Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 1106
Durée : 2H

Année : 2018 - 2019
Examen : Final

Exercice 1 (20 points).
Soit $f : D \to \mathbb{R}$, avec $D \subset \mathbb{R}$.

(1) Si $k > 0$ tel que $|f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$ pour tous $x,\ x' \in D$. Démontrer que f est uniformement continue sur D.

(2) Si f est dérivable et f' est bornée sur D. Démonter que f est uniformement continue sur D. (Indication : Utiliser le théorème des accroissements finis).

(3) Déduire de partie (2) que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformement continue sur $[1, +\infty[$.

(4) Déduire que $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformement continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2 (10 points).
Montrer que la fonction $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$. (Indication : penser à deux suites x_n et y_n dans $]0, 1]$, prendre $x_n = \frac{8}{1+8n}$, $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 3 (20 points).

Considérons la fonction $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \sin(x). \end{aligned}$

(a) Ecrire la formule de Taylor-Maclaurin de la fonction f sur l'intervalle $[0, a]$, avec $a > 0$ et le reste à l'ordre 7.

(b) Déduire une approximation de $\sin(1)$ à 10^{-2} près.

Exercice 4 (20 points).
Considérons l'équation différentielle suivante :

$$xy^2y' = x^3 + y^3. \tag{1}$$

(1) En utilisant le changement de variable $y = xu$, montrer que l'équation (1) sera

$$u^2u' = \frac{1}{x}. \tag{2}$$

(2) Résoudre l'équation (2). Déduire la solution générale de l'équation (1).

Exercice 5 (20 points).
Considérons l'équation différentielle suivante :

$$ye^x\,dx + (e^x + (y+1)e^y)\,dy = 0. \tag{3}$$

(1) Vérifier que l'équation (3) est exacte.

(2) Trouver la solution générale de l'équation (3).

Exercice 6 (10).

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x + y - 2 + (1 - x)y' = 0.$$

Bon trav

Université Libanaise
Faculté de Sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 1106
Durée : 2H et demie

Année : 2017 - 2018
P+F : Semestre 2

مطلوب الاجابة على كل جزء بشكل متواصل و دون تداخل مع الجزء الآخر

Partie P (Partiel) : (Sur 100 points pour 45 minutes).

Exercice 1 (15 + 15 = 30 points).

(1) Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$. (Indication : Voir $\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)$).

(2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leq [2x] - 2[x] \leq 1$.

Exercice 2 (20 + 10 + 10 + 20 + 10 = 70 points).

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On note par A' l'ensemble de tous les points d'accumulations de A.

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$x \in A' \iff \text{il existe une suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} \text{ telle que : pour tout } n \in \mathbb{N}$$
$$x_n \in A, \quad x_n \neq x \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

(2) Soit $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}} \;/\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 < \dfrac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}} < 1$.

(b) Déduire que $A' \neq \emptyset$.

(c) Montrer que $\{-1, 1\} \subset A'$.

(d) Déduire que A n'est pas fermé de $\mathbb{R}$.

SVP tourner la page

Partie F (Final) : (Sur 100 points pour 105 minutes).

Exercice 3 ($10+10+10=30$ **points).**
Etudier la continuité uniforme des fonctions suivantes :

(1) $f(x)=\sin(x^2)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

(2) $g(x)=\sqrt{x(1-x)}$ pour tout $x\in[0,1]$.

(3) $h(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ pour tout $x\in[e,+\infty[$. (Indication : Utiliser le théorème des accroissements finis).

Exercice 4 ($10+5=15$ **points).**
Considérons l'EDO suivante

$$y'=\frac{y^2-xy+x^2}{x^2}. \qquad (E1)$$

(1) En utilisant le changement de variable $y(x)=xu(x)$ montrer que u satisfait l'EDO à variable séparable suivante

$$\frac{u'}{(u-1)^2}=\frac{1}{x}. \qquad (E2)$$

(2) Déduire la solution générale de $(E1)$.

Exercice 5 ($5+5+10+5=25$ **points).**
Considérons l'EDO suivante

$$2xy\,dx+(4y+3x^2)\,dy=0. \qquad (E3)$$

(1) Montrer que $(E3)$ est non exacte.

(2) Trouver un facteur intégrant de $(E3)$.

(3) Trouver la solution générale de $(E3)$.

(4) Trouver une solution particulière de $(E3)$ pour $y(0)=1$.

Exercice 6 ($10+5+10+5=30$ **points).**
Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x$ et $a>0$.

(1) Ecrire la formule de Maclaurin avec un reste à l'ordre 6 de f entre 0 et a.

(2) Réecrire la formule de Maclaurin avec un reste à l'ordre 6 de f entre 0 et $a=\frac{1}{2}$.

(3) Montrer que

$$\left|\sqrt{e}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4\times 2!}-\frac{1}{8\times 3!}-\frac{1}{16\times 4!}-\frac{1}{32\times 5!}\right|<10^{-4}.$$

(4) Déduire une approximation de $\sqrt{e}$ à 10^{-4} près.

Bon chance ☺

2017 - 2018 1ère session M1106

Partie Partiel

Ex 1 :

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$

Raisonnons par l'absurde, supposons que $\sqrt{2}+\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$

de plus, on a $(\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{2}-\sqrt{7}) = 2-7 = -5 \in \mathbb{Q}$

Donc $\sqrt{2}-\sqrt{7} = \dfrac{\overbrace{(\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{2}-\sqrt{7})}^{\in \mathbb{Q}}}{\underbrace{\sqrt{2}+\sqrt{7}}_{\in \mathbb{Q}}} \in \mathbb{Q}$

Donc $\sqrt{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-\sqrt{7}) + \frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{7}) \in \mathbb{Q}$

impossible car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, d'où $\sqrt{2}+\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.

(2) $0 \leq [2x] - 2[x] \leq 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $[x] \leq x < [x]+1$

$2[x] \leq 2x < 2[x]+2$

$2[x] = [\underbrace{2[x]}_{\in \mathbb{Z}}] \leq [2x] < [\underbrace{2[x]+1}_{\in \mathbb{Z}}] = 2[x]+2$

et $[\;] \nearrow$

D'où $2[x] \leq [2x] < 2[x]+2$ et $0 \leq [2x]-2[x] \leq 1$

et $0 \leq [2x]-2[x] < 2$

Ex 2 :

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, A' est l'ensemble de tous les pts d'accumulations de A.

(1) $\underline{x \in \mathbb{R}}$

? $x \in A' \iff \exists (x_n)_n \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in A,\ x_n \neq x$ et $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$

cours ----

(2) $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{1+1/n} \,/\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

(a) ? $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 < \frac{(-1)^n}{1+1/n} < 1$

pr tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$1 + 1/n > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+1/n} < 1$

et $\left|\frac{(-1)^n}{1+1/n}\right| = \frac{1}{1+n} < 1$

D'où $-1 < \frac{(-1)^n}{1+1/n} < 1$

(b) $A' \neq \phi$: pr $n = 1$, on a $\frac{(-1)^1}{1+1/1} = -1/2 \in A$

(c) $\{-1, 1\} \subset A'$:

$-1 \in A'$, pour $x_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{1+1/n+1} = \frac{-1}{1+1/n+1} \in A \ \forall n$

$x_{n+1} \neq -1$ car $-1 \in A$

et $\lim x_n = -1$, d'où $-1 \in A'$.

de m̂ pr $1 \in A'$, on a $x_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{1+1/2n} = \frac{1}{1+1/2n} \in A, \forall n$

$x_{2n} \neq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ car $1 \notin A$

$\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$ d'où $1 \in A'$

(d) A n'est pas fermé de $\mathbb{R}$, car $-1, 1 \in A'$ mais $-1, 1 \notin A$

Partie final

Ex 3 :

(1) $f(x) = \sin(x^2)$ $x \in \mathbb{R}$

f n'est pas u.c sur $\mathbb{R}$ car par exemple,

pr $X_n = \sqrt{n\pi}$; $n \in \mathbb{Z}$

et $X'_n = \sqrt{(2n+1)\pi/2}$; $n \in \mathbb{Z}$

on a $X_n, X'_n \in \mathbb{R}$

$$X_n, X'_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

$$|X_n - X'_n| = |\sqrt{n\pi} - \sqrt{(2n+1)\pi/2}| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

mais $|f(X_n) - f(X'_n)| = |\sin(n\pi) - \sin((2n+1)\pi/2)|$

$$= |0 - (-1)^n| = 1 \longrightarrow 1 \neq 0$$

(2) $g(x) = \sqrt{x(1-x)}$ sur $[0,1]$

comme g est continue sur l'intervalle fermé et borée $[0,1]$ donc g est u.c (d'après le th. de Heine)

(3) $h(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ sur $[e, +\infty[$

h est u.C sur $[e,+\infty[$, en effet

pr tt $\varepsilon > 0$, il faut trouver $\delta > 0$ t.q.

pour tous $x, x' \in [e, +\infty[$ /

$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

pr $|x - x'| < \delta$ on a

$|f(x) - f(x')| = |x - x'|\,|f'(c)|$ d'après le th. des A.F

avec c entre x et x'

et $f'(c) = \dfrac{\ln c - c/c}{[\ln c]^2} = \dfrac{1}{\ln c} - \dfrac{1}{(\ln c)^2}$

avec $c \in]e,+\infty[\Rightarrow \ln(c) > \ln(e) = 1$

$\Rightarrow (\ln c)^2 > \ln c > 1$

$\Rightarrow 1 > \frac{1}{\ln c} > \frac{1}{(\ln c)^2}$

D'où $0 < \frac{1}{\ln c} - \frac{1}{(\ln c)^2} < 1 \Rightarrow |f'(c)| < 1$

D'où $|f(x) - f(x')| \leq |x - x'| < \delta$

Donc il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$.

