Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: M1104
Session: Final

Année: 2018-2019
Durée: 2h

Exercice I: (28 points).

1. Déterminer la nature des séries suivantes :

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n^2}{n^2}$ (b) $\sum_{n\geq 2} \frac{\cos n\pi}{n \ln n}$ (c) $\sum_{n\geq 1} \left(1 - \cos(\frac{\pi}{n})\right)$

2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a \neq e$ et soit $U_n = \frac{a^n n!}{n^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Discuter, suivant les valeurs de a, la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} U_n$.

Exercice II: (30 points).

1. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{\sqrt{n}}{2^n+1} x^{2n}$.

2. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

3. Trouver le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n$.

4. Développer en série entière la fonction $f(x) = \ln(1 + 2x^2)$.

Exercice III: (10 points).

En utilisant la notion de la somme de Riemann, calculer : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Exercice IV: (32 points).
Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes:

(a) $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\, dx$

(b) $\int_0^{+\infty} \frac{\text{th} x}{x^2}\, dx$

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} \cos x}{\sqrt{x}}\, dx$

(d) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\, dx$

Bonne Chance

Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: M1104
P + F : S2

Année: 2017-2018
Durée:

مطلوب الاجابة على كل جزء بشكل متواصل وبدون تداخل مع الجزء الاخر.

Partie P (Partiel) : (sur 100 points pour ≈ 45 minutes).

Exercice I: (30 points).
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$$

Montrer que les deux suites sont convergentes et convergent vers une même limite.

Exercice II: (40 points).
Soit $u_n = \dfrac{n^2+2}{\sqrt{n^2+1}}$ et $A = \{u_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$.

1. Appliquer la définition de la limite pour démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.
3. Donner, s'ils existent, les bornes supérieur et inférieur de l'ensemble A.

Exercice III: (30 points).
En utilisant la critère de Cauchy, démontrer la convergence de

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k+1} = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \ldots + \frac{1}{2^n+1}.$$

Partie F (Final) : (sur 100 points pour ≈ 105 minutes).

Exercice IV: (30 points).

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(1+2+3+\cdots+n)}$ est convergente et calculer sa somme.

2. Déterminer la nature des séries suivantes :

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

   (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

   (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\tan^n(\frac{\pi}{7})}{3^{n+2}}$

Tournez la page S.V.P. ⇒

Exercice V: (30 points).

1. Trouver le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(3n)!}$.
2. Trouver le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$.
3. Développer en série entière la fonction $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$.

Exercice VI: (10 points).
En utilisant la notion de la somme de Riemann, calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice VII: (30 points).
Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes:

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\, dx$
2. $\int_0^{+\infty} x \sin x\, e^{-x}\, dx$
3. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln x}{x^{\frac{3}{4}}}\, dx$
4. $\int_0^{1} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}\, dx$

Bonne Chance

cours : M1104
P+F : S_2

Année : 2017-2018

Partiel P (45 minutes)

$\boxed{\text{EX I}}$ • $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc $(U_n)_n \nearrow$

• $V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - U_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + \cancel{n^2} + n - \cancel{n^2} - 2n - 1}{n(n+1)^2}$

$= \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$, donc $(V_n) \searrow$

• $V_n - U_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Donc $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont adjacents. Elles sont donc conv et conv. vers la même limite.

$\boxed{\text{EX II}}$ $U_n = \frac{n^2+2}{\sqrt{n^2+1}}$ et $A = \{U_n ; n \in \mathbb{N}\}$

1. Soit $A > 0$. Il faut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $U_n \geq A$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n = \frac{n^2+2}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{n^2}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{n^2}{\sqrt{n^2+n^2}} = \frac{n}{\sqrt{2}}$

Donc, il suffit de prendre N entier naturel $\geq \sqrt{2}A$,

ou bien $N = [\sqrt{2}A] + 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\frac{n^2+2}{\sqrt{n^2+1}} \geq 2 \iff n^2+2 \geq 2\sqrt{n^2+1}$

$\iff n^4 + 4 + 4n \geq 4(n^2+1) \iff n^4 \geq 0$ qui est toujours vrai

3. On a 2 majorand de A (d'après 2.) et $2 = \frac{0+2}{\sqrt{0+1}} \in A$,

donc $\operatorname{Inf} A = 2$.

De plus $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$, donc n'est pas majoré et Sup A,

$\boxed{EX\,III}$ $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k+1} = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \cdots +$

soit $n, p \in \mathbb{N}^*$; $x_{n+p} - x_n = \frac{1}{2^{n+1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}+1}$

$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}}$

$= \frac{1}{2^n}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^p}\right]$

$= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^p}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\left(1\right.$

$\leq \frac{1}{2^n}$

soit $\varepsilon > 0$, comme $\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, alors $\exists N \in \mathbb{N}^* /$

$\forall n \geq N$; $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$.

Alors si $p \geq q \geq N$, alors $|x_p - x_q| = x_p - x_q \leq \frac{1}{2^q}$

D'où $(U_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Partie F (Final) (105 minutes)

$\boxed{EX\,IV}$ 1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \sum_{n \geq 1}$

$\forall n \geq 1$, $U_n = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)} \sim \frac{2}{n^2}$ et $\sum \frac{2}{n^2}$

donc $\sum_{n \geq 1} U_n$ conv. De plus $U_n = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$, d

$S_N = \sum_{k=1}^{N} U_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} = 2\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots\right.$

$= 2\left[1 - \frac{1}{N+1}\right] \xrightarrow[N \to +\infty]{} 2$. D'où $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = 2$

2. (a) $\sum_{n \geq 0} (-1)^n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sum_{n \geq 0} U_n$.

$U_n = (-1)^n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = (-1)^n \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = (-1)^n$

On a $v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geq 0$, $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ en décroît.

D'où la série est conv. d'après le th sur les séries alternées

(b) $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n\geq 1} U_n$

On a $U_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \underset{\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$. Or $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ conv, donc $\sum_{n\geq 1} U_n$ co

(c) $\sum_{n\geq 0} \frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}}$.

$0 \leq \frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}} \leq \frac{1}{3^{n+2}} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^n}$ $\left(\text{car } 0 \leq \frac{\pi}{7} \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq \tan\frac{\pi}{7} \leq \tan\frac{\pi}{4}\right.$

et $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}$ conv , alors $\sum_{n\geq 0}\frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}}$ conv.

$\boxed{\text{EX V}}$ 1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(3n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$; $\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \frac{|x^{2n+3}|}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{|x^{2n+1}|} = \frac{x^2}{(3n+1)(3n+2)(3n}$

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 < 1$

Et pour $x = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(3n)!} = 0$ conv.

