = \dim E$. Donc B' est libre maximale c.à.d une base.

2). Le matrice de passage de la base B à la base B' est $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Q : le matrice de passage de la base B' à la base B est P^{-1}

$$Q = P^{-1} = \frac{1}{|P|} \, {}^t\mathrm{coff}\, P = \frac{1}{-1} \, {}^t\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

3) $A = M(f; B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\det A = -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0.$$

$\det A = 0 \Rightarrow f$ n'est pas injective $\Rightarrow f$ n'est pas automorphisme.

4). $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + 2z \\ 2x - 3y + 4z \\ x - y + z \end{pmatrix}$

$$f(x, y, z) = (-y + 2z, \; 2x - 3y + 4z, \; x - y + z).$$

6) $A' = M(f, B') = P^{-1} A P$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

prendre $H = P$

on a : $A'^{5} = H^{-1} A^{5} H \Rightarrow A^{5} = H A'^{5} H^{-1} = P A'^{5} P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Ex II.

$E = M_2(\mathbb{R})$

$T = A - {}^tA$ $\qquad D(A) = |A|$.

1) $T(\lambda A) = \lambda A - {}^t\lambda A = \lambda A - \lambda {}^tA = \lambda (A - {}^tA)$

$T(A+B) = A+B - {}^t(A+B) = A+B - ({}^tA + {}^tB)$

$= A - {}^tA + B - {}^tB = T(A) + T(B)$.

$D(\lambda A) = |\lambda A| = \lambda^2 |A| = \lambda^2 D(A) \neq \lambda D(A)$

Donc D non linéaire.

2) $T(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$

3) $E \in \operatorname{Im}T \Rightarrow E = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$

donc $\operatorname{Im}T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

$\operatorname{Im} = \operatorname{esp}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]$

$A \in \operatorname{Ker}T \Rightarrow b - c = 0 \Rightarrow b = c$

$\Rightarrow A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} / a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$

$A = \operatorname{esp}\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{u_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{u_3} \right]$

on va montrer que (u_1, u_2, u_3) sont linéairement indépendant :

$\sum \lambda u = 0 \Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ donc (u_1, u_2, u_3) sont linéairement indépendainte et engendré $\ker T$

donc c'est une base de $\ker T$.

$\dim \operatorname{Im} T = 1$ $\quad \dim \ker T = 3$.

4) $M(T, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$T(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.e_1 + 0.e_2 + 0.e_3 + 0.e_4$.

$T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0.e_1 + 1e_2 - 1.e_3 + 0.e_4$.

$T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0e_1 + -1.e_2 + e_3 + 0.e_4$.

$T(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.e_1 + 0.e_2 + 0.e_3 + 0.e_4$.

5) $|M(S_1, S_2, S_3, S_4)| = \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right|$

$= -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = [-1-1] = 2 \neq 0$.

Donc c'est une base.

b) $T(S_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $T(S_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$T(S_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $T(S_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\{s_1, s_2, s_3\}$ base de $\ker T$ $\}$ $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$

$\{s_4\}$ base de $\operatorname{Im} T$ $\}$

base de $\operatorname{Im} T + \ker T \Rightarrow E = \operatorname{Im} T + \ker T$

mais $\dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T = 4$ et $\operatorname{Im} T \cap \ker T$

donc $E = \operatorname{Im} T \oplus \ker T$.

Ex III.

1) $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$rg(A) = 2$.

2) a) $rg\, A = 2 \Rightarrow rg(u_1, u_2, u_3, u_4) = 2$

$\Rightarrow \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ n'est pas une base de E

$\Rightarrow F = esp[u_1, u_2, u_3, u_4] \neq E$

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) u_1, $u_2 - u_1$, $u_3 - 2u_1$, $u_4 - u_1$

u_1 $u_2 - u_1 = u_3 - 2u_1 = u_1 - u_4$,

$F = esp\{(1, 0, -2, -1), (0, 1, -2, 3)\}$.

c) i) $\operatorname{Im} f = esp[f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)]$

$= esp[u_1, u_2, u_3, u_4] = esp[v_1, v_2] = F$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$p, q \in \ker f$, $\{p ; q\}$ linéairement indépendante

Grad $[p, q] = 2 = 4 - 2 = \dim E - \dim \operatorname{Im} f$

$= \dim \ker f$.

$\{p, q\}$ base de $\ker f$.

<u>Ex IV</u>.

$u \circ u = -u$.

1) $u(x + u(x)) = u(x) + u \circ u(x) = u(x) - u(x)$

$= 0$.

$E = \operatorname{Im} u + \ker u$

$x = u(-x) + x + u(x)$.

