Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : M 1105
Examen : Final

Année : 2018 - 2019
Durée : 2h

Exercice 1. (20 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + 3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(1) Montrer que f est continue en (0,0).

(2) Chercher les dérivées partielles premières en (0,0).

(3) f est-elle différentiable en (0,0)?

(4) Chercher $f'_x(x,y)$, pour $(x,y) \in (\mathbb{R}^2)^*$. La fonction f'_x est-elle continue en (0,0)?

Exercice 2. (20 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)\,e^{-x}$.

(1) Déterminer les extremums locaux de f.

(2) Montrer que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle ne possède pas de maximum global.

Exercice 3. (30 points)[Les 2 questions (A) et (B) sont indépendantes]

(A) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x,y) = x ch y + y ch x$.
Appliquer la formule des accroissements finis, à f, entre les points $(0,0)$ et (a,a) pour montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \exists \theta \in]0,1[;\ \frac{cha}{ch(\theta a)} = 1 + (\theta a) th(\theta a).$$

(B) Soit W une forme différentielle définie sur $D = \mathbb{R} \times \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par

$$W(x,y) = \frac{2x \tan y}{(1+x^2)^2}\,dx - \frac{1+\tan^2 y}{1+x^2}\,dy.$$

W est-elle exacte? Si oui, chercher le potentiel f telle que $W = df$.

Exercice 4. (30 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x,y) = y^3 - 3y\left(a^2+x\right) + \frac{x^2}{2} + 4ax + 2a^3,$$

avec a est un réel non nul.

(1) Montrer que le théorème des fonctions implicites s'applique au point $(0,a)$.

(2) Déduire l'existence d'une fonction implicite φ au voisinage du point $(0,a)$.

(3) Cherher l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) d'équation $f(x,y) = 0$ au point $(0,a)$. Préciser la position de (T) par rapport à (C) au point $(0,a)$.

Bonne Chance

Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : M 1105

Examen : Final+partiel

Année : 2017 - 2018

Durée : 2h 30m

مطلوب الاجابة على كل جزء بشكل متواصل و دون تداخل مع الجزء الاخر.

Partiel sur 100pts pour 45 minutes

Exercice 1 (40 points)
Soit la fonction $f(x,y) = \dfrac{\ln x}{x^2+y^2-9}$

(1) Déterminer et tracer le domaine de définition D de f.

(2) D est-il ouvert ? justifier votre réponse.

(3) Déterminer la frontière de D.

Exercice 2. (20 points)
Soit la fonction

$$f(x,y) = \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

f est-elle prolongeable par continuité en (0,0) ? Si oui, déterminer son prolongement.

Exercice 3. (40 points)
Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Chercher les dérivées partielles premières en (0,0).

(3) Montrer que f est différentiable en (0.0).

Final sur 100pts pour 105 minutes

Exercice 4. (30 points)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x,y) = 2x^2+2y^2+x^2y^2-x^4-y^4$.

(1) Déterminer les extremums locaux de f.

(2) Montrer que $f(x,y) \leq 2r^2 - \dfrac{r^4}{4}$ où $r^2 = x^2+y^2$.
pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
En déduire que $f(x,y) \leq 4$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(3) Montrer que f admet une valeur maximale globale. Préciser en quels points, cette valeur est atteinte.

(4) Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to 0}} f(x,y)$.

f admet-elle un minimum global ?

Exercice 5. (15 points)
Soient f la fonction réelle à deux variables définie par :

$$f(x, y, z) = x^2 + xz + e^{xyz} + \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) - 3.$$

(1) Trouver le plan tangent à la surface $(S) : f(x, y, z) = 0$ au point $A = (1, 1, 0)$.

(2) Montrer que la relation $f(x, y, z) = 0$ définit une fonction implicite $z = \varphi(x, y)$ au point (1,1) telle que $\varphi(1, 1) = 0$.

(3) Calculer $\varphi'_x(1, 1)$ et $\varphi'_y(1, 1)$.

Exercice 6. (25 points)
Soit

$$W(x, y) = \left(\frac{y}{\cos^2 x} + \ln\left(1 + y^2\right)\right) dx + \left(g(x) + \frac{2xy}{1 + y^2}\right) dy$$

une forme différentielle définie sur $D = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}$.

(1) Déterminer la fonction $g : \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ telle que $g(0) = 0$ et W soit exacte.

(2) Chercher une primitive de W ainsi trouvée.

Exercice 7. (30 points)
Soient $f(x, y) = y^2 - x^2 y + x^2$ et $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\right\}$.
Représenter D et déterminer les extremums et les valeurs extrémales de f sur D.

Bonne Chance

Révision :

Final 2017 - 2018

Ex 6 :

$$w(x,y) = \left(\frac{y}{\cos^2 x} + \ln(1+y^2)\right)dx + \left(g(x) + \frac{2xy}{1+y^2}\right)dy$$

définie sur $D =]-\pi/2, \pi/2[\times \mathbb{R}$

(1) Déterminer $g :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$; $g(0) = 0$ et w soit exacte ?

(2) chercher une primitive de w ainsi trouvée.

Solution

1) w exacte $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} + \cancel{\frac{2y}{1+y^2}} = g'(x) + \cancel{\frac{2y}{1+y^2}}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

comme $g(0) = 0$ alors $C = 0$ et donc $\boxed{g(x) = \tan x}$

2) w exacte $\Rightarrow \exists f(x,y)$; $w = df \Rightarrow$ (primitive)

f vérifie le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{\cos^2 x} + \ln(1+y^2) & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \tan x + \frac{2xy}{1+y^2} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow f(x,y) = y \int \frac{dx}{\cos^2 x} + (\ln(1+y^2))x$$

$$= y \tan x + x \ln(1+y^2) + C(y)$$

② $\frac{\partial f}{\partial y} = \cancel{\tan x} + x\frac{2y}{1+y^2} + C'(y)$

$= \cancel{\tan x} + \frac{2xy}{1+y^2} \Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = k$

et donc $\boxed{f(x,y) = y\tan x + x\ln(1+y^2) + k}$

Ex 4.

$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$

(1) Extremums locaux de f:

pts critiques $\begin{cases} f'_x = 0 \Rightarrow 4x + 2xy^2 - 4x^3 = 0 \\ f'_y = 0 \Rightarrow 4y + 2x^2y - 4y^3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x(2+y^2-2x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } 2+y^2-2x^2 = 0 \\ 2y(2+x^2-2y^2) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } 2+x^2-2y^2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x,y) = (0,0)$ ou $(x = 0$ et $2+x^2-2y^2 = 0)$

ou $(y = 0$ et $2+y^2-2x^2 = 0)$ ou

$(2+y^2-2x^2 = 0$ et $2+x^2-2y^2 = 0)$ $\Rightarrow 2+x^2-2(2+2x^2)$ ... $\Rightarrow -3x^2 = -6 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ ou

$\Rightarrow (x,y) = (0,0)$ ou $(x = 0, y = \pm 1)$

ou $(y = 0, x = \pm 1)$ ou $(x = \pm\sqrt{2}, y = \pm\sqrt{2})$

et donc $y^2 = -2+2\cdot 2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$

pts critiques:

$(0,0), (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0),$

$(\sqrt{2},\sqrt{2}), (-\sqrt{2},-\sqrt{2}), (-\sqrt{2},\sqrt{2})$ et $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$

$f''_{x^2} = 4+2y^2 - 12x^2$

$f''_{y^2} = 4+2x^2 - 12y^2$

$f''_{xy} = (f'_x)'_y = 4xy$

$\Delta = f''_{x^2} \cdot f''_{y^2} - (f''_{xy})^2$

$= (4+2y^2-12x^2)(4+2x^2-12y^2) - (4xy)^2$

Au pt $(0,0)$ $\Delta = 16 > 0$ et $f''_{x^2} = 4 > 0$

$\Rightarrow (0,0)$ minimum local et $f(0,0) = 0$

" $(0, \pm 1)$ $\Delta = 6(-8) - 0 = -48 < 0$

et $(\pm 1, 0)$ $\Rightarrow$ pts cols (ou pts selles)

Au pts $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ $\Delta = (8-24)(8-24)$

$- (8)^2 = (16)^2 - 8^2 > 0$

et $f''_{x^2} = -16 < 0 \Rightarrow$ pts maximaux locaux

et $f(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$

Ex 4 : $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$

(1) Montrer que $f(x,y) \leq 2r^2 - \frac{r^4}{4}$

avec $r^2 = x^2 + y^2$

En déduire $f(x,y) \leq 4$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$f(x,y) - 2r^2 + \frac{r^4}{4} = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4 - 2(x^2+y^2) + \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$

$= \cancel{2x^2} + \cancel{2y^2} + x^2y^2 - x^4 - y^4 \ldots$

$= x^2y^2 - x^4 - y^4 + \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2}$

$= -\frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{4}y^4 + \frac{3}{2}x^2y^2$

$= -\frac{3}{4}\left[x^4 + y^4 - 2x^2y^2\right]$

$= -\frac{3}{4}(x^2 - y^2)^2 \leqslant 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Montrons que $2r^2 - \frac{r^4}{4} \leqslant 4$

c.à.d $2r^2 - \frac{r^4}{4} - 4 \leqslant 0$?

c.à.d $8r^2 - r^4 - 16 \leqslant 0$

c.à.d $-((r^2)^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot r^2) \leqslant 0$

c.à.d $-(r^2 - 4)^2 \leqslant 0$ vrai toujours

Donc $f(x,y) \leqslant 4 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(3) Montrer f admet une valeur maximale globale ; préciser en quels pts cette valeur est atteinte

on a, $f(x,y) \leqslant 4 = f(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Donc ~~[illegible]~~ f admet 4 comme valeur maximale. Cette valeur est atteinte aux pts $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ maximums globaux

(4) Calculer :

$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to 0}} f(x,y) = -\infty$

f ~~n'ad~~ ~~et~~ ~~elle~~ un minimum global

Donc $\forall M \in \mathbb{R}, \exists (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$f(x_0, y_0) < M$ Ce qui montre que f n'ad et pas un minimum global

$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + x^6 \varepsilon(x)$

Ex 3 :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1) cont

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{u\to 0 \\ u = x^2+y^2}} \frac{\sin u}{u}$

$= 1 = f(0,0)$

et $f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ cont sur $(\mathbb{R}^2)^*$

[composé des fcts conts]

par suite f est cont sur $\mathbb{R}^2$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!}$ (2) f est elle diff en $(0,0)$?