Ex4: $y = xu \Rightarrow y' = u + xu'$

(1) D'où $u + xu' = \frac{x^2u^2 - x^2u + x^2}{x^2}$

$= u^2 - u + 1$

D'où $xu' = u^2 - 2u + 1 \Rightarrow \frac{u'}{(u-1)^2} = \frac{1}{x}$

(2) $\frac{du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{u-1} = \ln|x| + c$

$\Rightarrow u - 1 = \frac{1}{-\ln|x| + c}$

$\Rightarrow u = 1 + \frac{1}{c - \ln|x|}$

$\Rightarrow \frac{y}{x} = 1 + \frac{1}{c - \ln|x|}$

$\Rightarrow y = x + \frac{x}{c - \ln|x|}$ avec $c \in \mathbb{R}$

Ex5: $2xy\,dx + (4y + 3x^2)\,dy = 0$

(1) (E_3) non exacte :

$M(x,y) = 2xy$, $N(x,y) = 4y + 3x^2$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 6x$

(2) Facteur intégrant de (E_3) : I

si $I = I(x)$ alors $\frac{I'(x)}{I(x)} = \frac{N'_x(x,y) - M'_y(x,y)}{N(x,y)}$

$= \frac{-(6x - 2x)}{4y + 3x^2}$ i-p

si $I = I(y)$ alors

$\frac{I'(y)}{I(y)} = \frac{N'(x) - M'(y)}{M} = \frac{4x}{2xy} = \frac{2}{y}$

$\Rightarrow I(y) = e^{\int \frac{2dy}{y}} = e^{2\ln|y|} = e^{\ln y^2}$

$\Rightarrow I(y) = y^2$

vérification:

$y^2 \cdot 2xy\,dx + y^2(4y + 3x^2)\,dy = 0$

$2xy^3\,dx + (4y^3 + 3x^2y^2)\,dy = 0$ (*)

$M_1 = 2xy^3$ et $N_1 = 4y^3 + 3x^2y^2$

$\frac{\partial M_1}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial N_1}{\partial x} = 6xy^2$ donc (*) est exacte

(3) solution de (E_3)

$2xy^3\,dx + (4y^3 + 3x^2y^2)\,dy = 0$

come (*) est exacte, donc il existe une fonct différentielle f t.q. $df = M_1 dx + N_1 dy = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} f = cte & (a) \text{ sur } \mathbb{R}^2,\ cte \in \mathbb{R} \\ f'_x = M_1 & (b) \\ f'_y = N_1 & (c) \end{cases}$

(b) $\Rightarrow f(x,y) = \int M_1\,dx + k(y) = \int 2xy^3\,dx + k(y)$

$= x^2y^3 + k(y)$

(c) $\Rightarrow f'_{(y)}(x,y) = N_1 = 3x^2y^2 + k'(y) = 4y^3 + 3x^2$

$\Rightarrow k'(y) = 4y^3 \Rightarrow k(y) = y^4 + b$

D'où $f(x,y) = x^2y^3 + y^4 + b$, $b \in \mathbb{R}$

ⓐ ⇒ La solution satisfait :

$x^2y^3 + y^4 + a = 0$ avec $a = b -$ cte $\in \mathbb{R}$

(4) $y(0) = 1 \Rightarrow 0^2.1^3 + 1^4 + a = 0 \Rightarrow a = -1$

et $\boxed{x^2y^3 + y^4 - 1 = 0}$ relati qui donne la solut de $\begin{cases} 2xy\,dx + (4y+3x^2)dy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Ex 6:

$f(x) = e^x$, $a > 0$

(1) Comme $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ donc $f \in C^\infty([0,a])$

d'après Maclaurin, $\exists c \in]0,a[$ tq.

$$f(a) = f(0) + f'(0)a + f''(0).\frac{a^2}{2!} + f'''(0).\frac{a^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{a^4}{4!} + f^{(5)}(0).\frac{a^5}{5!} + f^{(6)}(c)\frac{a^6}{6!}$$

D'où

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^5}{5!} + \frac{a^6}{6!}e^c$$

(2) $a = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$e^{1/2} = \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4.2!} + \frac{1}{8.3!} + \frac{1}{16.4!} + \frac{1}{32.5!} + \frac{e^c}{64.6!}$$

(3) $$\left|\sqrt{e} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4.2!} - \frac{1}{8.3!} - \frac{1}{16.4!} - \frac{1}{32.5!}\right| = e^c.\frac{1}{64.6!}$$

on va montrer $\frac{e^c}{6!} < 10^{-4}$

on a $c < \frac{1}{2} \Rightarrow e^c < \sqrt{e} < 2$

$$\Rightarrow \frac{e^c}{6!} < \frac{2}{6!} = \frac{1}{3\times4\times5\times6} < 10^{-4}$$

(4) D'où

$$\sqrt{e} \approx 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4.2!} - \frac{1}{8.3!} - \frac{1}{16.4!} - \frac{1}{32.5!}$$

à 10^{-4} près

Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

Cours : Math 1106
Durée : 2H

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Année : 2017 - 2018
Deuxième session

Exercice 1 ($5+5+5+10=25$ points).
Soit $A=\{x\in\mathbb{Z}\ /\ x^2>4\}$

(1) Trouver l'ensemble de tous les points intérieurs de A.
(2) Trouver l'ensemble de tous les points adhérents de A.
(3) Trouver l'ensemble de tous les points d'accumulations de A
(4) A est-t-il ouvert de $\mathbb{R}$? fermé de $\mathbb{R}$? Justifiez votre réponse.

Exercice 2 (10 points).

Soit $D=\left\{\frac{m}{10^n}\ /\ (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\right\}$. Montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 ($5+5+5=15$ points).
Etudier la continuité uniforme des fonctions suivantes :

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ pour tout $x\in[1,+\infty[$.
(2) $g(x)=\dfrac{1}{x}$ pour tout $x\in]0,1]$.
(3) $h(x)=\sin(x^2)$ pour tout $x\in[0,\pi]$.

Exercice 4 ($5+5+5=15$ points).
Soit la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x)$ et $a>0$.

(1) Calculer les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre 4.
(2) Ecrire la formule de Maclaurin avec un reste à l'ordre 4 de f entre 0 et a.
(3) En déduire l'encadrement de $\ln(2)$ suivant

$$\frac{7}{12}<\ln(2)\leq\frac{157}{192}.$$

Exercice 5 ($5+5+10=20$ points).
Considérons l'EDO suivante

$$2\sin(y^2)\,dx+xy\cos(y^2)\,dy=0. \tag{E3}$$

(1) Montrer que $(E3)$ est non exacte.
(2) Montrer que $I(x)=x^3$ est un facteur intégrant de $(E3)$.

(3) Trouver la solution générale de $(E3)$.

Exercice 6 (15 points).
Résoudre l'EDO suivante
$$y'' + y = 2\cos^2(x).$$

Bon travail

Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 1106
Durée : 2H

Année : 2016 - 2017
Examen : Final

Exercice 1 (20 points).

Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Considérons la fonction

$$f : \begin{array}{ll}]-1,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(t) = \ln(1+t). \end{array}$$

(1) Ecrire la formule de Taylor-Maclaurin (ou Taylor-Lagrange) pour la fonction f sur l'intervalle $[0,x]$, avec le reste à l'ordre $n+1$.

(2) Déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)=\ln(2).$$

(3) En réécrivant la formule de Maclaurin pour la fonction f sur l'intervalle $[0,x]$, avec le reste à l'ordre 3, montrer que

$$\left|\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right|\leq\frac{x^3}{3}.$$

(4) Déduire une valeur approchée de $\ln(1.003)$ à 10^{-8} près.

Exercice 2 (20 points).

Considérons l'EDO suivante

$$(2y^2+3x)\,dx+2xy\,dy=0. \qquad (1)$$

(1) Montrer que l'EDO (1) n'est pas exacte.

(2) Trouver un facteur intégrant de (1).

(3) Trouver la solution générale de (1) .

Exercice 3 (20 points).

Considérons l'EDO de Bernoulli suivante

$$(x^2+1)y'-4xy=4x\sqrt{y}, \qquad \text{avec } y>0. \qquad (2)$$

(1) Utiliser un changement de variable convenable pour transformer l'EDO (2) en l'EDO suivante

$$(x^2+1)z'=2x(z+1), \qquad (3)$$

où z est la nouvelle fonction inconnue.

(2) Séparer les variables de l'EDO (3), puis déduire la solution générale de (2).

Exercice 4 (20 points).

Considérons l'EDO du second ordre suivante

$$y'' - 8y' + 15y = 5e^{2x} - 3, \tag{4}$$

(1) Déterminer a et b tels que $y(x) = ae^{2x} + b$ soit une solution particulière de (4).

(2) Résoudre l'EDO homogène associée à (4).

(3) Déterminer l'unique solution, y, de (4) vérifiant $y(0) = -\frac{1}{5}$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 5 (20 points).

Résoudre les EDO suivantes :

(1) $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{xy}$.

(2) $y' - \left(2x - \dfrac{1}{x}\right) y = 1$.

Bon travail

Final M110G - Session 1 - 2016-2017

Ex1 $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$f(t) = \ln(1+t)$ $\quad t \in]-1, +\infty[$.

(1) Formule de Maclaurin de f ds l'intervalle $[0,x]$ à l'ordre $n+1$

→ Comme $t \in]-1,+\infty[= D_f$ donc $f \in C^\infty(D_f)$

donc $f \in C^{n+1}(D_f)$ et donc $f \in C^{n+1}([0,x])$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

D'après Maclaurin, $\exists\, c \in]0,x[$ t.q.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

avec $f(x) = \ln(1+x)$ et $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

D'où $f(0) = \ln(1) = 0$ et $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{1^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!$

et $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + (-1)^n \dfrac{1}{(1+c)^{n+1}}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

(2) Deduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right] = \ln(2)$

ici $x = 1$

D'où $f(1) = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} + \dfrac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}}\cdot\dfrac{1}{n+1}$

D'où $\ln(2) = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} + \dfrac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}}\cdot\dfrac{1}{n+1}$

D'où $\ln(2) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right] + \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}}\cdot\dfrac{1}{n+1}$

De plus $\left|\dfrac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}}\cdot\dfrac{1}{n+1}\right| \le \dfrac{1}{n+1}$ Car $\dfrac{1}{(1+c)^{n+1}} \le 1$.

D'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}} \frac{1}{n+1} = 0$. cq.f.d.

(3) ? $\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^3}{3}$.

D'après le formule de Maclaurin, ~~on a~~ appliqué à $f(x) = \ln(1+x)$ au vois. de 0 à l'ordre 3, on a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{(1+c)^3} \frac{x^3}{3} \quad , \quad c \in]0,x[\text{ avec } x>0$$

D'où $\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| = \left| \frac{1}{(1+c)^3} \frac{x^3}{3} \right|$

$$= \left| \left(\frac{1}{1+c}\right)^3 \right| \cdot \left| \frac{x^3}{3} \right|$$

$$\leq 1 . \frac{x^3}{3}$$

(Car $1 \leq 1+c \Rightarrow$ $1 \leq (1+c)^3 \Rightarrow$ $\frac{1}{(1+c)^3} \leq 1$)

(4) $\ln(1.003) = \ln(1+0.003) \quad (x = 3.10^{-3})$

$= \ln(1+3.10^{-3})$

$\sim 3.10^{-3} - \frac{(3.10^{-3})^2}{2} = 3.10^{-3} - \frac{9}{2}.10^{-6} = 3.10^{-3} - 4{,}5.10^{-6}$

D'où $\ln(1.003) \sim 0.0029955$

avec une erreure $\leq \frac{x^3}{3} = \frac{(3.10^{-3})^3}{3} = 3^2.10^{-9} < 10^{-8}$.