2) $x \in \operatorname{Im} u \cap \ker u \Rightarrow u(x) = 0$ et $\exists y / x = u(y)$.

$\Rightarrow u(x) = 0$, $u(x) = u(u(y))$.

$\Rightarrow u(x) = 0$: $u(x) = -u(y)$

$\Rightarrow u(y) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Université Libanaise
Faculté des sciences 3

Examen final du cours : Mat 103 — Année : 05-06

Date : le 20/06/06 — Durée : 2 heures

I. Soient E l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ et $B = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice associée relativement à la base B est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer $f(x, y, z)$ pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
2) Déterminer une base et la dimension de Imf.
3) Déterminer une base et la dimension de Kerf.
4) On pose $g = f + id_{\mathbb{R}^3}$
   a) Calculer $g(e_1)$, $g(e_2)$, $g(e_3)$. En déduire la dimension de Img
   b) Montrer que si $x \in$ Kerg alors $f(x) = x$. En déduire que Kerg $\subseteq$ Imf, puis que Kerg = Imf.

II. $\mathbb{R}_2[X]$ étant le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2. Soit $C = (c_1, c_2, c_3)$ sa base canonique [$c_1 = 1, c_2 = X, c_3 = X^2$]. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X]$ telle que $f(a, b, c) = cX + (a-b)X^2$ pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

1) Donner la matrice $M(f,B,C)$ de f relativement aux bases canoniques B de $\mathbb{R}^3$ et C de $\mathbb{R}_2[X]$
2) L'application f est-elle injective ? Justifier votre réponse.
3) On pose $g = f + e$ où e est l'application linéaire suivante $e : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X]$ telle que $e(a,b,c) = a + bX + cX^2$ pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$
   a) Ecrire la matrice $M(g,B,C)$ de g relativement aux bases B et C
   b) Montrer que g est un isomorphisme d'espaces vectoriels
   c) Déterminer l'application g^{-1}

Tournez la page S.V.P

Université Libanaise
Faculté des sciences 3

Examen final du cours : Mat 103
Date : le 20/06/06

Année : 05-06
Durée : 2 heures

I. Soient E l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ et $B = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice associée relativement à la base B est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer $f(x, y, z)$ pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
2) Déterminer une base et la dimension de Imf
3) Déterminer une base et la dimension de Kerf
4) On pose $g = f + id_{\mathbb{R}^3}$
   a) Calculer $g(e_1)$, $g(e_2)$, $g(e_2)$. En déduire la dimension de Img
   b) Montrer que si $x \in$ Kerg alors $f(-x) = x$. En déduire que Kerg $\subseteq$ Imf, puis que Kerg = Imf.

II. $\mathbb{R}_2[X]$ étant le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2. Soit $C = (c_1, c_2, c_3)$ sa base canonique $[c_1 = 1, c_2 = X, c_3 = X^2]$. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X]$ telle que $f(a, b, c) = cX + (a-b)X^2$ pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

1) Donner la matrice $M(f,B,C)$ de f relativement aux bases canoniques B de $\mathbb{R}^3$ et C de $\mathbb{R}_2[X]$
2) L'application f est-elle injective ? Justifier votre réponse.
3) On pose $g = f + e$ où e est l'application linéaire suivante $e : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[X]$ telle que $e(a,b,c) = a + bX + cX^2$ pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$
   a) Ecrire la matrice $M(g,B,C)$ de g relativement aux bases B et C
   b) Montrer que g est un isomorphisme d'espaces vectoriels
   c) Déterminer l'application g^{-1}

Tournez la page S.V.P

III. Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mathbin{/} x - y = 0\}$ et G le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 1, 2)$ et $v = (1, -1, 1)$.

1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
2) Trouver une base de F et préciser sa dimension
3) Montrer que $\{u, v\}$ est une base de G
4) Trouver une base de $F + G$ et une base de $F \cap G$
5) Peut on écrire : $\mathbb{R}^3 = F + G$? $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$? Justifier vos réponses
6) Existe-t-il deux sous espaces vectoriels distincts F_1 et F_2 de $\mathbb{R}^3$ tels que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus G$ et $\mathbb{R}^3 = F_2 \oplus G$? Justifier vos réponses
7) Donner l'équation cartésienne de G

IV. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée relativement à la base canonique B de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On considère la famille V de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ telle que $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ où $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,-1)$ et $v_3 = (0,1,1)$

1) Montrer que V est une base de $\mathbb{R}^3$
2) Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base V
3) Calculer P^{-1}
4) Calculer la matrice $D = M(f,V)$ associée de f relativement à la base V
5) Donner la relation entre A,P,D et P^{-1}. En déduire la valeur de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$

V. On considère les applications linéaires $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

1) L'application f peut-elle être injective ? Surjective ? Justifier.
2) L'application g peut-elle être surjective ? Injective ? Justifier.

