Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: M1104
Session: Partiel

Année: 2018-2019
Durée: 1h

Exercice I: (25 points).

Soit $E = \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{p}} + \dfrac{1}{\sqrt{q}}\ ;\ p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que E est borné et trouver ses bornes.

Exercice II: (20 points).

Démontrer la divergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Exercice III: (15 points).

Donner la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}.$$

Exercice IV: (40 points).

Etudier la nature de la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $u_{n+1} = 6 - \dfrac{5}{u_n + 1}$.

Bonne Chance

Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: M1104
P + F : S2

Année: 2017-2018
Durée:

مطلوب الاجابة على كل جزء بشكل متواصل ودون تداخل مع الجزء الاخر.

Partie P (Partiel) : (sur 100 points pour ≈ 45 minutes).

Exercice I: (30 points).
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$$

Montrer que les deux suites sont convergentes et convergent vers une même limite.

Exercice II: (40 points).
Soit $u_n = \dfrac{n^2+2}{\sqrt{n^2+1}}$ et $A = \{u_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$.

1. Appliquer la définition de la limite pour démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.
3. Donner, s'ils existent, les bornes supérieur et inférieur de l'ensemble A.

Exercice III: (30 points).
En utilisant la critère de Cauchy, démontrer la convergence de

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k+1} = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \ldots + \frac{1}{2^n+1}.$$

Partie F (Final) : (sur 100 points pour ≈ 105 minutes).

Exercice IV: (30 points).

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(1+2+3+\cdots+n)}$ est convergente et calculer sa somme.
2. Déterminer la nature des séries suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
   (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$
   (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\tan^n(\frac{\pi}{7})}{3^{n+2}}$

Tournez la page S.V.P. ⇒

Exercice V: (30 points).

1. Trouver le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(3n)!}$.

2. Trouver le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$.

3. Développer en série entière la fonction $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$.

Exercice VI: (10 points).

En utilisant la notion de la somme de Riemann, calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice VII: (30 points).

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes:

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\, dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x \sin x \, e^{-x}\, dx$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln x}{x^{\frac{3}{4}}}\, dx$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}\, dx$

Bonne Chance

cours : M1104

P+F : S_2 Année : 2017-2018

Partiel P (45 minutes)

EX I

- $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc $(U_n)_n \nearrow$
- $V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - U_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$$= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + \cancel{n^2} + n - \cancel{n^2} - 2n - 1}{n(n+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0 \text{, donc } (V_n) \searrow$$

- $V_n - U_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Donc $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont adjacents. Elles sont donc conv et conv. vers la même limite.

EX II $U_n = \frac{n^2+2}{\sqrt{n^2+1}}$ et $A = \{U_n ; n \in \mathbb{N}\}$

1. Soit $A > 0$. Il faut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $U_n \geq A$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n = \frac{n^2+2}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{n^2}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{n^2}{\sqrt{n^2+n^2}} = \frac{n}{\sqrt{2}}$

Donc, il suffit de prendre N entier naturel $\geq \sqrt{2}A$.

ou bien $N = [\sqrt{2}A] + 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\frac{n^2+2}{\sqrt{n^2+1}} \geq 2 \Leftrightarrow n^2+2 \geq 2\sqrt{n^2+1}$

$\Leftrightarrow n^4 + 4 + 4n \geq 4(n^2+1) \Leftrightarrow n^4 \geq 0$ qui est toujours vrai

3. On a 2 majorant de A (d'après 2.) et $2 = \frac{0+2}{\sqrt{0+1}} \in A$,

donc $\operatorname{Inf} A = 2$.

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$, donc n'est pas majoré et $\operatorname{Sup} A$, EX III $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k+1} = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1}$

soit $n, p \in \mathbb{N}^*$; $x_{n+p} - x_n = \frac{1}{2^{n+1}+1} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}+1}$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^p}\right]$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^p}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2^n}$$

soit $\varepsilon > 0$, comme $\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, alors $\exists N \in \mathbb{N}^* /$

$\forall n \geq N$; $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$.

Alors si $p \geq q \geq N$, alors $|x_p - x_q| = x_p - x_q \leq \frac{1}{2^q} \leq$

D'où $(U_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Partie F (Final) (105 minutes)

EX IV 1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \sum_{n\geq 1}$

$\forall n \geq 1$, $U_n = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)} \sim \frac{2}{n^2}$ et $\sum \frac{2}{n^2}$

donc $\sum_{n\geq 1} U_n$ conv. De plus $U_n = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$, donc

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} U_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} = 2\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots\right.$$

$$= 2\left[1 - \frac{1}{N+1}\right] \xrightarrow[N \to +\infty]{} 2. \text{ D'où } \sum_{n=1}^{\infty} U_n = 2.$$

2. (a) $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sum_{n \geq 0} U_n$.

$$U_n = (-1)^n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = (-1)^n \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = (-1)^n V_n$$

On a $v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \geq 0$, $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ en décroît.

D'où la série est conv. d'après le th sur les séries alternées

(b) $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n\geq 1} U_n$

On a $U_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \underset{\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$. Or $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ conv, donc $\sum_{n\geq 1} U_n$ co

(c) $\sum_{n\geq 0} \frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}}$.

$0 \leq \frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}} \leq \frac{1}{3^{n+2}} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^n}$ (car $0 \leq \frac{\pi}{7} \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq \tan\frac{\pi}{7} \leq \tan\frac{\pi}{4}$

et $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}$ conv, alors $\sum_{n\geq 0}\frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}}$ conv.

EX V 1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(3n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$; $\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \frac{|x^{2n+3}|}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{|x^{2n+1}|} = \frac{x^2}{(3n+1)(3n+2)(3n}$

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 < 1$

Et pour $x = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(3n)!} = 0$ conv.

D'où $D = \mathbb{R}$ domaine de convergence.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$; $\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\cdot\frac{2n}{x^{2n}} = x^2\cdot\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^2$

Donc $R = 1$.

Sur $]-R, R[=]-1,1[$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n} = \frac{-1}{2} \ln(1-x^2)$$

3. $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

$$f(x) = \ln((x-2)(x-3)) = \ln(x-2) + \ln(x-3)$$

$$= \ln((2-x)(3-x)) = \ln\left(6\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\right)$$

$$= \ln 6 + \ln\left(1-\frac{x}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{x}{3}\right).$$

Or $\ln\left(1-\frac{x}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n}$ pou

$\ln\left(1-\frac{x}{3}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n}$ pour tout x / |

Donc $\forall x \in \mathbb{R} / |x| < 2$ ($2 = \min\{2, 3\}$), on a

$$f(x) = \ln 6 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n} x^n$$

$$= \ln 6 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \cdot \frac{1}{n} \cdot x^n.$$

$\boxed{\text{EX VI}}$ $\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}}_{u_n}$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n}{n+k}\right)$$

$$= \frac{-1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k}{n}\right) = \frac{-1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$= \frac{-1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$ avec $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont, $x \longmapsto f(x) = \ln(1+x)$

Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\int_0^1 f(x)\,dx = -\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$

$$= -\left[(1+x)\ln(1+x) - x\right]_0^1 = -2\ln 2 + 1.$$

EX VII

1. $I = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\arctan x}{x^2}}_{f(x)} dx$, On a f est cont et $+$ sur $]0, +\infty[$

$$I = \underbrace{\int_0^1 f\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f\,dx}_{I_2} = I_1 + I_2$$

Pour I_1 : $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ donc I_1 div.

Pour I_2 : $x^{3/2} \cdot \frac{\arctan x}{x^2} = x^{3/2} f(x) = \frac{\arctan x}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc I_2 conv.

D'où I est divergente.

2. $\int_0^{+\infty} \underbrace{x \sin x\, e^{-x}}_{f(x)} dx$, On a f est continue sur $[0, +\infty[$.