Ex2. $(2y^2+3x)dx + 2xy\,dy = 0$ (1)

1) (1) Non exacte :

$M(x,y) = (2y^2+3x)$ et $N(x,y) = 2xy$

on a $\frac{\partial M}{\partial y} = 4y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$

Donc (1) non exacte.

2) Facteur intégrant de (1)

Soit $I = I(x,y)$ un facteur intégrant de (1)

si $I = I(x)$ alors $\frac{I'(x)}{I(x)} = -\frac{N'_x - M'_y}{N} = -\frac{2y-4y}{2xy} = \frac{2y}{2xy}$

$= \frac{1}{x}$

D'où $I(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} \Rightarrow I(x) = \cancel{1/}x$

3) solution generale de (1)

au lieu de resoudre (1), on va resoudre l'EDO exacte

$\cancel{\tfrac{1}{x}}x(2y^2+3x)dx + \cancel{\tfrac{1}{x}}\,2x^2y\,dy = 0 \Leftrightarrow (2xy^2+3x^2)dx + 2x^2y\,dy = 0$

$\Leftrightarrow$ $\cancel{\left(\frac{2y^2}{x}+3\right)dx + 2y\,dy = 0}$

$M_1 = \frac{2y^2x}{\cancel{x}} + 3x^2$ et $N_1 = 2yx^2$

$\frac{\partial M_1}{\partial y} = 4xy = \frac{\partial N_1}{\partial x} = 4xy$

Donc il existe une fonction différentielle $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ /

$$df = M_1 dx + N_1 dy = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f = cte & (a) \\ f'_x = M_1 & (b) \\ f'_y = N_1 & (c) \end{cases}$$

Cherchons f!

$$(b) \Rightarrow f(x,y) = \int M_1(x,y)\,dx + K(y)$$

$$= \int (2xy^2 + 3x^2)\,dx + k(y)$$

$$= x^2y^2 + x^3 + K(y)$$

cherchons K:

$$(c) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2y^2 + x^3 + K(y)\right] = 2x^2y$$

$$\Rightarrow 2x^2y + K'(y) = 2x^2y \Rightarrow K'(y) = 0$$

$$\Rightarrow K(y) = a \in \mathbb{R}$$

$$(a) \Rightarrow x^2y^2 + x^3 + b = 0 \quad \text{avec } b = a - cte \in \mathbb{R}.$$

Ex3. $(x^2+1)y' - 4xy = 4x\sqrt{y}$ (2) , $y>0$.

1/ ~~(2) est une~~

$(2) \Leftrightarrow y' - \frac{4x}{x^2+1} y = \frac{4x}{(x^2+1)} y^{1/2}$

C'est une EDO de Bernoulli avec $p(x) = -\frac{4x}{x^2+1}$, $q(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ et $n = \frac{1}{2}$

D'où En posant $z(x) = y^{1-n}(x) = y^{1/2}(x)$, on trouve

$z'(x) + (1-n)p(x)z(x) = (1-n)q(x)$

$\Leftrightarrow z'(x) + \frac{1}{2}\left(-\frac{4x}{x^2+1}\right) z(x) = \frac{1}{2}\frac{4x}{x^2+1}$

$\Leftrightarrow z'(x) - \frac{2x}{x^2+1} z = \frac{2x}{x^2+1}$

$\Leftrightarrow (x^2+1)z' = 2x(z+1)$ (3)

2) Séparer (3) :

$\frac{z'}{z+1} = \frac{2x}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{dz}{z+1} = \frac{2x}{x^2+1}dx$

EDO à variable séparée

D'où $\int \frac{dz}{z+1} = \int \frac{2x}{x^2+1}dx + C$ $/ C \in \mathbb{R}$

D'où $\ln|z+1| = \ln(x^2+1) + C$

$y = z^2$

D'où $\ln(y^{1/2}+1) = \ln(x^2+1) + C$.

Ex4. $y'' - 8y' + 15y = 5e^{2x} - 3$ (4)

(1) $a = ?$ $b = ?$ / $y(x) = ae^{2x} + b$ est une solution particulière de (4)

Donc y satisfait l'equation (4) avec $y'(x) = 2ae^{2x}$ et $y''(x) = 4ae^{2x}$

D'où $4ae^{2x} - 8(2a)e^{2x} + 15(ae^{2x} + b) = 5e^{2x} - 3$

$(4a - 16a + 15a)e^{2x} + 15b = 5e^{2x} - 3$

D'où par identification, on trouve $\begin{cases} 3a = 5 \Rightarrow a = 5/3 \\ 15b = -3 \Rightarrow b = -\frac{1}{5} \end{cases}$

D'où $y_p(x) = \frac{5}{3}e^{2x} - \frac{1}{5}$ est une solution particulière de (4).

(2) L'EDO homogène associée à (4) est:

$y'' - 8y' + 15y = 0.$

l'equation Caractéristique est $r^2 - 8r + 15 = 0.$

$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 60 = 4 > 0$

Donc on a 2 racines réelles distinctes: $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 - 2}{2} = 3$

et $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 + 2}{2} = 5$

D'où $y_{G1}(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{5x}$ / $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(3) D'où $y_G(x) = y_p(x) + y_{G1}(x) = \frac{5}{3}e^{2x} - \frac{1}{5} + C_1e^{3x} + C_2e^{5x}$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = \frac{1}{5} \Rightarrow C_1 + C_2 + \frac{5}{3} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \\ y'(0) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \frac{5}{3} + 3C_1 + 5C_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{-19}{15} \\ 3C_1 + 5C_2 = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow C_2 = \frac{7}{30}$ et $C_1 = \frac{3}{2}$

D'où $y(x) = \frac{3}{2}e^{3x} + \frac{7}{30}e^{5x} + \frac{5}{3}e^{2x} - \frac{1}{5}.$

Ex5. Resoudre les EDo suites :

(1) $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{x y}$

Il est claire que cette EDo est homogène.

Posons $y(x) = x u(x)$ [avec $x \neq 0$], donc $y'(x) = u(x) + x u'(x)$

Ainsi $u + x u' = \dfrac{x^2 u^2 - x^2}{x \cdot x u} = \dfrac{u^2 - 1}{u}$

Ainsi $x u' = \dfrac{-u^2 + u^2 - 1}{u} \iff x u' = \dfrac{-1}{u} \iff -u u' = \dfrac{1}{x}$

$\iff -u\,du = \dfrac{dx}{x}$

D'où $-\int u\,du = \int \dfrac{dx}{x} \iff -\dfrac{u^2}{2} = \ln|x| + C$; $C \in \mathbb{R}$.

$\iff u^2(x) = -2\ln|x| + C'$ / $C' = -2C \in \mathbb{R}$

Ainsi $\dfrac{y^2(x)}{x^2} = -2\ln|x| + c'$

$y^2(x) = -2x^2 \ln|x| + c' x^2 \geq 0$

et $y(x) = \pm\sqrt{x^2(-2\ln|x| + c')}$; $c' \in \mathbb{R}$.

(2) $y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y = 1$ EDO linéaire de l'ordre 1, avec $p(x) = -(2x - \frac{1}{x})$ et $q(x) = 1$

Donc $y_G(x) = y_{G_1}(x) + y_p(x)$, avec

$y_{G_1}(x) = K e^{-\int p(x)dx} = K e^{\int (2x - \frac{1}{x})dx} = K e^{x^2 - \ln|x|} = K' \dfrac{e^{x^2}}{x}$ / et $K' = \pm K \in \mathbb{R}$

La solution generale de $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 0$.

$y_p(x) = k(x) e^{-\int p(x)dx}$ avec $k(x) = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx = \int 1 \cdot e^{-\int (2x - \frac{1}{x})dx} dx$

$= \int e^{-x^2 + \ln|x|} dx = \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$

D'où $y_p(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \cdot \dfrac{e^{x^2}}{x}$ ... $= \dfrac{-x}{2}$ et $y_G(x) = -\dfrac{x}{2} + K \dfrac{e^{x^2}}{x}$ / $K \in \mathbb{R}$.

د. سعد كيسي 41106

Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 1106
Durée : 2H

Année : 2016 - 2017
Dexième Session

Exercice 1 (15 points).
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sqrt{n} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}.$$

Exercice 2 (20 points).
Soit

$$A = \{2(1+(-1)^n);\ n \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Déterminer l'ensemble de points intérieures, adhérents et accumulations de A.

(b) Est-ce-que l'ensemble A est fermé, ouvert ou non. Justifiez.

Exercice 3 (20 points).

(1) Soit $a > 0$. Démontrer que

$$\left|\cos(a) - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!}\right| \le \frac{a^5}{5!}.$$

(2) En déduire que
$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \le \cos\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}.$$

Exercice 4 (30 points).
Résoudre les EDO suivantes :

(1) $xy' + y = xy^3$.

(2) $y'' + 4y = \cos(2x)$.

Exercice 5 (15 points).
Etudier la continuité uniforme de la fonction $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur les intervalles suivants :

(1) $]0,1]$, (2) $[1,+\infty[$, (3) $]0,+\infty[$.

Bon travail

1/

Final M1106 - Session 2 2016-2017

Ex1 $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt{n} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$

Raisonnons par l'absurde, supposons $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* /$
$p \wedge q = 1$ et $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$

$$\Rightarrow n^{\cancel{2}} = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow n^{\cancel{2}} q^2 = p^2$$

$$\Rightarrow n \,/\, p^2$$

$$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{N} / p^2 = n\alpha$$

D'où $nq^2 = p^2 \Leftrightarrow nq^2 = n\alpha$

$\Rightarrow q^2 = \alpha$

$\Rightarrow q / \alpha \Rightarrow q/p$ impossible

car $q \wedge p = 1$.

Ex2 $A = \{ 2(1+(-1)^n) \,/\, n \in \mathbb{N} \} = \{0, 4\}$ car si n pair $2(1+(-1)^n) = 4$
si n impair $2(1+(-1)^n) = 0$

a) • $A \subset \mathbb{Q} \Rightarrow \text{int}(A) \subset \text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset \Rightarrow \text{int}(A) = \emptyset$.

• $\bar{A} = \cancel{A \cup \{0,2\}}$ $A = \{0, 4\}$.

• $A' = \emptyset$

b) A fermé car $\complement_{\mathbb{R}}^{A} =]-\infty, 0[\cup]0, 4[\cup]4, +\infty[$ ouverts de $\mathbb{R}$

A non ouvert car par exemple $0 \in A$ mais
pour tout $\delta > 0$, on a $\underbrace{]-\delta, \delta[}_{\text{contient infinité des éléments}} \not\subset A = \{0, 4\}$.