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x^2}{x^2} - 1}{x - 0}$

$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x^2 - x^2}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(\cancel{x^2} - \frac{x^6}{6} - \cancel{x^2} + x^6 \varepsilon(x))}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0} (-x^3 + x^6 \varepsilon(x)) = 0 = f'_x(0,0)$

$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\sin y^2}{y^2} - 1}{y - 0}$

$= \lim_{y\to 0} \left(\frac{\sin y^2 - y^2}{y^3}\right) = \dots = 0 = f'_y(0,0)$.

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} - 1 - 0(x) - 0(y)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\sin(x^2+y^2) - (x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right|$ $\longrightarrow \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + u^3 \varepsilon(u)$

$u = x^2+y^2$

$= \lim_{u\to 0} \left|\frac{\sin u - u}{u^{3/2}}\right|$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\left| u - \frac{u^3}{6} - u + u^3 \varepsilon(u) \right|}{u^{3/2}}$$

$$= \lim_{u \to 0} \left| - u^{3/2} + u^3 \varepsilon(x) \right|$$

$$= 0$$

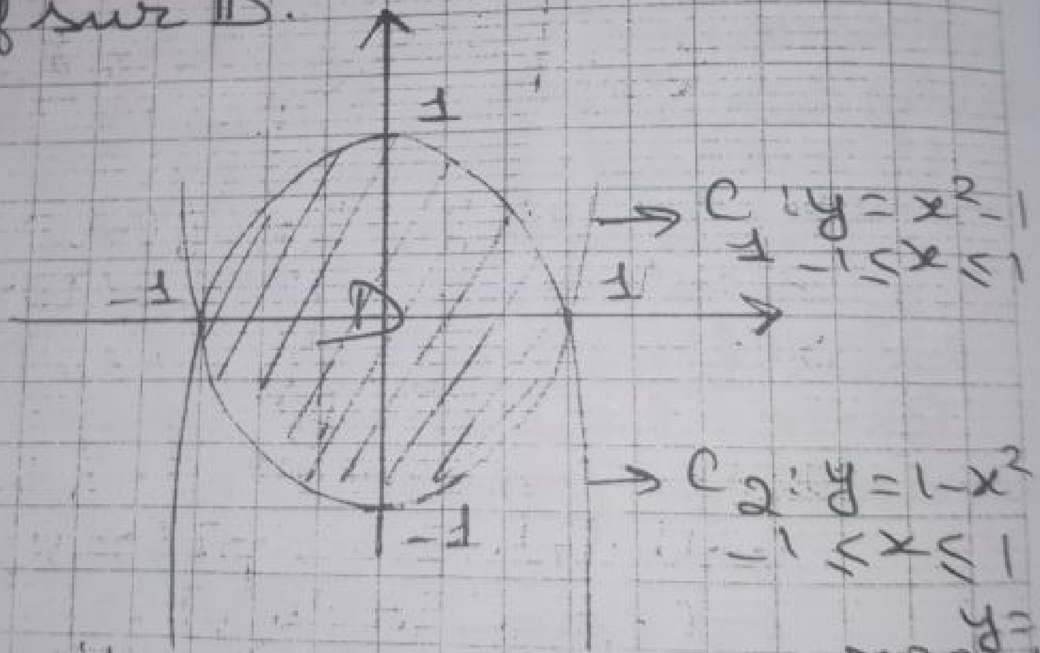
Donc f est Diff en $(0,0)$

Ex 7 : $f(x,y) = y^2 - x^2 y + x^2$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$

$C_1\ y = x^2 - 1 \qquad y = 1 - x^2\ C_2$

Repprésenter D et déterminer les extremums et les valeurs extrémales de f sur D.



pts critiques :

$x = 0 \quad y = 1$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \Rightarrow -2xy + 2x = 0 \Rightarrow 2x(-y+1) = 0 \\ \text{et} \\ f'_y = 0 \Rightarrow -x^2 + 2y = 0 \Rightarrow 2y = x^2 \end{cases}$$

3 pts critiques $(x=0, y=0)$ ou $(\pm\sqrt{2}, 1)$
$\in D$ $\notin D$
un seul pt critique intérieur à D :
$(0,0)$ avec $f(0,0)=0$
paramétrisations :

C_1 : $g_1 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto g_1(x) = f(x, x^2-1)$
$= (x^2-1)^2 - x^2(x^2-1) + x^2$
$= \quad = 1$

C_2 : $g_2 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto g_2(x) = f(x, 1-x^2)$
$= \ldots = 2x^4 - 2x^2 + 1$

x	-1		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		1
g_2'		$-$		$+$		$-$		$+$	
g_2	1	$\searrow$	$1/2$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$1/2$	$\nearrow$	1

$x=-1 \Rightarrow g_2(-1) = f(-1,0) = 1$
$x=1 \Rightarrow g_2(1) = f(1,0) = 1$
$x=0 \Rightarrow g_2(0) = f(0,1) = 1$

$\sup_D (f)$
- valeur maximale de f sur D est 1, atteintes aux pt $(x,y) \in C_1$; $-1 \le x \le 1$, $(\pm 1, 0)$ et $(0,1)$
- valeur minimale de f sur D est 0,
$\operatorname{Inf}_D(f)$
atteinte au pt $(0,0)$.

Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: Math 1105
Session: 2ème session

Année: 2017-2018
Durée: 2h

Exercice 1 (15 points)
Soit la fonction $f(x,y) = \sqrt{x}\ \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$.

1. Déterminer et tracer le domaine de définition D de f.
2. D est-il ouvert? justifier votre réponse.
3. Déterminer la frontière de D.

Exercice 2 (20 points)[Les 2 questions (1) et (2) sont indépendantes]

1. Soit la fonction
$$f(x,y) = \frac{(x+y)\ln(1+|xy|)}{x^2+y^2}.$$
f est-elle prolongeable par continuité en (0,0)? Si oui, déterminer son prolongement.
2. Étudier la différentiabilité en (0,0) de la fonction
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{xy}+xy}{x^2+y^2+xy}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 3 (20 points)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application telle que $f(x,y) = x(\ln x)^2 + xy^2$.

1. Préciser le domaine de définition D de f.
$(1,0)$ $\left(\frac{1}{e^2}, 0\right)$
2. Montrer que f admet 2 points critiques $\cancel{(0,1)}$ et $\cancel{\left(0,\frac{1}{e}\right)}$ sur D et déterminer leur nature.
3. Montrer que le minimum local obtenue est un minimum global.

Exercice 4 (15 points)

1. Vérifier que la relation $e^{xy} + y^2 - xy - 3y + 2x = -1$ définit $y = \phi(x)$ au voisinage de (0,1).
2. Donner le développement limité de la fonction ϕ au voisinage de 0 jusqu'à l'ordre 2.
3. En déduire l'équation de la tangente au voisinage de $x = 0$ à la courbe (C) de la fonction ϕ et sa position par rapport à celle-ci.

Exercice 5 (20 points)

1. Déterminer a de telle sorte que le champ
$$\vec{H}(x,y,z) = (x+3y)\ \vec{i} + (y-2z)\ \vec{j} + (x+az)\ \vec{k}$$
soit de divergence nulle.
2. Trouver a, b et c pour que le champ
$$\vec{V}(x,y,z) = (x+2y+az)\ \vec{i} + (bx-3y-z)\ \vec{j} + (4x+cy+2z)\ \vec{k}$$
soit conservatif. Chercher, dans ce cas, le potentiel de $\vec{V}$.

Exercice 6 *(10 points)*
Soit $f(x,y) = e^{xy} - \sin(x+y) + 1$.

1. Trouver la fonction affine $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que A soit la meilleure approximation de f au voisinage de (1,-1).
2. Trouver une valeur approchée de $f(0.9, -1.1)$.

Bonne Chance

Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: Math 1105
Session: Final

Année: 2016-2017
Durée: 2h

Exercice I : (10 points).
Soient f, g et h trois fonctions définies par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \to & (t^2-2, 1-t^3) \end{array} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \to & u^3+v^3+2uv+1 \end{array} \quad \text{et } h = g \circ f.$$

1. Donner les matrices Jacobiennes des fonctions f et g.
2. Déduire la différentiabilité $dh(-1)$ de la fonction h au point -1.

Exercice II : (20 points).
Soit le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\vec{V}(x,y,z) = (yz + x^2y^3)\,\vec{i} + (xz + x^3y^2)\,\vec{j} + f(x,y)\,\vec{k},$$

où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1.

1. Déterminer la fonction f telle que $f(0,0) = 0$ de sorte que $\vec{V}$ soit un champ gradient.
2. Trouver, dans ce cas, le potentiel $U(x,y,z)$ qui vérifie $U(1,0,1) = 0$.

Exercice III : (20 points).
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2 + (y+1)^2.$$

Utiliser la méthode de Lagrange pour trouver les valeurs extrémales de f soumise à la contrainte $2x^2 + (y-1)^2 = 18$.

Exercice IV : (20 points).
On considère la fonction f de classe C^2 sur $]0,1[\times]0,1[$ définie par

$$\forall (x,y) \in]0,1[\times]0,1[: \; f(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}.$$

1. Calculer, pour tout $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[$, les dérivées partielles $f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$.
2. Montrer qu'il existe un unique point critique I de f dans $]0,1[\times]0,1[$, à déterminer.
3. Donner la nature de I.

Exercice V : (30 points).
Soit f la fonction réelle à deux variables définie par :

$$f(x,y) = (x+a)^2 + (y-1)^2 - a^2, \text{ où } a \text{ est un paramètre réel.}$$

1. En utilisant la définition de la différentiabilité d'une fonction à un point donné, vérifier que f est différentiable au point $(0,1)$.
2. Pour quelles valeurs de a, le théorème des foutions implicites est-il applicable au voisinage de $(0,1)$.
3. Dans cette partie, on prend $a \in \mathbb{R}^*$.
   (a) Montrer que l'équation $f(x,y) = 0$, peut s'écrire de la forme $x = \varphi(y)$ au voisinage de $(0,1)$.
   (b) Donner, en fonction de a, le développement limité de la fonction φ au voisinage de 1 et jusqu'à l'ordre 2.
   (c) En déduire l'équation de la tangente au point $(0,1)$ à la courbe (C) de la fonction φ et sa position par rapport à celle-ci.