$\forall x \geq 0$; $|f(x)| \leq x e^{-x}$ et $x^2 \cdot x e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ conv, alors $\int_0 |f(x)| dx$ conv,

donc $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ abs. conv, alors $\int_0^{+\infty} f dx$ conv.

3. $\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{\ln(x + \sqrt{x}) - \ln x}{x^{3/4}}}_{f(x)} dx$

On a $f(x) = \frac{\ln(x+\sqrt{x}) - \ln x}{x^{3/4}} = \frac{\ln\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x}\right)}{x^{3/4}} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x^{3/4}}$.

Donc f est cont et $+$ sur $[1, +\infty[$.

On a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{x^{3/4}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{x^{\frac{5}{4}}}$ et

$\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{5/4}}$ conv (car $5/4 > 1$), donc $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x}) - \ln x}{x^{3/4}} dx$

4. $I = \int_0^1 \underbrace{\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x}}}_{f(x)} dx$, f est cont. et + sur $]0,1[$

$I = I_1 + I_2$ avec $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} f dx$ et $I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 f dx$

Pour I_1 : $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, donc I_1 conv.

Pour I_2 : $f(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{1-x}$, donc I_2 div

D'où I est divergente.

Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 1104
Durée : 1H

Année : 2016 - 2017
Examen : Partiel

Exercice 1 (25 points).

Soit $u_n = \dfrac{2^n}{2^n - 1}$ et $A = \{u_n;\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

(1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(2) Déduire les valeurs de $\mathrm{Inf}(A)$ et $\mathrm{Sup}(A)$.

Exercice 2 (25 points).
Soit $u_n = k^n$ avec $0 < k < 1$ et $v_n = \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy tandis que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite de Cauchy.

Exercice 3 (25 points).
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{u_n + 3}{3u_n + 1}, \\ u_0 &= 2. \end{cases}$$

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.

(2) Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 (25 points).
Etudier la nature des séries suivantes et chercher la somme de la série (1)

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n$,

(2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\,(\cos(n))^2}$,

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^n}{3^{n+2}}$.

Bon travail

Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 1104
Durée : 1H

Année : 2015 - 2016
Examen : Partiel

Exercice 1 (35 points).

1. Montrer que pour tous m et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < \dfrac{mn}{(m+n)^2} \leq \dfrac{1}{4}$.
2. Déduire que l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2};\ m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

Exercice 2 (35 points). Soient $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$, et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$,

1. (i) Montrer que pour tout $t \in [n, n+1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f(t) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{t}$ est négative.
   (ii) Calculer $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\, dt$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (iii) Déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
2. (i) Montrer que pour tout $t \in [n, n+1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g(t) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{t+1}$ est positive.
   (ii) Calculer $\displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\, dt$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (iii) Déduire que $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
3. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ convergent vers la même limite.

Exercice 3 (30 points). Etudier la nature des séries suivantes :

(1) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n^{\ln(n)}}{\ln(n)^n}$, (2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$, (3) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n^2}{n^2+1}$,

(4) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \ln(1+e^{-n})$, (5) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{e^{n+3}}{3^{n-1}}$.

Bon travail

Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 104
Durée : 1H

Année : 2014 - 2015
Examen : Partiel

Exercice 1 (35 points). Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n}, & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ u_0 \in [2-\sqrt{3}, 4]. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [2-\sqrt{3}, 4]$.
2. Etudier suivant u_0 la convergence de $(u_n)_n$.

Exercice 2 (35 points). Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} - u_n & \text{pour } n \in \mathbb{N}, \\ u_0 = 1, \\ u_1 = 2. \end{cases}$$

1. Exprimer la suite $(u_n)_n$ en fonction de n.
2. Etudier la convergence de $(u_n)_n$, en utilisant les limites supérieure et inférieure.

Exercice 3 (30 points). Calculer la somme des séries numériques suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^{n-2}}{3^{n+2}\, e^{n+4}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left[\frac{-1}{n(n+1)} - \frac{2}{(n+3)(n+4)}\right]$.

Bon travail

Solution partiel Math 104 (2015)

Ex 1 : $u_0 \in [2-\sqrt{3}, 4]$. Supposons que $2-\sqrt{3} \le u_n \le 4$

posons $f(x) = \frac{4x-1}{x}$. $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ donc $f \nearrow$ donc $f(2-\sqrt{5}) \le f(u_n) \le f(4)$

or $f(2-\sqrt{3}) = 4 - \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$ et $f(4) = 4 - \frac{1}{4} < 4$ d'où $2-\sqrt{3} \le u_{n+1} \le 4$

2). si (u_n) cv vers l alors $l = f(l) \Rightarrow l^2 - 4l + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} l = 2-\sqrt{3} \\ \text{ou} \\ l = 2+\sqrt{3} \end{cases}$

. puisque $f \nearrow$ alors (u_n) est monotone et le sens de variation dépend de $u_1 - u_0$

$$u_1 - u_0 = \frac{-[u_0^2 - 4u_0 + 1]}{2} = -\frac{1}{2}[u_0 - (2-\sqrt{3})][u_0 - (2+\sqrt{3})]$$

1er cas : $u_0 = 2-\sqrt{3}$ alors on démontre par réc. facilement que $\forall n$,
$u_n = 2-\sqrt{3}$ d'où (u_n) cv vers $2-\sqrt{3}$

2ème cas $u_0 = 2+\sqrt{3}$ " " " " "
$u_n = 2+\sqrt{3}$ " " " $2+\sqrt{3}$

3ème cas $2-\sqrt{3} < u_0 < 2+\sqrt{3}$ alors $u_1 - u_0 > 0$ donc $(u_n) \nearrow$. Montrons que
(u_n) est majorée par $2+\sqrt{3}$

vraie pour $n=0$. supposons que $u_n < 2+\sqrt{3}$

or $f \nearrow \Rightarrow f(u_n) < f(2+\sqrt{3}) \Rightarrow u_{n+1} < 2+\sqrt{3}$

d'où (u_n) cv vers $2+\sqrt{3}$ car les seuls limits possibls sont $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$ et on a $2-\sqrt{3} < u_0 \le u_1 \le \dots \le u_n \le 2+\sqrt{3}$

4ème cas : $u_0 > 2+\sqrt{3}$ alors $u_1 - u_0 < 0 \Rightarrow (u_n) \searrow$. Montrons que
(u_n) est minorée par $2+\sqrt{3}$

vraie pour $n=0$. Supposons que $u_n > 2+\sqrt{3}$ or $f \nearrow$

$\Rightarrow f(u_n) > f(2+\sqrt{3}) \Rightarrow 2+\sqrt{3} < u_{n+1}$

d'où (u_n) cv vers $2+\sqrt{3}$ car $2+\sqrt{3} \le u_{n+1} \le u_n \le \dots \le u_0$

Ex 2 : $r^2 = r - 1 \Rightarrow r^2 - r + 1 = 0$

$\Delta = -3 \Rightarrow r_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

$\rho = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1 \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} ; \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

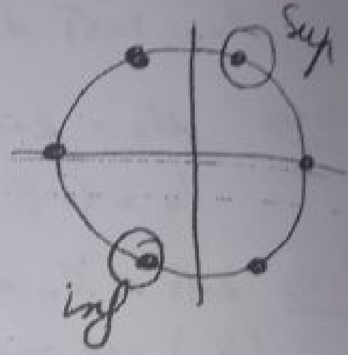
$\forall n, \ u_n = C_1 \cos n\frac{\pi}{3} + C_2 \sin n\frac{\pi}{3}$

Remarque : On aurait pu travailler avec r_1 : $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$

pour $n = 0 \quad u_0 = \boxed{C_1 = 1}$

$n = 1 \quad u_1 = \cos\frac{\pi}{3} + C_2 \sin\frac{\pi}{3} = 2 \Rightarrow \boxed{C_2 = \sqrt{3}}$

$$\boxed{\forall n, \ u_n = \cos n\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\sin n\frac{\pi}{3}}$$



• Posons $U_n = \{u_k, k \geq n\}$

$V_n = \inf U_n$ et $W_n = \sup U_n$

$U_0 = \{1, \frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, \dots\}$

$V_0 = -2$

$W_0 = 2$

et $\forall n$, $V_n = -2$ et $W_n = 2$

puisque $\liminf u_n = \lim V_n = -2$

et $\limsup u_n = \lim W_n = 2$

et $\limsup u_n \neq \liminf u_n$ d'où la divergence de (u_n).

