总复习

题型

- 一、简答题 5题（22分）
- 二、大题6题（78分）

二

对于下述的系统，输入为$e(t)$, 输出为$r(t)$，$T[e(t)]$表示系统对$e(t)$的响应，试判定下述系统是否为：

（1）线性系统；（2）非时变系统；（3）因果系统；（4）稳定系统

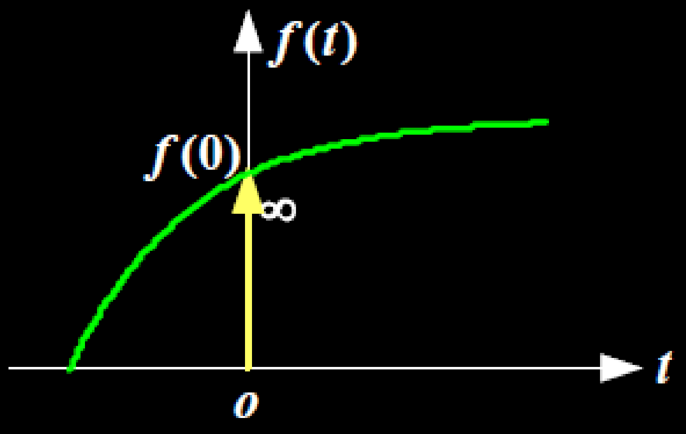
(a) $r(t)=T[e(t)]=e(t-2)$	线性、时不变、因果、稳定系统
(b) $r(t)=T[e(t)]=e(-t)$	线性、时变、非因果、稳定系统
(c) $r(t)=T[e(t)]=e(t)\cos t$	线性、时变、因果、稳定系统
(d) $r(t)=T[e(t)]=a^{e(t)}$	非线性、时不变、因果、稳定系统

1. 抽样性(筛选性)

如果$f(t)$在$t=0$处连续，且处处有界，则有

$$\delta(t)f(t)=f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t=f(0)$$



证明

对于移位情况：

$$\delta(t-t_0)f(t)=f(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,\mathrm{d}t=f(t_0)$$

$\delta'(t)$

二

- 1.完全响应 零输入响应 零状态响应 自由响应 强迫响应

2．若激励为 $e(t)$、响应为 $r(t)$的系统的微分方程为 $\frac{dr(t)}{dt}+5r(t)=2\frac{de(t)}{dt}$，试求系统的冲激响应。

答：将 $e(t)=\delta(t)$ 代入微分方程得

$$\frac{dh(t)}{dt}+5h(t)=2\frac{d\delta(t)}{dt} \qquad (1)$$

特征方程为：a + 5 = 0，特征根：a = -5

所以齐次解形式为：$h(t)=Ae^{-5t}$， $t\geq 0_{+}$ （2）

利用冲激函数匹配法确定 $h(0_{+})$，由于方程（1）右端 $\delta(t)$ 的最高阶导数为 $\delta'(t)$，所以设：

$$\begin{aligned} h'(t) &= a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t) \\ h(t) &= a\delta(t)+b\Delta u(t) \end{aligned}$$

代入方程（1）有：$a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)+5[a\delta(t)+b\Delta u(t)]=2\delta'(t)$

得 a = 2，b = -10。

从而 $h(0_{+})=h(0\_)+b=-10$，代入齐次解（2）式得 A = -10。

考虑到 a = 2，冲激响应中有 $2\delta(t)$，所以冲激响应为

$$h(t)=2\delta(t)-10e^{-5t}u(t)$$

- 卷积的求法

积分上下限和卷积结果区间的确定

(1)积分上下限

由$f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\neq 0$的范围（区间）确定。

上限取小，下限取大

(2)卷积结果区间

	上限	下限
一般规律：	$f_1(t)$	[A,B]
	$f_2(t)$	[C,D]
	$g(t)$	[A+C,B+D]