Bonne Chance

Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: Math 1105
Session: 2ème session (Calculatrice non permise)

Année: 2016-2017
Durée: 2h

Exercice I : (25 points).
Soit le champ de vecteurs

$$\vec{V}(x,y) = \left(\frac{g(y)}{x} + \cos y\right)\vec{i} + (2y\ln x - x\sin y)\,\vec{j}.$$

1. Déterminer la fonction g de classe C^∞ telle que $g(1)=1$ de sorte que $\vec{V}$ soit un champ gradient.
2. Trouver, dans ce cas, le potentiel $\varphi(x,y)$ qui vérifie $\varphi\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Exercice II : (25 points).

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\sin y + y^2\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

1. Montrer que f est continue au point $(0,0)$.
2. Calculer les dérivées partielles de f au point $(0,0)$.
3. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?
4. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

[illegible]

Exercice III : (20 points).
On considère la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2;\ f(x,y)=(x-1)(y-2)(x+y-6).$$

1. Montrer que f admet un unique extremum local I, à déterminer.
2. Donner la nature de I.

Exercice IV : (30 points).

ch 4

1. Soit f la fonction réelle à deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y)=xe^y+e^x\sin(2y)$.
   (a) Montrer qu'il existe deux voisinages I, J de 0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi: I\to J$ telle que l'équation $f(x,y)=0$ peut s'écrire de la forme $y=\varphi(x)$.
   (b) Donner le développement limité de la fonction φ au voisinage de 0 et jusqu'à l'ordre 2.
   (c) En déduire l'équation de la tangente au point (0,0) à la courbe (C) de la fonction φ et sa position par rapport à celle-ci.
2. Soit g la fonction réelle à trois variables définie sur $I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y,z)\in I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\quad g(x,y,z)=x+y+z+\sin(xyz)+\varphi(x).$$

   (a) Montrer qu'il existe un voisinage $W\subset\mathbb{R}^3$ telle que l'équation $g(x,y,z)=0$, peut s'écrire de la forme $z=\phi(x,y)$ au voisinage de $(0,0,0)$.
   (b) Calculer les dérivées partielles $\phi'_x(0,0)$ et $\phi'_y(0,0)$.

Bonne Chance

Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: Math 1105
Session: Final

Année: 2015-2016
Durée: 2h

Exercice I : (25 points).

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2e^y + y^2e^x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1. Montrer que f est continue au point $(0,0)$.
2. Calculer les dérivées partielles de f au point $(0,0)$.
3. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?
4. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice II : (25 points).

Soit (C) la courbe d'équation polaire : $r(\theta) = 1 + \tan\theta$.

1. Trouver la période minimale de $r(\theta)$ et la symétrie de la courbe (C).
2. Construire la courbe (C).
3. Déterminer l'équation cartésienne de la tangente à la courbe (C) au point $M(\theta = \pi)$.

Exercice III : (25 points).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Déduire que f admet 2 minimums locaux A et B à déterminer.
3. (a) Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) + 2 \geq (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2$.
   (b) En déduire que A et B sont 2 minimums globaux.

Exercice IV : (25 points).

Soit f la fonction réelle à deux variables définie par :

$f(x,y) = \mathrm{sh}(x+y-a) + e^{xy} + ax - (a+1)y - a^2 - 1$, où a est un paramètre réel.

1. Pour quelles valeurs de a, le théorème des fontions implicites est-il applicable au voisinage de $A(a,0)$.
2. On suppose que $a = 1$.
   (a) Montrer que l'équation $f(x,y) = 0$, peut s'écrire de la forme $x = \phi(y)$ au voisinage de $A(a,0)$.
   (b) Donner le développement limité de la fonction ϕ au voisinage de 0 et jusqu'à l'ordre 2.

Bonne Chance

Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 1105
Examen : 2ème session (Calculatrice non autorisée)

Année : 2015 - 2016
Durée : 2 heures

Exercice 1. (20 points) [Les questions (1) et (2) sont indépendantes]

(1) Soient f et g les fonctions définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$f(x,y) = (3x, 5y) \text{ et } g(u,v) = (u-3, v-5).$$

(a) Déterminer les matrices jacobiennes de f et g en tout point de $\mathbb{R}^2$.

(b) En déduire la matrice jacobienne de $f \circ g$ au point (1,0).

(2) Soient a un paramètre réel et $\vec{V}$ un champ vectoriel défini sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\vec{V} = a(y-z)\,\vec{i} + (y-az)\,\vec{j} + az\,\vec{k}.$$

(a) Pour quelles valeurs a, $\vec{V}$ dérive d'un potentiel f ?

(b) Déterminer f.

Exercice 2. (30 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} x + \dfrac{\sin^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(1) Montrer que f est conntinue au point (0,0).

(2) Calculer les dérivées partielles premières de f au point (0,0).

(3) f est-elle différentiable au point (0,0) ?

(4) f est-elle de classe C^1 au point (0,0) ?

Exercice 3. (25 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x,y) = x^4 - y^4 + 2x^2$.

(1) Déterminer les points critiques de f et préciser leur nature.

(2) Soient a un nombre réel positif non nul et D un domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

Chercher les valeurs extrémales de f sur D.

Exercice 4. (25 points)

Soit (C) la courbe définie par l'équation polaire : $r(\theta) = \dfrac{\cos\theta}{1-\cos\theta}$.

(1) Montrer que (C) admet un axe de symétrie et une branche asymptotique.

(2) Construire la courbe (C).

(3) Déterminer l'équation cartésienne de la tangente à la courbe (C) au point $M\left(\theta = \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Bonne Chance.

Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 105
Durée : 2 heures

Année : 2013 - 2014
Examen : Final

Exercice 1 (15 points).

1. (a) Calculer $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$.

   (b) Calculer par parties $\int \frac{x^4}{x^2+1}\arctan(x)\,dx$.

2. Calculer $\int \frac{dx}{5+4\sin(x)}$.

Exercice 2 (20 points : 10 + 10).

1. Soit $u_n = \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}}$. Utiliser $\ln(u_n)$ pour calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. (a) Soit $x \in]1,+\infty[$. Montrer qu'il existe $\zeta \in [x, x^2]$ tel que
$$\int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}\,dt = \frac{\ln(\zeta)}{\zeta-1}\ln(x+1).$$

   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to1^+} \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{(t-1)^2}\,dt$.

Exercice 3 (15 points).

1. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer que $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$.

2. Utiliser (1) pour calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,dx$.

   Rappel : $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$.

Exercice 4 (15 points). Trouver l'équation de l'asymptote en $+\infty$ à la courbe d'équation $y = \frac{x\sin(\frac{1}{2x})}{\sqrt{1+\frac{1}{2x}}}$ puis préciser la position de cette asymptote par rapport à la courbe.

Exercice 5 (15 points). Déterminer la nature des intégrales suivants :

1. $I_1 = \int_0^1 \frac{\sin\sqrt{t}-\tan\sqrt{t}}{t^2}\,dt$.

2. $I_2 = \int_0^{+\infty} t\sin(t)e^{-t}\,dt$.

Exercice 6 (20 points).

1. Étudier selon la valeur de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de l'intégrale $J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha\sqrt{t^2-1}}$.

2. Calculer $J(\alpha)$ pour $\alpha = 2$.

Houssam Khalil & Abir Nour. Copyright © 2015

Exercice 1 .

1. (a) Par division euclidienne on obtient $x^4 = (x^2-1)(x^2+1)+1$. Donc

$$I = \int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int (x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1})\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + c.$$

(b) Soit $J = \int \frac{x^4}{x^2+1} \arctan x \,\mathrm{d}x$. Soit

$$u = \arctan x \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$v' = \frac{x^4}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x$$

Donc

$$J = \left(\tfrac{x^3}{3} - x + \arctan x\right)\arctan x - \int \left(\tfrac{x^3}{3} - x + \arctan x\right)\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Or

- $\displaystyle\int \arctan x \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + c,$
- $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$ et
- $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^2} \overset{\text{division}}{=} \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$

Par suite $J = \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right)\arctan x - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + c.$

2. Soit $K = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5+4\sin x}$. On pose $t = \tan\frac{x}{2}$, alors $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$. Donc

$$K = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{5 + \frac{8t}{1+t^2}} = \frac{2\,\mathrm{d}t}{5+5t^2+8t} = \frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{9}{25}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}\arctan\left(\tfrac{5}{3}\left(t+\tfrac{4}{5}\right)\right) + c$$
$$= \frac{2}{3}\arctan\left(\tfrac{5}{3}\left(\tan\tfrac{x}{2} + \tfrac{4}{5}\right)\right) + c.$$

Exercice 2 .

1. On a

$$\ln u_n = \ln\left(\tfrac{n+1}{n}\cdots\tfrac{n+n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\tfrac{n+k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\tfrac{k}{n}\right) = \mathcal{R}(f,\sigma,(\xi_k)_{1\le k\le n})$$

avec $f(x) = \ln(1+x)$ continue, $\sigma = \left\{0, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ et $\xi_k = \frac{k}{n}$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \ln u_n = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = (1+x)\ln(1+x) - x\Big]_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = e^{2\ln 2 - 1} = e^{\ln 4}\cdot e^{-1} = \frac{4}{e}.$

Houssam Khalil & Abir Nour. Copyright © 2015

2. (a) Soit $x \in]1, +\infty[$. On pose $f(t) = \frac{\ln t}{t-1}$ et $g(t) = \frac{1}{t-1}$. On a f et g sont continues et positives sur $[x, x^2]$, donc d'après le premier théorème de la moyenne, il existe $\xi \in [x, x^2]$ tel que

$$\int_x^{x^2} \frac{\ln t}{(t-1)^2}\,dt = \int_x^{x^2} f(t)g(t)\,dt = f(\xi)\int_x^{x^2} g(t)\,dt = \frac{\ln \xi}{\xi - 1}\int_x^{x^2}\frac{dt}{t-1}$$
$$= \frac{\ln \xi}{\xi-1}(\ln(x^2-1) - \ln(x-1)) = \frac{\ln\xi}{\xi-1}\ln(x+1).$$

(b) On a
$$\lim_{x\to 1^+}\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{(t-1)^2}\,dt = \lim_{x\to 1^+}\frac{\xi}{\xi-1}\ln(x+1) = 1\cdot\ln 2 = \ln 2,$$
car, comme $\xi \in [x, x^2]$, alors $\xi \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 1^+$ et $\lim_{\xi\to 1^+}\frac{\ln\xi}{1-\xi} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{\xi \to 1^+}\frac{\frac{1}{\xi}}{1} = 1.$

Exercice 3 .

