[Univ]ersité libanaise
[Fac]ulté des sciences
[Sec]tion III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

[Co]urs : M1106
[D]urée : 1H

Année : 2018 - 2019
Partiel

[E]xercice 1 (30 points).

(1) Donner la definition d'un compact de $\mathbb{R}$, d'un ouvert de $\mathbb{R}$ et d'un point adhérent d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$.

(2) Montrer qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est fermée si et seulement si elle contient tous ses points d'accumulations.

Exercice 2 (35 points).

Considérons l'ensemble $A =]-1, 0[\cup \left\{ \frac{n}{n+1} / n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

(1) Déterminer l'ensemble des points intérieurs de A.

(2) Montrer que 1 est un point adhérent de A. Déterminer l'ensemble des points adhérents de A.

(3) Déterminer la frontière de A.

(4) Déterminer l'ensemble des points d'accumulations de A.

(5) Montrer que A n'est pas compact mais $\overline{A}$ l'est.

Exercice 3 (35 points).

On va montrer $D = \left\{ p + q\sqrt{2} / p, q \in \mathbb{Z} \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que pour tout $(x, y) \in D \times D : x + y \in D$ et $xy \in D$.

Posons $u = -1 + \sqrt{2}$.

(2) Vérifier que $u \in D$.

(3) Montrer que $\lim_{n \to \infty} u^n = 0$. En déduire que pour tout $a < b$, on peut trouver $n \geq 1$ tel que $0 < u^n < b - a$.

(4) En posant $m = E\left(\frac{a}{u^n}\right) + 1$, montrer $a < mu^n < b$.

(Indication : vérifier que $m - 1 \leq \frac{a}{u^n} < m$).

(5) Déduire que D est dense dans $\mathbb{R}$.

Bon travail

versité Libanaise
ulté de Sciences
ion III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

urs : Math 1106
rée : 2H et demie

Année : 2017 - 2018
P+F : Semestre 2

مطلوب الاجابة على كل جزء بشكل متواصل و دون تداخل مع الجزء الا

rtie P (Partiel) : (Sur 100 points pour 45 minutes).

ercice 1 (15 + 15 = 30 points).

(1) Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{7}\notin\mathbb{Q}$. $\Big($Indication : Voir $\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)\Big)$.

(2) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $0\leq[2x]-2[x]\leq 1$.

ercice 2 (20 + 10 + 10 + 20 + 10 = 70 points).

it A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On note par A' l'ensemble de tous les points d'accumulations de

(1) Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que

$$x\in A' \iff \text{il existe une suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R} \text{ telle que : pour tout } n\in\mathbb{N}$$
$$x_n\in A,\quad x_n\neq x \text{ et } \lim_{n\to+\infty}x_n=x.$$

(2) Soit $A=\left\{\dfrac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}\ /\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

(a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $-1<\dfrac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}<1$.

(b) Déduire que $A'\neq\emptyset$.

(c) Montrer que $\{-1,1\}\subset A'$.

(d) Déduire que A n'est pas fermé de $\mathbb{R}$.

SVP tourner la page

Partie F (Final) : (Sur 100 points pour 105 minutes).

Exercice 3 $(10 + 10 + 10 = 30$ **points).**
Etudier la continuité uniforme des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = \sin(x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(2) $g(x) = \sqrt{x(1-x)}$ pour tout $x \in [0,1]$.

(3) $h(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ pour tout $x \in [e, +\infty[$. (Indication : Utiliser le théorème des accroissements finis).

Exercice 4 $(10 + 5 = 15$ **points).**
Considérons l'EDO suivante

$$y' = \frac{y^2 - xy + x^2}{x^2}. \tag{E1}$$

(1) En utilisant le changement de variable $y(x) = xu(x)$ montrer que u satisfait l'EDO à variable séparable suivante

$$\frac{u'}{(u-1)^2} = \frac{1}{x}. \tag{E2}$$

(2) Déduire la solution générale de $(E1)$.

Exercice 5 $(5 + 5 + 10 + 5 = 25$ **points).**
Considérons l'EDO suivante

$$2xy\, dx + (4y + 3x^2)\, dy = 0. \tag{E3}$$

(1) Montrer que $(E3)$ est non exacte.

(2) Trouver un facteur intégrant de $(E3)$.

(3) Trouver la solution générale de $(E3)$.

(4) Trouver une solution particulière de $(E3)$ pour $y(0) = 1$.

Exercice 6 $(10 + 5 + 10 + 5 = 30$ **points).**
Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $a > 0$.

(1) Ecrire la formule de Maclaurin avec un reste à l'ordre 6 de f entre 0 et a.

(2) Réecrire la formule de Maclaurin avec un reste à l'ordre 6 de f entre 0 et $a = \frac{1}{2}$.

(3) Montrer que

$$\left|\sqrt{e} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4 \times 2!} - \frac{1}{8 \times 3!} - \frac{1}{16 \times 4!} - \frac{1}{32 \times 5!}\right| < 10^{-4}.$$

(4) Déduire une approximation de $\sqrt{e}$ à 10^{-4} près.