Barème : I (22 points = 2+4+4+12)
II (22 points =4+4+14)
III (23 points = 3+3+3+4+4+3+3)
IV (23 points = 3+4+6+4+6)
V (10 points = 5+5)

Jun 2005 2006 — Solution M 103

I 1) $f(x;y;z) = (-y+2z \,;\, 2x-3y+4z \,;\, -x-y \ldots)$

2) $\mathrm{Im} f = \mathrm{vect}\,(f(e_1); f(e_2); f(e_3))$ où $f(e_j)$ est la j-ème colonne

$f(e_1) = u_1 = 0;\,+2;\,+1$
$f(e_2) = u_2 = -1;\,-3;\,-1$
$f(e_3) = u_3 = 2;\,4;\,1$

En échelonnant ce système on trouve que $\{u_1; u_2\}$ est un système libre maximal ; $\boxed{u_3 = 2u_2 \ldots}$ relation de dépendance

Donc $\{u_1; u_2\}$ est une base de $\mathrm{Im} f$

3) $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Im} f = 3 - 2 = 1$ $\ker f \ldots$

soit $v = (x;y;z) \in \mathbb{R}^3$

$v \in \ker f \iff f(v) = 0 \iff f(x;y;z) = 0$

$$\iff \begin{cases} -y+2z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \\ -x-y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z \text{ arbitraire } y \in \mathbb{R} \\ y = 2z \;;\; x = z \end{cases}$$

$\iff v = (z;2z;z)$ où $z \in \mathbb{R}$. $\iff v = z(1;2;1)$ $z \in \mathbb{R}$.

$\iff v = z v_3 \iff v \in \mathbb{R} v_3$ (où $v_3 = (1;2;1)$)

$\iff v \in \mathrm{vect}\,(v_3)$.

Ainsi $\ker f = \mathrm{vect}\,(v_3)$ et $\{v_3\}$ constitue un système de générateurs de $\ker f$. $\{v_3\}$ est de plus libre car $v_3 \neq 0_{\mathbb{R}^3} = (0;0;0)$. Donc $\{v_3\}$ est une base de $\ker f$.

1) $g(x;y;z) = (f+id)(x;y;z) = f(x;y;z) + (x;y;z)$

$= f(x;y;z) + (x;y;z) = (x-y+2z;\ 2x-2y+4z;\ \ldots)$

a) $M_g(B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, $g(e_1) = (1;2;-1)$

$g(e_2) = (-1;-2;1) = -g(e_1)$

$g(e_3) = (2;4;-2) = 2g(e_1)$

Donc, dans $\{g(e_1); g(e_2); g(e_3)\}$ qui est un syst. générateur de Img, $\{g(e_1)\} = (1;2;-1) = r_1$ est une partie libre maximale et $\dim \mathrm{Im}g = 1$

$\{r_1\}$ est une base de Img.

b) Soit $x = (a;b;c) \in \mathbb{R}^3$

$x \in \ker g \iff g(x) = 0 \iff (f+id)(x) = 0$

$\iff f(x) + x = 0 \iff f(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x$

Or $x = f(-x) \Rightarrow x \in \mathrm{Im}f$. Donc $\ker g \subset \mathrm{Im}f$ (1)

D'autre part : $\dim \ker g = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Im}g = 3 - 1 = 2$

$= \dim \mathrm{Im}f$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \ker g = \mathrm{Im}f$

II $E = \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}_2[X] = F$

$(a;b;c) \longmapsto cx + (a-b)x^2$

1) $f(e_1) = f(1;0;0) = 0 \cdot X + (1-0)X^2 = X^2 = C_3$

$f(e_2) = f(0;1;0) = 0 \cdot X + (0-1)X^2 = -X^2 = -C_3$

$f(e_3) = f(0;0;1) = 1 \cdot X + 0 \cdot X^2 = X = C_2$

$M_{B,\mathcal{C}}(f) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = A$

2) $\dim E = \dim F$. Donc f injective $\iff f$ surj

$\iff f$ bij $\iff |A| \neq 0$

Or, ici $|A| = 0$. Donc non bij. $rg(A) = 2$

f est non inj (non surj)

$\{f(e_1); f(e_2)\}$ constitue un syst libre maximal de ...