③

Ex3 a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n e^n} \cdot \frac{2^{-2}}{3^2 e^4} = \frac{1}{36 e^4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3e}\right)^n$

$$= \frac{1}{36e^4} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3e}}$$

b) $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+3)(k+4)}$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}$$

d'où $\displaystyle S_n = -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right)$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & - & \frac{1}{2} \\ + & & \\ \frac{1}{2} & - & \frac{1}{3} \\ + & & \\ \vdots & & \\ \frac{1}{n} & - & \frac{1}{n+1} \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & - & \frac{1}{5} \\ + & & \\ \frac{1}{5} & - & \frac{1}{6} \\ + & & \\ \vdots & & \\ \frac{1}{n+3} & - & \frac{1}{n+4} \end{bmatrix}$$

$$= -\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] - 2\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{n+4}\right]$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+4} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{3}{2}$$

d'où la série est cv et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{-1}{n(n+1)} - \frac{2}{(n+3)(n+4)}\right] = -\frac{3}{2}.$$

M 104

Université Libanaise
Faculté des sciences III

Cours : Math 104
Session : Partiel

Date : 15/05/2012
Durée : 1h

Exercice 1 (15 pts).

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + (-1)^n \times n \end{cases}$

1) Trouver :

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} \quad et \quad \lim_{n \to +\infty} u_{2n+2}$$

2) Déduire la nature de la suite $(u_n)_n$

Exercice 2 (30 pts).

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{-1}{3} u_n^2 + 2u_n \end{cases}$

(1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 3]$

(2) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 3 (30 pts).

Soit a et b deux reèls strictement positive tels que $0 < a < b$ et soit λ et μ deux reèls strictement positive tels que $0 < \lambda < \mu$. Maintenant, on considère les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies simultanement par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \quad v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + \lambda v_n}{1+\lambda}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + \mu v_n}{1+\mu} \end{cases}$$

(1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < v_n$

(2) Démontrer que les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

Exercice 4 (25 pts).

Determiner u_1 pour que la suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{5}[16u_{n+1} - 3u_n] \end{cases}$ soit convergente, puis trouver sa limite

Bonne Chance

EX1 1) $u_{2n+1} = u_{2n}^2 + (-1)^{2n} \times (2n) = u_{2n}^2 + 2n \geq 2n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = +\infty$

$u_{2n+2} = (u_{2n+1})^2 + (-1)^{2n+1}(2n+1) = u_{2n+1}^2 - (2n+1)$

$\geq 4n^2 - (2n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+2} = +\infty$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+2} = +\infty$ donc la suite (u_n) diverg vers $+\infty$

EX2 1) par réc. sur n

$u_0 = \frac{1}{2}$ donc $0 \leq u_0 \leq 3$

supposons que $0 \leq u_n \leq 3$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 3$

posons $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$ pour $x \in [0,3]$

$f'(x) = -\frac{2}{3}x + 2 = 2\left[-\frac{x}{3} + 1\right]$

$0 \leq x \leq 3$

$0 \leq \frac{x}{3} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\frac{x}{3} \leq 0$

$0 \leq -\frac{x}{3} + 1 \leq 1$

donc $f' \geq 0$ sur $[0,3]$ donc $f \nearrow$ sur $[0,3]$

$\Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(3)$

$0 \leq u_{n+1} \leq -\frac{1}{3} \times 9 + 6 = -3 + 6 = 3$

2) f est monotone et $\nearrow$ sur $[0,3]$ donc (u_n) est monotone et le sens de variation de (u_n) dépend de $u_1 - u_0$

$u_1 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12} + 1 = \frac{11}{12}$

$u_1 - u_0 = \frac{11}{12} - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow (u_n) \nearrow$. or (u_n) est majorée par 3 donc (u_n) cv. si on note $l = \lim u_n$ alors l est racine de

$$l = f(l) \Rightarrow l = -\frac{1}{3}l^2 + 2l \Rightarrow -\frac{1}{3}l^2 + l = 0$$

$$l\left(1 - \frac{1}{3}l\right) = 0 \Rightarrow l = 0 \text{ ou } l = 3$$

or $0 < u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq l$

donc $\lim_{n \to \infty} u_n = 3$

Ex3 1) $0 < a < b \Rightarrow 0 < u_0 < v_0$

supposons que $0 < u_n < v_n$

alors $u_{n+1} = \frac{u_n + \lambda v_n}{1+\lambda} > 0$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + \mu v_n}{1+\mu} > 0$

Il reste à prouver que $u_{n+1} < v_{n+1}$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + \mu v_n}{1+\mu} - \frac{u_n + \lambda v_n}{1+\lambda}$$

$$= \frac{\cancel{u_n} + \lambda u_n + \mu v_n + \cancel{\lambda\mu v_n} - \cancel{u_n} - \mu u_n - \lambda v_n - \cancel{\lambda\mu v_n}}{(1+\lambda)(1+\mu)}$$

$$= \frac{\lambda(u_n - v_n) + \mu(v_n - u_n)}{(1+\lambda)(1+\mu)} = \frac{(\lambda - \mu)(u_n - v_n)}{(1+\lambda)(1+\mu)}$$

$$= \frac{(v_n - u_n)(\mu - \lambda)}{(1+\lambda)(1+\mu)}$$ or $v_n > u_n > 0$ et $\mu > \lambda$

d'où $v_{n+1} > u_{n+1}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + \lambda v_n}{1+\lambda} - u_n = \frac{u_n + \lambda v_n - u_n - \lambda u_n}{1+\lambda}$$

$$= \frac{\lambda(v_n - u_n)}{1+\lambda} > 0 \Rightarrow (u_n) \nearrow$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + \mu v_n}{1+\mu} - v_n = \frac{u_n + \mu v_n - v_n - \mu v_n}{1+\mu} = \frac{u_n - v_n}{1+\mu} < 0$$

$\Rightarrow (v_n) \searrow$

$\forall n, \quad 0 < u_0 < u_1 < \dots < u_n < v_n < v_{n-1} < \dots < v_1 < v_0$

$(u_n) \nearrow$ et majorée par v_0 donc cv

notons $\ell_1 = \lim u_n$

$(v_n) \searrow$ et minorée par u_0 donc cv

notons $\ell_2 = \lim v_n$

puisque $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \lambda v_n}{1+\lambda}$

on passe à la limite $\Rightarrow \ell_1 = \dfrac{\ell_1 + \lambda \ell_2}{1+\lambda}$

$(1+\lambda)\ell_1 = \ell_1 + \lambda \ell_2 \Rightarrow \boxed{\ell_1 = \ell_2}$

donc $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = \ell_1 - \ell_2 = 0$

ces 2 suites sont donc adjacents

<u>autre methode</u> : $\forall n$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{\mu - \lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}(v_n - u_n)$

posons $K = \dfrac{\mu - \lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)} \Rightarrow v_{n+1} - u_{n+1} = k\,(\cancel{v_n - u_n})$

$$\cancel{v_n - u_n} = k\,(\cancel{v_{n-1} - u_{n-1}})$$

$\times$ $\vdots$

$$\cancel{v_1} - u_1 = k\,(v_0 - u_0)$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = k^{n+1}(v_0 - u_0)$$
$$= k^{n+1}(b - a)$$

or $\underbrace{0<}_{\text{évident}} k < 1$ car $\mu - \lambda < \lambda + \mu + \lambda\mu + 1 \Leftrightarrow$
$2\lambda + \lambda\mu + 1 > 0$ ce qui est vraie

donc $\lim\limits_{n\to\infty} k^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(v_{n+1} - u_{n+1}) = 0$