Bon chance ☺

2017 - 2018 1ère session M1106

Partie Partiel

Ex 1:

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$

Raisonnons par l'absurde, supposons que $\sqrt{2}+\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$

de plus, on a $(\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{2}-\sqrt{7}) = 2-7 = -5 \in \mathbb{Q}$

Donc $\sqrt{2}-\sqrt{7} = \dfrac{\overbrace{(\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{2}-\sqrt{7})}^{\in \mathbb{Q}}}{\underbrace{\sqrt{2}+\sqrt{7}}_{\in \mathbb{Q}}} \in \mathbb{Q}$

Donc $\sqrt{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-\sqrt{7}) + \frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{7}) \in \mathbb{Q}$

impossible car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, d'où $\sqrt{2}+\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.

(2) $0 \leq [2x] - 2[x] \leq 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $[x] \leq x < [x]+1$

$2[x] \leq 2x < 2[x]+2$

$2[x] = [\underbrace{2[x]}_{\in \mathbb{Z}}] \leq [2x] < [\underbrace{2[x]+1}_{\in \mathbb{Z}}] = 2[x]+2$

et $[\,]\nearrow$

D'où $2[x] \leq [2x] < 2[x]+2$

et $0 \leq [2x] - 2[x] < 2$ et $0 \leq [2x]-2[x] \leq 1$

Ex 2:

$\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$, A' est l'ensemble de tous les pts d'accumulations de A.

(1) $\underline{x \in \mathbb{R}}$

? $x \in A' \Longleftrightarrow \exists (x_n)_n \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in A,\ x_n \neq x$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$

cours - - - -

(2) $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{1+1/n} \,/\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

(a) ? $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 < \frac{(-1)^n}{1+1/n} < 1$

pr tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$1 + 1/n > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+1/n} < 1$

et $\left|\frac{(-1)^n}{1+1/n}\right| = \frac{1}{1+n} < 1$

D'où $-1 < \frac{(-1)^n}{1+1/n} < 1$

(b) $A' \neq \phi$: pr $n = 1$, on a $\frac{(-1)^1}{1+1/1} = -1/2 \in A$

(c) $\{-1, 1\} \subset A'$:

$-1 \in A'$, pour $x_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{1+1/(n+1)} = \frac{-1}{1+1/(n+1)} \in A \ \forall n$

$x_{n+1} \neq -1$ car $-1 \in A$

et $\lim x_n = -1$, d'où $-1 \in A'$.

de m̂ pr $1 \in A'$, on a $x_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{1+1/2n} = \frac{1}{1+1/2n} \in A, \forall n$

$x_{2n} \neq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ car $1 \notin A$

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$ d'où $1 \in A'$

(d) A n'est pas fermé de $\mathbb{R}$, car $-1, 1 \in A'$
mais $-1, 1 \notin A$

Partie final

Ex 3 :

(1) $f(x) = \sin(x^2)$ $\quad x \in \mathbb{R}$

f n'est pas u.C sur $\mathbb{R}$ car par exemple,
pr $X_m = \sqrt{m\pi}$; $m \in \mathbb{Z}$
et $X'_m = \sqrt{(2m+1)\pi/2}$; $m \in \mathbb{Z}$

on a $X_m, X'_m \in \mathbb{R}$

$$X_m, X'_m \xrightarrow[m \to +\infty]{} +\infty$$

$$|X_m - X'_m| = |\sqrt{m\pi} - \sqrt{(2m+1)\pi/2}| \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$$

mais $|f(X_m) - f(X'_m)| = |\sin(m\pi) - \sin((2m+1)\pi/2)|$

$$= |0 - (-1)^m| = 1 \longrightarrow 1 \neq 0$$

(2) $g(x) = \sqrt{x(1-x)}$ sur $[0,1]$

Comme g est continue sur l'intervalle fermé et borée $[0,1]$ donc g est u.C (d'après le th. de Heine)

(3) $h(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ sur $[e, +\infty[$

h est u.C sur $[e,+\infty[$, en effet
pr tt $\varepsilon > 0$, il faut trouver $\delta > 0$ t.q.
pour tous $x, x' \in [e, +\infty[$ /
$|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$
pr $|x - x'| < \delta$ on a
$|f(x) - f(x')| = |x - x'|\,|f'(c)|$ d'après le th. des A.F

avec c entre x et x'
et $f'(c) = \dfrac{\ln c - c/c}{[\ln c]^2} = \dfrac{1}{\ln c} - \dfrac{1}{(\ln c)^2}$

avec $c \in]e, +\infty[\Rightarrow \ln(c) > \ln(e) = 1$

$\Rightarrow (\ln c)^2 > \ln c > 1$

$\Rightarrow 1 > \frac{1}{\ln c} > \frac{1}{(\ln c)^2}$

D'où $0 < \frac{1}{\ln c} - \frac{1}{(\ln c)^2} < 1 \Rightarrow |f'(c)| < 1$

D'où $|f(x) - f(x')| \leq |x - x'| < \delta$

Donc il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$.