D'où $D = \mathbb{R}$ domaine de convergence.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$; $\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\cdot\frac{2n}{x^{2n}} = x^2\cdot\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^2$

Donc $R = 1$.

Sur $]-R, R[=]-1,1[$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n} = \frac{-1}{2} \ln(1-x^2).$$

3. $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

$$f(x) = \ln((x-2)(x-3)) = \ln(x-2) + \ln(x-3)$$

$$= \ln((2-x)(3-x)) = \ln\left(6\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\right)$$

$$= \ln 6 + \ln\left(1-\frac{x}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{x}{3}\right).$$

Or $\ln\left(1-\frac{x}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n}$ pour x /

$\ln\left(1-\frac{x}{3}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n}$ pour tout x /

Donc $\forall x \in \mathbb{R} / |x| < 2$ $(2 = \min\{2, 3\})$, on a

$$f(x) = \ln 6 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} x^n - \sum_{n=1} \frac{1}{3^n n} x^n$$

$$= \ln 6 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) \cdot \frac{1}{n} \cdot x^n.$$

$\boxed{\text{EX VI}}$ $$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}}_{U_n}$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n}{n+k}\right)$$

$$= \frac{-1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k}{n}\right) = \frac{-1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$= \frac{-1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$ avec $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \ln(1+x)$

Donc $$\lim_{n \to +\infty} U_n = -\int_0^1 f(x)\,dx = -\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$$

$$= -\Big[(1+x)\ln(1+x) - x\Big]_0^1 = -2\ln 2 + 1.$$

$\boxed{EX\ VII}$

1. $I = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\arctan x}{x^2}}_{f(x)} dx$, On a f est cont et + sur $]0,+$

$$I = \underbrace{\int_0^1 f\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f\,dx}_{I_2} = I_1 + I_2$$

Pour I_1 : $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ donc I_1 div.

Pour I_2 : $x^{3/2} \cdot \frac{\arctan x}{x^2} = x^{3/2} f(x) = \frac{\arctan x}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc I_2 conv.

D'où I est divergente.

2. $\int_0^{+\infty} \underbrace{x \sin x\, e^{-x}}_{f(x)} dx$, On a f est continue sur $[0,+\infty[$.

$\forall x \geq 0$; $|f(x)| \leq x e^{-x}$ et $x^2 \cdot x e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ conv, alors $\int_0 |f(x)| dx$ conv,

donc $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ abs. conv, alors $\int_0^{+\infty} f\,dx$ conv.

---

3. $\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln x}{x^{3/4}}}_{f(x)} dx$

On a $f(x) = \frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln x}{x^{3/4}} = \frac{\ln\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x}\right)}{x^{3/4}} = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x^{3/4}}$.

Donc f est cont et + sur $[1,+\infty[$.

On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{x^{3/4}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{x^{\frac{5}{4}}}$ et

$\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{5/4}}$ conv (car $5/4 > 1$), donc $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x}) - \ln \ldots}{x^{3/4}}$

4. $I = \int_0^1 \underbrace{\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x}}}_{f(x)} dx$, f est cont. et + sur $]\ldots$

$I = I_1 + I_2$ avec $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} f dx$ et $I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 f d\ldots$

Pour I_1 : $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, donc I_1 conv.

Pour I_2 : $f(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{1-x}$, donc I_2 div

D'où I est divergente.

Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: M1104
Session: 2ième

Année: 2017-2018
Durée: 2h

Exercice I: (15 points).
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

1. Expimer u_n en fonction de n.
2. Déterminer les limites supérieur et inférieur de la suite $(u_n)_n$.
3. En déduire la nature de cette suite.

Exercice II: (25 points).

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} e^{-2n} \operatorname{ch} n$ est convergente et calculer sa somme.
2. Déterminer la nature des séries suivantes :

(a) $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\pi$ (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{2\sqrt{n}+\cos n}{\ln n + n^2}$ (c) $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Exercice III: (25 points).

1. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{n})^{\sqrt{n}}} x^n$.
2. Trouver le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$.
3. Développer en série entière la fonction $f(x) = \frac{1}{(1-x)(2-x)}$.

Exercice IV: (10 points).
En utilisant la notion de la somme de Riemann, calculer : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k}$.

Exercice V: (25points).
Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes:

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x - 1}$ (b) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{e^x}\, dx$

(c) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\int_0^1 \cos^2(\frac{1}{x})\, dx$

Bonne Chance

Session : 2ième

Année : 2017-2018
Durée : 2 h

$\boxed{\text{EX I}}$ $(U_n)_n$ / $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $U_{n+2} = U_{n+1} - U_n$.

1. Le poly. caract. associé : $r^2 - r + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$.

Les racines sont : $r_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/3}$ et $r_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = C_1 \cos \frac{n\pi}{3} + C_2 \sin \frac{n\pi}{3}$.

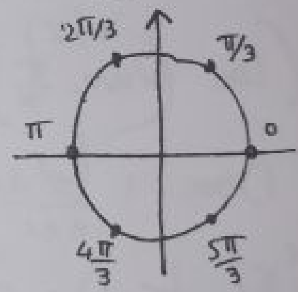
$u_0 = C_1 = 1$

$u_1 = 1 \cdot \frac{1}{2} + C_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, d'où $C_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$.

2. Posons $V_n = \inf\{U_k, k \geq n\}$ existe car $(U_n)_n$ bornée

et $W_n = \sup\{U_k, k \geq n\}$ existe " " "



$V_0 = \inf\{\overset{u_0}{1}, \overset{u_1}{0}, \overset{u_2}{-1}, \overset{u_3}{-1}, \overset{u_4}{0}, \overset{u_5}{1}, \dots\} = -1$

$W_0 = \sup\{1, 0, -1, -1, 0, 1, \dots\} = 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n = -1$ et $W_n = 1$, d'où

$\limsup U_n = \lim\limits_{n \to \infty} W_n = 1$ et $\liminf U_n = \lim\limits_{n \to \infty} V_n = -1$

3. Puisque $\liminf U_n \neq \limsup U_n$, on déduit que $(U_n)_n$ est divergente.

Ex II 1. $\sum_{n\geq 0} e^{-2n} \operatorname{ch} n = \sum_{n\geq 0} e^{-2n}\left(\frac{e^{n}+e^{-n}}{2}\right) = \sum_{n\geq 0} \ldots$

$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0} e^{-n} + \sum_{n\geq 0} e^{-3n}\right)$

or $\sum_{n\geq 0} e^{-n}$ est une série géom. conv (de raison $\frac{1}{e}<1$) et

sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \frac{e}{e-1} = \frac{1}{1-e^{-1}}$,

de m $\sum_{n\geq 0} e^{-3n}$ est une série géom. conv (de raison $\frac{1}{e^3}<1$)

sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-3n} = \frac{e^3}{e^3-1} = \frac{1}{1-e^{-3}}$

D'où $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n} \operatorname{ch} n = \frac{1}{2}\left[\frac{e}{e-1} + \frac{e^3}{e^3-1}\right]$.