1. Soit $x = a+b-t$. Donc $dx = -\,dt$ et $x = a \Rightarrow t = b$, $x = b \Rightarrow t = a$. Par suite
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(a+b-t)\,dt = \int_a^b f(a+b-t)\,dt = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

2. D'après (1) et pour $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{4}$ on obtient
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\tfrac{\pi}{4}-x\right)\right)\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\,dx = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I$$

Donc $2I = \frac{\pi}{4}\ln 2$ et $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

Exercice 4 . Soit $t = \frac{1}{x}$. Alors
$$y = \frac{1}{t}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sqrt{1+\frac{t}{2}}} \overset{DL_2}{=} \frac{1}{t}\frac{\frac{t}{2}+t^2\varepsilon_1(t)}{1+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{32}+t^2\varepsilon_2(t)} \overset{\text{Division}}{=} \frac{1}{t}\left(\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+t^2\varepsilon_3(t)\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{8x}+\frac{1}{x}\varepsilon(x).$$

Donc $Y = \frac{1}{2}$ est l'équation de l'asymptote et $y - Y \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{8x} < 0$ au voisinage de $+\infty$, donc la courbe est au dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 5 .

1. La fonction $f(t) = \frac{\sin\sqrt{t} - \tan\sqrt{t}}{t^2}$ est continue et négative sur $]0, 1]$. De plus
$$f(t) = \frac{\sqrt{t} - \frac{t\sqrt{t}}{3!} + t\sqrt{t}\varepsilon_1(t) - \left(\sqrt{t}+\frac{t\sqrt{t}}{3}+t\sqrt{t}\varepsilon_2(t)\right)}{t^2} = \frac{-\frac{t\sqrt{t}}{2}+t\sqrt{t}\varepsilon(t)}{t^2} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2\sqrt{t}}.$$
Donc I_1 est convergente ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

Houssam Khalil & Abir Nour. Copyright © 2015

2. La fonction $g(t) = t \sin t e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $|g(t)| \leq te^{-t}$. Or $\int_0^{+\infty} te^{-t}\, dt$ est convergente (car $t^2 \cdot te^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$) donc $\int_0^{+\infty} |g(t)|\, dt$ est convergente, c'est-à-dire I_2 est absolument convergente et par suite I_2 est convergente.

Exercice 6 .

1. On a $J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \sqrt{t^2-1}} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \sqrt{t^2-1}} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \sqrt{t^2-1}} = A(\alpha) + B(\alpha)$.

   La fonction $f_\alpha(t) = \frac{1}{t^\alpha \sqrt{t^2-1}}$ est continue et positive sur $]1, +\infty[$. Et

   - $f_\alpha(t) \underset{1}{\sim} \frac{1}{1^\alpha (1+1)^{\frac{1}{2}} (t-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}(t-1)^{\frac{1}{2}}}$. Donc $A(\alpha)$ est convergente pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (car $\frac{1}{2} \leq 1$). Et
   - $f_\alpha(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^\alpha \cdot t} = \frac{1}{t^{\alpha+1}}$. Donc $B(\alpha)$ est convergente ssi $\alpha + 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$.

   Par suite $J(\alpha)$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

2. $J(2) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \sqrt{t^2-1}}$ est bien définie d'après la partie (1). On a

$$\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}} \underset{t = \operatorname{ch} u}{=\!=} \int \frac{\operatorname{sh} u \, du}{\operatorname{ch}^2 u \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1}} = \int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + c = \operatorname{th}(\operatorname{argch} t) + c.$$

Donc $J(2) = \lim\limits_{\substack{a \to 1^+ \\ b \to +\infty}} \operatorname{th}(\operatorname{argch} t) \Big]_a^b = \lim\limits_{\substack{a \to 1^+ \\ b \to +\infty}} \Big(\operatorname{th}(\operatorname{argch} b) - \operatorname{th}(\operatorname{argch} a) \Big) = 1 - 0 = 1.$

Durée : 2 h

Année : 2013 _ 2014

Examen : Final

I 1. (a) $I(x) = \int \frac{x^4}{x^2+1} dx$

$= \int \left(x^2-1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx$

$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + ct.$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^2+1 \\ \hline -x^4 - x^2 & x^2-1 \\ -x^2 & \\ -x^2-1 & \\ \hline +1 & \end{array}$$

(b) $J(x) = \int \frac{x^4}{x^2+1} \arctan x \, dx$, on pose $u(x) = \arctan x$

et $dv(x) = \frac{x^4}{x^2+1} dx$, alors $du(x) = \frac{dx}{1+x^2}$ et $v(x) = \frac{x^3}{3} - x + \arctan$

Donc $J(x) = \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right) \arctan x - \int \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right) \frac{dx}{1+x}$

or $\int \arctan x \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + ct,$

et $\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln (1+x^2) + ct$ et

$\int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right) dx$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \hline x^3+x & x \\ \hline -x & \end{array}$$

$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) dx.$

D'où $J(x) = \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right) \arctan x - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln (1+x^2)\right)$

$+ \frac{1}{2} \ln (1+x^2) - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + ct.$

2. $K(x) = \int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$, on pose $t = \tan \frac{x}{2}$, alors $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ et $\sin x =$

alors $K(x) = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 + \frac{8t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{5 + 5t^2 + 8t} = \int \frac{2dt}{5t^2 + 8t + 5} = \frac{2}{5} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{8}{5}t}$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{dt}{t^2+\frac{8}{5}t+\frac{16}{25}+\frac{9}{25}} = \frac{2}{5}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{25}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{25}{9}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{5t+4}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{10}{9}\cdot\frac{3}{5}\cdot \arctan\left(\frac{5\tan\frac{x}{2}+4}{3}\right)+ct.$$

$$= \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{5\tan\frac{x}{2}+4}{3}\right)+ct.$$

EX2 1. $\ln U_n = \ln \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}} = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n+2}{n}\right)\cdots\left(\frac{n+n}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$= R(f, \sigma, (\xi_k)_{1\le k\le n})$ avec $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x) = \ln(1+x)$ cont.

$\sigma = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ et $\xi_k = \frac{k}{n}$ avec $1\le k\le n$

Donc $\ln U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \left[(1+x)\ln(1+x)-x\right]_0^1$

$= 2\ln 2 - 1$. D'où $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{2\ln 2-1} = e^{\ln 4}\cdot e^{-1} = \frac{4}{e}$

2. (a) soit $x\in]1,+\infty[$. On pose $f(t) = \frac{\ln t}{t-1}$ et $g(t) = \frac{1}{t-1}$

On a f et g 2 fonct continue et + sur $[x, x^2]$, donc d'après le 1°, théorème de la moyenne, $\exists \xi\in[x,x^2]$ tel que

$$\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{(t-1)^2}\,dt = \int_x^{x^2} f(t)g(t)\,dt = f(\xi)\int_x^{x^2} g(t)\,dt$$

$$= \frac{\ln\xi}{\xi-1}\int_x^{x^2}\frac{dt}{t-1} = \frac{\ln\xi}{\xi-1}\left[\ln(x^2-1)-\ln(x-1)\right] = \frac{\ln\xi}{\xi-1}\cdot\ln(x+1)$$

(b) $\lim_{x\to1^+}\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{(t-1)^2}\,dt = \lim_{x\to1^+}\frac{\ln\xi}{\xi-1}\ln(x+1) = 1\cdot\ln 2$

Car si $x\longrightarrow 1^+$ et on a $\xi\in[x,x^2]$, alors $\xi\longrightarrow1^+$ et donc $\frac{\ln\xi}{\xi-1}$ = $\frac{\ln\xi-\ln 1}{\xi-1} \longrightarrow (\ln t)'_1 = \left(\frac{1}{t}\right)_1 = 1$

$\boxed{EX\ III}$ 1. f cont sur $[a,b]$.

$$\int_a^b f(a+b-x) \underset{\substack{t=a+b-x \\ dt=-dx}}{=} \int_b^a f(t)(-dt) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

2. $$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{1+\tan x+1-\tan x}{1+\tan x}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I \text{ donc}$$

$$2I = \frac{\pi}{4}\ln 2 \quad \text{et} \quad I = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

$\boxed{EX\ IV}$ $$y = f(x) = \frac{x\sin\left(\frac{1}{2x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{2x}}} \qquad DLg_1(+\infty)$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sin\left(\frac{1}{2x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{2x}}} \qquad DL_2(+\infty). \text{ on pose } t=\frac{1}{x}$$

alors $$\varphi(t) = \frac{\sin\frac{t}{2}}{\sqrt{1+\frac{t}{2}}} = \frac{\frac{t}{2}+t^2\varepsilon_1(t)}{1+\frac{t}{4}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\cdot\frac{t^2}{4}+t^2\varepsilon_2(t)}$$

$$\begin{array}{r|l} \frac{t}{2} & 1+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{32} \\ \hline \frac{t}{2}+\frac{t^2}{8} & \frac{t}{2}-\frac{t^2}{8} \\ \hline -\frac{t^2}{8} & \end{array}$$

$$= \frac{\frac{t}{2}+t^2\varepsilon_1(t)}{1+\frac{t}{4}-\frac{t^2}{32}+t^2\varepsilon_2(t)}$$

$$= \frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+t^2\varepsilon(t).$$

Donc $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$, alors

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$.

D'où $y = \frac{1}{2}$ asymptote et $f(x) - y \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{8x}$ (...

donc la courbe est au dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

EX V $\quad I_1 = \int_0^1 \frac{\sin\sqrt{t} - \tan\sqrt{t}}{t^2}\,dt$

La fonction $f(t) = \frac{\sin\sqrt{t} - \tan\sqrt{t}}{t^2}$ est continue et négative sur $]0,1]$. De plus $f(t) = \frac{\sqrt{t} - \frac{t\sqrt{t}}{3!} + t\sqrt{t}\,\varepsilon_1(t) - \left(\sqrt{t} + \frac{t\sqrt{t}}{3} + t\ldots\right.}{t^2}$

$= \frac{t\sqrt{t}\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) + t\sqrt{t}\,\varepsilon(t)}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{-1}{2\sqrt{t}}$. Donc I_1 est convergente ($\alpha = \frac{1}{2}$...