<u>Ex4:</u> $y = xu \Rightarrow y' = u + xu'$

(1) D'où $u + xu' = \frac{x^2u^2 - x^2u + x^2}{x^2}$

$= u^2 - u + 1$

D'où $xu' = u^2 - 2u + 1 \Rightarrow \frac{u'}{(u-1)^2} = \frac{1}{x}$

(2) $\frac{du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{u-1} = \ln|x| + c$

$\Rightarrow u - 1 = \frac{1}{-\ln|x| + c}$

$\Rightarrow u = 1 + \frac{1}{c - \ln|x|}$

$\Rightarrow \frac{y}{x} = 1 + \frac{1}{c - \ln|x|}$

$\Rightarrow y = x + \frac{x}{c - \ln|x|}$ avec $c \in \mathbb{R}$

<u>Ex5:</u> $2xy\,dx + (4y + 3x^2)\,dy = 0$

(1) <u>(E_3) non exacte:</u>

$M(x, y) = 2xy$, $N(x, y) = 4y + 3x^2$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 6x$

(2) Facteur intégrant de (E_3) : I

si $I = I(x)$ alors $\frac{I'(x)}{I(x)} = \frac{N'_x(x,y) - M'_y(x,y)}{N(x,y)}$

$= \frac{-(6x-2x)}{4y+3x^2}$ i-p

si $I = I(y)$ alors

$\frac{I'(y)}{I(y)} = \frac{N'(x) - M'(y)}{M} = \frac{4x}{2xy} = \frac{2}{y}$

$\Rightarrow I(y) = e^{\int \frac{2dy}{y}} = e^{2\ln|y|} = e^{\ln y^2}$

$\Rightarrow I(y) = y^2$

vérification:

$y^2 \cdot 2xy\, dx + y^2(4y+3x^2)\, dy = 0$

$2xy^3\, dx + (4y^3 + 3x^2y^2)\, dy = 0$ (*)

$M_1 = 2xy^3$ et $N_1 = 4y^3 + 3x^2y^2$

$\frac{\partial M_1}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial N_1}{\partial x} = 6xy^2$ donc (*) est exacte

(3) solution de (E_3)

$2xy^3\, dx + (4y^3 + 3x^2y^2)\, dy = 0$

comme (*) est exacte, donc il existe une fonct différentielle f t.q. $df = M_1 dx + N_1 dy = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} f = cte \text{ (a) sur } \mathbb{R}^2,\ cte \in \mathbb{R} \\ f'_x = M_1 \text{ (b)} \\ f'_y = N_1 \text{ (c)} \end{cases}$

(b) $\Rightarrow f(x,y) = \int M_1\, dx + k(y) = \int 2xy^3\, dx + k(y)$

$= x^2y^3 + k(y)$

(c) $\Rightarrow f'_{(y)}(x,y) = N_1 = 3x^2y^2 + k'(y) = 4y^3 + 3x^2y^2$

$\Rightarrow k'(y) = 4y^3 \Rightarrow k(y) = y^4 + b$

D'où $f(x,y) = x^2y^3 + y^4 + b,\ b \in \mathbb{R}$

(a) $\Rightarrow$ La solution satisfait :

$x^2y^3 + y^4 + a = 0$ avec

$a = b -$ cte $\in \mathbb{R}$

(4) $y(0) = 1 \Rightarrow 0^2 . 1^3 + 1^4 + a = 0 \Rightarrow a = -1$

et $\boxed{x^2y^3 + y^4 - 1 = 0}$ relati. qui

donne la soluti. de $\begin{cases} 2xy\,dx + (4y + 3x^2)dy = c \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Ex 6:

$f(x) = e^x, a > 0$

(1) ~~Co e~~ $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ donc $f \in C^\infty([0, a])$

d'après Maclawrin, $\exists c \in]0, a[$ tq.

$$f(a) = f(0) + f'(0)a + f''(0).\frac{a^2}{2!} + f'''(0).\frac{a^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{a^4}{4!} + f^{(5)}(0).\frac{a^5}{5!} + f^{(6)}(c)\frac{a^6}{6!}$$

D'où

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^5}{5!} + \frac{a^6}{6!}e^c$$

(2) $a = 1/2 \Rightarrow$

$$e^{1/2} = \sqrt{e} = 1 + 1/2 + \frac{1}{4.2!} + \frac{1}{8.3!} + \frac{1}{16.4!} + \frac{1}{32.5!} + \frac{e^c}{64.6}$$

(3) $$\left|\sqrt{e} - 1 - 1/2 - \frac{1}{4.2!} - \frac{1}{8.3!} - \frac{1}{16.4!} - \frac{1}{32.5!}\right| = e^c . \frac{1}{64.6!}$$

on va montrer $\frac{e^c}{6!} < 10^{-4}$

on a $c < 1/2 \Rightarrow e^c < \sqrt{e} < 2$

$$\Rightarrow \frac{e^c}{6!} < \frac{2}{6!} = \frac{1}{3 \times 4 \times 5 \times 6} < 10^{-4}$$

(4) D'où

$$\sqrt{e} \simeq 1 - 1/2 - \frac{1}{4.2!} - \frac{1}{8.3!} - \frac{1}{16.4!} - \frac{1}{32.5!}$$

à 10^{-4} près

د. سمر ليس

Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 1106
Durée : 1H

Année : 2016 - 2017
Examen : Partiel

Exercice 1 (35 points).

I. Soient n un entier naturel et x un réel positif.

(1) Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 0 et n ? entre 0 et x ?