Ex3. 1) $a>0$, Montrer $\left|\cos(a)-1+\frac{a^2}{2!}-\frac{a^4}{4!}\right| \leq \frac{a^5}{5!}$

prendre $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \cos(x)$

on a $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ donc $f \in C^5([0,a])$, donc par la formule de Maclaurin au vois. de 0 à l'ordre $n+1=5$, $\exists c \in]0,a[$ /

$$f(a) = f(0) + f'(0)a + f''(0)\frac{a^2}{2!} + f'''(0)\frac{a^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{a^4}{4!} + f^{(5)}(c)\frac{a^5}{5!}$$

$$\Rightarrow \cos(a) = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \sin(c)\frac{a^5}{5!}$$

D'où $\left|\cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!}\right| = \left| -\sin(c)\cdot\frac{a^5}{5!}\right|$

$\leq \frac{a^5}{5!}$ car $|\sin c| \leq 1$ et $a>0$

2) Deduire que $\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$

On a $a = \frac{1}{2}$, D'où

$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos\frac{1}{2} = \underbrace{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1}{4!}}_{\frac{337}{384}} - \sin(c)\frac{a^5}{5!} \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$$

avec $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{5!} = \frac{1}{3840}$

Ex4.

(1) $xy'+y = xy^3 \Rightarrow y' + \frac{1}{x}y = y^3 \quad x \neq 0.$

EDO de Bernoulli avec $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 1$ et $n = 3$
$1-n = -2$

Etape1 : Transformation en EDO linéaire

posons $z(x) = y^{1-n}(x) = y^{-2}(x)$

D'où $z'(x) + (1-n)p(x)z(x) = (1-n)q(x)$

D'où $z'(x) - \frac{2}{x}z(x) = -2$ (E) EDO linéaire en z
avec $P_1(x) = -\frac{2}{x}$ et $q_1(x) = -2$.

Etape 2 Solution generale de (E)

$$z_G(x) = z_{G1}(x) + z_p(x)$$

avec $z_{G1}(x) = k\,e^{-\int P_1(x)dx} = k\,e^{+\int \frac{2}{x}dx} = k\,e^{+2\ln|x|} = k\,e^{\ln x^2}$

$\Rightarrow z_{G1}(x) = kx^2$ la solut^t generale de l'EDO homogène associée à (E) : $z' - \frac{2}{x}z = 0$.

~~Etape2~~ • $z_p(x) = k(x)\,e^{-\int P_1(x)dx}$

avec $k(x) = \int q_1(x)\,e^{\int P_1(x)dx}dx = \int -2\,e^{-2\int \frac{dx}{x}}dx = \int -2\,e^{\ln \frac{1}{x^2}}dx = -2\int \frac{dx}{x^2}$

$= +\frac{2}{x}$

D'où $z_p(x) = \frac{2}{x}\cdot x^2 = 2x$ et $z_G(x) = 2x + kx^2 \,/\, k \in \mathbb{R}$.

Etape3 Solution generale de (1)

$$y_G(x) = \left(z_G(x)\right)^{\frac{1}{-2}} = \frac{1}{\sqrt{2x+kx^2}}\ ;\ k \in \mathbb{R}.$$

(2) $y'' + 4y = \cos(2x)$

EDO linéaire du second ordre

Etape 1 La Solution generale de l'EDO homogène associée à (2) c.à.d. $y'' + 4y = 0$.

Equation Caracteristique associée est.

$$r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -4$$
$$\Leftrightarrow r = \pm 2i$$

D'où $y_{G1}(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) \; / \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Etape 2 Une solution particulière de (2).

$y_1(x) = \cos(2x)$, $y_2(x) = \sin(2x)$, $R(x) = \cos(2x)$

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix} = 2\cos^2(2x) + 2\sin^2(2x) = 2 \neq 0$$

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)\, R(x)}{w(x)}\, dx + y_2 \int \frac{y_1(x) R(x)}{w(x)}\, dx$$

$$= -\cos(2x) \int \frac{\sin(2x)\cos(2x)}{2} + \sin(2x) \int \frac{\cos^2(2x)}{2}\, dx$$

$$= -\frac{\cos(2x)}{4} \sin^2(2x) + \frac{\sin(2x)}{2} \int \frac{1 + \cos(4x)}{2}\, dx$$

$$= -\frac{\cos(2x)}{4} \sin^2(2x) + \frac{\sin(2x)}{4} . x + \frac{1}{16} \sin(2x) \sin(4x)$$

Etape 3 La solution generale de (2)

$$y_G(x) = y_{G1}(x) + y_p(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) - \frac{\cos(2x) \sin^2(2x)}{4} + \frac{\sin(2x)}{4} x + \frac{1}{16} \sin(2x) \sin(4x)$$

Ex5. Etudier la continuité uniforme de $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ dans les intervalle srte :

1) $]0,1]$: Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

et f est continue sur $]0,1]$

Donc f est prolongeable par continuité en 0

D'où $\exists\, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

prolongement par continuité de f au pt 0.

g est continue sur l'intervalle fermé borné $[0,1]$

Donc g est unif. continue sur $[0,1]$ et sur tout $A \subset [0,1]$

Comme $]0,1] \subset [0,1]$ donc g est unif continue sur $]0,1]$

et comme $g_{/]0,1]} = f$ donc f est unif. cont. sur $]0,1]$

2) $[1, +\infty[$ $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1 \right.$ car $\sin\frac{1}{x} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{x}$
$\left. x\sin\frac{1}{x} \underset{\infty}{\sim} \frac{x}{x} = 1 \right)$.

f est unif cont. sur $[1, +\infty[$ car

pour tout $\varepsilon > 0$, il faut trouver $\delta > 0$ / $\forall x, x' \in [1, +\infty[$ /
$$|x - x'| \leq \delta \Rightarrow |f(x') - f(x)| \leq \varepsilon.$$

si on a $|x - x'| \leq \delta$, alors $|f(x) - f(x')| = \left| x\sin\frac{1}{x} - x'\sin\frac{1}{x'} \right|$

$= |x - x'|\, f'(c)$ Accroissement fini

avec c entre x et x'

$f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ et $f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2}\cos\frac{1}{x} = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$

D'où $|f(x)-f(x')| = |x-x'|\left|\left[\sin(\frac{1}{c})-\frac{1}{c}\cos\frac{1}{c}\right]\right|$

De plus, on a $0 \leq \sin\frac{1}{c} \leq 1$ car $1 \leq c \leq +\infty \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{c} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin(\frac{1}{c}) \leq 1$

de même $0 \leq \cos\frac{1}{c} \leq 1$ et $0 \leq \frac{1}{c} \leq 1$ $\cancel{\Rightarrow \leq -\frac{1}{c}}$

$-1 \leq -\frac{1}{c}\cos\frac{1}{c} \leq 0$ $\quad -1 \leq -\frac{1}{c} \leq 0$

et $0 \leq \left|\sin\frac{1}{c} - \frac{1}{c}\cos\frac{1}{c}\right| \leq 1$ $\left(-1 \leq \sin\frac{1}{c} - \frac{1}{c}\cos\frac{1}{c} \leq 1\right.$

D'où $|f(x)-f(x')| \leq |x-x'| \leq \delta$

il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$.

<u>Sur]0,+∞[</u> f est unif. continue car

f est unif. continue sur]0,1] et [1,+∞[.

Donc f unif. continue sur $]0,1] \cup [1,+\infty[= \;]0,+\infty[$.

Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 1106
Durée : 2H

Année : 2015 - 2016
Examen : Final

Exercice 1 (30 points). Les deux questions (a) et (b) sont indépendantes.

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} + \ldots - \frac{x^{2k}}{2k} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$.

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5, pour la fonction $f(t) = \mathrm{ch}(t)$, définie dans l'intervalle $[0, x]$.
2. Montrer que

$$0 \leq \mathrm{ch}(x) - 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \leq \frac{x^5}{5!}\mathrm{sh}(x).$$

Exercice 2 (25 points).
Résoudre les équations différentielles ordinaires suivantes :

(a) $y' = \dfrac{2x - y}{x + y}$, (b) $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

Exercice 3 (20 points).

(a) Résoudre l'équation différentielle suivante : $z' - \dfrac{1}{x}z = -3x^2$.

(b) Résoudre l'équation différentielle de Bernoulli suivante : $y' + \dfrac{1}{x}y = 3x^2y^2$.

Exercice 4 (25 points).
Soit (E) l'équation différentielle suivante : $(y + xy^2)dx - xdy = 0$.

(a) Montrer que (E) n'est pas exacte.

(b) Trouver un facteur intégrant de (E).

(c) Trouver la solution générale de (E).

(d) Trouver la solution particulière de (E) qui vérifie $y(1) = 1$.

Bon travail

Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 1106
Durée : 2H

Année : 2015 - 2016
Deuxième Session

Exercice 1 (25 points).
Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y' = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2}$.

(b) $y - xy' = y^3$.

Exercice 2 (25 points).
Soient $0 < a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \mu, \qquad \text{avec } \alpha,\ \beta,\ \gamma, \text{ et } \mu \in \mathbb{R}^+.$$

En utilisant la définition, montrer que f est uniformement continue sur $[a, b]$.

Exercice 3 (25 points).
Soit (E) l'équation différentielle suivante : $\qquad (x + 2)\sin(y)dx + x\cos(y)dy = 0.$

(a) Montrer que (E) n'est pas exacte.

(b) Trouver un facteur intégrant de (E).

(c) Trouver la solution générale de (E).

(d) Trouver la solution particulière de (E) qui vérifie $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 4 (25 points).
Soit f une fonction réelle deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ telle que $f(0) = 0$ et f'' est continue en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on définit la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ f'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Ecrire la formule de Taylor appliquée à f entre 0 et x à l'ordre 1.

(c) Montrer que pour tout $x \neq 0$, il existe $c_x \in]0, x[$ tel que $g'(x) = \dfrac{1}{2}f''(c_x)$.

(d) Déduire $\lim\limits_{x \to 0} g'(x)$.

Bon travail

Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 106

Durée : 2h30

Année : 2013 - 2014

Examen : Final

Exercice 1 (15 points). Soit la fonction $f(x,y) = \sqrt{|x-y|-1}$

1. Déterminer le domaine D de f. Tracer D.
2. L'ensemble D est-il ouvert ? justifier votre réponse.
3. Déterminer la frontière de D.

Exercice 2 (20 points). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

1. Chercher les points critiques de f.
2. Étudier l'existence des extremums locaux en précisant leur nature.

Exercice 3 (20 points). Soit (C) la courbe définie par l'équation polaire : $r(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta}$

1. Construire la courbe (C).
2. Trouver l'équation cartésienne des tangentes à (C) aux points $M(\theta = 0)$ et $M(\theta = \frac{\pi}{2})$.

Exercice 4 (20 points). Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les dérivées partielles premières de f au point (0,0).
3. f est-elle différentiable au point (0,0).
4. f est-elle de classe C^1 au point (0,0).