	$f_1(t)$	-1	1
+	$f_2(t)$	0	3
	$g(t)$	-1	4

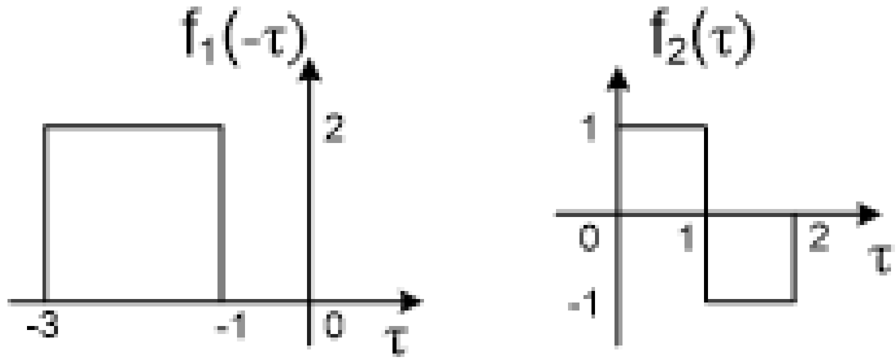
当 $f_1(t)$ 或 $f_2(t)$ 为非连续函数时，卷积需分段，积分限分段定。

6. 对于下式给定的 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$，试用图解法概略画出 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 卷积的图形，

并计算卷积积分 $f_1(t)*f_2(t)$

$$f_1(t)=2[u(t-1)-u(t-3)],\ f_2(t)=u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$$

答：（1）变换自变量



当 $t<1$ 时， $f_1(t)*f_2(t)=0$

当 $1\le t<2$ 时， $f_1(t)*f_2(t)=\int_0^{t-1} f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)d\tau=\int_0^{t-1}2d\tau=2(t-1)$

当 $2\le t<3$ 时， $f_1(t)*f_2(t)=\int_0^1 2d\tau+\int_1^{t-1}-2d\tau=2-2(t-1-1)=6-2t$

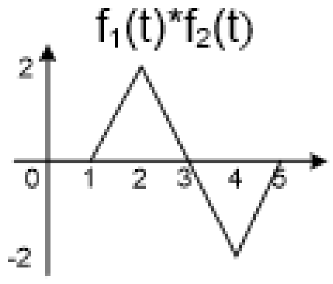
当 $3\le t<4$ 时， $f_1(t)*f_2(t)=\int_{t-3}^1 2d\tau+\int_1^2-2d\tau=2[1-(t-3)]-2(2-1)=6-2t$

当 $4\le t\le 5$ 时， $f_1(t)*f_2(t)=\int_{t-3}^2-2d\tau=-2[2-(t-3)]=-10+2t$

当 $t>5$ 时， $f_1(t)*f_2(t)=0$

所以

$$f_1(t)*f_2(t)=\begin{cases}2(t-1), & 1\le t<2\\ 6-2t, & 2\le t<4\\ 2t-10, & 4\le t\le 5\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



三

周期信号的傅里叶级数展开

三角函数形式

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)\right]$$

$$=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)$$

周期信号可分解为直流 基波（ω_1）和各次谐波（$n\omega_1$:基波角频率的整数倍）的线性组合。

直流分量 $$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\,\mathrm{d}t$$

余弦分量的幅度 $$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

正弦分量的幅度 $$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

周期信号的傅里叶级数展开

复指数形式展开式

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

其中,系数

$$F(n\omega_1)=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\,\mathrm{d}t$$

也可写为 F_n

- 周期信号可分解为 $(-\infty,\infty)$区间上的指数信号$\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$的线性组合。