(2) Combien y a-t-il d'entiers naturels pairs entre 0 et x ?

II. Montrer que pour tous $x,\, y \in \mathbb{R}$, $E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$.

Exercice 2 (30 points).

Etudier la continuité uniforme des fonctions suivantes

(1) $$\begin{aligned} f : [0, \tfrac{\pi}{2}[\; &\to \mathbb{R} \\ x \; &\mapsto f(x) = \tan(x). \end{aligned}$$

(Indication : penser à $\arctan(n)$ et $\arctan\left(\frac{n}{2}\right)$ pour tout $n\mathbb{N}$).

(2) $$\begin{aligned} g :]0, \pi] \; &\to \mathbb{R} \\ x \; &\mapsto g(x) = \frac{\sin(x)}{x}. \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} h : [2, +\infty[\; &\to \mathbb{R} \\ x \; &\mapsto h(x) = \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

(Indication : utiliser pour tout $x, y \geq 2$, $x + y \leq xy$)

Exercice 3 (25 points).

(1) Montrer que $\log_{10}(2)$ est un irrationnel.

(2) Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, en déduire l'existence d'irrationnels $a, b > 0$ tels que a^b soit rationnel.

Exercice 4 (10 points).

Soitent A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $\overline{A}$ l'ensemble de tous les points adhérents de A. Montrer que si $\overline{A} = A$ alors A est fermé dans $\mathbb{R}$.

Bon travail

partiel M1106 – 2016-2017

Ex1

I. $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^{+*}$

1) Il ya $n+1$ entiers naturels entre 0 et n (incluant 0 et n).
Il ya $[x]+1$ entiers naturels entre 0 et x (incluant 0).

2) Il ya $1+\left[\frac{x}{2}\right]$ entiers naturels paires entre 0 et x (incluant 0).

Car $0 \leq 2K \leq x$ avec $2K$ represente les nombres paires entre 0 et x
et $K \in \mathbb{Z}$ est leurs ~~nombres~~ cardinales

D'où $0 \leq K \leq \frac{x}{2} \Rightarrow [0] \leq [K] \leq \left[\frac{x}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq K \leq \left[\frac{x}{2}\right]$

II. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $E(x)+E(y)+E(x+y) \leq E(2x)+E(2y)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $[x] \leq x$
$\forall y \in \mathbb{R}$, on a $[y] \leq y$
$\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a $[x+y] \leq x+y$

D'où $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $[x]+[y]+[x+y] \leq 2x+2y$.

$[\cdot] \nearrow \Rightarrow \Big[[x]+[y]+[x+y]\Big] \leq [2x+2y]$

$[x]+[y]+[x+y] \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x]+[y]+[x+y] \leq [2x+2y]$
$\leq [2x]+[2y]$

Ex2 : Etudier la continuité uniforme des fonctions svtes :

(1) $f : [0, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = tg(x)$

[Comme $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tg(x) = +\infty$ donc $x = \frac{\pi}{2}$ A.V. de f ~~donc~~ f non U.C. le point problème $\frac{\pi}{2}$.]

f n'est pas uniformement Continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, en effet $\forall n \in \mathbb{N}$

$x_n = arctg(n)$ et $x'_n = arctg(\frac{n}{2})$, on a :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n, x'_n \in [0, \frac{\pi}{2}[$.
- $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$ et $x'_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}$.
- $|x_n - x'_n| = |artg(n) - artg(\frac{n}{2})| \xrightarrow[n]{} |\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}| = 0$

mais

- $|f(x_n) - f(x'_n)| = |tg(artg\, n) - tg(artg\, \frac{n}{2})| = |n - \frac{n}{2}| = \frac{n}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \neq 0.$

(2) $g :]0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto g(x) = \frac{Sin(x)}{x}$ Comme g est Continue sur $]0, \pi]$ et ($\lim_{x \to 0} g(x) = 1$ existe et finie) alors g est prolongeable par Continuité sur $[0, \pi]$

g est u. Continue sur $]0, \pi]$ Car :

prendre $\tilde{g} : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \in]0, \pi], \\ 1 & si \quad x = 0. \end{cases}$

le prolongement par Continuité de g sur $[0, \pi]$.

on a $\tilde{g}$ est Continue sur l'intervalle fermé borné $[0, \pi]$, donc d'après le th. de Heine, $\tilde{g}$ est uniformement Continue sur $[0, \pi]$ et sur tout $A \subset [0, \pi]$. En particulier $]0, \pi] \subset [0, \pi]$

Donc $\tilde{g}$ est unif. Cont. sur $]0, \pi]$. Comme $\tilde{g}_{/]0,\pi]} = g$, donc g est unif. Cont. sur $]0, \pi]$.