2. (a) $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\pi = \sum_{n\geq 1} u_n$.

$u_n = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = (-1)^n v_n$, avec

$v_n = \sin\frac{\pi}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $v_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et (v_n) …

(car $\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)' = \left(\frac{-\pi}{x^2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{x}\right) < 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$).

Donc $\sum_{n\geq 1} (-1)^n v_n$ est une série alterne conv et $\sum_{n\geq 1}$ …

(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{2\sqrt{n}+\cos n}{\ln n + n^2} = \sum_{n\geq 1} u_n$

On a $u_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$ et $u_n \underset{\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{n}}{n^2} = \frac{2}{n^{3/2}}$ donc

$\sum_{n\geq 1} u_n$ conv

(c) $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \sum_{n\geq 1} u_n$

On a $u_n \geq 0$, $\forall n \geq 1$, de plus on peut remarquer que

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 1$ et alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ et donc

$\sum_{n\geq 1} u_n$ est div.

$\boxed{\text{EX III}}$ 1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n})^{\sqrt{n}}} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ (2)

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{\sqrt{n}}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(\sqrt{n})}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1} = 1.$$

Donc $R = \frac{1}{1} = 1$.

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Comme $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors $R = 1$.

Pour tout $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$.

. si $x \neq 0$ alors $f(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x}\ln(1+x)$

. si $x = 0$ alors $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1} = a_0 = 1$.

3) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)(2-x)} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{2-x} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{2(1-\frac{x}{2})}$

or $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ pour tout x / $|x| < 1$

et $\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ pour tout x / $|x| < 2$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$ ($1 = \min\{1,2\}$) ;

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$$

$\boxed{\text{EX IV}}$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k} = \lim_{n\to+\infty} S_n$

$$S_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} + \frac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} + \frac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sqrt{x} + 0 = \left.\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

(On remarque que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est continue)

$\boxed{EX\,V}$ (a) $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x - 1} = \int_0^{\infty} f(x)\,dx$, On a

f est continue et $+$ sur $]0, +\infty[$.

$I = \int_0^1 f\,dx + \int_1^{+\infty} f\,dx = I_1 + I_2$

Pour I_1 : $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ div, donc

Pour I_2 : $f(x) \underset{\infty}{\sim} e^{-x}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{X \to +\infty} \int_1^X e^{-x}$

$= \lim_{X \to +\infty} -e^{-x}\Big]_1^X = 0 - (-1) = 1$ existe, donc

d'où I est divergente.

(b) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{e^x}\,dx = \int_0^{+\infty} f\,dx = \int_0^1 f\,dx + \int_1^{+\infty} f\,dx$

On a f est cont et négative sur $]0, 1]$, de plus

$f(x) \underset{0}{\sim} \ln x$ et $\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{X \to +\infty} \int_X^1 \ln x\,dx$

$= \lim_{X \to +\infty} x\ln x - x\Big]_X^1 = \lim_{X \to +\infty} -1 - X\ln X + X = -1$

donc I_1 conv.

Pour I_2 : f est cont et $+$ sur $[1, +\infty[$, on a

$x^2 f(x) = x^2 \frac{\ln x}{e^x} = \frac{x^2}{e^{x/2}} \cdot \frac{\ln x}{e^{x/2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, d

I_2 conv. D'où I est conv.

(c) $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^1 f(x)\,dx$

On a f est continue et $+$ sur $]-1, 1[$.

(9)

$$I = 2\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} \text{ et } f(x) \underset{1}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

or $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ conv, donc I conv.

d) $I = \int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_0^1 f(x)dx$.

On a f est continue et $+$ sur $]0,1]$ et

$\forall x \in]0,1]$; $0 \leq \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, de plus $\int_0^1 dx$ conv,

alors $\int_0^1 \cos^2\frac{1}{x}\, dx$ conv.

Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 1104
Durée : 2H

Année : 2016 - 2017
Examen : Final

Exercice 1 (30 points).

I. Etudier la nature des séries numériques suivantes :

(a) $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{n^3}{n!}$,   (b) $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$.

(Indication : $\sin(n\pi+\alpha) = (-1)^n \sin(\alpha)$).

II. Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

(a) Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$ ne sont pas de même nature.

(b) Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

(c) Que peut-on conclure ?

Exercice 2 (20 points).

Calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}.$$

Exercice 3 (30 points).

Trouver le rayon de convergence des séries entières suivantes :

(a) $\sum_{n\geq 2} (\ln(n))^n x^n$,   (b) $\sum_{n\geq 1} e^{n^{\frac{1}{3}}} x^n$,   (c) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!} x^n$.

(a) Calculer la somme des séries suivantes :

$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n+2}$.

Tourner la page

(b) Déduire le rayon et la somme de $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+2)}$.

III. Developper en série entière la fonction

$$f(x) = \ln\left(\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\right).$$

Exercice 4 (20 points).
Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :

(1) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{3^x}$, (2) $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\, dx$, (3) $\int_0^{\infty} x\sin(x)e^{-x}\, dx$.

Bon travail

Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 1104
Durée : 2H

Année : 2016 - 2017
Deuxième Session

Exercice 1 (20 points).

Soit $U_n > 0$ tel que $U_n = \frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$.

a) Montrer que $\ln(U_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$.

b) Chercher $\lim_{n\to\infty} U_n$ par les sommes de Riemann.

Exercice 2 (30 points).

Soit la série $\sum \frac{a^n}{1+b^n}x^n$ avec $a, b \in \mathbb{R}^{*+}$.
Discuter selon les valeurs de a et b, le rayon de convergence de cette série.
(**Indication** : prendre $a = 0$ et b quelconque, puis $a \neq 0$ et $b > 1$; $b = 1$; $b < 1$.)

Exercice 3 (20 points).

Etudier la nature des intégrales impropres suivants :

(1) $\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$, (2) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx$.

Exercice 4 (30 points).