$\Rightarrow (v_n)$ et (u_n) sont adjacents donc

elles convergent vers la même limite

Ex4 le polynôme caractéristique :

$$r^2 = \frac{1}{5}\left[16 r - 3\right]$$

$$5r^2 - 16r + 3 = 0 \qquad \Delta' = 64 - 15 = 49$$

$$r_1 = \frac{1}{5} \text{ et } r_2 = 3$$

$$\forall n,\ u_n = C_1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n + C_2 \cdot 3^n \quad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = C_1 + C_2 = 1 \\ u_1 = \frac{C_1}{5} + 3C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1\left(3 - \frac{1}{5}\right) = 3 - u_1$$

$$\frac{14}{5} C_1 = 3 - u_1$$

$$\boxed{C_1 = \frac{5}{14}(3 - u_1)}$$

$$C_2 = 1 - \frac{5}{14}(3 - u_1)$$

$$\boxed{C_2 = \frac{1}{14}\left[5u_1 - 1\right]}$$

$$u_n = \frac{5}{14}(3 - u_1)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{14}\left[5u_1 - 1\right]\cdot 3^n$$

pour que (u_n) cv. il faut que $\frac{1}{14}\left[5u_1 - 1\right] = 0$

donc $u_1 = \frac{1}{5}$

d'où $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$!!.

(40pts)

(35pts)

(25pts)

Université Libanaise
Faculté des sciences III

Cours : Math 104
Session : Partiel

Date : 12/04/2019
Durée : 1h

(40pts) **Exercice I :** On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = 1, v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$ et $v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n)$.

i. On suppose $w_n = v_n - u_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.
   a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique à termes positifs dont on précisera la raison.
   b. Déterminer la limite de la suite (w_n).
   c. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   d. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
   e. En déduire que pour tout entier naturel $n, u_0 \le u_n \le v_n \le v_0$.
   f. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite que l'on appelle l.

ii. Posons $t_n = 3u_n + 8v_n \forall n \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer que (t_n) est une suite constante. Déterminer cette constante.
   b. En deduire la valeur de l.

(35pts) **Exercice II :** Soit (u_n) la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^3+6u_n}{3u_n^2+2} \end{cases}$

Associer à cette suite la fonction réelle $x \longrightarrow f(x)$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Etudier les variations de f.
b) Chercher les points fixes de f.
c) Etudier la convergence de la suite (u_n).

(25pts) **Exercice III :** Soit la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$

a) Montrer que $\forall n \geq 1, u_n = ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)$.
b) Montrer que la série est convergente et déterminer sa somme.

Ex1 $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1, \ v_0 = 12 \end{cases}$

1) a) $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = -\frac{1}{3}(u_n + 2v_n) + \frac{1}{4}(u_n + 3v_n)$

$$= \frac{1}{12}v_n - \frac{1}{12}u_n = \frac{1}{12}(v_n - u_n)$$
$$= \frac{1}{12}w_n$$

donc (w_n) est une suite géo de raison $\frac{1}{12}$

montrons que $\forall n$, $w_n \geq 0$

$$w_0 = v_0 - u_0 = 11 > 0$$

supposons que $w_n > 0$ donc $w_{n+1} = \frac{1}{12}w_n > 0$

b) $w_n = \left(\frac{1}{12}\right)^n w_0$ or $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

c) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) - u_n = \frac{1}{3}(-2u_n + 2v_n) = \frac{2}{3}(v_n - u_n)$

$$= \frac{2}{3}w_n > 0$$

$\Rightarrow (u_n) \nearrow$

d) $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - v_n = \frac{1}{4}(u_n - v_n) = -\frac{1}{4}w_n < 0$

$\Rightarrow (v_n) \searrow$

e) puisque $(u_n) \nearrow$ alors $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n$

puisque $w_n > 0$ donc $u_n \leq v_n \Rightarrow u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq v_n$

puisque $(v_n) \searrow$ donc $v_n \leq v_{n-1} \leq \dots \leq v_0$

d'où $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq v_n \leq \dots \leq v_0$

8) $(u_n) \nearrow$ et majorée par v_0 d'après c) et e) donc
$(v_n) \searrow$ et minorée par u_0 d'après d) et e) donc

$\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$

donc (u_n) et (v_n) sont adjacents elles sont donc convergents vers la même limite l.

ii) $t_n = 3u_n + 8v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) $\forall n,\ t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n$
$= 3u_n + 8v_n = t_n$

donc (t_n) et une suite contante qui vaut $t_0 = 3u_0 + 8v_0$

$\Rightarrow \forall n,\ t_n = t_0 = 3 + 8.12 = 99$

b) puisque $t_n = 3u_n + 8v_n = 99$

on passe à la limite $\Rightarrow 3l + 8l = 99$
$\Rightarrow 11l = 99$
$\Rightarrow l = \dfrac{99}{11} = 9$

Ex II) $\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 6u_n}{3u_n^2 + 2} \end{cases}$

a) $\forall n$, $u_n \geq 0$. En effet $u_0 \geq 0$. Supposons que $u_n \geq 0$
puisque $u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 6u_n}{3u_n^2 + 2} \geq 0$ donc $u_n \geq 0$

posons $f(x) = \dfrac{x^3 + 6x}{3x^2 + 2} = \dfrac{x(x^2+6)}{3x^2+2}$

il suffit de travailler sur $\mathbb{R}^+$

$$f : [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2+6)(3x^2+2) - 6x(x^3+6x)}{(3x^2+2)^2}$$

$$= \frac{3x^4 - 12x^2 + 12}{(3x^2+2)^2} = \frac{3(x^2-2)^2}{3x^2+2} > 0 \Rightarrow f \nearrow$$

x	0	$+\infty$
f'	$+$	
f	0 $\nearrow$	$+\infty$

b) les points fixes de f sont solutions de l'éq.

$$l = f(l) \Rightarrow l = \frac{l^3 + 6l}{3l^2+2} \Rightarrow l^3 + 6l = 3l^3 + 2l$$

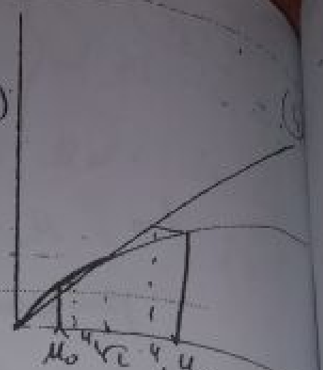
$$\Rightarrow l^3 - 2l = 0 \Rightarrow l(l^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} l = 0 \\ l = \sqrt{2} \\ l = -\sqrt{2} \text{ à rejeter car } \forall n \; u_n \geq 0 \end{cases}$$

donc si (u_n) cv sa limite est soit 0 soit $\sqrt{2}$.

x	0		$\sqrt{2}$		∞
f	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	
signe de $f(x)-x$		$+$		$-$	
		courbe au dessus de la 1ère bissec		courbe au dessous de la 1ère bissectrice	

$$f(x)-x = \frac{2x(2-x^2)}{3x^2+2}$$

$$f(x)-x = \frac{2x(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{3x^2+2}$$



c) $\boxed{\text{si } u_0 = 0}$ alors $\forall n,\ u_n = 0$

en effet par réc. sur n

vrai pour $n=0$. supposons que $u_n = 0$

puisque $u_{n+1} = f(u_n) \Rightarrow u_{n+1} = f(0) = 0$ (car 0 point fixe)

donc (u_n) est une suite constante qui vaut 0 donc cv. vers 0

de même $\boxed{\text{si } u_0 = \sqrt{2}}$ alors on démontre de la même façon que (u_n) est une suite constante qui vaut $\sqrt{2}$ donc cv vers $\sqrt{2}$