(3) $h : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ Indication: $\forall x, y \geq 2$

$x \longmapsto h(x) = \frac{1}{x^2}$. $x + y \leq xy$

h est unif. continue, car

pour tout $\varepsilon > 0$ il faut trouver $\delta > 0$ t.q. $|x - x'| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$

on a: $|x - x'| \leq \delta$:

$$|f(x) - f(x')| = \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x'^2} \right| = \left| \frac{x'^2 - x^2}{x^2 x'^2} \right| = \frac{|x' - x||x' + x|}{(xx')^2}$$

$$= \frac{|x' - x| . (x + x')}{(xx')^2} \quad \text{car } x + x' > 2 > 0$$

$$\leq \delta . \frac{xx'}{(xx')^2} \leq \delta . \frac{1}{xx'}$$

De plus $2 \leq x, x' \Rightarrow 4 \leq xx' \Rightarrow 0 < \frac{1}{xx'} \leq \frac{1}{4}$

D'où $|f(x') - f(x)| \leq \frac{\delta}{4} \leq \varepsilon \Rightarrow 0 < \delta \leq 4\varepsilon$

Il suffit de prend $\delta = 4\varepsilon$.

Ex3. (1) $\log_{10}(2)$ est irrationnel : raisonnons par l'absurde,

supposons que $\log_{10}(2)$ est rationnel, donc $\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$p \wedge q = 1$ et $\frac{\log(2)}{\log(10)} = \frac{p}{q} \Rightarrow q \log(2) = p \log(10)$

$$\Rightarrow \log 2^q = \log 10^p$$

$$\Rightarrow 2^q = 10^p \Rightarrow 2^q = 2^p . 5^p$$

$$\Rightarrow 2^{q-p} = 5^p$$

si $q > p \Rightarrow 2 / 5^p \Rightarrow 2/5$ imp.

si $q < p \Rightarrow 1 = 5^p 2^{p-q} \Rightarrow 2/5^p \Rightarrow 2/5$ imp

(2) Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, En deduire l'existence de $\underset{\in \mathbb{R}-\mathbb{Q}}{a, b>0}$ / $a^b \in \mathbb{Q}$

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$
$$= \sqrt{2}^2 = 2.$$

prendre $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $\in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ Car $\sqrt{2} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$

et $b = \sqrt{2} > 0$ et $\in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$

mais $a^b = 2 \in \mathbb{Q}$.

Ex4. $A \subseteq \mathbb{R}$

? $A = \bar{A} \Rightarrow A$ fermé ds $\mathbb{R}$.

soit $(x_n)_n$ une suite Conv. ds A c.à.d. $\lim x_n$ existe et $x_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\lim (x_n)_n \subset A \Rightarrow \lim x_n \in \bar{A}$

$\Rightarrow \lim x_n \in A$ Car $(A = \bar{A})$

$\Rightarrow A$ fermé ds $\mathbb{R}$.

Université libanaise
Faculté des sciences
Section III

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 1106
Durée : 1H

Année : 2016 - 2017
Examen : Partiel

Exercice 1 (35 points).

I. Soient n un entier naturel et x un réel positif.

(1) Combien y a-t-il d'entiers naturels entre 0 et n ? entre 0 et x ?

(2) Combien y a-t-il d'entiers naturels pairs entre 0 et x ?

II. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $E(x) + E(y) \leq E(2x) + E(2y)$.

Exercice 2 (30 points).

Etudier la continuité uniforme des fonctions suivantes

(1) $f : [0, \frac{\pi}{2}[\ \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto f(x) = \tan(x)$.

(2) $g :]0, \pi] \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

(3) $h : [2, +\infty[\ \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto h(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

(Indication : utiliser pour tout $x, y \geq 2$, $x + y \leq xy$)

Exercice 3 (25 points).

(1) Montrer que $\log_{10}(2)$ est un irrationnel.

(2) Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, en déduire l'existence d'irrationnels $a, b > 0$ tels que a^b soit rationnel.

Exercice 4 (10 points).

Soit A un ensemble dans $\mathbb{R}$. Notons par $\overline{A}$ l'ensemble de tous les points adhérents de A. Montrer que si $\overline{A} = A$ alors A est fermé

Bon travail

M1106 – partiel 2016-2017

Ex1 (35 pts)

I. $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$.

(1) Entiers naturels entre 0 et n :
on a $n+1$ entre 0 et n.

Il y a $[x]+1$ entiers naturels entre 0 et x

(2) Soit $k \in \mathbb{N}$ /

$$0 \leq 2k+1 \leq x$$
$$0 \leq 2k \leq x-1$$
$$0 \leq k \leq \frac{x-1}{2}$$

Donc il y a $\left[\frac{x-1}{2}\right]$ entier naturels ~~p~~ impairs

entre 0 et x.

De m̂ $0 \leq 2k \leq x \Rightarrow 0 \leq k \leq \frac{x}{2}$

Donc il y a $\left[\frac{x}{2}\right]+1$ entiers naturel pairs

entre 0 et x.

II. ? $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $E(x)+E(y)+E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$[x] \leq x < [x]+1$$
$$[y] \leq y < [y]+1$$
$$[x+y] \leq x+y < [x+y]+1$$

D'où $E(x)+E(y)+E(x+y) \leq 2x+2y$

Donc $[E(x) + E(y) + E(x+y)] \leq E(2x+2y)$

$\Rightarrow E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x+2y)$

Exo2) (1) $f : [0, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = tg(x)$

f non uniformement continue, prendre

$x_n = \operatorname{arctg}(n)$ et $y_n = \operatorname{arctg}(\frac{n}{2})$, on a

$x_n, y_n \in [0, \frac{\pi}{2}[\quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim x_n = \lim y_n = \frac{\pi}{2}$, mais

$\lim [f(x_n) - f(y_n)] = \lim [tg[\operatorname{arctg} n] - tg(\operatorname{arctg} \frac{n}{2})]$

$= \lim_{n \to +\infty} \{ n - \frac{n}{2} \} = +\infty \neq 0$

(2) $g :]0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$.