周期信号的傅里叶级数展开

频谱图

三角函数形式：$c_n \sim \omega$，$\varphi_n \sim \omega$　　**单边频谱**

指数函数形式：$|F_n| \sim \omega$，$\varphi_n \sim \omega$　　**双边频谱**

关系　$|F(n\omega_1)| = \frac{1}{2} c_n \left(n \neq 0\right)$　　$F_0 = c_0 = a_0$

周期信号频谱特点

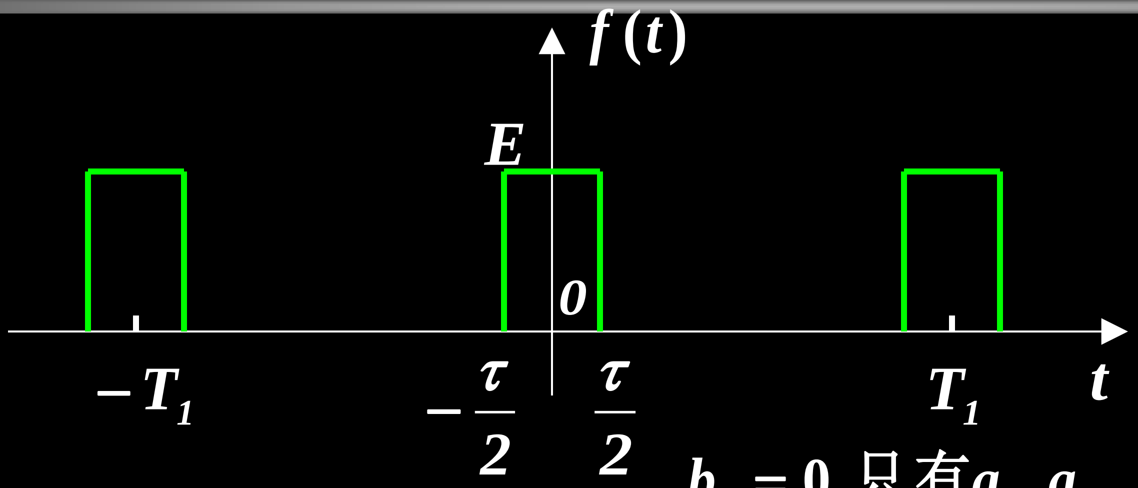
收敛性、谐波性、唯一性

利用函数对称性简化频谱分析

偶函数：不含正弦项， $b_n = 0$

奇函数：不含余弦项 $a_n = 0$

一. 周期矩形脉冲信号



脉宽为τ

脉冲高度为E

周期为T_1

$b_n = 0$, 只有a_0, a_n

$$a_0 = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)dt = \frac{E\tau}{T_1}$$

1. 三角函数形式的谱系数

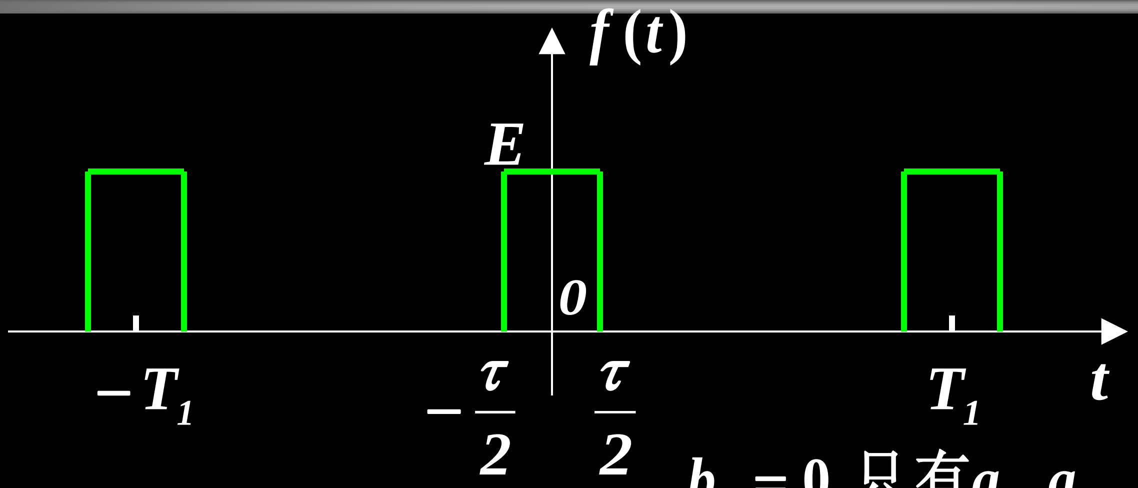
$$a_n = \frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos(n\omega_1 t)\mathrm{d}t = \frac{2E}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right)$$

2. 指数函数形式的谱系数

$$F(n\omega_1) = \frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)$$

3. 频谱特点

一．周期矩形脉冲信号



脉宽为τ

脉冲高度为E

周期为T_1

$b_n = 0$,只有a_0, a_n $\quad a_0 = \dfrac{1}{T_1}\displaystyle\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{E\tau}{T_1}$

1. 三角函数形式的谱系数 $\quad a_n = \dfrac{2}{T_1}\displaystyle\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2E}{n\pi}\sin\left(\dfrac{n\pi\tau}{T_1}\right)$

2. 指数函数形式的谱系数 $\quad F(n\omega_1) = \dfrac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(n\omega_1\dfrac{\tau}{2}\right)$