$\boxed{\text{si } 0 < u_0 < \sqrt{2}}$ puisque $f \nearrow$ alors (u_n) est monotone et le sens de variation dépend de $u_1 - u_0$

or $u_1 - u_0 = \dfrac{u_0^3 + 6u_0}{3u_0^2+2} - u_0 = \dfrac{u_0^3 + 6u_0 - 3u_0^3 - 2u_0}{3u_0^2+2}$

$u_1 - u_0 = \dfrac{4u_0 - 2u_0^3}{3u_0^2+2} = \dfrac{2u_0(2 - u_0^2)}{3u_0^2+2} = \dfrac{2u_0(\sqrt{2}-u_0)(\sqrt{2}+u_0)}{3u_0^2+2}$

or $0 < u_0 < \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} - u_0 > 0 \Rightarrow u_1 - u_0 > 0 \Rightarrow (u_n) \nearrow$

montrons que (u_n) est majorée par $\sqrt{2}$

$u_0 < \sqrt{2}$. supposons que $u_n < \sqrt{2}$. puisque f est $\nearrow$ alors $f(u_n) < f(\sqrt{2})$ donc $u_{n+1} < \sqrt{2}$

donc $(u_n) \nearrow$ et majorée par $\sqrt{2}$ elle est donc cv vers l'unique point fixe possible $\sqrt{2}$ car $0 < u_0 \leq \dots \leq u_n < \sqrt{2}$

• $\boxed{\text{si } u_0 > \sqrt{2}}$ alors $u_1 - u_0 = \dfrac{2u_0(\sqrt{2}-u_0)(\sqrt{2}+u_0)}{3u_0^2+2} < 0$

donc $(u_n) \searrow$.

montrons que (u_n) est minorée par $\sqrt{2}$

par réc sur n. vraie pour $n=0$

supposons que $u_n > \sqrt{2}$ or $f \nearrow$ donc $f(u_n) > f(\sqrt{2})$

$\Rightarrow u_{n+1} > \sqrt{2}$

• $(u_n) \searrow$ et minorée par $\sqrt{2}$ donc elle est cv

or les seules limites possibles sont 0 et $\sqrt{2}$ et $0 < \sqrt{2} < u_n \leq u_0$

donc (u_n) cv vers $\sqrt{2}$

Ex III : $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$

a) $\forall n \geq 1$

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) = \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n(n+3)}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+3}{n+2}}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)$$

b) $\forall n \geq 1$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \ln\left(\frac{k+3}{k+2}\right)\right]$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\ln(k+1) - \ln k - \ln(k+3) + \ln(k+2)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[-\ln k + \ln(k+1) + \ln(k+2) - \ln(k+3)\right]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln k\right] + \left[\sum_{k=1}^{n} \ln(k+2) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+3)\right]$$

$$= \ln(n+1) - \ln 1 + \ln 3 - \ln(n+3) = \ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right) + \ln 3$$

$S_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \ln 3$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right) = 0$

en effet $\ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right) = \ln\left(1 - \frac{2}{n+3}\right)$

or $\ln\left(1 - \frac{2}{n+3}\right) \underset{\infty}{\sim} -\frac{2}{n+3}$

donc la série cv. et a pour somme $\ln 3$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \ln 3}$$

Université Libanaise

Faculté des sciences III- Tripoli- Liban

Cours : Math 104

Session : Partiel

Date: 12/04/2010

Durée: 1h

Exercice 1: (30 pts)

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$, $(w_n)_{n\geq 1}$ trois suites réelles définie par:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ ; \ v_n = 2\sqrt{n} - u_n \ ; \ w_n = 2\sqrt{n+1} - u_n$$

Montrer que les suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice 2: (20 pts)

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_n = \cos\frac{n\pi}{3}$ est divergente.

Exercice 3: (30 pts)

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par: $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2+7u_n}{2}} - 1 \\ u_0 \geq 1 \end{cases}$

1- Montrer que $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2- Etudier la convergence de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 4: (20 pts)

Calculer le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par: $\begin{cases} u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n \\ u_0 = 0; u_1 = 1 \end{cases}$

Solution Partiel M 104
2010

$$\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

Exercice I

- $v_{n+1} - v_n = 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) - \left(u_{n+1}-u_n\right)$

$$= 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2} > 0 \Rightarrow (v_n) \nearrow$$

- $w_{n+1} - w_n = 2\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right) - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{\ }+\sqrt{\ }\right)^2} < 0$

$$\Rightarrow (w_n) \searrow$$

- $w_n - v_n = 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc (u_n) et (v_n) sont adj.

Exercice II : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{6n} = \cos\frac{6n\pi}{3} = \cos 2n\pi = 1$ donc la suite extraite (u_{6n}) cv vers 1.

$u_{6n+3} = \cos(6n+3)\frac{\pi}{3} = -\cos 2n\pi = -1$ donc la suite extraite (u_{6n+3}) cv vers -1

on a pu extraire 2 suites de (u_n) qui cv. vers 2 limites $\neq$ donc (u_n) div

Exercice III : 1) Par réc sur n

pour $n=0$ $\quad u_0 \geq 1$ vraie. Supposons que $u_n \geq 1$

$u_n^2 \geq 1$ et $7u_n \geq 7 \Rightarrow u_n^2 + 7u_n \geq 8 \Rightarrow \frac{u_n^2+7u_n}{2} \geq 4$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{u_n^2+7u_n}{2}} \geq 2 \Rightarrow u_{n+1} \geq 1$ donc $\forall n$, $u_n \geq 1$

2) soit $f : [1,\infty[\longrightarrow [1,\infty[$

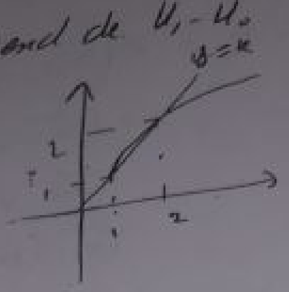
$x \longmapsto f(x) = \sqrt{\frac{x^2+7x}{2}} - 1$

points fixes : $f(x) = x \Rightarrow \frac{x^2+7x}{2} = (x+1)^2 \Rightarrow$ ~~$x=1$~~ ou $x = 2$

• $f'(x) = \frac{2x+7}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+7x}{2}}} > 0 \Rightarrow f \nearrow \Rightarrow (u_n)$ monotone

et le sens de variation dépend de $u_1 - u_0$

x	1	2	∞
f'		+	
f	1 $\nearrow$	2 $\nearrow$	∞



1er cas si $u_0 = 1$ (resp $u_0 = 2$) on montre par réc. facile que $\forall n$; $u_n = 1$ (resp $u_n = 2$) donc (u_n) cv vers 1 (resp (u_n) cv vers 2)

2ème cas $1 < u_0 < 2$

$$u_1 - u_0 = \frac{-u_0^2 + 3u_0 - 2}{2\left[\sqrt{\frac{u_0^2+7u_0}{2}} + 1 + u_0\right]} = \frac{-(u_0-1)(u_0-2)}{2[\quad]} > 0 \Rightarrow (u_n) \nearrow$$

démontrons que (u_n) est majorée par 2

$u_0 < 2$. supposons que $u_n < 2 \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) < f(2) = 2$

$\Rightarrow (u_n) \nearrow$ maj par 2 donc cv. vers 2.