$x \longmapsto g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

prendre la fct° $\tilde{g} : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \tilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \in]0, \pi] \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

$\tilde{g}$ est continue sur $[0, \pi]$ (intervalle fermé borné)

donc $\tilde{g}$ est unif. continue sur $[0, \pi]$,

D'où $\tilde{g}$ est unif cont sur $]0, \pi]$, comme

$\tilde{g}_{/]0,\pi]} = g$, donc g est unif. continue sur $]0, \pi]$.

3) $h : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto h(x) = \frac{1}{x^2}$

pour tout $\varepsilon > 0$, il faut trouver $\delta > 0$, $\forall x, y \in [2, +\infty[/$

$|x - y| < \delta \Rightarrow |h(x) - h(y)| < \varepsilon$.

$$|h(x) - h(y)| = \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right| = \frac{|y^2 - x^2|}{x^2 y^2}$$

$$= |y - x| \frac{(y + x)}{x^2 y^2} \leq |y - x| \frac{xy}{(xy)^2}$$

$$\leq \frac{|y - x|}{xy}$$

on $\left.\begin{array}{l} 2 \leq x \\ 2 \leq y \end{array}\right| \Rightarrow 4 \leq xy \Rightarrow \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{4}$ $\Big| \Rightarrow \leq \frac{\delta}{4} \leq \varepsilon$.

il suffit de prendre $\delta = 4\varepsilon$.

(1) Montrer que $\log_{10}(2)$ est irrationnel :

Raisonnons par l'absurde, c.à.d. supposons

que $\log_{10}(2) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* /$

$\log_{10}(2) = \frac{p}{q}$ et $p \wedge q = 1$.

$\cancel{\log_{10} 2 = \frac{\log 2}{\ln 10} = \frac{p}{q} \Rightarrow \ln 2}$

$\log_{10} 2 = \frac{\log 2}{\log 10} = \frac{p}{q} \Rightarrow q \log 2 = p \log 10$

$\Rightarrow \log 2^q = \log 10^p$

$\Rightarrow 2^q = 10^p = 2^p \cdot 5^p$

$\Rightarrow \cancel{2^p \cdot 5^p / 2^q}$

$\Rightarrow 5 / 2^q$ impossible.

(2) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}$

En déduire l'existence de $a, b \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2 /$

$a^b \in \mathbb{Q}$

Il suffit de prendre $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$

et $b \in \sqrt{2}$

on a $a^b = 2 \in \mathbb{Q}$.

Ex4 $A \subseteq \mathbb{R}$

? $\bar{A} = A \Rightarrow A$ fermé ds $\mathbb{R}$

Soit $(x_n)_n$ une suite convergente ds A, il suffit

de montrer que $\lim_{n \to +\infty} x_n \in A$.

$(x_n)_n \subset A \Rightarrow x_n \in A \; \forall n \in \mathbb{N}$

et notons $x = \lim_{n \to +\infty} x_n$

alors x est un pt adhérent de A

alors $x \in \bar{A} = A$

or $x \in A$.

D'où A est fermé. c.q.f.d.

Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 106
Durée : 1 heure

Année : 2014 - 2015
Examen : Partiel

Exercice 1 (25 points). Soient B, B_1 et B_2 trois ensembles dans $\mathbb{R}^2$ définissent par

$$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |y+x| \leq 1\},\ B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |y-x| < 1\}$$

$$B = B_1 \cap B_2.$$

1. Tracer B_1, B_2 et B.
2. B est-il ouvert ? justifier votre réponse.
3. Déterminer la frontière de B.

Exercice 2 (20 points). Soit f une fonction définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longrightarrow & \left(\dfrac{\mathrm{th}t - t}{t^3}, e^{\left(\frac{-1}{t^2}\right)} \sin\left(\dfrac{1}{t^2}\right), \dfrac{\ln(1+t^2)}{t^2} \right) \end{array}$$

f est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$? Si oui, donner la fonction prolongée.

Exercice 3 (20 points). Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x^2y^2}\sin(xy)}{x^3+y^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