(a) Etudier la nature et calculer la somme de la série suivante :

$$\sum_{n\geq 3}\frac{2n-1}{n(n^2-4)}.$$

(b) Etudier la nature (convergence absolue et semi convergence) des séries suivantes :

(1) $\sum ne^{-\sqrt{n}}$ (2) $\sum(-1)^n\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

Bon travail

Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 1104
Durée : 2H

Année : 2015 - 2016
Examen : Final

Exercice 1 (20 points).
Etudier la nature des séries numériques suivantes en précisant la convergence, la convergence absolue et la semi-convergence :

(1) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}$, (2) $\sum_{n\geq 0} \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$,

(3) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\ln(n^2+2)}$, (4) $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$.

Exercice 2 (20 points).
Trouver le rayon de convergence, le domaine de convergence et la somme, $S(x)$, pour $|x| < R$ des séries entières suivantes :

(1) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)2^{2n-2}}$, (2) $\sum_{n\geq 0}(n^2+n+1)x^n$.

Exercice 3 (20 points).
Donner le developpement en série entière au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = \arctan\left(\frac{2(x+1)}{x-4}\right)$, (2) $g(x) = \frac{e^{-x}}{1+x}$.

Exercice 4 (20 points).
Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\tan(x)}}$, (2) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$,

(3) $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$ (4) $\int_0^{\infty} \frac{e^{\sin(x)}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Exercice 5 (10 points).

Déterminer la limite de $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$.

Exercice 6 (10 points).

a Donner un exemple d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive telle que :

$$\sum u_n \text{ diverge et } \sum\left(\frac{u_n}{1+u_n^2}\right) \text{ diverge.}$$

b Donner un exemple d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive telle que :

$$\sum u_n \text{ diverge et } \sum\left(\frac{u_n}{1+u_n^2}\right) \text{ converge.}$$

Bon travail

Université Libanaise
Faculté de Science III - Tripoli - Liban

Cours: Math 104
Session: Final

Année: 2014-2015
Durée: 2heures

Exercice I : (30 points).

Etudier la nature des séries numériques suivantes en précisant la convergence, la convergence absolue et la semie convergence

1. (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+(-1)^n}$;   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} sin(\frac{1}{n})$;

2. Utiliser le test intégral pour discuter la nature de série numérique: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2-2n+1}$

Exercice II : (5 points).

Preciser les valeurs de x $\in R$ pour que la série géometrique $\sum_{n=0}^{+\infty}(cos(2x))^n$ soit convergente

Exercice III : (15 points).

Déterminer le rayon de convergence R puis calculer pour $|x| < \mathrm{R}$ la somme de la série entière: $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n}+(-2)^n)x^n$

Exercice IV : (20 points).

Déterminer le developpement en série entière au voisinage de 0 pour la fonction $f(x) = \frac{1}{(2x+3)^2}$. Déterminer le rayon de convergence de cette série

Exercice V : (15 points).

On considère la fonction $f(x) = \frac{2x^2+1}{(x-1)(2x-1)}$

1. Déterminer les constantes a, b et c pour que: $f(x) = a + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(2x-1)}$
2. Développer la'fonction f en série entière au voisinage de zero puis trouver le rayon de convergence R de cetter série

Exercice VI : (15 points).

Déterminer le rayon deconvergence, le domaine de convergence et la somme de la série entière: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}$

Bonne Chance

Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 104
Durée : 2 heures

Année : 2013 - 2014
Examen : Final

Exercice 1 (25 points). Etudier la convergence de la suite réelle $(U_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 & \in & \mathbb{R}^+, \\ U_{n+1} & = & \frac{1}{6}(U_n^2+8) \end{cases} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 2 (35 points). Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+1}$, (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, (c) $\displaystyle\sum \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$,

(d) $\displaystyle\sum \left(\sin\left(\frac{1}{3^n}\right)\right)^n$, (e) $\displaystyle\sum \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$, (f) $\displaystyle\sum \left(\frac{(-1)^n\sqrt{n}+\sin(n)}{n^2}\right)$,

(g) $\displaystyle\sum \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)$,

Exercice 3 (10 points). Etudier la nature puis calculer la somme de la série numérique

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+2}{4^n}.$$

Exercice 4 (30 points).

1. Trouver le domaine de convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^{3n}}{3n2^{3n-1}}.$$

2. Trouver le domaine de convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n}{3^n} x^n.$$

Exercice 1 . Soit f la fonction continue définie par $f(x) = \frac{1}{6}(x^2+8)$ pour tout $x \geq 0$. On a $f'(x) = \frac{1}{3}x \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, donc f est croissante sur $[0, +\infty[$

1. Convergence de $(U_n)_n$: Il faut déterminer le signe de $u_1 - u_0$, pour cela, on va calculer le signe de $f(x) - x$.
2. $f(x)-x = \frac{1}{6}(x^2-6x+8)$. Donc on a deux cas, le premier $f(x)-x \leq 0$ si $x \in [0, -4+2\sqrt{10}[$ et le second $f(x) - x \geq 0$ si $x \in [-4+2\sqrt{10}, +\infty[$.
3. Si $U_0 \in [0, -4+2\sqrt{10}[$, alors $U_1 - U_0 = f(U_0) - U_0 < 0$, donc $(U_n)_n$ est décroissante. De plus comme $f([0, -4+2\sqrt{10}[) = [\frac{4}{3}, f(-4+2\sqrt{10})[$ alors $U_n \in [[\frac{4}{3}, f(-4+2\sqrt{10})[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et elle est convergente comme étant décroissante et minorée (par $\frac{4}{3}$).
4. Si $U_0 \in]-4+2\sqrt{10}, +\infty[$, alors $U_1 - U_0 = f(U_0) - U_0 > 0$, donc $(U_n)_n$ est croissante. De plus comme $f(]-4+2\sqrt{10}, +\infty) =]\frac{4}{3}, +\infty[$ alors $(U_n)_n$ n'est pas majorée pour tout $n \in \mathbb{N}$ et elle est divergente.
5. Si $U_0 = -4+2\sqrt{10}$, dans ce cas la suite est stationnaire en $-4+2\sqrt{10}$.

Exercice 2 .