3ème cas $2 < u_0 < \infty \Rightarrow u_1 - u_0 < 0 \Rightarrow (u_n) \searrow$

de même on démontre par réc que (u_n) est minorée par 2 donc (u_n) cv vers 2

EX4 $r^2 + 2r + 4 = 0 \Rightarrow \Delta' = 3i^2 \Rightarrow r_1 = -1 - i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$r_2 = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\cancel{\Rightarrow u_n = r^n(c_1\cos n\theta + c_2\cos n\theta)} = 2^n\left(c_1\cos\frac{4n\pi}{3} + c_2\sin\frac{4n\pi}{3}\right)$

$n = 0 \to u_0 = c_1 = 0$; $n = 1 \Rightarrow u_1 = -\sqrt{3}\,c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow u_n = 2^n\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{4n\pi}{3}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Rq: si on travaille avec $r_2 \Rightarrow u_n = 2^n\left(c_1\cos\frac{2n\pi}{3} + c_2\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$

$n = 0 \to c_1 = 0$; $n = 1 \Rightarrow u_1 = 2c_2\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow u_n = 2^n\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2n\pi}{3}$

Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: Math 104
Session: Partiel

Date: 2/5/2008
Durée: 1h

Exercice I: (25 points).
Montrer que si deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite.

Exercice II: (20 points).
Déterminer u_0 pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

soit convergente ; puis trouver sa limite.

Exercice III: (20 points).
Soient $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sin(\alpha + n\pi)$.

1. Déterminer la limite inférieure et la limite supérieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire la nature de cette suite.

Exercice IV: (35 points).
Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n} \end{cases}$

Bonne Chance

Cours : Math 104 — ① — Date : 2-5-2008

Session : Partiel — Durée : 1 h

$\boxed{\text{EX I}}$ Soient $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites adjacentes, alors $(U_n)_n \nearrow$, $(V_n)_n \searrow$ et $V_n - U_n \xrightarrow[n]{} 0$.

soit $W_n = V_n - U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$W_{n+1} - W_n = V_{n+1} - U_{n+1} - V_n + U_n = V_{n+1} - V_n - (U_{n+1} - U_n) \leq 0$

$(V_{n+1} - V_n \leq 0$ car $(V_n)_n \searrow$ et $U_{n+1} - U_n \geq 0$ car $(U_n)_n \nearrow)$.

Donc $(W_n)_n$ suite $\searrow$ et $\xrightarrow[n]{} 0$, ce qui donne $W_n \geq 0 \ \forall n$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n \geq U_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n \geq U_n \geq U_0$, alors $(V_n)_n$ suite minorée par U_0 et $(V_n)_n \searrow$ ce qui donne que $(V_n)_n$ est convergente, soit l sa limite

$\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \leq V_n \leq V_0$, alors $(U_n)_n$ suite majorée par V_0 et $(U_n)_n \nearrow$ ce qui donne que $(U_n)_n$ est convergente, soit l' sa limite

De plus $V_n - U_n \xrightarrow[n]{} 0$ et $V_n - U_n \to l - l'$ } d'après l'unicité de la limite $l = l'$. c.q.f.d.

$\boxed{\text{EX II}}$ $(U_n)_n$ défini par $\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_{n+2} = U_{n+1} - U_n \end{cases}$

$r^2 - r + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$

$r = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $r = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Donc $\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N};\ U_n = C_1 \cos\frac{n\pi}{3} + C_2 \sin\frac{n\pi}{3}$.

$n=0 \longrightarrow \boxed{U_0 = C_1}$

$n=1 \longrightarrow U_1 = 0 = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C_2\sqrt{3} = -C_1 = -U_0$ et $\boxed{C_2 = \frac{-U_0}{\sqrt{3}}}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N};\ U_n = U_0 \cos\frac{n\pi}{3} - \frac{U_0}{\sqrt{3}} \sin\frac{n\pi}{3}$.

Pour que la suite est convergente il faut que $U_0 = 0$ et dans ce cas $\forall n \in \mathbb{N};\ U_n = 0$, alors $(U_n)_n$ est convergente et converge vers 0

$\boxed{\text{EX III}}$ $\forall n \in \mathbb{N};\ U_n = \sin(\alpha + n\pi)$ avec $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

1) On a $\sin(\alpha + n\pi) = \begin{cases} \sin\alpha & \text{si } n \text{ paire} \\ -\sin\alpha & \text{si } n \text{ impaire} \end{cases}$

(car la fonct. "sin" périodique de période 2π).

Donc $\forall n \in \mathbb{N};\ v_n = \inf\{U_n, U_{n+1}, \dots\} = -\sin\alpha$

$w_n = \sup\{U_n, U_{n+1}, \dots\} = \sin\alpha$

alors $\limsup U_n = \lim\limits_{n \to \infty} w_n = \sin\alpha$ et

$\liminf U_n = \lim\limits_{n \to \infty} v_n = -\sin\alpha$.

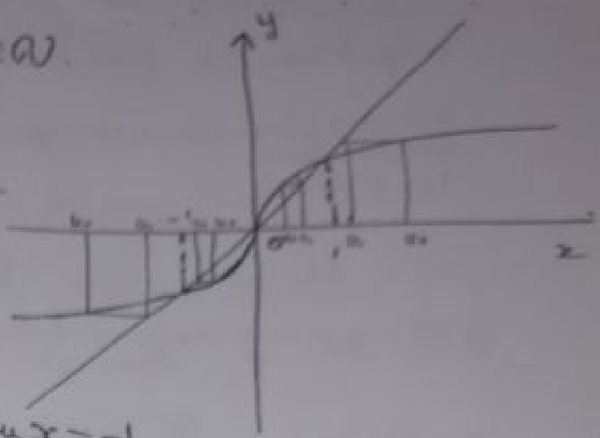
2) si $\alpha = 0$, alors $\limsup U_n = \liminf U_n = 0$, donc $(U_n)_n$ convergente et converge vers 0.

~~si $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]$, alors $\lim$~~ $\sup U_n \neq \liminf U_n$, donc $(U_n)_n$ est divergente.

---

②

$\boxed{EX\ IV}$ $(U_n)_n \Big/ \begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R} \\ U_{n+1} = \sqrt[3]{U_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{array}$



* $f(x)=\sqrt[3]{x}$ définie sur $\mathbb{R}$.
$\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}>0$ ce qui donne que f est strict. ↗ sur $\mathbb{R}$.

* $f(x)=x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}=x \Leftrightarrow x=x^3$
$\Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$ ou $x=-1$

Donc si $U_n \xrightarrow[n]{} \ell$, alors $\ell\in\{0,1,-1\}$.

* $U_1-U_0 = \sqrt[3]{u_0}-U_0 = \sqrt[3]{u_0}\left(1-\sqrt[3]{u_0^2}\right) = \sqrt[3]{u_0}\left(1-\sqrt[3]{u_0}\right)\left(1+\sqrt[3]{u_0}\right)$,
donc il y a 7 cas à présenter:

• $U_0<-1$: alors $U_1-U_0>0$ et $(U_n)_n$ ↗, de plus on peut vérifier facilement par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_n<-1$, alors $(U_n)_n$ est majorée par -1 ce qui donne que $(U_n)_n$ conv et converge vers $\ell\leq-1$ ce qui montre que $\ell=-1$

• $U_0=-1$: alors $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_n=-1$ (car $f(-1)=-1$), alors $(U_n)_n$ conv. et conv. vers -1

• $-1<U_0<0$: alors $U_1-U_0<0$ et $(U_n)_n$ ↘, de plus on peut vérifier facilement par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_n>-1$, alors $(U_n)_n$ est minorée par -1 ce qui donne que $(U_n)_n$ conv et conv vers ℓ avec $-1\leq\ell\leq U_0<0$ ce qui montre que $\ell=-1$

• $U_0=0$: alors $\forall n\in\mathbb{N}$; $U_n=0$ (car $f(0)=0$), alors $(U_n)_n$ conv. et conv. vers 0.

• $0 < u_0 < 1$: alors $u_1 - u_0 > 0$ et la suite $(u_n)_n \nearrow$, de plus on peut vérifier facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \leq 1$, donc $(u_n)_n$ est majorée par 1, ce qui donne que $(u_n)_n$ conv. et converge vers ℓ avec $0 < u_0 \leq \ell \leq 1$, alors $\ell = 1$.