$I_2 = \int_0^{+\infty} t\sin t\, e^{-t}\,dt$

La fonction $g(t) = t\sin t\, e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$

$\forall t \geq 0;\ |g(t)| \leq t e^{-t}$ et comme

$t^2 \cdot t e^{-t} = \frac{t^3}{e^t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ alors $\int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt$ est

convergente, donc $\int_0^{+\infty} |g(t)|\,dt$ est convergente

et alors $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t\sin t\, e^{-t}\,dt$ est absolument

, d'où $\int_1^{+\infty} t\sin t\, e^{-t}\,dt$ est convergente.

③

EX VI 1. $J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \sqrt{t^2-1}}$

La fonction $f_\alpha(t) = \frac{1}{t^\alpha \sqrt{t^2-1}}$ est continue et positive sur $]1, +\infty[$. On pose $A(\alpha) = \int_1^2 f_\alpha(t)\,dt$ et $B(\alpha) = \int_2^{+\infty} f_\alpha(t)$

On a $J(\alpha)$ conv ssi $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$ st convergents.

$f_\alpha(t) \underset{1}{\sim} \frac{1}{1^\alpha (1+1)^{\frac{1}{2}} (t-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}(t-1)^{\frac{1}{2}}}$. Donc

$A(\alpha)$ conv pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (car $\frac{1}{2} < 1$)

$f_\alpha(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^\alpha . t} = \frac{1}{t^{\alpha+1}}$. Donc

$B(\alpha)$ conv. ssi $\alpha+1 > 1$ ssi $\alpha > 0$.

D'où $J(\alpha)$ conv. ssi $\alpha > 0$.

2. $J(2) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}}\,dt = \lim\limits_{\substack{\alpha \to 1^+ \\ \beta \to +\infty}} \int_\alpha^\beta \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}}$.

$\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}} \underset{\substack{t = ch\,u \\ dt = sh\,u\,du}}{=} \int \frac{sh\,u\,du}{ch^2 u \sqrt{ch^2 u - 1}} = \int \frac{du}{ch^2 u} = th\,u + c$

$= Th(argch\,t) + ct.$ (On a $t > 1$ donc $t = ch\,u$ avec $u > 0$)

$= th(argch\,\beta) - th(argch\,\alpha)$

Alors $J(2) = \lim\limits_{\substack{\alpha \to 1^+ \\ \beta \to +\infty}} [th(argch\,\beta) - th(argch\,\alpha)]$

$= 1 - 0 = 1$

(car $argch\,\alpha \xrightarrow[\alpha \to 1^+]{} argch\,1 = 0$ et $th(argch\,\alpha) \xrightarrow[\alpha \to 1^+]{} th(0) = 0$ et de plus, $argch\,\beta \xrightarrow[\beta \to +\infty]{} +\infty$ et $th(argch\,\beta) \xrightarrow[\beta \to +\infty]{} 1$.)

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 105
Durée : 2 heures

Année : 2012 - 2013
Examen : Final

Exercice 1 (25 points).

1. Calculer : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+kn^2}}$.
2. Calculer les primitives suivantes :
   (a) $\int\frac{dx}{\cos x\sin x}$
   (b) $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 2 (15 points).

1. Utiliser les développements limités pour calculer : $\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x-x}{\ln(1+\sin x)-\tan x}$.
2. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soit $a>0$. Utiliser le premier théorème de la moyenne pour calculer : $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^{a+1}}\int_0^x t^a f(t)\,dt$.

Exercice 3 (10 points). Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $a>0$, alors pour tout réel α, $\int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x^\alpha+\frac{1}{x^\alpha})\frac{\ln x}{x}\,dx=0$. (*Indication : utiliser un changement de variable convenable*).

Exercice 4 (20 points).

1. Soit g la fonction définie par : $g(t)=\ln\left(\frac{\ln(1+2t)}{\ln(1+t)}\right)$. Montrer que $g(t)=\ln 2-\frac{t}{2}+\frac{5t^2}{8}+t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to0}\varepsilon(t)=0$.
2. Soit f la fonction définie par : $f(x)=x\ln\left(\frac{\ln(2+x)-\ln x}{\ln(1+x)-\ln x}\right)$. Utiliser (1) pour trouver l'équation de l'asymptote en $+\infty$ à la courbe d'équation $y=f(x)$; puis préciser la position de cette asymptote par rapport à la courbe.

Exercice 5 (30 points). Soient $I(\alpha)=\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha\ln x}\,dx$ et $J(\alpha)=\int_\pi^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{x^\alpha\ln x}\,dx$.

1. Utiliser le changement de variable $t=x-\frac{\pi}{2}$, pour montrer que si $I(\alpha)$ est convergente, alors $J(\alpha)$ est convergente.
2. (a) En écrivant $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, montrer par absurde que si $\alpha\le1$, alors $I(\alpha)$ est divergente.
   (b) Déduire que $I(\alpha)$ est convergente ssi $\alpha>1$.
3. Soient f et g définies par : $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ et $g(x)=\frac{\sin x}{x}\left(1+\frac{\sin x}{\ln(1+x)}\right)$.
   (a) Montrer que f est équivalent à g au voisinage de $+\infty$.

Houssam Khalil & Abir Nour. Copyright © 2015

(b) Montrer que $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente.

(c) Utiliser (2.b), pour montrer que $\int_2^{+\infty} (g(x) - f(x))\,dx$ est divergente.

(d) Déduire que $\int_2^{+\infty} g(x)\,dx$ est divergente.

(e) Comment expliquer le fait que f est équivalente à g sans que leurs intégrales soit de même nature.

Exercice 1 .

1. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+kn^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\sqrt[3]{1+\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{k}{n}}} = \mathcal{R}(f,\sigma,(\xi_k)_{1\leq k\leq n})$$

où f est la fonction continue définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$, $\sigma = \{0, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ et $\xi_k = \frac{k}{n}$, $1 \leq k \leq n$. Donc

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x}} = \frac{3}{2}(1+x)^{\frac{2}{3}}\Big]_0^1 = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{4}-1).$$

2. (a) On a

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x \sin x} \underset{t=\cos x}{=} \int \frac{\mathrm{d}t}{t(1-t^2)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t(1-t)(1+t)}.$$

Décomposition en éléments simples : $\frac{1}{t(1-t)(1+t)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1-t} + \frac{c}{1+t}$, donc

$$a(1-t^2) + bt(1+t) + ct(1-t) = 1.$$

On a $t=0 \Rightarrow a=1$, $t=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$ et $t=-1 \Rightarrow c=-\frac{1}{2}$. Donc

$I = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln|1-t| - \frac{1}{2}\ln|1+t| + c = \ln|t\sin x| - \frac{1}{2}\ln(1-\sin x) - \frac{1}{2}\ln(1+\sin x) + c.$

(b) On pose $x = \sin t$, alors $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ et $\sqrt{1-x^2} = \cos t$. Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{(1+\sin^2 t)\cos t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin^2 t} \underset{u=\tan t}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{1+2u^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}u) + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan(\arcsin x)) + c.\end{aligned}$$

Exercice 2 .

1. Un $DL_2(0)$ donne

$$e^x - \cos x - x = 1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 + \frac{x^2}{2} - x + x^2\varepsilon_4(x) = x^2 + x^2\varepsilon_4(x)$$

et

$$\begin{aligned}\ln(1+\sin x) - \tan x &= \ln(1+x+x^2\varepsilon_1(x)) - x + x^2\varepsilon_2(x) = x - \frac{x^2}{2} - x + x^2\varepsilon_3(x) \\ &= -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_3(x)\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{\ln(1+\sin x) - \tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}} = -2.$$

Houssam Khalil & Abir Nour. Copyright © 2015

2. La fonction $f(t)$ est continue sur $[0,x]$ et la fonction $t \mapsto t^{\alpha}$ est continue et positive sur $[0,x]$. Donc, d'après le théorème de la moyenne, il existe $c \in [0,x]$ tel que

$$\int_0^x t^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_0^x t^{\alpha}\,\mathrm{d}t = f(c)\cdot\frac{x^{a+1}}{a+1} \Rightarrow \frac{1}{x^{a+1}}\int_0^x t^{\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(c)}{a+1} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{f(0)}{a+1}.$$

Exercice 3 . On a

$$\begin{aligned} I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} f\left(x^{\alpha}+\tfrac{1}{x^{\alpha}}\right)\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x &\underset{t=\frac{1}{x}}{=\!=} \int_a^{\frac{1}{a}} f\left(\tfrac{1}{t^{\alpha}}+t^{\alpha}\right)\frac{\ln\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}\cdot\frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{a}}^{a} f\left(t^{\alpha}+\tfrac{1}{t^{\alpha}}\right)\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_{\frac{1}{a}}^{a} f\left(x^{\alpha}+\tfrac{1}{x^{\alpha}}\right)\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = -I, \end{aligned}$$

donc $2I = 0 \Rightarrow I = 0$.

Exercice 4 .