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x_n$, série alterné avec $x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}+1}$.
   On a $x_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $(x_n)_x$ est décroissante, donc d'après le théorème de série alternée $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+1}$ est convergente.
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.
   D'abord, la série est à terme positif. $\sqrt[n]{U_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1$, donc d'après Cauchy la série est convergente.
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n = \sum_{n\geq 0}\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$.
   D'abord, la série est à terme positif. $U_n = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$ Au voisinage de l'infini, on a $U_n \sim \dfrac{1}{n}$. Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n}$ ont même nature. Comme $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. Ainsi $\displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n$ l'est aussi.
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n = \sum_{n\geq 0}\left(\sin(\frac{1}{3^n})\right)^n$.
   La série est à terme positif. $\sqrt[n]{U_n} = \sin(\frac{1}{3^n})$, et au voisinage de l'infini, on a $U_n \sim \frac{1}{3^n} \to 0 < 1$. Donc d'après Cauchy la série est convergente.
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n = \sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.
   La série est à terme positif. On a $U_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n^2+n-1}\right)$, donc au voisinage de l'infini, $U_n \sim \frac{2}{n^2+n-1} \sim \frac{2}{n^2}$. Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{2}{n^2}$ ont même nature. Comme $\sum \frac{2}{n^2}$ est convergente. Ainsi $\displaystyle\sum_{n\geq 0} U_n$ l'est aussi.

6. $\sum U_n = \sum\left(\frac{(-1)^n\sqrt{n}+\sin(n)}{n^2}\right) = \sum(-1)^n x_n + \frac{\sin(n)}{n^2}$, avec $x_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$.
On a $x_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $(x_n)_n$ est décroissante, donc d'après le théorème de série alternée $\sum(-1)^n x_n$ est convergente. D'autre part, $0 \leq \frac{|\sin(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Donc d'après le test de comparaison $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$ est convergente. Ainsi $\sum U_n$ l'est aussi comme étant la somme de deux séries convergentes.

7. $\sum U_n = \sum\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)$.
La série est à terme positif. On a $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1.2....(n+1)}{(n+2)(n+3)...(2n+2)} \leq (\frac{1}{2})^n \to 0 < 1$. Donc d'après d'Alembert la série est convergente.

Exercice 3 . Pour tout $n \geq 0$, on a

$$\sum \frac{3^n+2}{4^n} = \sum(\frac{3}{4})^n + 2\sum(\frac{1}{4})^n$$

c'est la somme de 2 séries géométriques, de raisons plus petits que 1 donc convergente

$$= \frac{1}{1-\frac{3}{4}} + \frac{2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{20}{3}.$$

Exercice 4 .

1. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^{3n}}{3n2^{3n-1}} = \sum U_n(x)$. On a

$$\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \frac{3n}{3n+3}\left|\frac{x}{2}\right|^3 \to \left|\frac{x}{2}\right|^3.$$

Donc $R = 2$.
$\sum U_n(-2) = \sum \frac{(-1)^{3n}2}{3n}$ est une série alternée convergente (Th des S.A.).
$\sum U_n(2) = \sum \frac{2}{3n}$ est une série divergente. Donc $D = [-2, 2[$.

2. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n}{3^n} x^n = \sum U_n(x)$. On a

$$\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \frac{n+1}{n}\left|\frac{x}{3}\right|^3 \to \left|\frac{x}{3}\right|.$$

Donc $R = 3$.
$\sum U_n(-3) = \sum(-1)^n n$ est une série divergente.
$\sum U_n(3) = \sum n$ est une série divergente. Donc $D =]-3, 3[$.

Université Libanaise
Faculté des sciences, Section III-Tripoli

Cours : Math 104

Examen Final

Date : 30/06/.2014

Durée : 2h

Exercice 1. (25 points)
Etudier la convergence de la suite réelle $(U_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 \in \mathbb{R}_+ \\ U_{n+1} = \frac{1}{6}(U_n^2 + 8) \end{cases}$$

Exercice 2. (35 points)
Etudier la convergence et la convergence absolue des séries numériques suivantes:

a) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+1}$

b) $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

c) $\sum(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$

d) $\sum \left(\sin \frac{1}{3^n}\right)^n$

e) $\sum \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$

f) $\sum \frac{(-1)^n\sqrt{n} + \sin(n)}{n^2}$

g) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Exercice 3. (10 points)
Etudier la nature puis calculer la somme de la série numérique:

$$\sum_0^\infty \frac{3^n+2}{4^n}$$

Exercice 4. (30 points)
a) Trouver le domaine de convergence de la série:

$$\sum_1^\infty \frac{x^{3n}}{3n2^{3n-1}}$$

b) Trouver le domaine de convergence et la somme de la série:

$$\sum_1^\infty \frac{n}{3^n}x^n$$

Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 104
Durée : 2 heures

Année : 2012 - 2013
Examen : Final

Exercice 1 (10 points). Montrer que les suites suivantes $(U_n)_{n\geq 3}$ et $(V_n)_{n\geq 3}$ sont adjacents

$$U_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1} \quad \text{et} \quad V_n = U_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \ \forall n \geq 3.$$

Exercice 2 (20 points). Etudier la convergence de la suite réelle $(U_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 & \in & [1, +\infty[, \\ U_{n+1} & = & U_n^2 - 2U_n + 2 \end{cases} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 3 (25 points). Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$(1)\ \sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right), \quad (2)\ \sum_{n\geq 1}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right), \quad (3)\ \sum_{n\geq 1}\frac{(\sqrt[4]{n^2+1})\ln n}{2n^5},$$

$$(4)\ \sum_{n\geq 0} 2^{-\sqrt{n}}, \qquad (5)\ \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\ln n}.$$

Exercice 4 (10 points). Calculer la somme de la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$.

Exercice 5 (10 points). Développer en série entière la fonction $f(x) = \ln(1+x+x^2)$.
(Indication : Remarquons que $1+x+x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$).

Exercice 6 (25 points). Considérons la série entière $\sum_{n\geq 2} \frac{n}{n^2-1} x^n$.

1. Calculer le rayon de convergence R, et le domaine de convergence D de la série donnée.
2. Soit $a_n = \frac{n}{n^2-1}$. Décomposer a_n en éléments simple puis calculer la somme S de la série $\sum_{n\geq 2} a_n x^n$ dans son domaine de convergence D.

Exercice 1 . Pour tout $n \geq 3$, on a

1. $U_n \leq V_n$, en effet

$$\begin{aligned} V_n - U_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \\ &= \frac{2n-1}{2n^2} \geq 0. \end{aligned}$$

2. $(U_n)_n$ est croissante, en effet, pour tout $n \geq 3$, on a

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k^2+1} - \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2+1} > 0. \end{aligned}$$

3. $(V_n)_n$ est décroissante, en effet, pour tout $n \geq 3$, on a

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= U_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} - U_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(n+1)^2} \\ &= \frac{-n^2+2n+2}{2n^2(n+1)^2((n+1)^2+1)} < 0, \quad \text{pour tout } n \geq 3. \end{aligned}$$

Finalement ces deux suites sont adjacentes.