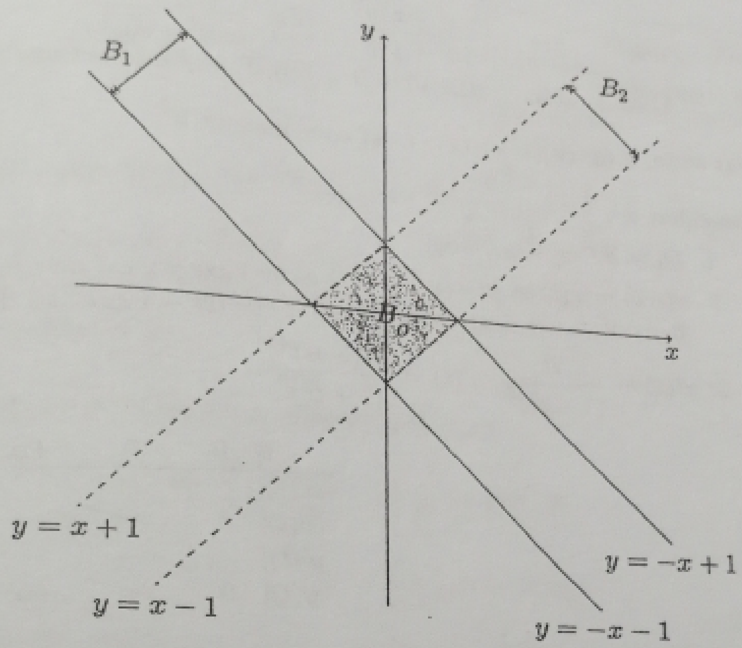
Exercice 4 (35 points). On considère la courbe (C) définie par la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$$

1. Donner le domaine de paramétrage.
2. Préciser les axes de symétries et étudier l'existence des branches infinies.
3. Donner le tableau de variations de x et y.
4. Donner l'équation cartésienne de la tangente au point $M(t=0)$.
5. Construire la courbe (C).

Exercice 1 .

1.



2. B non ouvert : par exemple $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in B$ et pour tous $\rho > 0$, la boule $B((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \rho)$ n'est pas inclus dans D.

3.

$$\begin{aligned} Fr(B) = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = -x - 1, -1 < x < 0\} \\ & \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = -x + 1, 0 < x < 1\} \\ & \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x - 1, 0 < x < 1\} \\ & \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x + 1, -1 < x < 0\}. \end{aligned}$$

Exercice 2 .

1. f n'est pas définie en 0.

2. $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} f(t) = \left(\frac{-1}{3}, 0, 1\right)$ existe et finie car th $\sim_0 t - \frac{t^3}{3}$, $e^{\left(\frac{-1}{t^2}\right)} \longrightarrow 0$, $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est bornée et $\ln(1 + t^2) \sim_0 t^2$.

alors f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. La fonction prolongée :

$$g(t) = \begin{cases} \left(\frac{\text{th}t - t}{t^3}, e^{\left(\frac{-1}{t^2}\right)} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right), \frac{\ln(1 + t^2)}{t^2}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ \left(\frac{-1}{3}, 0, 1\right) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Exercice 3 .

1. Sur $(\mathbb{R}^2)^*$, $f(x,y) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2y^2}\sin(xy)}{x^3+y^3}$ est continue : elle est la composée et rapport des fonctions continues.
2. Au point (0,0) : $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$, on a $\left|\dfrac{\sqrt[3]{x^2y^2}\sin(xy)}{x^3+y^3}\right| \leq \dfrac{|xy|\,\sqrt[3]{x^2y^2}}{|x^3+y^3|}$

   avec $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{|xy|\,\sqrt[3]{x^2y^2}}{|x^3+y^3|} = \lim\limits_{r\longrightarrow 0} \dfrac{r^{\frac{1}{3}}|\cos^{\frac{5}{3}}\sin^{\frac{5}{3}}|}{|\cos^{3}+\sin^{3}|} = 0.$

   D'où $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et f est continue en (0,0).

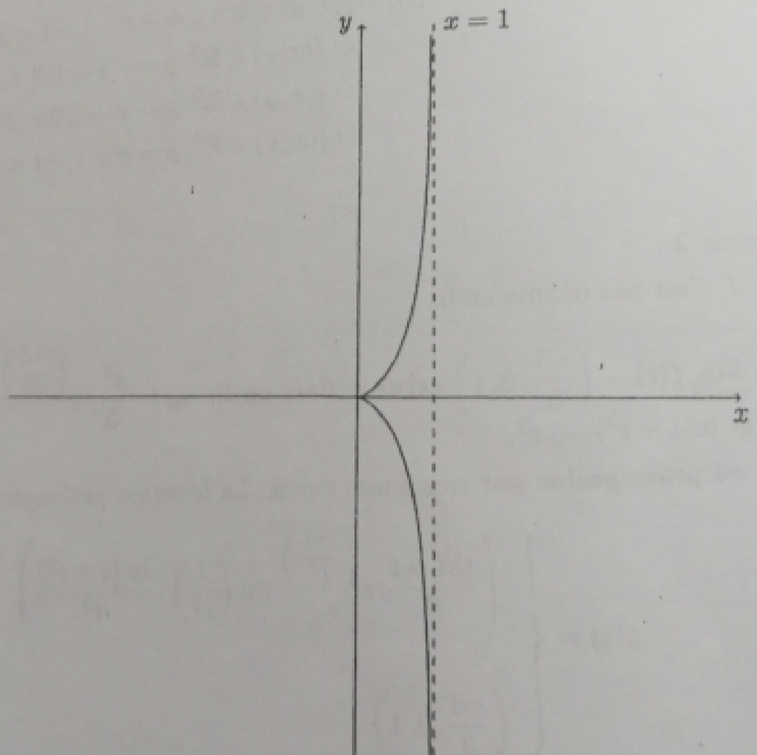
Par suite, d'après (1) et (2), f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 .