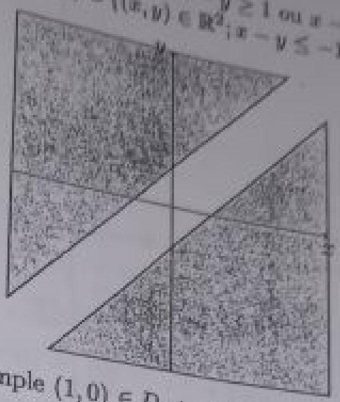
Exercice 5 (25 points). On considère la courbe (C) définie par la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 - 2t \\ y(t) &= \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

1. Déterminer le domaine de paramétrage.
2. Donner le tableau de variation.
3. Étudier les branches infinies associées à la courbe (C).
4. Donner l'équation cartésienne de la tangente au point $M(t = 1)$.
5. Préciser les points de rencontre de la courbe avec les axes des coordonnées.
6. Construire la courbe (C).

Exercice 1 .

1. Il faut que $|x-y|-1 \geq 0 \Rightarrow |x-y| \geq 1 \Rightarrow x-y \geq 1$ ou $x-y \leq -1$.
   D'où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x-y \geq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x-y \leq -1\}$.



2. D est non ouvert : par exemple $(1,0) \in D$ et pour tous $\rho > 0$, la boule $B((1,0),\rho)$ n'est pas inclus dans D.
3. $Fr(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; |x-y| = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x-y = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x-y = -1\}$

Exercice 2 .

1. Points critiques : $\begin{cases} f'_x & = 3x^2+3y^2-15 = 0 \Rightarrow x^2+y^2 = 15 \\ f'_y & = 6xy-12 = 0 \Rightarrow xy = 2. \end{cases}$
   La résolution de ce système donne $x^2 = 1$ ou $x^2 = 4$.
   • $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 2$
   • $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = \pm 1$
   Les points critiques : (1,2), (-1,-2),(2,1),(-2,-1).
2. $f''_{x^2} = 6x$, $f''_{y^2} = 6x$, $f''_{xy} = 6y$ Donc $\Delta = 36(x^2-y^2)$
   -Point (1,2) : $\Delta < 0 \Rightarrow$ point selle.
   -Point (-1,-2) :$\Delta < 0 \Rightarrow$ point selle.
   -Point (2,1) : $\Delta > 0$ et $f''_{x^2} > 0 \Rightarrow$ min local.
   -Point (2,1) : $\Delta > 0$ et $f''_{x^2} < 0 \Rightarrow$ max local.

Exercice 3 .

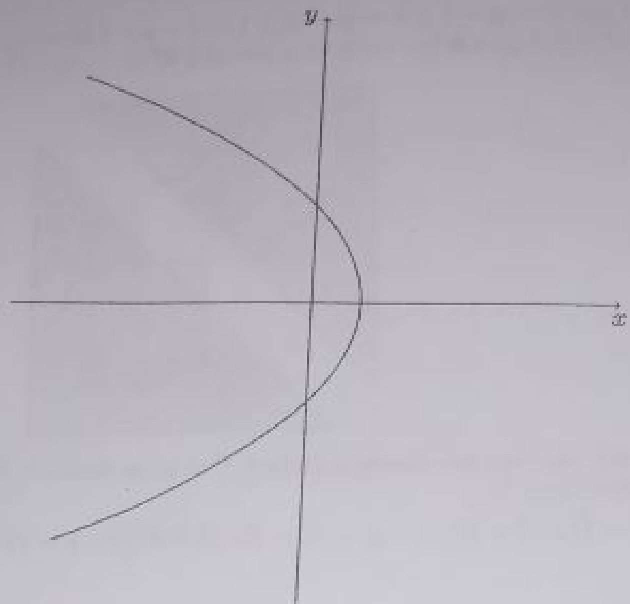
1. Étude :
   — Il faut que $\cos\theta \neq -1 \Rightarrow \theta \neq (1+2k)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
   — r est 2π périodique, il suffit de faire l'étude sur $]-\pi,\pi[$.
   — $r(-\theta) = r(\theta) \Rightarrow x'x$ est un de symétrie et on réduit le domaine à $[0,\pi[$.
   — $r'(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2} \geq 0$.

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$r'(\theta)$		$-$		$-$	
$r(\theta)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\|$

— $\theta \to \pi \Rightarrow r(\theta) \to \infty$.
Cherchons $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi} \frac{\sin(\theta-\pi)}{1+\cos\theta} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin(\alpha)}{1-\cos\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \infty$.
Donc la courbe admet une direction asymptotique parallèle à la direction $\theta = \pi$.

— $\cap(y'y) : \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 1, r' = 1$ et $\tan \nu = \frac{\pi}{4}$.

2. $M(\theta = 0) : \ x = \frac{1}{2}$.
   $M(\theta = \frac{\pi}{2}) : \ y = -x + 1$.



Exercice 4 .

1. Continuité :
   En (0,0) : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^4 \cos^4\theta \sin^2\theta}{r} = \lim\limits_{r\to 0} r^3 \cos^2\theta \sin^2\theta = 0 = f(0,0)$.
   Sur $\mathbb{R}^{2*}$: f est le rapport des fonctions continues.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim \dfrac{0-0}{x} = 0 = f'_x(0,0)$.
   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim \dfrac{0-0}{y} = 0 = f'_y(0,0)$.
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\left|\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0 - 0\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2}$
   $= \lim\limits_{r\to 0} r^2 \cos^2\theta \sin^2\theta = 0$. Donc f est différentiable en (0,0).
4. Sur $\mathbb{R}^{2*}$:
   $f'_x(x,y) = \dfrac{x^3y^2 + 2xy^4}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ continue comme rapport des fonctions continues.
   $f'_y(x,y) = \dfrac{x^2y^3 + 2x^4y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ continue comme rapport des fonctions continues.
   Au point (0,0) :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = \lim_{(x,y\to(0,0))} \frac{x^3y^2+2xy^4}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^5\cos^3\theta\sin^2\theta + 2r^5\cos\theta\sin^4\theta}{r^3}$$
$$= \lim_{r\to 0} r^2(\cos^3\theta\sin^2\theta + 2\cos\theta\sin^4\theta) = 0 = f'_x(0,0).$$ Donc f'_x continue en (0,0).

De même, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^3 + 2x^4y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} =$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^5 \cos^2\theta \sin^3\theta + 2r^5 \cos^4\theta \sin\theta}{r^3} = \lim_{r\to 0} r^2(\cos^2\theta \sin^3\theta + 2\cos^4\theta \sin\theta) = 0 = f'_y(0,0).$$

Donc f'_y continue en $(0,0)$.

Par conséquent, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 .

1. $D_t = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
2. $x'(t) = 2(t-1)$, $y'(t) = \dfrac{(t-1)(t^2+t+1)}{t^2}$.

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$		$-$		$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$		$-$		$+$	
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. — $t \to \pm\infty \Rightarrow x(t) \to +\infty$ et $y(t) \to +\infty$.

   Cherchons $\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t^3+2}{2t^3-4t^2} = \frac{1}{2}$.

   Ensuite $\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} (y(t) - \frac{1}{2}x(t)) = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} + t = \pm\infty$.

   Donc la courbe admet une direction asymptotique dans la direction de $y = \frac{1}{2}$.

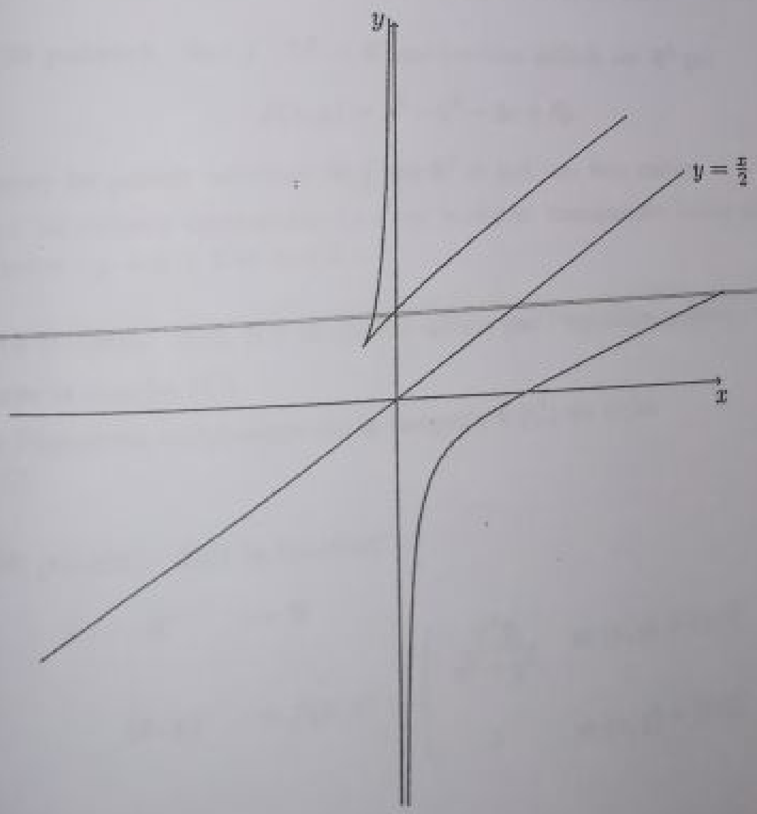
   — $t \to 0^+ \Rightarrow x(t) \to 0$ et $y(t) \to \pm\infty$. Donc $x = 0$ est une asymptote verticale.
4. $M(t=1) = (-1, \frac{3}{2})$ point singulier.

   $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t\to 1} \frac{t^2+t+1}{2t^2} = \frac{3}{2} = \text{pente}(T)$.

   L'équation de la tangente (T) : $y = \frac{3}{2}x + 3$
5. — $x(t) = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 2 \to y(2) = \frac{5}{2}$

   — $y(t) = 0 \Rightarrow t = \sqrt[3]{-2} \to y(\sqrt[3]{-2}) = 6.4$

   2 points :$(0, \frac{5}{2})$, $(6.4, 0)$.



Un...
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 106
Durée : 2h30

Année : 2012 - 2013
Examen : Final

Exercice 1 (15 points). Soit A et B deux ensembles dans $\mathbb{R}^2$ définissent par

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; |x+y| > 1\}$$

$$B = B_1 \cup B_2$$

avec

$$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 > 1\}$$

$$B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y \leq 0 \text{ et } x^2 + y^2 < 1\}$$

1. Tracer A et B.
2. A et B sont-ils ouverts ? justifier votre réponse.
3. Déterminer les frontières de A et B.

Exercice 2 (10 points). Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 - \sqrt[3]{(x+z)^2}.$$

1. Déterminer les dérivées partielles premières et secondes de f au point $(0,1,1)$.
2. Donner le développement de Taylor de f à l'ordre 2 en $(0,1,1)$.

Exercice 3 (20 points). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y.$$

1. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$ et préciser leur nature.
2. Chercher les valeurs extrémales de f sur le région triangulaire limité par l'axe x'x et les deux droites : $y = x + 2$ et $x = 2$.