Exercice 2 . Soit f la fonction continue définie par $f(x) = x^2 - 2x + 2$ pour tout $x \geq 1$. On a $f'(x) = 2(x-1) \geq 0$ pour tout $x \geq 1$, donc f est croissante sur $[1, +\infty[$

1. Convergence de $(U_n)_n$: Il faut déterminer le signe de $u_1 - u_0$, pour cela, on va calculer le signe de $f(x) - x$.
2. $f(x) - x = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Donc on a deux cas, le premier $f(x) \leq 0$ si $x \in [1, 2]$ et le second $f(x) - x \geq 0$ si $x \in [2, +\infty[$.
3. Si $U_0 \in]1, 2[$, alors $U_1 - U_0 = f(U_0) - U_0 < 0$, donc $(U_n)_n$ est décroissante. De plus comme $f(]1, 2[) =]1, 2[$ alors $U_n \in]1, 2[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et elle est convergente comme étant décroissante et minorée (par 1) et elle converge vers 1.
4. Si $U_0 \in]2, +\infty[$, alors $U_1 - U_0 = f(U_0) - U_0 > 0$, donc $(U_n)_n$ est croissante. De plus comme $f(]2, +\infty) =]2, +\infty[$ alors $(U_n)_n$ n'est pas majorée pour tout $n \in \mathbb{N}$ et elle est divergente.
5. Si $U_0 = 1$ ou 2, dans ce cas la suite est stationnaire respectivement en 1 ou 2.

Exercice 3 .

1. $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + \frac{1}{n^2}) = \sum_{n \geq 1} U_n$.

   D'abord, la série est à terme positif, car $0 \leq \ln(1 + \frac{1}{n^2}) = U_n$ pour tout $n \geq 1$. Au voisinage de $+\infty$, on a $U_n \sim \frac{1}{n^2}$, donc $\sum U_n$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ ont même nature et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente ($\alpha = 2 > 1$), alors $\sum U_n$ l'est aussi.

2. $\sum_{n\geq 1} U_n = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n\geq 1} V_n + \sum_{n\geq 1} W_n$, avec $V_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $W_n = \frac{1}{n}$.
On a $\sum_{n\geq 1} W_n$ est divergente, $(\alpha = 1)$.
$\sum_{n\geq 1} V_n = \sum_{n\geq 1}(-1)^n x_n$ est une série alternée, avec $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. On a $x_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et si on prend $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{-1}{n\sqrt{n}} < 0$ donc $(x_n)_n$ est décroissante, donc d'après le théorème des séries alternées, $\sum_{n\geq 1} V_n$ est convergente. Finalement $\sum_{n\geq 1} U_n$ est divergente comme étant la somme de deux séries, l'une convergente et l'autre divergente.

3. $\sum_{n\geq 1} U_n = \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt[4]{n^2+1}\ln(n)}{2n^5}$. D'abord, la série est à terme positif. Au voisinage de l'infini, $U_n \sim \frac{n^{\frac{2}{4}}\ln(n)}{2n^5} = \frac{1}{2n^{\frac{9}{2}}(\ln(n))^{-1}}$. Donc $\sum_{n\geq 1} U_n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^{\frac{9}{2}}(\ln(n))^{-1}}$ ont même nature. Comme $\sum \frac{1}{2n^{\frac{9}{2}}(\ln(n))^{-1}}$ est une série de Bertrand avec $\alpha = \frac{9}{2} > 1$ donc elle est convergente. Ainsi $\sum_{n\geq 1} U_n$ l'est aussi.

4. $\sum_{n\geq 1} U_n = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$.
La série est à terme positif et à partir d'un certain rang, on a $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n^2}$ (car $\ln(U_n) = -\sqrt{n}\ln(n) \leq -2\ln(n)$ et $\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} > \frac{2}{\ln(2)}$). Donc d'après le teste de comparaison, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente alors $\sum U_n$ l'est aussi.

5. $\sum_{n\geq 1} U_n = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln(n)}$.
La série est à terme positif et à partir d'un certain rang, on a $0 \leq \frac{1}{n} \leq U_n$ (car $-\ln(n) \leq \ln(U_n) = -\ln(n)\ln(2)$ et $\ln(2) < 1$). Donc d'après le teste de comparaison, comme $\sum \frac{1}{n}$ est divergente alors $\sum U_n$ l'est aussi.

Exercice 4 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{3}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{A}{3n+1} + \frac{B}{3n+4}$, par le calcul, $A = 1$ et $B = -1$, donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+4} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{p=4}^{\infty} \frac{1}{p} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

Exercice 5 . On a $f(x) = \ln(1 + x + x^2) = \ln(1 - x^3) - \ln(1 - x)$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-3x^2}{1-x^3} + \frac{1}{1-x}, \\
&= -3x^2 \sum_{n\geq 0} x^{3n} + \sum_{n\geq 0} x^n \qquad \text{à condition que } |x| < 1, \\
&= \sum_{n\geq 0} \left((-1)^{n+1} x^{2n+2} - 1\right) x^n.
\end{aligned}$$

+ δ (C|

Exercice 6 .

(a) Posons $\frac{n}{n^2-1}x^n = u_n(x)$. Pour tout $n \geq 2$, on a

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{(n+1)(n^2-1)}{n((n+1)^2-1)}|x| \to |x|.$$

D'après Alembert, cette série est convergente pour $|x| < 1$, donc $R = 1$.
Soit D le domaine de convergence de cette série.
$u_n(1) = \frac{n}{n^2-1}$, la série $\frac{n}{n^2-1}$ est divergente, car au voisinage de l'infini, $\frac{n}{n^2-1} \sim \frac{1}{n}$, donc $\sum \frac{n}{n^2-1}$ est divergente.
$u_n(-1) = (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$, la série $(-1)^n \frac{n}{n^2-1}$ est convergente, car au voisinage de l'infini, $(-1)^n \frac{n}{n^2-1} \sim \frac{(-1)^n}{n}$, donc $\sum \frac{n}{n^2-1}$ est convergente.
Ainsi $D = [-1, 1[$.