3) soit $e : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ / $e(a;b;c) = a + bX + cX^2$

a) $g(a;b;c) = (f+e)(a;b;c) = f(a;b;c) + e(a;b;c)$

$= cX + (a-b)X^2 + a + bX + cX^2$

$= a + (b+c)X + (a-b+c)X^2$

$g(e_1) = g(1;0;0) = 1 + X^2$

$g(e_2) = g(0;1;0) = X - X^2$

$g(e_3)\ g(0;0;1) = X + X^2$

$\Longrightarrow M_{B,C}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A$

b) g bijective $\Longleftrightarrow M_{B,C}(g)$ inversible $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$

Or ici : $|A| \neq 0$ car $|A| = 2$

C) g^{-1} est l'application de $\mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

dont la matrice $M_{C,B}(g^{-1})$ est A^{-1}

or $A^{-1} = ??$ $|A| = 2$; ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{Com}\,{}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$g^{-1}(a;b;c) = A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a \\ a+b-c \\ -a+b+c \end{pmatrix}$

C.à.d : $g(a + bX + cX^2) = \left(a, \frac{a+b-c}{2}, \frac{-a+b+c}{2}\right)$

III-) 1) SE_1 : $0_{\mathbb{R}^3} = (0;0;0) \in F$ (car $0 - 0 = 0$

2) SE_2 et SE_1 : Si $u = (a;b;c) \in F$

$v = (a';b';c') \in F$

$\lambda \in \mathbb{R}$; Alors .

$\lambda u + v = (a+a', b+b', c+c')$ avec

... $(b+b') - (c+c') = (b-c) + (b'-c')$ | $b-c=0$, $b'-c'=0$

$\lambda u \in F_1$ donc F_1...

2) Base de F_1 ??

Soit $u = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$, $u \in F_1 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow u = (y; y; z)$ où $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow u = y u_1 + z u_2$ | $y, z \in \mathbb{R}$, $u_1 = (1;1;0)$; $u_2 = (0;0;1)$

$\Leftrightarrow u \in vect(u_1; u_2)$ Donc $F_1 = vect(u_1; u_2)$

De plus $\{u_1; u_2\}$ est évidemment libre, ainsi $\{u_1; u_2\}$ est une base de F_1, donc $\dim_{\mathbb{R}} F_1 = 2$

3) $\{u; v\}$ est par déf. un syst. générateur de G. Pour démontrer que c'est une base, il suffit de démontrer que $\{u, v\}$ est libre, ce qui est évident (vecteurs non proportionnels)

4) $F_1 + G = vect(u_1; u_2; u, v)$ car $F_1 = vect(u_1; u_2)$, $G = vect(u, v)$

$$\begin{array}{l|l|l}
u_1 = 1\ 1\ 0 & u_1 = 1\ 1\ 0 & u_1 = 1\ 1\ 0 \\
u_2 = 0\ 0\ 1 & u_2 = 0\ 0\ 1 & v - u_1 = 0\ -2\ 1 \\
u = 1\ 1\ 2 & u - u_1 = 0\ 0\ 2 & u_2 = 0\ 0\ 1 \\
v = 1\ -1\ 1 & v - u_1 = 0\ -2\ 1 & u - u_1 - 2u_2 = 0\ 0\ 0
\end{array}$$

Donc $\{u_1; v - u_1; u_2\}$ est une base de $F_1 + G$, $\dim(F_1 + G) = 3$.

$\dim F_1 \cap G = \dim F_1 + \dim G - \dim F_1 + G$
$= 2 + 2 - 3 = 1$.

La relation de dépendance R montre que $\underbrace{u_1 + 2u_2}_{F_1} = \underbrace{u}_{G} \in F_1 \cap G$ est 1 élément non nul de $F_1 \cap G$ et dim $=1$. Donc $\{u\}$ est base de $F_1 \cap G$.

=> ... donc $F_1 + G = \mathbb{R}^3$

donc $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus G$ est ... car $F_1 \cap G = \{0\}$

6) D'après le cours tout $\mathbb{R}^3$ esp vectoriel de dim finie et de E admet une infinité de supp..., G admet donc deux sous esp supp distincts, F_1 et F_2. Dans la pratique, on ajoute à u, v, une 3ème vecteur w, linéairement indép de u, v (Cela se voit par échelonnement) on obtient un supplémentaire $\mathbb{R}w = \text{vect}(w)$

exemple : $u = 1 \; -1 \; 1$
$v - u = 0 \; -2 \; -1$

w peut être $0, 0, 1$ ou $1, 1, ...$

$F_1 = \text{vect}(w_1)$; ...
$F_2 = \text{vect}(w_2)$

7) Equation cartésienne de G :

Soit $w = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$.