Exercice 4 (15 points). Soit (C) la courbe définie par l'équation polaire : $r(\theta) = \cos(2\theta)$

1. Construire la courbe (C).
2. Trouver l'équation cartésienne de la tangente à (C) au point $M(\theta = 0)$.

Exercice 5 (20 points). Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

avec α est un paramètre réel.

1. Pour quelles valeurs de α, f est continue au point (0,0).
2. Dans cette partie, on prend α une valeur strictement positive.
   (a) Déterminer les dérivées partielles premières de f au point (0,0).
   (b) Pour quelles valeurs de α, f est différentiable au point (0,0).
3. Dans cette question, on suppose $\alpha = 3$. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

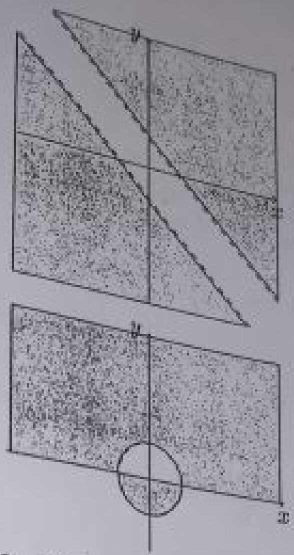
Exercice 6 (20 points). On considère la courbe (C) définie par la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2}{2} - 2t \\ y(t) &= \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^2}{2} - 2t \end{cases}$$

1. Déterminer le domaine de paramétrage.
2. Donner le tableau de variation.
3. Donner l'équation cartésienne de la tangente au point $M(t = -1)$.
4. Préciser les points de rencontre de la courbe avec les axes des coordonnées.
5. Construire la courbe (C).

Exercice 1 .

1.



2. A ouvert : $\forall (x,y) \in A,\ \exists \rho > 0;\ B((x,y),\rho) \subset A$.
B non ouvert : par exemple $(2,0) \in D$ et pour tous $\rho > 0$, la boule $B((2,0),\rho)$ n'est pas inclus dans D.

3. $Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+y=1\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+y=-1\}$
$Fr(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2=1\} \bigcup \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$

Exercice 2 .

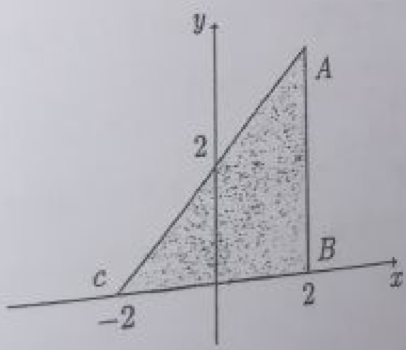
1. $f'_x(0,1,1) = f'_z(0,1,1) = \dfrac{-2}{3},\ f'_y(0,1,1) = 2.$
$f''_{xy}(0,1,1) = f''_{yz}(0,1,1) = 0,\ f''_{xz}(0,1,1) = \dfrac{2}{9} = f''_{x^2}(0,1,1) = f''_{z^2}(0,1,1),\ f''_{y^2}(0,1,1) = 2.$

2. $f(x,y,z) = \dfrac{-2}{3}x + 2(y-1) - \dfrac{2}{3}(z-1) + \dfrac{1}{9}x^2 + (y-1)^2 + \dfrac{1}{9}(z-1)^2 + \dfrac{4}{9}x(z-1) + o\left(\|(x,y,z)\|^3\right).$

Exercice 3 .

1. Points critiques : $\begin{cases} f'_x & = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ f'_y & = -2y + 4 = 0 \Rightarrow y = 2. \end{cases}$ (1,2) est Le seul point critique.
Nature : $f''_{x^2} = 2,\ f''_{y^2} = -2,\ f''_{xy} = 0$
$\Delta = 0 \Longrightarrow (1,2)$ est un point col.

2.



À l'intérieure de D : (1,2) est un point col.
Sur les bords : on cherche des paramétrisations

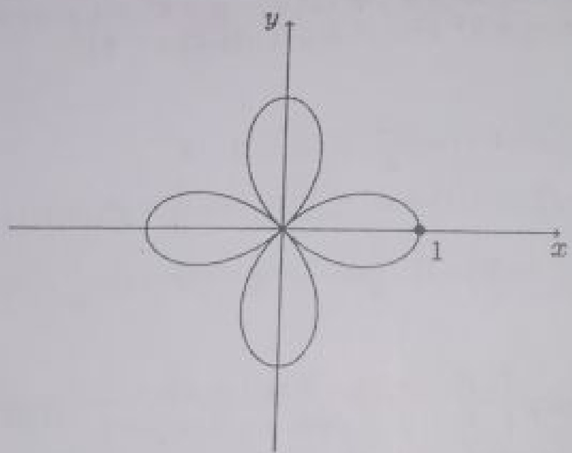
— Sur [B,A] : $g_1(y) = f(2,y) = -y^2 + 4y$ pour $0 \leq y \leq 4$.
  $(g_1)_{max} : g_1(2) = f(2,2) = 4$
  $(g_1)_{min} : g_1(0) = f(2,0) = 0$
— Sur [C,B] : $g_2(x) = f(x,0) = x^2 - 2x$ pour $-2 \leq x \leq 2$.
  $(g_2)_{max} : g_2(-2) = f(-2,0) = 8$
  $(g_2)_{min} : g_2(1) = f(1,0) = -1$
— Sur [C,A] : $g_3(x) = f(x, x+2) = -2x + 4$ pour $-2 \leq x \leq 2$.
  $(g_3)_{max} : g_3(-2) = f(-2,0) = 8$
  $(g_3)_{min} : g_3(2) = f(2,4) = 0$

La valeur maximale de f est 8 atteinte au point (-2,0).
La valeur minimale de f est -1 atteinte au point (1,0).

Exercice 4 .

— $D_r = \mathbb{R}$.
— r est périodique de période π, on fait l'étude sur $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et la courbe sera symétrique par rapport à origine.
— $r(-\theta) = r(\theta) \Rightarrow$ la courbe est symétrique par rapport à l'axe de x. Il suffit de travailler sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
— $r'(\theta) = -2\sin(2\theta) \leq 0$.

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$r'(\theta)$		$-$		$-$	
$r(\theta)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1



Exercice 5 .

1. $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\longrightarrow 0} r^{\alpha-1}\cos^{\alpha}\theta \sin\theta = 0 = f(0,0)$ pour $\alpha > 1$.
2. (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0 = f'_x(0,0)$.
   $\lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0 = f'_y(0,0)$.
   (b) f est différentiable en (0,0)$\Leftrightarrow \lim\limits_{r\longrightarrow 0} r^{\alpha-2}|\cos^{\alpha}\theta|.|\sin\theta| = 0$ pour $\alpha > 2$.
3. Sur $\mathbb{R}^{2*}$:

— $f'_x(x,y) = \dfrac{x^4y + 3x^2y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ continue comme rapport des fonctions continues.

— $f'_y(x,y) = \dfrac{x^5 - x^3y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ continue comme rapport des fonctions continues.

— Au point (0,0) : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = 0 = f'_x(0,0)$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y) = 0 = f'_y(0,0)$.

Donc f'_x et f'_y sont continues en (0,0).

Par conséquent, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 .

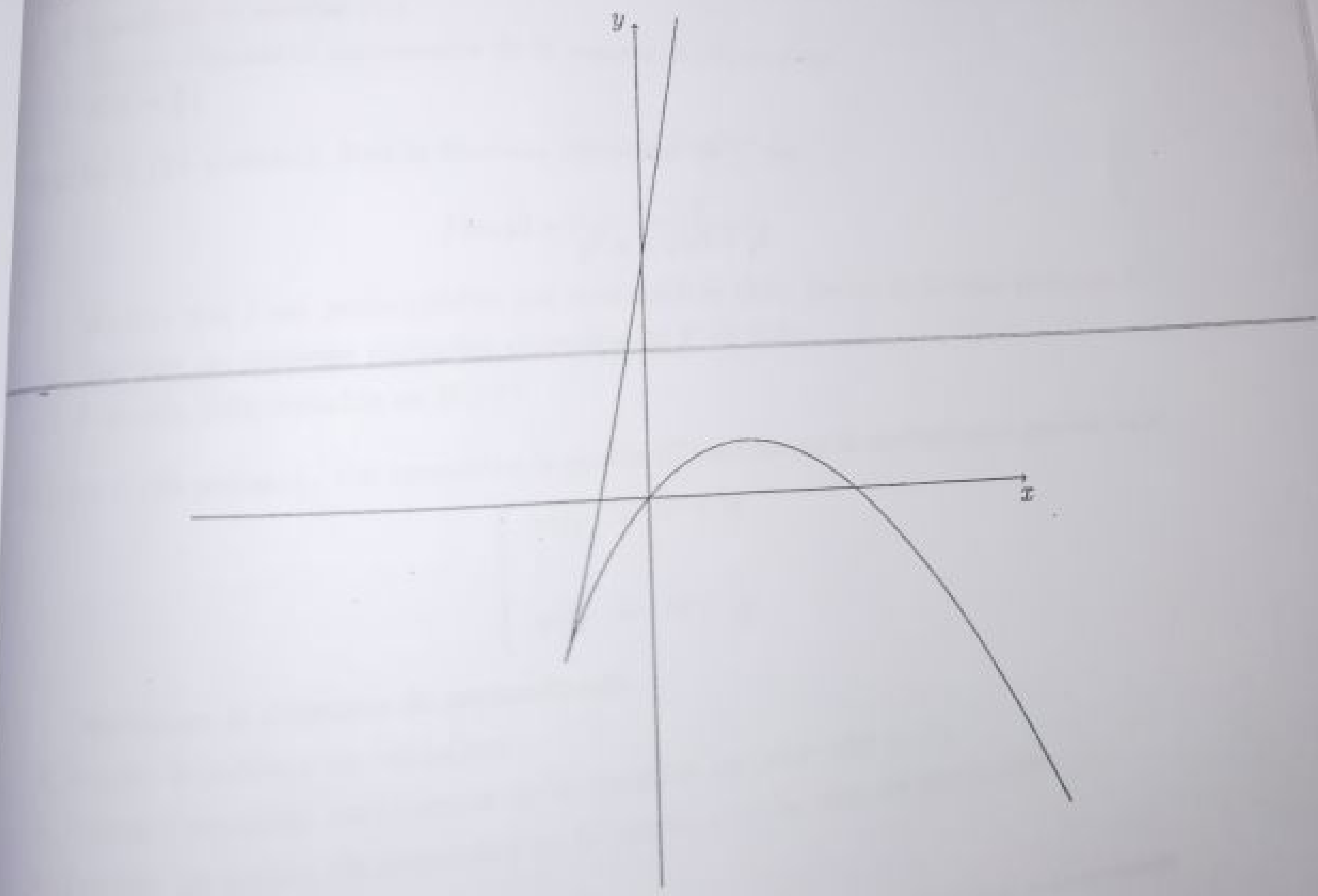
1. $D_t = \mathbb{R}$.
2. $x'(t) = t-2$, $y'(t) = (t+1)(t-2)$.

t	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$-$		$-$		$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$		$-$		$+$	
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{7}{6}$	$\searrow$	$\frac{-10}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

$M(t=2) = (-2, \frac{-10}{3})$ point singulier.