• $u_0 = 1$: alors $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = 1$ (car $f(1) = 1$), alors $(u_n)_n$ conv et converge vers 1.

• $u_0 > 1$: alors $u_1 - u_0 < 0$, et la suite $(u_n)_n \searrow$, de plus on peut vérifier facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \geq 1$, donc $(u_n)_n$ est minorée par 1, ce qui donne que $(u_n)_n$ conv. et converge vers ℓ avec $\ell \geq 1$, alors $\ell = 1$

Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: Math 104
Session: Partiel

Date: 18/5/2007
Durée: 1h

Exercice I: (35 points).
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < b < a$.
On définit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par la donnée de leur premier terme u_0 et v_0 tels que $u_0 < v_0$, et des relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{a\,u_n + b\,v_n}{a+b} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{b\,u_n + a\,v_n}{a+b}$$

1. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_n$ est une suite géométrique et donner sa limite.
2. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont monotones.
3. En déduire que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes et ont même limite l.
4. Utiliser la suite $(u_n + v_n)_n$ pour trouver la limite l.

Exercice II: (15 points).
On se donne une suite réelle $(u_n)_n$. On suppose que les suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{n^2})_n$ sont convergentes. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente.

Exercice III: (10 points).
Calculer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad , \quad u_1 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Exercice IV: (40 points).
Soit a un réel positif. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 = a \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

1. Montrer que $f([0,1]) = f([1,2]) = [1,2]$ et $f([2,+\infty[) = [2,+\infty[$.
2. Déterminer pour $x \in [1,+\infty[$ le signe de $f(x) - x$.
3. On suppose que $a \in [0,2]$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et trouver sa limite.
4. On suppose que $a > 2$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est divergente.

Bonne Chance

Exercice 2 : supposons que $u_{2n} \to l_1$

$u_{2n+1} \to l_2$

$u_{n^2} \to l_3$

* la suite $(u_{4n^2})_n$ est une suite extraite de $(u_{2n})_n$ et de (u_{n^2})

donc $u_{4n^2} \to l_1$ et $u_{4n^2} \to l_3$ donc $\boxed{l_1 = l_3}$

* la suite $(u_{(2n+1)^2})_n$ est une suite extraite de $(u_{2n+1})_n$ et de (u_{n^2})

donc $u_{(2n+1)^2} \to l_2$ et $u_{(2n+1)^2} \to l_3$ donc $\boxed{l_2 = l_3}$

donc $l_1 = l_2$. Or si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ converge vers la même limite l alors $(u_n)_n$ est convergente et converge vers l.

Exercice 3 : le polynôme caractéristique associé est :

$X^2 - 4X + 4 = 0 \Rightarrow (X-2)^2 = 0$ alors $X = 2$ est une racine double et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (C_1 + nC_2)2^n$

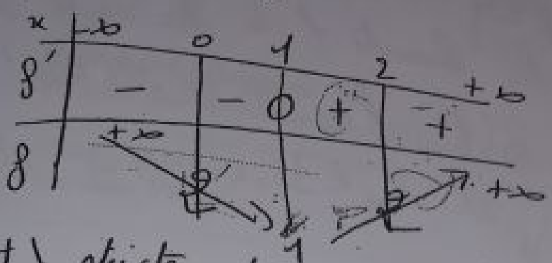
pour $n = 0$, $u_0 = C_1 = 1$

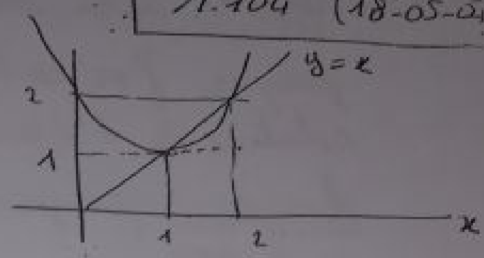
$n = 1$ $u_1 = 2 + 2C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$

donc $u_n = \left(1 + \frac{1}{2}n\right)2^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Suite Solution partielle M.104 (18-05-0?)

1) $f'(x) = 2x - 2$





f est $\searrow$ strictement sur $[0,1]$ donc f est bijective de $[0,1] \longrightarrow f([0,1])$

$f([0,1]) = [f(1), f(0)] = [1,2]$

f est $\nearrow$ strictement sur $[1,2]$ donc f est bijective de $[1,2] \longrightarrow f([1,2])$

$f([1,2]) = [f(1), f(2)] = [1,2]$

f est $\nearrow$ strictement de $[2,+\infty[\longrightarrow f([2,+\infty[) = [f(2), +\infty[= [2,+\infty[$

2) $f(x) - x = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. On obtient

$f(x) - x = 0$ pour $x = 1$ et $x = 2$

> 0 pour $x < 1$ ou $x > 2$

< 0 pour $1 < x < 2$

3) posons $u_0 = a$ où $a \in [0,2]$. d'après 1) $u_1 = f(u_0) \in [1,2]$.
Vérifions par récurrence que $\forall n \geq 1$, $u_n \in [1,2]$. En effet supposons que $u_n \in [1,2]$

d'après 1) $u_{n+1} \in f([1,2])$ soit $u_{n+1} \in [1,2]$ d'où le résultat.

si $u_0 \in]0,2[$ et $u_0 \neq 1$. On a montré que $\forall n \geq 1$ on a
$u_n \in [1,2]$ (et en fait $u_n \in]1,2[$)

On en déduit que l'on a pour $n \geq 1$

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$

la suite $(u_n)_n$ est $\searrow$ strictement à partir du rang $n = 1$

Cours : M104
Session : Partiel

Date : 26-4-2006
Durée : 1 h

$\boxed{EX I}$ * $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \Rightarrow (U_n)_n \nearrow$

* $V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - U_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n}$

$= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n+n^2+n-n^2-2n-1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$

$\Rightarrow (V_n)_n \searrow$

* $V_n - U_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n]{} 0$

Donc $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont adjacents, alors elles sont convergentes et convergent vers une ~~m~~ limite.

$\boxed{EX II}$ 1. a) Soit $(U_{\sigma(n)})_n$ une sous suite de $(X_n)_n$, démontrons que $U_{\sigma(n)} \xrightarrow[n]{} \ell$. Soit $\varepsilon > 0$, alors comme $U_n \xrightarrow[n]{} \ell$, donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \; n \geq n_0 \Rightarrow |U_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Alors $n \geq n_0 \Rightarrow \sigma(n) \geq \sigma(n_0) \geq n_0 \Rightarrow |U_{\sigma(n)} - \ell| \leq \varepsilon$ c.q.f.d.

b) On pose $U_n = \sin n\frac{\pi}{2}$.

On a $U_{2n} = \sin 2n\frac{\pi}{2} = \sin n\pi = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow U_{2n} \xrightarrow[n]{} 0$

$U_{4n+1} = \sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow U_{4n+1} \xrightarrow[n]{} 1$

Alors, d'après a), $(U_n)_n$ est divergente (car $(U_{2n})_n$ et $(U_{4n+1})_n$ sont 2 sous-suite de $(U_n)_n$).

2.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	- -
U_n	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	- -

$V_n = \inf\{U_k, k \geq n\} = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (car $\sin(4n+3)\frac{\pi}{2} = -1$ et $4n+3 \geq n$,

$W_n = \sup\{U_k, k \geq n\} = +1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (car $\sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = 1$ et $4n+1 \geq n$

donc $V_n \xrightarrow[n]{} -1 = \underline{\lim}\, U_n$

$W_n \xrightarrow[n]{} 1 = \overline{\lim}\, U_n$

$\boxed{\text{EX III}}$ $u_0=1$, $\forall n\geq 0$, $u_{n+2}=\frac{1}{2}(5u_{n+1}-2u_n)$.

eq caractéristique : $r^2-\frac{5}{2}r+1=0 \Rightarrow 2r^2-5r+2=0$

$\Delta=25-16=9 \Rightarrow r=\frac{5-3}{4}=+\frac{1}{2}$ ou $r=\frac{5+3}{4}=2$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=A\left(\frac{1}{2}\right)^n+B.2^n$.