1. On a

$$\frac{\ln(1+2t)}{\ln(1+t)} = \frac{2t-\frac{4}{2}t^2+\frac{8}{3}t^3+t^3\varepsilon_1(t)}{t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+t^3\varepsilon_2(t)} = \frac{2-2t+\frac{8}{3}t^2+t^2\varepsilon_1(t)}{1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+t^2\varepsilon_2(t)} \overset{\text{division}}{=} 2-t+\frac{3}{2}t^2+t^2\varepsilon_3(t).$$

Donc

$$\begin{aligned} g(t) &= \ln\left(2-t+\tfrac{3}{2}t^2+t^2\varepsilon_3(t)\right) = \ln 2+\ln\left(1-\tfrac{1}{2}t+\tfrac{3}{4}t^2+t^2\varepsilon_4(t)\right) \\ &= \ln 2+\left(-\tfrac{t}{2}+\tfrac{3}{4}t^2\right)-\frac{1}{2}\left(-\tfrac{t}{2}+\tfrac{3}{4}t^2\right)^2+t^2\varepsilon_5(t) \\ &= \ln 2-\frac{t}{2}+\left(\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{8}\right)t^2+t^2\varepsilon_6(t) = \ln 2-\frac{t}{2}+\frac{5t^2}{8}+t^2\varepsilon_6(t) \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} f(x) = x\ln\left(\frac{\ln(2+x)-\ln x}{\ln(1+x)-\ln x}\right) &\underset{t=\frac{1}{x}}{=\!=} \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\ln\left(2+\frac{1}{t}\right)-\ln\frac{1}{t}}{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)-\ln\frac{1}{t}}\right) = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\ln(2t+1)-\ln t+\ln t}{\ln(t+1)-\ln t+\ln t}\right) \\ &= \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\ln(2t+1)}{\ln(t+1)}\right) = \frac{1}{t}g(t) = \frac{\ln 2}{t}-\frac{1}{2}+\frac{5}{8}t+t\varepsilon(t) = \ln 2\cdot x-\frac{1}{2}+\frac{5}{8x}+\frac{1}{x}\varepsilon_7(x). \end{aligned}$$

Donc $y = \ln 2\cdot x-\frac{1}{2}$ est l'équation de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ et $f(x)-y \underset{+\infty}{\sim} \frac{5}{8x} > 0$, donc la courbe de $f(x)$ est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 5 .

1. Si $I(\alpha)$ est convergente alors, en utilisant le changement de variable $t = x-\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$I(\alpha) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\sin^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}\ln\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\cos^2 t}{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}\ln\left(t+\frac{\pi}{2}\right)},$$

et comme $\dfrac{\cos^2 t}{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha}\ln\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\cos^2 t}{t^{\alpha}\ln t}$ (et les fonctions sont positives) alors $J(\alpha)$ est convergente.

2. (a) On suppose que $\alpha \leq 1$. Si $I(\alpha)$ est convergente alors $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{1-\cos^2 x}{x^{\alpha}\ln x}\,\mathrm{d}x$ et $J(\alpha)$ sont convergente alors leur somme, c'est-à-dire $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}\ln x}$, est convergente. Ce qui est impossible d'après Bertrand. D'où $I(\alpha)$ est divergente.

Hassan Khalil & Abir Nour. Copyright © 2015

(b) Il reste à démontrer que $\alpha > 1 \Rightarrow I(\alpha)$ est convergente.
On a $0 \leq \dfrac{\sin^2 x}{x\alpha \ln x} \leq \dfrac{1}{x^\alpha \ln x}$ et $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha \ln x}$ est convergente d'après Bertrand, donc $I(\alpha)$ est convergente.

3. (a) Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{\ln(1+x)}\right) = 1 + 0 = 1$ alors $f \underset{+\infty}{\sim} g$.

(b) On a $F(x) = \displaystyle\int_2^X \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos X + \cos 2$ bornée et $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc d'après Dirichlet $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

(c) On a $\displaystyle\int_2^{+\infty} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x\ln(1+x)}\,\mathrm{d}x$ et $\dfrac{\sin^2 x}{x\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{\sin^2 x}{x \ln x}$ et $I(1)$ est divergente d'après (2.b). Donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$ est divergente.

(d) On a, $\forall x \geq 2$, $g(x) = (g(x) - f(x)) + f(x)$ avec $\displaystyle\int_2^{+\infty} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$ est divergente et $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)$ est convergente, donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente.

(e) Car f et g ne sont pas de signe constant.

Cours : Math105
Session : Final

①

Année : 2012 - 2013
Durée : 2h30

EXI 1. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+kn^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\sqrt[3]{1+\frac{k}{n}}}$

$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{k}{n}}} = R(f, \sigma, (\xi_k)_{1\le k\le n})$. où

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ continue sur $[0,1]$

$\sigma = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ et $\xi_k = \frac{k}{n}$, $1 \le k \le n$.

Donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}} = \int_0^1 (1+x)^{-\frac{1}{3}} dx$

$= \left.\frac{(1+x)^{\frac{2}{3}}}{2/3}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{4} - 1\right]$.

2. (a) $I(x) = \int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x \sin x} = \int \frac{\cos x\, dx}{(1-\sin^2 x)\sin x}$

$\underset{\substack{t=\sin x\\ dt=\cos x dx}}{=} \int \frac{dt}{(1-t^2)t} = \int \frac{dt}{t(1-t)(1+t)}$

$\frac{1}{t(1-t)(1+t)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1-t} + \frac{c}{1+t} \Rightarrow a(1-t^2) + bt(1+t) + ct(1-t) = 1$

$\begin{cases} \cdot\ t=0 \Rightarrow a=1 \\ \cdot\ t=1 \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2} \\ \cdot\ t=-1 \Rightarrow -2c=1 \Rightarrow c=\frac{-1}{2} \end{cases}$ donc $I(x) = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln|1-t| - \frac{1}{2}\ln|1+t| + ct$

$= \ln|\sin x| - \frac{1}{2}\ln|1-\sin x| - \frac{1}{2}\ln|1+\sin x|$

(b) $J(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$, on pose $x = \sin t$, alors $dx = \cos t\, d$ avec $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$J(x) = \int \frac{\cos t\, dt}{(1+\sin^2 t)\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int \frac{\cos t\, dt}{(1+\sin^2 t)|\cos t|} = \int \frac{dt}{1+\sin^2 t} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t} + \tan^2 t}$

$= \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{1+\tan^2 t + \tan^2 t} \underset{\substack{u=\tan t\\ du=\frac{dt}{\cos^2 t}dt}}{=} \int \frac{du}{1+2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}\, u) + ct$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{2} . \tan(\arcsin x)) + ct$

$\boxed{EX II}$ 1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos x - x}{\ln(1+\sin x) - \tan x}$

$\ln(1+\sin x) - \tan x = \ln(1 + x + x^2\varepsilon_1(x)) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x) - x \ldots$

$= -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_4(x)$.

$e^x - \cos x - x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_5(x) - [1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_6(x)] - x$

$= x^2 + x^2\varepsilon_7(x)$

Donc $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos x - x}{\ln(1+\sin x) - \tan x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{x + x^2\varepsilon_7(x)}{-\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_4(x)} = \dfrac{1}{\frac{-1}{2}} = -2$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et soit $a > 0$. Pour $x > 0$

On a $\displaystyle\int_0^x t^a f(t)\,dt = f(\xi)\int_0^x t^a\,dt$ avec $\xi \in [0, x]$

(on a utilisé la 1ère th. de la moyenne, car f cont sur $[0,x]$
et la fonction $t \longrightarrow t^a$ est continue et positive sur $[0,x]$)

Donc $\displaystyle\frac{1}{x^{a+1}}\int_0^x t^a f(t)\,dt = \frac{1}{x^{a+1}} \cdot f(\xi) \cdot \frac{x^{a+1}}{a+1}$

$$= \frac{f(\xi)}{a+1} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ \text{alors } \xi \to 0 \text{ et} \\ f \text{ continue}}]{} \frac{f(0)}{a+1}$$

$\boxed{EX III}$ f continue sur $\mathbb{R}$, $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} f\left(x^\alpha + \frac{1}{x^\alpha}\right)\frac{\ln x}{x}\,dx \underset{\substack{x = \frac{1}{t} \\ dx = \frac{-1}{t^2}dt}}{=\!=\!=} \int_a^{\frac{1}{a}} f\left(\frac{1}{t^\alpha} + t^\alpha\right)\frac{\ln\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}\,\frac{-1}{t^2}dt$$

$$= \int_{\frac{1}{a}}^{a} -f\left(t^\alpha + \frac{1}{t^\alpha}\right)\cdot\frac{t\ln t}{t^2}\,dt = \int_{\frac{1}{a}}^{a} -f\left(t^\alpha + \frac{1}{t^\alpha}\right)\frac{\ln t}{t}\,dt$$

$$= -\int_{\frac{1}{a}}^{a} f\left(x^\alpha + \frac{1}{x^\alpha}\right)\frac{\ln x}{x}\,dx = -I \Rightarrow 2I = 0 \text{ et } I =$$

$\boxed{\text{EXIV}}$ 1. $g(t) = \ln\left(\frac{\ln(1+2t)}{\ln(1+t)}\right)$ ②

$\ln(1+2t) = 2t - \frac{4}{2}t^2 + \frac{8}{3}t^3 + t^3\varepsilon_1(t)$ et $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^3\varepsilon_2$

alors $\frac{\ln(1+2t)}{\ln(1+t)} = \frac{2 - 2t + \frac{8}{3}t^2 + t^3\varepsilon_1(t)}{1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + t^3\varepsilon_2(t)} = 2 - t + \frac{3}{2}t^2 + t^2\varepsilon_3(t)$

$$\begin{array}{l|l}
2 - 2t + \frac{8}{3}t^2 & 1 - \frac{t}{2} + \frac{1}{3}t^2 \\ \hline
-2 \pm t \mp \frac{1}{3}t^2 & 2 - t + \frac{3}{2}t^2 \\
\hline
-t + 2t^2 & \\
+t \mp \frac{t^2}{2} & \\
\hline
\frac{3}{2}t^2 &
\end{array}$$

donc $g(t) = \ln\left(2 - t + \frac{3}{2}t^2 + t^2\varepsilon_3(t)\right)$

$= \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{3}{4}t^2 + t^2\varepsilon_4(t)\right)$

$= \ln 2 - \frac{t}{2} + \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{t}{2}\right)^2 + t^2\varepsilon_5(t)$

$= \ln 2 - \frac{t}{2} + t^2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right) + t^2\varepsilon_5(t)$

Donc $g(t) = \ln 2 - \frac{t}{2} + \frac{5}{8}t^2 + t^2\varepsilon_5(t)$ avec les $\varepsilon_i(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$, $i = 1,2,3,4$.