On cherche $\lim\limits_{t\to 2} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \lim\limits_{t\to 2}(t+1) = 3$. L'équation de la tangente : $y = 3x + \dfrac{8}{3}$

3. $M(t=-1) = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{6}\right)$ point ordinaire. L'équation cartésienne de la tangente : $y = \frac{7}{6}$
4. — $x(t) = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 4 \to y(4) = 5.3$
   — $y(t) = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $2t^2 - 3t - 12 = 0 \to x(t_1) = 3.3$, $x(t_2) = -1.8$
   3 points :(0,5.3), (3.3,0) et (-1.8,0).
5. Graphe



Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 106
Durée : 2h30

Année : 2011 - 2012
Examen : Final

Exercice 1 (10 points). [les 2 questions sont indépendantes]

1. Développer la fonction
$$f(x,y) = e^{x-x^2-y^2+1},$$
suivant les puissances de $(x-1)$ et $(y+1)$, jusqu'à l'ordre 2.
2. Écrire la formule des accroissements finis pour la fonction
$$f(x,y) = x(x+1) - y(y-1)$$
sur le segment $[A,B] \subset \mathbb{R}^2$ avec $A = (2,-1)$ et $B = (1,2)$ et déterminer un point $(x_0, y_0) \in]A,B[$ vérifiant cette formule.

Exercice 2 (30 points). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = x^3 + 3xy - y^2 + y + 1$$

1. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$ et préciser leur nature.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -2 \leq x \leq 0 \text{ et } -2 \leq y \leq 0\}$. Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de f sur le domaine D.

Exercice 3 (20 points). Soit (C) la courbe définie par l'équation polaire : $r(\theta) = 1 - \cos 2\theta$

1. Construire la courbe (C).
2. Trouver l'équation cartésienne de la tangente à (C) au point $M(\theta = \frac{\pi}{2})$.

Exercice 4 (15 points). Soit la fonction définie sur $(\mathbb{R}^2)^*$ par
$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{y^2 + 3\sqrt{x^2+y^2}}.$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en (0,0). Donner sa fonction prolongée F.
2. Chercher les dérivées partielles premières de F en (0,0).
3. F est-elle différentiable en (0,0) ?

Exercice 5 (25 points). On considère la courbe (C) définie par la représentation paramétrique
$$\begin{cases} x(t) &= t^2 + 2t \\ y(t) &= 2t - \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$$

1. Déterminer le domaine de paramétrage.
2. Donner le tableau de variation.
3. Donner l'équation cartésienne de la tangente au point $M(t = -1)$.
4. Préciser les points de rencontre de la courbe avec les axes des coordonnées.
5. Construire la courbe (C).

Exercice 1 .

1. $f(x,y) = 1-(x-1)+2(y+1)-\frac{1}{2}(x-1)^2-2(x-1)(y+1)+(y+1)^2.$
2. $f(B)-f(A) = \overrightarrow{\nabla f(C)}.\overrightarrow{(B-A)}$ avec $C=(x_0,y_0)\in]A,B[$. Cette égalité donne une relation entre x_0 et y_0 de la forme $x_0+3y_0=3$. Or $C\in]A,B[$ on a l'égalité $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ avec $0<\lambda<1$. Ce qui donne une autre relation entre x_0 et y_0 de la forme $3x_0+y_0=5$. Ainsi la résolution du système $\begin{cases} x_0+3y_0 & =3 \\ 3x_0+y_0 & =5 \end{cases}$ donne que $x_0=\frac{3}{2}$ et $y_0=\frac{1}{2}$.

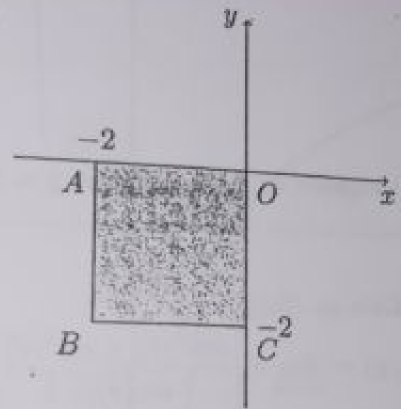
Exercice 2 .

1. On a

$$\begin{cases} f'_x & = 3x^2+3y=0 \Rightarrow y=-x^2 \\ f'_y & = 3x-2y+1=0 \Rightarrow 2x^2+3x+1=0 \Longrightarrow x=-1 \text{ou } x=\frac{-1}{4}. \end{cases}$$

Donc les points critiques sont $(-1,-1)$ et $(\frac{-1}{2},\frac{-1}{4})$.
Natures : $f''_{x^2}=6x,\ f''_{y^2}=-2,\ f''_{xy}=3$
Au point (-1,-1) : $\triangle>0$ et $f''_{x^2}<0 \Longrightarrow (-1,-1)$ est un maximum local.
Au point $(\frac{-1}{2},\frac{-1}{4})$: $\triangle<0 \Longrightarrow (\frac{-1}{2},\frac{-1}{4})$ est un point col.
$\triangle=0 \Longrightarrow (1,2)$ est un point col.

2.



À l'intérieure de D : (-1,-1) est un maximum avec $f(-1,-1)=1$.
Sur les bords de D : on cherche des paramétrisations

- Sur [O,A] : $g_1(x)=f(x,0)=x^3+1$ pour $-2\leq x\leq 0$.
  $(g_1)_{max}: g_1(0)=f(0,0)=1$
  $(g_1)_{min}: g_1(-2)=f(-2,0)=7$
- Sur [A,B] : $g_2(y)=f(-2,y)=-y^2-5y-7$ pour $-2\leq y\leq 0$.
  $(g_2)_{max}: g_2(-2)=f(-2,-2)=-1$
  $(g_2)_{min}: g_2(0)=f(-2,0)=-7$
- Sur [B,C] : $g_3(x)=f(x,-2)=x^3-6x-5$ pour $-2\leq x\leq 0$.
  $(g_3)_{max}: g_3(-\sqrt{2})=f(-\sqrt{2},-2)=0.65$
  $(g_3)_{min}: g_3(0)=f(0,-2)=-5$
- Sur [C,O] : $g_4(y)=f(0,y)=-y^2+y+1$ pour $-2\leq x\leq 2$.
  $(g_4)_{max}: g_4(0)=f(0,0)=1$
  $(g_4)_{min}: g_4(-2)=f(0,-2)=-5$

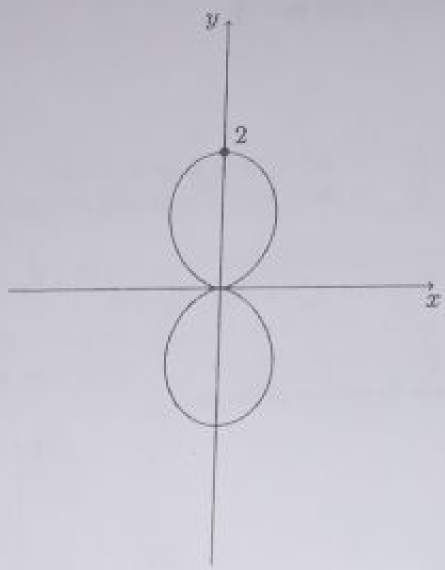
La valeur maximale de f est 1 atteinte aux points (-1,-1) et (0,0).
La valeur maximale de f est -7 atteinte au point (-2,0).

Exercice 3 .

1. — $D_r = \mathbb{R}$.
   — r est périodique de période π, on fait l'étude sur $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et la courbe sera symétrique par rapport à origine.
   — $r(-\theta) = r(\theta) \Rightarrow$ la courbe est symétrique par rapport à l'axe de x. Il suffit de travailler sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
   — $r'(\theta) = 2\sin(2\theta) \geq 0$.

θ	0		$\frac{\pi}{2}$
$r'(\theta)$		$+$	
$r(\theta)$	0	$\nearrow$	2

   — Graphe



2. L'équation de la tangente en $M(\theta = \frac{\pi}{2})$ est $y = 2$.

Exercice 4 .

1. — f n'est pas définie en (0,0).
   — $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\longrightarrow 0} r\left[\dfrac{\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)}{r\sin(\theta)+3}\right] = 0$
   Alors f est prolongeable par continuité en (0,0) vers une fonction F telle que

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{y^2+3\ \sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x,0)-F(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x^2}{|x|} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} |x| = 0 = F'_x(0,0)$.
   $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0-0}{y} = 0 = F'_y(0,0)$.
3. $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{|F(x,y)-F(0,0)-xF'_x(0,0)-yF'_y(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   $= \lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{|x^3+y^3|}{y^2\sqrt{x^2+y^2}+3(x^2+y^2)} = \lim\limits_{r\longrightarrow 0} \dfrac{r|\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta)|}{r\sin(\theta)+3}$
   $= 0$ Donc F est différentiable en (0,0).