1. $D_t = \mathbb{R}^* =]-\infty,+\infty[$.
2. $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ alors l'axe x'x est un axe de symétrie. On fait l'étude sur $[0,+\infty[$. $t \longrightarrow \pm\infty \Longrightarrow x(t) \longrightarrow 1$ et $y(t) \longrightarrow \pm\infty$. La droite $x = 1$ est une asymptote.
3. $x'(t) = \dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$, $y'(t) = \dfrac{t^2(3+t^4)}{(1+t^2)^2}$.

t	0		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. $M(t=0) = (0,0)$ point singulier.
   On cherche $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = 0$. L'équation de la tangente en $M(t=0)$ sera $y = 0$.
5. Graphe.



Université libanaise
Faculté des sciences
Section 3

الجامعة اللبنانية
كلية العلوم
الفرع الثالث

Cours : Math 106
Durée : 1 heure

Année : 2010 - 2011
Examen : Partiel

Exercice 1 (30 points). Soit la fonction $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x^2-1}{y}\right)$

1. Déterminer le domaine D de f. Tracer D.
2. L'ensemble D est-il ouvert ? justifier votre réponse.
3. Déterminer la frontière de D.

Exercice 2 (30 points). Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x \sin y}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue en (0,0).
2. Chercher les dérivées partielles premières en (0,0).
3. f est-elle différentiable en (0,0).

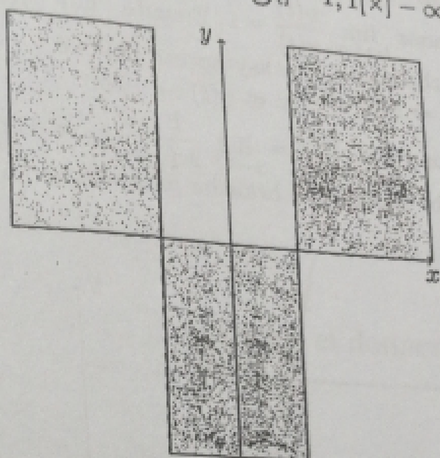
Exercice 3 (40 points). On considère la courbe (C) définie par la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1+t^2}{t} \\ y(t) = \dfrac{1+2t^3}{2t^2} \end{cases}$$

1. Donner le domaine de paramétrage et le tableau de variations de x et y dans ce domaine.
2. Donner les équations cartésiennes de la tangente aux points $M(t=1)$ et $M(t=-1)$.
3. Construire la courbe (C).

Exercice 1 .

1.
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \frac{x^2-1}{y}>0\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \left(x^2-1>0 \text{ et } y>0\right) \text{ ou } \left(x^2-1<0 \text{ et } y<0\right)\right\}$$
$$=(]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\times]0,+\infty[)\bigcup(]-1,1[\times]-\infty,0[).$$



2. D ouvert : $\forall(x,y)\in D,\ \exists\rho>0;\ B((x,y),\rho)\subset D.$
3. $Fr(D)=(\{-1,1\}\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times\{0\}).$

Exercice 2 .

1. $\forall(x,y)\in\left(\mathbb{R}^2\right)^*$, on a
$$\left|\frac{\sin x\sin y}{|x|+|y|}\right|\le\frac{|x||y|}{|x|+|y|}\le|y|$$
D'où $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0).$
2. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x-0}=0=f'_x(0,0).$
$\displaystyle\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{0-0}{y-0}=0=f'_y(0,0).$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|f(x,y)-0-0-0|}{\sqrt{x^2+y^2}}=_{y=x}\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{2x^2\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\neq0.$ Donc f n'est pas différentiable en (0,0).

Exercice 3 .

1. $D_t=\mathbb{R}^*=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$
2. $x'(t)=\dfrac{(t-1)(t+1)}{t^2}$, $y'(t)=\dfrac{t(t+1)(t^2+t+1)}{t^4}$.

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$		$-$		$-$		$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty\|\|+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$		$+$		$-$		$+$	
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty\|\|+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. • $M(t=-1)=(-2,\frac{-1}{2})$ point ordinaire.
   L'équation cartésienne de la tangente (T) : $x=-1$.
   • $M(t=1)=(2,\frac{3}{2})$ point singulier. On cherche $\lim_{t\to 2}\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{3}{2}$.
   L'équation de la tangente en $M(t=1)$ sera $y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$.
4. $y(t)=0 \Rightarrow t=\sqrt[3]{\frac{-1}{2}} \to x\left(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}\right)=-2.2 \to (-2.2,0)$
5. Graphe.
   — $t\to\pm\infty \Rightarrow x(t)\to\pm\infty$ et $y(t)\to\pm\infty$.
   Cherchons $\lim_{t\to\pm\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=1$. Ensuite $\lim_{t\to\pm\infty}(y(t)-\frac{1}{2}x(t))=0^{\mp}$.
   La courbe admet une asymptote oblique $y=x$.
   — $t\to 0^{\pm} \Rightarrow x(t)\to\pm\infty$ et $y(t)\to\pm\infty$.
   Cherchons $\lim_{t\to 0^{\pm}}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to 0^{\pm}}\frac{1+2t^3}{2t(1+t^2)}=\pm\infty$.
   La courbe admet une branche parabolique suivant l'axe de y.