2. $f(x) = x \ln\left(\frac{\ln(2+x) - \ln x}{\ln(1+x) - \ln x}\right) \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\ln(2+\frac{1}{t}) - \ln(\frac{1}{t})}{\ln(1+\frac{1}{t}) - \ln(\frac{1}{t})}\right)$

$= \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\ln(2t+1) - \ln(t) + \ln t}{\ln(t+1) - \ln t + \ln t}\right) = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{\ln(1+2t)}{\ln(1+t)}\right)$

$= \frac{1}{t}g(t) = \frac{1}{t}\left[\ln 2 - \frac{t}{2} + \frac{5}{8}t^2 + t^2\varepsilon_5(t)\right]$

$= \frac{\ln 2}{t} - \frac{1}{2} + \frac{5}{8}t + t\varepsilon_5(t)$

$= \underbrace{\ln 2 \cdot x - \frac{1}{2}}_{\text{éq. de l'asymptote au vois. de } +\infty} + \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon_5\left(\frac{1}{x}\right)$

Donc $y = \ln 2\, x - \frac{1}{2}$ éq. de l'asymptote au vois. de $+\infty$

de plus $f(x) - y \underset{+\infty}{\sim} \frac{5}{8}\frac{1}{x}$ et $\frac{5}{8}\frac{1}{x} > 0$ au vois. de $+\infty$

donc $f(x) - y > 0$ au vois. de $+\infty$, alors la courbe est au dessus de l'asymptote au vois. de $+\infty$.

$\boxed{EX\ V}$ $\quad I(\alpha) = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha \ln x}\,dx \qquad J(\alpha) = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^\alpha \ln x}\,dx$

1. $I(\alpha) \underset{t = x - \frac{\pi}{2}}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin^2(t+\frac{\pi}{2})}{(t+\frac{\pi}{2})^\alpha \ln(t+\frac{\pi}{2})}\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos^2 t\,dt}{(t+\frac{\pi}{2})^\alpha \ln(t+\frac{\pi}{2})}$

et comme $\frac{\cos^2 t}{(t+\frac{\pi}{2})^\alpha \ln(t+\frac{\pi}{2})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\cos^2 t}{t^\alpha \ln t}$ et ces 2 fonct. sont +

alors $J(\alpha)$ est convergente.

2. (a) On suppose que $\alpha \leq 1$. Si $I(\alpha)$ est convergente, alors $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1-\cos^2 x}{x^\alpha \ln x}\,dx$ est conv et $J(\alpha)$ conv, donc $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln x}$ convergente, ce qui est impossible (d'après Bertrand)

(Rappel: $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ $\begin{cases} C & \text{si } [(\alpha>1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)] \\ D & \text{si } [(\alpha<1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta \leq 1)] \end{cases}$

D'où $I(\alpha)$ est divergente.

(b) Il reste à demontrer que : $\alpha > 1 \Rightarrow I(\alpha)$ convergente.

On a $0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha \ln x} \leq \frac{1}{x^\alpha \ln x} \quad \forall x \geq \pi$

et $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln x}$ C (d'après Bertrand)

donc $I(\alpha)$ convergente.

2. (a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{\sin x}{\ln(1+x)} = 1 + 0 =$

donc $g \underset{+\infty}{\sim} f$ (car $\frac{\sin x}{\ln(1+x)} = \sin x \cdot \frac{1}{\ln(1+x)}$, $\sin$ bornée et $\frac{1}{\ln(1+x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

(b) $F(X) = \int_2^X \sin x\,dx = -\cos X + \cos 2$ borné

et $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, donc, d'après Dirichlet, $\int_2^{+\infty} f\,dx$ converge

3

(c) $\int_2^{+\infty}\big(g(x)-f(x)\big)\,dx = \int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x\ln(1+x)}\,dx$, on a

$\frac{\sin^2 x}{x\ln(1+x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sin^2 x}{x\ln x}$ et $I(1)$ divergente (d'après

donc $\int_2^{+\infty}\big(g(x)-f(x)\big)\,dx$ divergente.

(d) on a : $\forall x \geq 2$; $g(x) = \big(g(x)-f(x)\big) + f(x)$

avec $\int_2^{+\infty}\big(g(x)-f(x)\big)\,dx$ div et $\int_2^{+\infty} f\,dx$ conv,

donc $\int_2^{+\infty} g(x)\,dx$ est divergente.

(e) car f et g ne sont pas de signe constante.

Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعـة اللبنانيـة
كليـة العلـوم
الفرع الثـالـث

Cours : Math 105
Durée : 2 heures

Année : 2011 - 2012
Examen : Final

Exercice 1 (25 points).

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 de $\mathrm{th}(x)$ au voisinage de 0.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 3 de $h(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ au voisinage de 0. (Indication : on peut développer $h'(x)$).
3. Trouver l'équation de la tangente à $h(x)$ en 0. Déterminer sa position par rapport à la courbe de $h(x)$.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\mathrm{sh}(x)) \quad \sin(\arctan(x)) + \frac{x^2}{2}}{\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \mathrm{th}(x)}$.

Exercice 2 (20 points). Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int \frac{(1+\cos x)\sin x \,\mathrm{d}x}{4+\cos^2 x}$.
2. $J = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. $K = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

Exercice 3 (18 points).

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente.
2. En utilisant le changement de variable $x = \frac{1}{t}$, calculer la valeur de I.
3. Soit $a > 0$. En déduire la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}$.

Exercice 4 (22 points).

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $J = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que J est convergente si et seulement si $\alpha < 2$.
2. Montrer que si $\alpha > 0$ alors K est convergente.
3. Le but de cette partie est de démontrer que si $\alpha \leq 0$ alors K est divergente. Soit $\alpha \leq 0$.
   (a) Pour $\alpha = 0$, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$ est divergente.
   (b) Soit $\alpha < 0$. Notons $\beta = -\alpha > 0$. Supposons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{\beta}\sin x\,\mathrm{d}x$ est convergente.
   — Dire pourquoi $F(X) = \displaystyle\int_1^{X} x^{\beta}\sin x\,\mathrm{d}x$ est majorée.
   — En utilisant Dirichlet, déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$ est convergente. *Indication : écrire*
   $$\int_1^{+\infty} \sin x\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\beta}\sin x}{x^{\beta}}\,dx.$$

Houssam Khalil & Abir Nour. Copyright © 2015

— Conclure.

4. Déduire que I est convergente si et seulement si $0 < \alpha < 2$.

Exercice 5 (15 points). Soit $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que I_n est convergente $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $I_n = \dfrac{2}{n+1} I_{n+2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer I_1. En déduire I_n en fonction de n pour tout $n \geq 2$. *Remarque :* $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. *Indication : considérer les cas n pair et n impair.*

Exercice 1 .

1. On a

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{x + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_1(x)}{1 + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_2(x)} \overset{\text{division}}{=} x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_3(x).$$

2. Comme

$$h'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_4(x)$$

alors $h(x) = h(0) + x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_5(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_5(x)$.

3. Donc $y = x$ est l'équation de la tangente et $h - y \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$ qui est négatif si $x > 0$ et positif si $x < 0$. Donc h est au dessous de y si $x > 0$ et en dessus de y si $x < 0$.
4. Les $DL_3(0)$ du dénominateur et du numérateur donnent

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_6(x) = \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_6(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{6}$$

et

$$\begin{aligned}
\ln(1 + \operatorname{sh} x) - \sin(\arctan x) + \frac{x^2}{2} &= \ln\left(1 + x + \tfrac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_7(x)\right) - \sin\left(x - \tfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_8(x)\right) + \frac{x^2}{2} \\
&= (x + \tfrac{x^3}{3!}) - \tfrac{1}{2}(x + \tfrac{x^3}{3!})^2 + \tfrac{1}{3}(x + \tfrac{x^3}{3!})^3 - \left((x - \tfrac{x^3}{3!}) - \tfrac{1}{3!}(x - \tfrac{x^3}{3!})^3\right) + \tfrac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_7(x) \\
&= x^3 + x^3\varepsilon_8(x) \underset{0}{\sim} x^3
\end{aligned}$$

La limite demandée est égale donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\frac{x^3}{6}} = 6$.

Exercice 2 .

1. Soit $t = \cos x$ (la fonction $\frac{(1+\cos x)\sin x}{4+\cos^2 x}\,dx$ ne change pas en remplaçant x par $-x$) donc $dt = -\sin x\, dx$ et

$$\begin{aligned}
I &= -\int \frac{1+t}{4+t^2}\,dt = -\int \frac{dt}{t^2+4} - \int \frac{t\,dt}{t^2+4} = -\frac{1}{2}\arctan\tfrac{t}{2} - \frac{1}{2}\ln(t^2+4) + c \\
&= -\frac{1}{2}\arctan\tfrac{\cos x}{2} - \frac{1}{2}\ln(\cos^2 x + 4) + c
\end{aligned}$$

2. Par parties. Soit

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{x}$$
$$v' = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{x}$$

Donc

$$J = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c.$$

3. On a $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$. Donc

$$K = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + (x-2)^2}} = \operatorname{argsh}(x-2) + c.$$

Houssam Khalil & Abir Nour. Copyright © 2015

Exercice 3 .

1. On a $x^{\frac{3}{2}}\frac{\ln x}{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Donc I est convergente.
2. Soit $x=\frac{1}{t}$. Donc $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$, $x \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0^+$ et $x \xrightarrow[t\to 0]{} +\infty$. Donc
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{+\infty}^{0}\frac{\ln\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}}\cdot\left(-\tfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\right)=-\int_0^{+\infty}\frac{-\ln t}{\frac{t^2+1}{t^2}}\cdot\left(-\tfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\right)=-I.$$
Par suite $2I=0\Rightarrow I=0$.
3. On a
$$J=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x\overset{t=\frac{x}{a}}{=\!=}\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln at}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\ln a}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+I\right)$$
$$=\frac{\ln a}{a}\arctan t\Big]_0^{+\infty}=\frac{\ln a\pi}{2a}.$$

Exercice 4 .