$w \in G \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, w = \alpha u + \beta v$

$$\iff \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = 2\alpha + \beta \end{cases}$$ en échelonnant par rapport à α, β on obtient

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y - x = -2\beta \\ z - 2x = -\beta \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ z - 2x = -\beta \\ y - x - 2(z - 2x) = 0 \quad (K) \end{cases}$$

$$\iff 3x + y - 2z = 0$$

Cette relation (K) indépendante de α, β est un syst d'équation de G (formé d'une seule équation)

V - 1) $\text{card}(V) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Il suffit de montrer que V est libre

2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3) ${}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det P = 2$

$P^{-1} = \frac{1}{|P|}\,{}^t\mathrm{com}\,P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cdot & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5) $A' = \mathcal{M}_V(f) = \begin{array}{c|ccc} & f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \\ \hline v_1 & \alpha & & \\ v_2 & \beta & & \\ v_3 & \gamma & & \end{array}$

Posons

$f(v_1) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (\alpha, \alpha+\beta+\gamma, -\beta+\gamma) = f(1,1,0) = A.\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0$

$f(v_1) = 0$; Donc $\alpha = 0$, $\alpha+\beta+\gamma = 0 \Rightarrow -\beta+\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

$f(v_2) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = A.v_2 = A\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = v_2$

$f(v_2) = v_2 = 0.v_1 + 1.v_2 + 0\,v_3$; $f(v_3) = A.v_3 = (0, -1, -1) = -v_3$

Donc $\mathcal{M}_V(f) = \begin{array}{c|ccc} & f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \\ \hline v_1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & -1 \end{array} = A' = P^{-1}.A.P$

$A = P.A'.P^{-1}$; $A^n = P.A'^n.P^{-1} = P.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1^n \end{pmatrix}.P^{-1}$

V.- 1) $\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4$

Si f est injectif, $\dim \mathrm{Ker} f$ $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}^4 = 4$

or $\mathrm{Im} f \subseteq \mathbb{R}^3$, donc $\dim \mathrm{Im} f \leq 3$ ce qui est impossible

$\Rightarrow$ f ne peut pas être injective ; Mais f peut être surjective

dans ce cas où $\dim \mathrm{Ker} f = 1$).

2) $\dim \mathrm{Im}\, g + \dim \mathrm{Ker}\, g = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Donc $\dim \mathrm{Im}\, g < \dim \mathbb{R}^4$, Donc $\mathrm{Im}\, g = \mathbb{R}^4$ est impossible

c.à.d. g ne peut pas être surjective.

Mais rien n'empêche que g soit injective

($\mathrm{Ker}\, g$ peut être nul).

chapitre 2 : Application linéaire

I) E et F étant deux Espace Vectoriel sur $\mathbb{K}$ et Soit $f : E \to F$ une Application linéaire si :
1°) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall x, y \in E$.
2°) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E$.
. Si $f(0_E) \neq 0_F$ Alors f n'est pas linéaire

II) Noyau d'une Application linéaire :
. $Ker(f) = \{x \in E / f(x) = 0_F\} = f^{-1}(0_E) = f^{-1}(\{0_E\})$

N.B : 1) $Ker(u)$ est un S.e.v de E.
2) f Injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0_E\}$

III) Image d'une Application linéaire :
. $Im(f) = \{u(x) / x \in E\} = u(E)$
$y \in Im(f) \Leftrightarrow \exists x \in E / u(x) = y$.

N.B : 1) $Im(f)$ est un S.e.v de F
2) f Surjective $\Leftrightarrow Im(f) = F$.

. Si $Dim(E) = Dim(F) \Leftrightarrow f$ est Injective
$\Leftrightarrow f$ est Surjective
$\Leftrightarrow f$ est bijective

. Si $(x_1; \dots; x_n)$ est un S.g de E Alors $(f(x_1); \dots; f(x_n))$ est un S.g de $Im(f)$

. Si f est Injective Alors l'image d'un Système libre de E est un Système libre de F.

IV) Endomorphisme d'Espace V.

On appelle Endomorphisme toute Application linéaire de E Dans E.
Ex : $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x, y) \to (x, 3y + 2x, 5x)$ est un Endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

V) Isomorphisme d'Espace Vec

une Application linéaire u est dite une Isomorphisme si $\begin{cases} 1°) \ u \text{ est linéaire} \\ 2°) \ u \text{ est bijective} \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Injective} \\ \text{Surjective} \end{cases}$

VI) Automorphisme d'Espace V

. E étant un $\mathbb{K}$-e.v, un Automorphisme de E est tout Endomorphisme bijectif de E.

M103