$n=0 \rightarrow u_0=1=A+B$
$n=1 \rightarrow u_1=\frac{A}{2}+2B$
$\Big\}$ $2A+2B=2$, $\frac{A}{2}+2B=u_1 \Rightarrow \left(2-\frac{1}{2}\right)A=2-u_1$

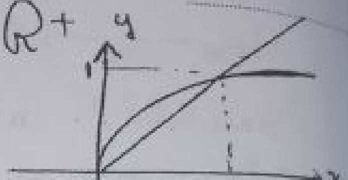
$\Rightarrow A.\frac{3}{2}=2-u_1 \Rightarrow A=\frac{2}{3}(2-u_1)$ et $B=1-\frac{2}{3}(2-u_1)=\frac{3-4+2u_1}{3}$

alors $B=\frac{2u_1-1}{3}$. D'où $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n=\frac{2}{3}(2-u_1)\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{2u_1-1}{3}\right)2^n$

Pour que (u_n) est convergente, il faut que $\frac{2u_1-1}{3}=0$ alors $u_1=\frac{1}{2}$

Dans ce cas $u_n=\frac{2}{3}\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n]{} 0$.

$\boxed{\text{EX IV}}$ $u_0\in\mathbb{R}^+$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.



- ici $f(x)=\sqrt{x}$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
- $f(x)=\sqrt{x}=x \iff x=x^2 \iff x=0$ ou $x=1$

Donc si $u_n \xrightarrow[n]{} \ell$, alors $\ell\in\{0,1\}$.

. Pour chercher le signe de u_1-u_0, il suffit de chercher le signe de $u_1^2-u_0^2$ (car $u_1+u_0\in\mathbb{R}^+$), $u_1^2-u_0^2=u_0-u_0^2=u_0(1-u_0)$

Donc il y a 4 cas à préciser

* $\underline{u_0=0}$ $\Rightarrow (u_n)_n$ suite constante de valeur 0 et donc $u_n \xrightarrow[n]{} 0$.
* $\underline{0<u_0<1}$ $\Rightarrow u_1^2-u_0^2>0 \Rightarrow u_1-u_0>0 \Rightarrow (u_n)_n \nearrow$; de plus $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n<1$ (par récurrence, pour $n=0$ c'est vrai et si $u_n<1$ alors $u_{n+1}=\sqrt{u_n}<\sqrt{1}=1$). Alors $(u_n)_n \nearrow$ et majorée par 1, donc convergente et sa limite $=1$ (car $0<u_0<u_n$ $\forall n$).
* $\underline{u_0=1}$ $\Rightarrow (u_n)_n$ suite constante de valeur 1 et donc $u_n \xrightarrow[n]{} 1$.
* $\underline{u_0>1}$ $\Rightarrow u_1^2-u_0^2<0 \Rightarrow u_1-u_0<0 \Rightarrow (u_n)_n \searrow$, de plus $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n>1$ (par récurrence, pour $n=0$ c'est vrai et si $u_k>1$ alors $u_{n+1}=\sqrt{u_n}>\sqrt{1}=1$). Alors $(u_n)_n \searrow$ et minorée par 1, donc convergente et sa limite $=1$.

Université
Faculté des sci
Section III
Cours : M 1105
Examen : Partiel

Exercice 1. (30 poi
Soit N l'application
(1) Montrer que N
(2) Montrer que les
On se rappelle

Exercice 2. (25 po
(1) Montrer l'inég
(2) Soit f la fonct
f est-elle prolo
longement

Exercice 3. (45
Soit

(1) Déterminer
(2) D est-il bor
(3) Déterminer

M1104 partiel + FINAL

Université Libanaise
Faculté des Sciences III - Tripoli - Liban

Cours: M104
Session: Partiel

Date: 26/4/2006
Durée: 1h

Exercice I: (20 points).
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$$

Montrer que les deux suites sont convergentes et convergent vers une même limite.

Exercice II: (30 points).

1. (a) Montrer que si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $l \in \mathbb{R}$, alors toute sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l.
   (b) En déduire la nature de la suite $(\sin(n\frac{\pi}{2}))_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer la limite inférieure et la limite supérieure de la suite $(\sin(n\frac{\pi}{2}))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice III: (20 points).
Déterminer u_1 pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{2}(5\,u_{n+1} - 2\,u_n) \end{cases}$$

soit convergente ; puis trouver sa limite.

Exercice IV: (30 points).
Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^+ \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$

Bonne Chance.

(u_n) est aussi minorée par 1 donc converge
puisque f est continue, la limite l de la suite est
solution de l'équation $f(l) = l$. On en déduit $l = 1$ ou
$l = 2$. puisque $(u_n) \downarrow$ et $u_n \in]1,2[$ $\forall n$ donc

$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 1$

- si $u_0 = 0$ ou $u_0 = 2$ on a $u_1 = 2$ et $\forall n \geq 1$ $u_n = 2$
la suite (u_n) est constante et cv vers 2 ;
de même si $u_0 = 1$ on obtient $u_n = 1$ $\forall n$
la suite (u_n) est constante et cv vers 1

4) si $u_0 > 2$ on a $\forall n$, $u_n > 2$
en effet puisque $f(]2,+\infty[) =]2,+\infty[$ d'après 1)
$u_1 = f(u_0) \in]2,+\infty[$
supposons que $u_n > 2$ démontrons que $u_{n+1} > 2$
or $u_{n+1} = f(u_n) \in]2,+\infty[$ d'après 1) donc $\forall n$, $u_n > 2$
or d'après 2) si $u_n > 2$, $f(u_n) > u_n \Rightarrow u_{n+1} > u_n$
$\Rightarrow (u_n)$ est $\nearrow$. Dans ce cas, ou bien $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$
ou bien (u_n) converge et sa limite serait > 2
puisque $2 < u_0 < u_1 < \dots < u_n$
Or si (u_n) converge vers l, l est soit 1, soit 2
ce qui est impossible donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ c.à.d
(u_n) diverge

Univers
Faculté
Cours:
Session
Exerci
Soient
Montr
Exerc
1.
2.
Exer
Déte
soit
Exe
Etu

Solution partiel M104 (18-05-07)

Exercice I

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)(v_n - u_n)$ donc $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géo. de raison $\frac{a-b}{a+b}$ et $v_n - u_n = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n (v_0 - u_0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

or $0 < \frac{a-b}{a+b} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$

et $\lim\limits_{\infty} v_n = \lim\limits_{\infty} u_n$

2) $u_{n+1} - u_n = \frac{b(v_n - u_n)}{a+b} > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. En effet

$v_n - u_n = \underbrace{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n}_{>0} \underbrace{(v_0 - u_0)}_{>0}$ donc $(u_n)_n$ est $\nearrow$ strictement

$v_{n+1} - v_n = \frac{b(u_n - v_n)}{a+b} < 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ car $v_n - u_n > 0$

donc $(v_n)_n$ est $\searrow$ strictement

3) $\left.\begin{array}{l} (u_n) \nearrow ; (v_n) \searrow \text{ d'après 2)} \\ \text{et } v_n - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ d'après 1)} \end{array}\right\}$ alors $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjacentes donc elles sont convergentes et elles convergent vers la même limite. ~~donc~~ soit $l = \lim\limits_{\infty} u_n = \lim\limits_{\infty} v_n$.

4) $u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{(a+b)(u_n + v_n)}{a+b} = u_n + v_n = \cdots = u_0 + v_0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = u_0 + v_0$

c.à.dire la suite $(u_n + v_n)_n$ est une suite constante de valeur $u_0 + v_0$. On passe à la limite

$2l = u_0 + v_0 \Rightarrow l = \frac{u_0 + v_0}{2}$

$\boxed{2}$