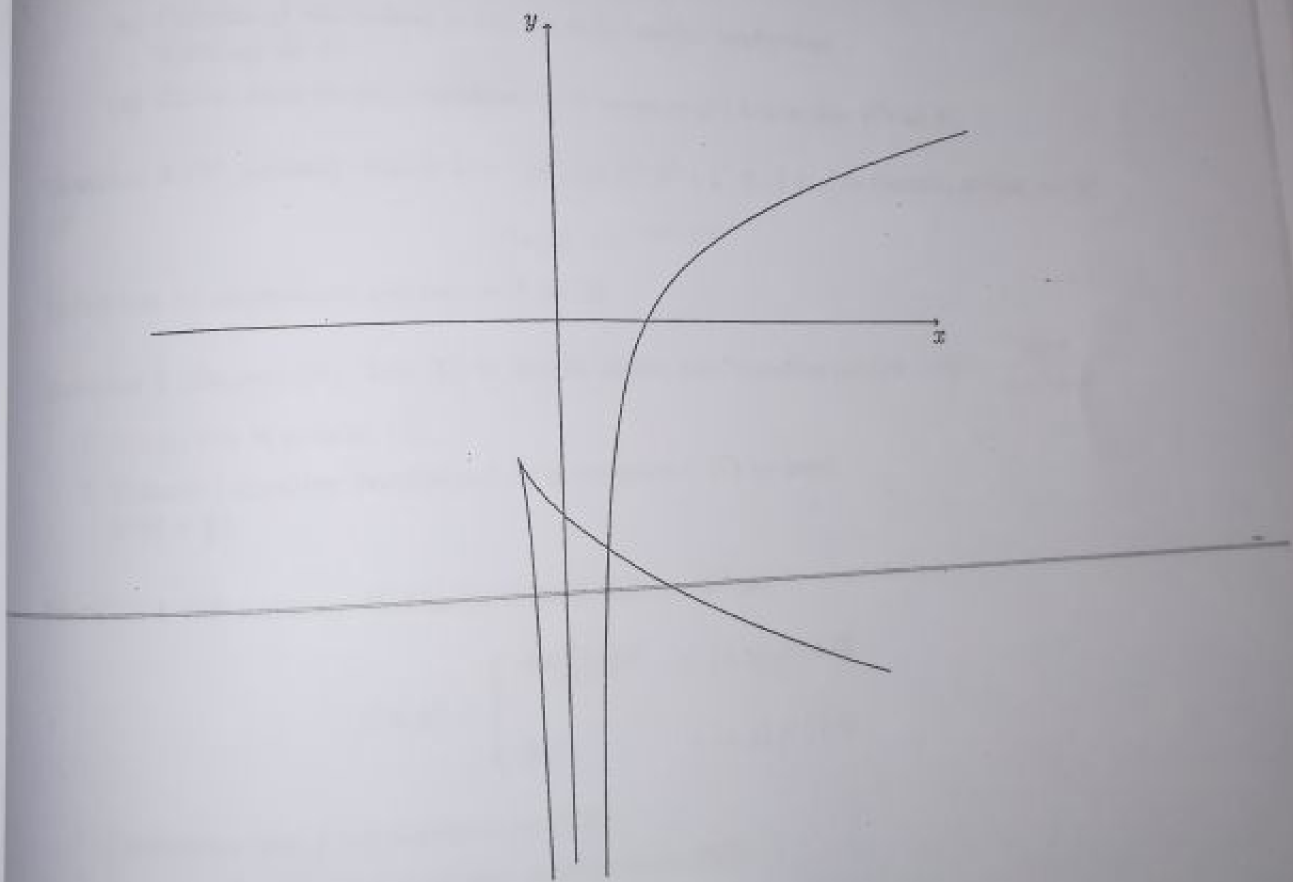
Exercice 5 .

1. $D_t = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
2. $x'(t) = 2(t+1)$, $y'(t) = \frac{2(t+1)(t^2-t+1)}{t^3}$.

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x'(t)$		$-$		$+$		$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$		$-$		$+$	
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$\|\|$	$\nearrow$	$+\infty$

— $t \to \pm\infty \Rightarrow x(t) \to +\infty$ et $y(t) \to \pm\infty$.
Cherchons $\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{2t^3-1}{t^2(t^2+2t)} = 0$.
Donc la courbe admet une direction asymptotique dans la direction de x.
— $t \to 0 \Rightarrow x(t) \to 0$ et $y(t) \to -\infty$. Donc $x = 0$ est une asymptote verticale.

3. $M(t=-1) = (-1, -3)$ point singulier.
$\lim_{t\to-1} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t\to-1} \frac{t^2-t+1}{t^3} = -3$. L'équation de la tangente en $M(t=-1) : y+3 = -3(x+1)$
4. — $x(t) = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = -2 \to y(-2) = \frac{-17}{4}$
— $y(t) = 0 \Rightarrow t = \sqrt[3]{2} \to y(\sqrt[3]{2}) = 2.2$
2 points :$(0,\frac{-17}{4})$,$(2.2,0)$.



Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 106
Durée : 2h

Année : 2010 - 2011
Examen : Final

Exercice 1 (25 points). On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \left(\frac{a-1}{3}\right)x^3 + y^3 + (a^2-1)x^2y - \left(\frac{a-1}{3}\right) \; ; \quad a \in \mathbb{R},$$

et on désigne par (Γ) la courbe définie par $f(x,y) = 0$.

1. Pour quelles valeurs de a, le théorème des fonctions implicites peut-être appliquer au point A=(1,0) ?
(Dire, lorsque la fonction implicite existe, si on peut écrire x en fonction de y ou inversement).
2. Dans cette partie, on s'intéresse au cas $a = -1$.
   (a) Calculer, si elle existe, la dérivée de la fonction implicite au voisinage de A.
   (b) Écrire, dans ce cas, l'équation de la tangente (T) à la courbe (Γ) en A.

Exercice 2 (30 points). Soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 1\}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = xe^{-(x^2+y^2)}.$$

Déterminer les extremums globaux de f sur D.

Exercice 3 (20 points). Soit (C) la courbe définie par l'équation polaire : $r(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

1. Construire la courbe (C).
2. Trouver l'équation cartésienne de la tangente à (C) au point $M(\theta = \frac{\pi}{2})$.

~~**Exercice 4 (25 points).** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par~~

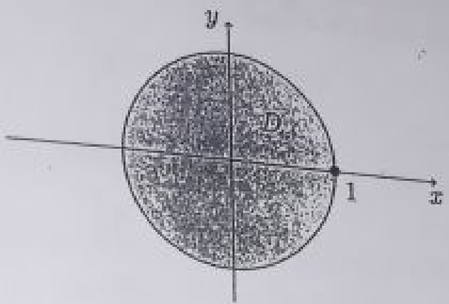
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^3 + \sin y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue en (0,0).
2. Chercher les dérivées partielles premières en (0,0).
3. f est-elle différentiable en (0,0) ?
4. f est-elle de classe C^1 en (0,0) ?

Exercice 1 .

1. $f(1,0) = 0 \Longrightarrow A \in (\Gamma)$.
   Cherchons les dérivées partielles au point A=(1,0) :
   $f'_x(A) = a - 1$ et $f'_y(A) = (a-1)(a+1)$.
   — Si $a \neq 1$ et $a \neq -1$ alors le théorème est applicable et on peut exprimer x en fonction de y et y en fonction de x.
   — Si $a = -1$ alors le théorème est applicable et on peut exprimer y en fonction de x.
   — Si $a = 1$ alors le théorème est applicable et on peut exprimer x en fonction de y.
2. Pour $a = -1$.
   (a) Au voisinage de A, il existe une fonction implicite ψ telle que $x = \psi(y)$ avec
   — $\psi(0) = 0$.
   — $\psi'(0) = \dfrac{-f'_y(A)}{f'_x(A)} = \dfrac{0}{1} = 0$.
   (b) L'équation de la tangente (T) en $A : x = 1$.

Exercice 2 .



1. Points Critiques :
$$\begin{cases} f'_x &= (1-2x^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ f'_y &= -2xye^{-(x^2+y^2)} = 0 \Rightarrow xy = 0. \end{cases}$$
2 points critiques dans D : $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

2. Extremums :
$$f''_{x^2} = -2x(3-2x^2)e^{-(x^2+y^2)},\ f''_{y^2} = -2x(1-2y^2)e^{-(x^2+y^2)},\ f''_{xy} = -2y(1-2x^2)e^{-(x^2+y^2)}$$
Donc
-Point $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$:
$\Delta > 0$ et $f''_{x^2} > 0 \Rightarrow$ min local avec $f\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{2e}}$.
-Point $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$:
$\Delta > 0$ et $f''_{x^2} < 0 \Rightarrow$ max local avec $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$..
Sur la frontière de D d'équation $x^2 + y^2 = 1$:
Paramétrisation : $g(t) = f(\cos t, \sin t) = \dfrac{\cos t}{e}$, $t \in [0, 2\pi]$
$g_{max} : g(0) = g(2\pi) = f(1,0) = \dfrac{1}{e}$
$g_{min} : g(\pi) = f(-1,0) = \dfrac{-1}{e}$

La valeur maximale de f sur D est $\frac{1}{e}$ atteinte au point (1,0).

La valeur minimale de f est $\frac{-1}{e}$ atteinte au point (-1,0).

Exercice 3 .

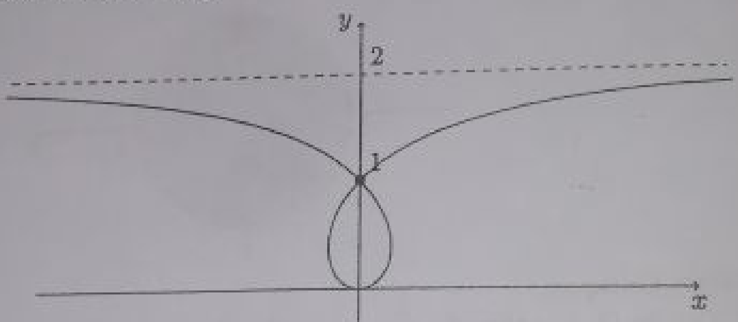
1. — $D_r = \mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
   — r est périodique de période 2π, il suffit de faire l'étude sur $]-\pi, \pi[$.
   — $r(-\theta) = -r(\theta) \Rightarrow$ la courbe est symétrique par rapport à l'axe de y. Il suffit de travailler sur $[0, \pi[$.
   — $r'(\theta) = \dfrac{1}{1+\cos\theta} > 0$.

θ	0		π
$r'(\theta)$		+	
$r(\theta)$	0	$\nearrow$	$\|$

   — $\lim\limits_{\theta \longrightarrow \pi} r(\theta) = \infty$. On cherche

$$\lim_{\theta \longrightarrow \pi} [r(\theta)\sin(\theta - \pi)] = \lim_{\theta \longrightarrow \pi} \frac{-\sin^2(\theta)}{1+\cos(\theta)} = \lim_{\theta \longrightarrow \pi} 2\cos(\theta) = -2.$$

   La courbe admet une asymptote d'équation $Y = -2$ dans le repère XoY obtenue de celui xoy par rotation d'angle π.



2. $M\left(\theta = \frac{\pi}{2}, r = 1\right) = (1,0) \longrightarrow \tan\nu = \dfrac{r(\frac{\pi}{2})}{r'(\frac{\pi}{2})} = 1 \Longrightarrow \nu = \dfrac{\pi}{4}$.
   L'équation de la tangente en (1,0) : $y = -x + 1$.

Exercice 4 .

1. $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$, on a

$$\left|\frac{\sin x^3 + \sin y^3}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \le \frac{|x^3|}{x^2+y^2} + \frac{|y^3|}{x^2+y^2} \le |x| + |y|.$$

   D'où $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^3)}{x^3} = 1 = f'_x(0,0)$.
   $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sin(y^3)}{y^3} = 1 = f'_y(0,0)$.

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|f(x,y) - 0 - x - y|}{\sqrt{x^2+y^2}} =_{y=x} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|2\sin(x^3) - 4x^3|}{2x^2\sqrt{2}|x|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$. Donc f n'est pas différentiable en (0,0).

4. f n'est pas différentiable en (0,0) $\Longrightarrow f$ n'est pas de classe C^1 en (0,0).