1. L'intégrale J est de 2ème espèce, la fonction $\frac{\sin x}{x^\alpha}$ est continue et positive sur $[0,1]$, et $\frac{\sin x}{x^\alpha}\underset{0}{\sim}\frac{x}{x^\alpha}=\frac{1}{x^{\alpha-1}}$. Donc J est convergente ssi $\alpha-1<1\Leftrightarrow\alpha<2$.
2. Soit $\alpha>0$. Soit $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ et $f(x)=\sin x$. On a $g(x)$ est décroissante et $g(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, et $\left|\int_0^X\sin x\,\mathrm{d}x\right|=|\cos 1-\cos X|\leq 2$. Donc d'après Dirichlet, K est convergente.
3. Soit $\alpha\leq 0$.
   (a) Pour $\alpha=0$, $K=\lim\limits_{X\to+\infty}\int_1^X\sin x\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{X\to+\infty}\cos 1-\cos X$ n'existe pas. Donc K est divergente.
   (b) Soit $\alpha<0$ et $\beta=-\alpha>0$. On suppose que $L=\int_0^{+\infty}x^\beta\sin x\,\mathrm{d}x$ est convergente.
   - Si $F(X)$ n'est pas majorée alors $\lim\limits_{X\to+\infty}\int_1^X x^\beta\sin x\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{X\to+\infty}F(X)=\pm\infty$. Contradiction car L est convergente.
   - On a $\int_1^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{x^\beta\sin x}{x^\beta}\,\mathrm{d}x$. Soit $g(x)=\frac{1}{x^\beta}$ et $f(x)=x^\beta\sin x$. On a $g(x)$ est décroissante et $\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, et $\int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x$ est majorée (d'après ce qui précède). Donc d'après Dirichlet, $\int_1^X\sin x\,\mathrm{d}x$ est convergente.
   - Contradiction avec le fait que $\int_1^X\sin x\,\mathrm{d}x$ est divergente. Donc $\int_1^{+\infty}x^\beta\sin x\,\mathrm{d}x$ est divergente.
4. D'après (1), (2) et (3), $I=J+K$ est convergente ssi $0<\alpha<2$.

Exercice 5 .

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $x^2\cdot x^n e^{-x^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$. Donc I_n est convergente.
2. Par parties. Soit
$$u=e^{-x^2}\quad\Rightarrow\quad u'=-2xe^{-x^2}$$
$$v'=x^n\quad\Rightarrow\quad v=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$
Donc
$$I_n=\frac{x^{n+1}}{n+1}e^{-x^2}\Big]_0^{+\infty}+\frac{2}{n+1}\int_0^{+\infty}x^{n+2}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n+1}I_{n+2}\Rightarrow I_{n+2}=\frac{n+1}{2}I_n.$$

Houssam Khalil & Abir Nour, Copyright © 2015

3. • On a $I_1 = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$.

• Par récurrence et en utilisant la formule $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$ on obtient $I_{2n+1} = n! I_1 = \frac{n!}{2}$ et $I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} I_0 = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}$.

Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 105
Durée : 2 heures

Année : 2010 - 2011
Examen : Final

Exercice 1 (25 points).

1. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{k}{e^{\frac{k}{n}}}$.

2. On considère $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \operatorname{ch} x & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$
   (a) Montrer que f est intégrable sur $[-1,1]$.
   (b) Calculer pour $x \in [-1,1]$, $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
   (c) Etudier la continuité et la dérivabilité de F sur $[-1,1]$.

Exercice 2 (35 points).

1. Soit $I = \int_{-1}^{1} \arctan \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$ et $J = \int_{-1}^{1} \arctan \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que $I = J$.
   (b) En déduire la valeur de I.
   (*Indication : utiliser la propriété suivante :* $\arctan y + \arctan \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2}$).
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue et soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x) - x$.
   On suppose que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.
   (a) Calculer $\int_0^1 g(x)dx$.
   (b) Montrer que la fonction g ne garde pas une signe constante.
   (c) En déduire qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 3 (40 points).

1. Utiliser le premier théorème de la moyenne pour calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{n^2}^{n^2+n} \frac{\arctan(\frac{x}{n})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
2. Trouver la nature des intégrales suivantes :
   (a) $\int_0^{+\infty} \sin(2x)\cos(x)e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$,
   (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$. (*Indication : utiliser le changement de variable* $t = \sqrt{\tan x}$).
3. Soit $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha-1}(x-1)^{\frac{1}{\alpha}}}$.
   (a) Discuter, suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la convergence de $I(\alpha)$.
   (b) Calculer $I(2)$.

Houssam Khalil & Abir Nour. Copyright © 2015

Exercice 1 .

1. On a

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{e^{\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\frac{k}{n}}{e^{\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{e^{\frac{k}{n}}} + \frac{1}{n}\frac{\frac{n+1}{n}}{e^{\frac{n+1}{n}}} = \mathcal{R}(f,\sigma,(\xi_k)_{1\le k\le n}) + \frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{n+1}{n}}{e^{\frac{n+1}{n}}}$$

avec $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \frac{x}{e^x} = xe^{-x}$ continue, $\sigma = \{0, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ et $\xi_k = \frac{k}{n}$, $1 \le k \le n$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 xe^{-x} + 0 = -xe^{-x} - e^{-x}\Big]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

2. (a) f est bornée et admet un seul point de discontinuité sur $[-1,1]$, donc f est intégrable sur $[-1,1]$.

(b) $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$. Donc

— si $-1 \le x \le 0$, alors $F(x) = \int_{-1}^{x} \operatorname{sh} t\,dt = \operatorname{ch} x - \operatorname{ch}(-1)$, et

— si $0 \le x \le 1$, alors $F(x) = \int_{-1}^{0} \operatorname{sh} t\,dt + \int_0^x \operatorname{ch} t\,dt = \operatorname{ch} 0 - \operatorname{ch}(-1) + \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} 0 = 1 - \operatorname{ch}(-1) + \operatorname{sh} x$.

Donc

$$F(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x - \operatorname{ch}(-1) & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ \operatorname{sh} x + 1 - \operatorname{ch}(-1) & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

(c) Comme f est intégrable sur $[-1,1]$ alors F est continue sur $[-1,1]$. Il est claire que F est dérivable sur $[-1,1] \setminus \{0\}$. Or

$$F'_g(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch}(-1) - \operatorname{ch} 0 + \operatorname{ch}(-1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x - 1}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x} = 0,$$

et

$$F'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x + 1 - \operatorname{ch}(-1) - \operatorname{ch} 0 + \operatorname{ch}(-1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1.$$

Donc F n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2 .

1. (a) On a

$$I \underset{t=-x}{=} \int_1^{-1} \arctan e^{-t}(-\,dt) = \int_{-1}^{1} \arctan e^{-t}\,dt = J.$$

(b) En plus

$$I + J = \int_{-1}^{1}\left(\arctan e^x + \arctan \tfrac{1}{e^x}\right) dx = \int_{-1}^{1}\frac{\pi}{2}\,dx = \pi.$$

$I + J = \pi$ et $I = J$, donc $I = J = \frac{\pi}{2}$.

Houssam Khalil & Abir Nour. Copyright © 2015

2. (a) On a

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f(x)-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

(b) Par absurde : si $g(x)$ garde un signe constant alors $g(x) > 0\ \forall x \in [0,1]$ ou bien $g(x) < 0\ \forall x \in [0,1]$.
— Si $g(x) > 0\ \forall x \in [0,1]$ alors $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x > 0$ ce qui est impossible avec (a).
— Si $g(x) < 0\ \forall x \in [0,1]$ alors $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x < 0$ ce qui est impossible avec (a).

(c) $g(x)$ ne garde pas un signe constant, donc $\exists x_1 \in [0,1]$ tel que $g(x_1) < 0$ et $\exists x_2 \in [0,1]$ tel que $g(x_2) > 0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaire, $\exists x_0$ entre x_1 et x_2 (donc $x_0 \in [0,1]$) tel que $g(x_0) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$.

Exercice 3 .

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\arctan\frac{x}{n}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ sont deux fonctions positives sur $[n^2, n^2+n]$. Donc d'après le premier théorème de la moyenne, $\exists c_n \in [n^2, n^2+n]$ tel que

$$\int_{n^2}^{n^2+n} \frac{\arctan\frac{x}{n}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \arctan\left(\tfrac{c_n}{n}\right)\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\arctan\left(\tfrac{c_n}{n}\right)\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2}\right)$$
$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

car $\frac{n^2}{n} \leq \frac{c_n}{n} \leq \frac{n^2+n}{n} \Rightarrow n \leq \frac{c_n}{n} \leq n+1$ donc $\frac{c_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. De plus $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.

2. (a) $I = \int_0^{+\infty} \sin 2x \cos x e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

<u>Première méthode</u> : $|\sin 2x \cos x e^{-\sqrt{x}}| \leq e^{-\sqrt{x}}$ et $x^2 e^{-\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ est convergente, par suite $\int_0^{+\infty} |\sin 2x \cos x e^{-\sqrt{x}}|\,\mathrm{d}x$ est convergente, c'est-à-dire I est absolument convergente, donc I est convergente.

<u>Deuxième méthode</u> I est convergente d'après Dirichlet. En effet, $e^{-\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et

$$F(x) = \int_0^x \sin 2t \cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sin t \cos^2 t\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\cos^3 t\Big]_0^x = -\frac{2}{3}(\cos^3 x - 1) \text{ borné.}$$

(b) Soit $t = \sqrt{\tan x}$. Donc $\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1+t^4}{2t}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$. Par suite

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x} = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \int_0^b \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{\tan b}} t\cdot\frac{2t\,\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{2t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

convergente car $\frac{t^2}{1+t^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et $2 > 1$.

3. (a) La fonction $\frac{1}{x^{\alpha-1}(x-1)^{\frac{1}{\alpha}}}$ est continue est positive sur $[1,+\infty]$. On écrit

$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha-1}(x-1)^{\frac{1}{\alpha}}} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha-1}(x-1)^{\frac{1}{\alpha}}} + \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha-1}(x-1)^{\frac{1}{\alpha}}} = A_\alpha + B_\alpha.$$

I_α est convergente si et seulement si A_α et B_α sont convergentes. Or

Houssam Khalil & Abir Nour. Copyright © 2015

- $\dfrac{1}{x^{\alpha-1}(x-1)^{\frac{1}{\alpha}}} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{(x-1)^{\frac{1}{\alpha}}}$. Donc A_α est convergente si et seulement si $\frac{1}{\alpha} < 1 \Leftrightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha} < 0 \Leftrightarrow \alpha \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.
- De plus $\dfrac{1}{x^{\alpha-1}(x-1)^{\frac{1}{\alpha}}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\alpha-1}x^{\frac{1}{\alpha}}} = \dfrac{1}{x^{\alpha-1+\frac{1}{\alpha}}}$. Donc B_α est convergente si et seulement si $\alpha - 1 + \frac{1}{\alpha} > 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2-2\alpha+1}{\alpha} = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} > 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$.

Par suite I_α est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

(b) Soit $t = \sqrt{x-1}$, donc $x = 1 + t^2$ et $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Donc

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} = \int_0^{+\infty} \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t(1+t^2)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\arctan t\Big]_0^{+\infty} = \pi.$$