(b) Pour tout $n \geq 2$, on a $\frac{n}{n^2-1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$, par le calcul, on trouve $a = b = \frac{1}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 2} a_n x^n &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n-1}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n+1}x^n \\
&= -\frac{x}{2}\ln|1-x| + \ln|x-1| + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \qquad \text{pour tout } x \in [-1,1[-\{0\}
\end{aligned}$$

$-3x^2 \Sigma x^{3n} + \Sigma x^n$

$-3x^2 \Sigma \frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \Sigma x^{n+1} +$

$)x^n$

Université Libanaise
Faculté des sciences III

Cours : Math 104
Session : Final

Date : 06/07/2012
Durée : 2h30m

Exercice 1 (20 pts). Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2} \end{cases}$$

Exercice 2 (10 pts). Determiner u_1 pour que la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{5}[16u_{n+1} - 3u_n] \end{cases}$$

est convergente puis trouver sa limite

Exercice 3 (20 pts). Etudier la convergence et la convergence absolue des séries numériques suivantes :

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1+n^2}}; \quad 2) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{Ln(n)}; \quad 3) \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n^3+n+1} - \sqrt{n^3+n-1})$$

$$4) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{sin^2(n)}{n}\right)^n ; 5) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{2n+(-1)^n}{n-(-1)^n}\right)^n$$

Exercice 4 (10 pts). Calculer la somme de la série numérique suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+1}{e^n}$$

Exercice 5 (20 pts). Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n^n (n!)^2} x^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n})^n x^n; \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n+n} x^{4n}$$

Exercice 6 (20 pts). Développer en séries entières au voisinage de 0 les fonctions :

$$f(x) = \frac{1}{3x+5}; \qquad g(x) = Ln\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)$$

Bonne Chance

EX III. 1) $\left|\frac{(-1)^n}{n^4+n^2}\right| = \frac{1}{n^4+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ or $\sum \frac{1}{n^2}$ cv $\Rightarrow$ Série abs cv $\Rightarrow$ cv

2) $\left|\frac{(-1)^n}{\ln n}\right| = \frac{1}{\ln n}$ Série $\sum \frac{1}{\ln n}$ est la série de Bertrand div $\Rightarrow$ la série n'est pas abs cv

$\sum (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ posons $f(x) = \frac{1}{\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $f \searrow$ donc série alt cv car $f' = \frac{-1}{x(\ln x)^2} < 0$ $\forall x > 0$

donc $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$ est semi cv.

3) $U_n = \sqrt{n^3+n+1} - \sqrt{n^3+n-1} \geq 0 \ \forall n \Rightarrow$ S.T.P

$$\frac{U_n \cdot (\sqrt{n^3+n+1} + \sqrt{n^3+n+1})}{\sqrt{n^3+n+1} + \sqrt{n^3+n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n^3+n+1}\left(1+\sqrt{\frac{n^3+n+1}{n^3+n-1}}\right)} \sim \frac{2}{2n^{3/2}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

or $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ cv donc série cv et abs cv

4) $\sqrt[n]{\left(\frac{\sin^2 n}{n}\right)^n} = \frac{\sin^2 n}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0 < 1$ donc série cv et abs cv

5) $\sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n+(-1)^n}{n-(-1)^n}\right)^n \cdot \frac{1}{3^n}\right|} = \left|\frac{2n+(-1)^n}{n-(-1)^n}\right| \cdot \frac{1}{3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3} < 1$

donc série abs cv donc cv

EX IV: $\sum \frac{2^n+1}{e^n} = \sum \frac{2^n}{e^n} + \sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$

or la série $\sum \left(\frac{2}{e}\right)^n$ est cv et $\sum \left(\frac{2}{e}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{e}}$

$\sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$ " " et $\sum \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{1-1/e}$

$\Rightarrow$ Série cv et $\sum \frac{2^n+1}{e^n} = \frac{1}{1-\frac{2}{e}} + \frac{1}{1-1/e}$

lina_abdallah@hotmail.fr

· Ex

1) $\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2 (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n!)^2 n^n}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$

$= \frac{2(2n+1)(n+1)}{(n+1)^3} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{2(2n+1)}{(n+1)^2} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\boxed{R = \infty}$

2) posons $a_n = (\sqrt{n})^n = n^{\frac{n}{2}}$

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n^{\frac{n}{2}}} = n^{\frac{n}{2n}} = \sqrt{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

donc $\boxed{R = 0}$

3) $\frac{2^{n+1}}{3^{n+1} + (n+1)} \cdot x^{4(n+1)} \cdot \frac{3^n + n}{2^n} \cdot \frac{1}{x^{4n}} = \frac{2(3^n + n)}{3^{n+1} + (n+1)} \cdot x^4 = \frac{2 \cdot 3^n \left(1 + \frac{n}{2 \cdot 3^n}\right)}{3^{n+1}\left(1 + \frac{n+1}{3^{n+1}}\right)}$

$= \frac{2}{3} \frac{1 + \frac{n}{2 \cdot 3^n}}{1 + \frac{n+1}{3^{n+1}}} \cdot x^4 \longrightarrow \frac{2}{3} x^4$

① si $\frac{2}{3} x^4 < 1$ c.à dire $x^4 < \frac{3}{2}$ donc $x < \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$ alors la série cv

② si $x > \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$ la série div $\Rightarrow \boxed{R = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}}$

EX VI : 1) $f(x) = \frac{1}{5\left(1+\frac{3x}{5}\right)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{1-\left(-\frac{3x}{5}\right)}\right) = \frac{1}{5} \sum \left(\frac{-3}{5}x\right)^n \quad \forall x / \left|\frac{3}{5}x\right| < 1$

$f(x) = \frac{1}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{5}\right)^n x^n \qquad \forall x / |x| < \frac{5}{3}$

2) $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x^2} = \ln(1-x) - \ln(1+x^2)$

or $\ln(1-x) = -\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \forall x / |x| < 1$

et $\ln(1+x^2) = \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n} \quad \forall x / |x| < 1$

d'où $\forall x / |x| < 1 \quad g(x) = -\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n}$

$= -\sum_1^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n} - \sum_1^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n} = \sum_1^{\infty} \left(-\frac{1}{2n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) x^{2n}$

$+ \sum_1^{\infty} \frac{-x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_1^{\infty} \frac{-1-2(-1)^{n+1}}{2n} x^{2n} + \sum_1^{\infty} -\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$\cdot g(x) =$

2

- $g(x) = \sum a_p x^p$ où $a_p = \begin{cases} \frac{-1}{p} & \text{si } p = 2n+1 \\ \frac{-1+2(-1)^{\frac{p}{2}}}{p} & \text{si } p = 2n \end{cases}$

Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 104
Durée : 2 heures

Année : 2010 - 2011
Examen : Final

Exercice 1 .
Déterminer la nature des séries de terme général (préciser la convergence et la convergence absolue) :

a) $U_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)}$

b) $U_n = \dfrac{e^{-2n}}{n+1}$

c) $U_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$

d) $U_n = \dfrac{(-1)^n}{2n^3+1}$

Exercice 2 .
DÃ©velopper en série entière :

a) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x(1+x)}$

b) $g(x) = \arctan\left(\dfrac{2(x+1)}{x-4}\right)$

Exercice 3 .
Trouver le rayon, le domaine et la somme des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq} \frac{n^2+n-1}{(n+1)!} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{n+1} x^n$

Exercice 4 .

a) Discuter suivant $a \in \mathbb{R}$ la nature de la série de terme général $U_n = \dfrac{a^n}{n+1}$ (Considérer les cas $a = 0, 0 < |a| < 1, |a| = 1, |a| > 1$).

b) Considérons la série de terme général $U_k = \ln(1 + \dfrac{2}{k(k+3)})$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} U_k$ est convergente .
2. Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)}{k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+3}{k+2}\right)$.
3. Déduire la somme de la série.

Exercice 1 .

1. $U_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n) < \ln(n+1) \Rightarrow \sqrt{\ln(n)} < \sqrt{\ln(n+1)} \Rightarrow U_n > 0$.(Série à termes positifs)
   $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\ln(k+1)} - \sqrt{\ln(k)} = \sqrt{\ln(n+1)} \longmapsto +\infty$.
   D'où la série diverge.
2. $U_n = \frac{e^{-2n}}{n+1}$. (Série à termes positifs)
   $U_n \sim \frac{1}{ne^{2n}}$, let $v_n = \frac{1}{ne^{2n}}$, $n^2 v_n \longmapsto 0$. La série $\sum v_n$ est convergente alors $\sum U_n$ est convergente.
3. $U_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n}$.
   $\sum \frac{1}{n}$ est divergente $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente (Série alternée) alors $\sum U_n$ est divergente.
4. $U_n = \frac{(-1)^n}{2n^3+1}$. (Série alternée)
   $\mid \frac{(-1)^n}{2n^3+1} \mid = \frac{1}{2n^3+1} \sim \frac{1}{2n^3}$. Or $\sum \frac{1}{2n^3}$ est convergente donc la sÃ©rie est absolument convergente alors la série est convergente.

Exercice 2 .

a)

$$\sum_{n\geq} \frac{n^2+n-1}{(n+1)!} x^n.$$

Rayon :

$$\left| \frac{(n+1)^2 + (n+1) - 1}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{n^2+n-1} \right| \sim \frac{1}{n} \longmapsto 0 \Longrightarrow R = +\infty.$$

Domaine de convergence :
Le domaine est $D =]-\infty, +\infty[$.
Somme :
$\forall x \neq 0$

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n}{(n+1)!} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)!} x^n - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \\ &= xe^x - \tfrac{1}{x}(e^x - 1). \end{aligned}$$

Si $x = 0, S(x) = a_0 = -1$.

b)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{n+1} x^n.$$

Rayon :

$$\left| \frac{(n+1)^2+1}{n+2} \frac{n+1}{n^2+1} \right| \longmapsto 1 \Longrightarrow R = 1.$$

Domaine de convergence :
Si $x = 1, U_n(1)$ ne tend pas vers 0 donc c'est une série divergente et si $x = -1, U_n(-1)$ ne tend pas vers 0 donc c'est une série divergente.
Alors le domaine est $D =]-1, 1[$.
Somme : $\forall x \neq 0$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 1 + 2}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-1}{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

$$= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)x^{n-2} + 2\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \right)' + \frac{2}{x} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt$$

$$= x^2 \left(\int_0^x \tfrac{1}{1-t} dt \right) = \frac{x^2}{(1-x)^2} - \frac{1}{x} \ln(1-x).$$

Si $x = 0, S(x) = a_0 = 1$.

Exercice 3 . $f(x)$ est définie pour tout $x \in]-1, +\infty[\backslash 0$.
On a :

$\ln(1+x) = \sum_{1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

$\frac{1}{x} \ln(1+x) = \sum_{1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$.

$\frac{1}{x+1} = \sum_{0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

D'où $f(x) = \frac{1}{x} \ln(1+x) \times \frac{1}{x+1} = \left(\sum_{1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1} \right) \left(\sum_{1}^{+\infty} (-1)^n x^n \right) = \sum_{0}^{+\infty} c_n x^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

D'où $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} (-1)^{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$ et $f(x) = \sum_{0}^{+\infty} \left((-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \right) \quad \forall x / |x| < 1$ avec $x \neq 0$.

b) $D = \mathbb{R} - 4$.

$g'(x) = \frac{-2}{x^2+4} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2}{4}\right)} = -\frac{1}{2} \sum_{0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}}$.

Alors $g(x) = g(0) - \frac{1}{2} \sum_{0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)2^{2n}} \quad \forall x / |x| < 2$

Exercice 4 . a)

— $a = 0$ la série est convergente.

— $0 < |a| < 1$, $\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \left| \frac{a^{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{a^n} \right| = \frac{n+1}{n+2} \cdot |a| \mapsto |a| < 1$. La série est convergente.

— $|a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$.

Si $a = 1, U_n \sim \frac{1}{n}$. La série est divergente.

Si $a = -1, U_n \sim \frac{(-1)^n}{n+1}$. La série est alternée donc convergente.

— $|a| > 1$, $\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| \mapsto |a| > 1$. La série est divergente.

b)

$i)\ U_n = \ln(1 + \frac{2}{n(n+3)})$ c'est une série à termes positifs.

$\ln(1+\frac{2}{n(n+3)}) \sim \frac{2}{n(n+3)} \sim \frac{2}{n^2}$. Puisque $\sum \frac{2}{n^2}$ est convergente alors la série est convergente.

$$
\begin{aligned}
2i)\, S_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k(k+3)+2}{k(k+3)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) + \ln\left(\frac{k+2}{k+3}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+3}{k+2}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3i)\; & \left(\ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n}\right) - \left(\ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} + \ln\frac{n+2}{n+1} + \ln\frac{n+3}{n+2}\right) \\
&= \ln 2 + \ln\frac{3}{2} - \ln\frac{n+2}{n+1} - \ln\frac{n+3}{n+2} \\
&= \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 - \ln(n+2) + \ln(n+1) - \ln(n+3) + \ln(n+2) \\
&= \ln 3 + \ln\frac{n+1}{n+3} \\
&= \ln 3 + \ln\left(1 - \frac{2}{n+3}\right) \mapsto \ln 3.
\end{aligned}
$$