3. 频谱特点

周期信号的傅里叶级数展开

三角函数形式

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)\right]$$

$$=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)$$

周期信号可分解为直流 基波（ω_1）和各次谐波（$n\omega_1$:基波角频率的整数倍)的线性组合。

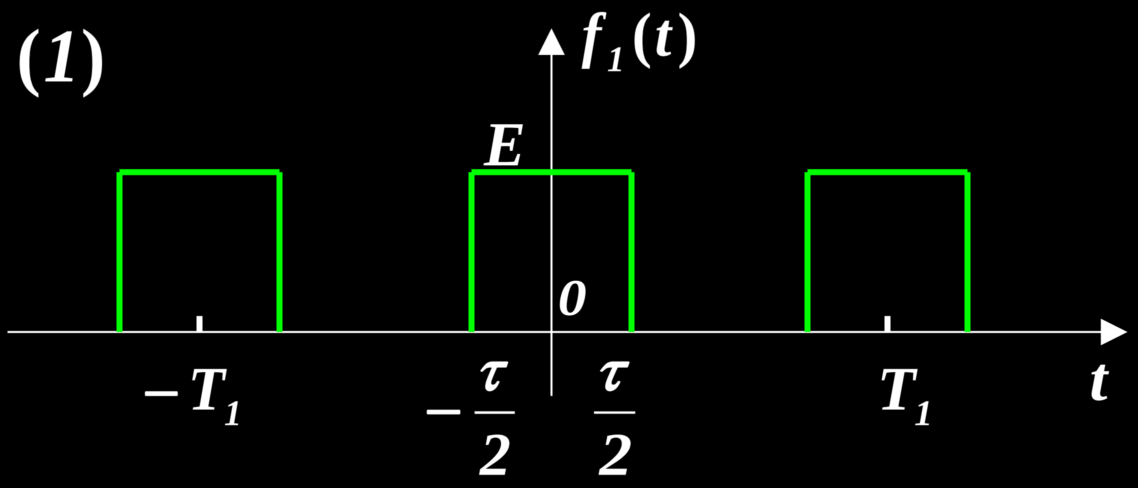
直流分量 $$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\,\mathrm{d}t$$

余弦分量的幅度 $$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

正弦分量的幅度 $$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t$$

二、其他典型周期信号

1、方波的傅里叶级数（1）



$$T_1 = 2\tau$$

$$a_0 = \frac{E\tau}{T_1} = \frac{E}{2}$$

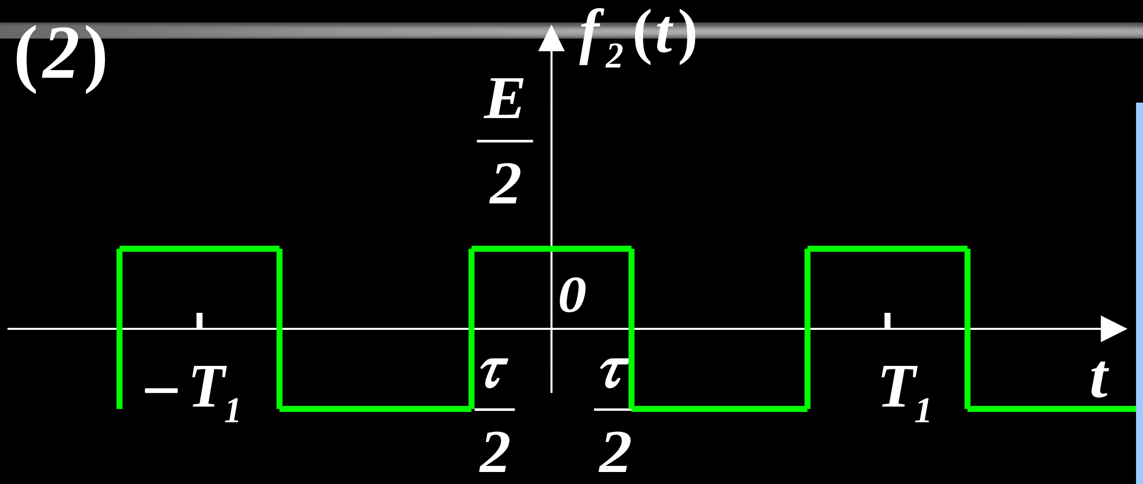
$$a_n = \frac{2E}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right)$$

$$= \frac{2E}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f_1(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi}\left[\cos(\omega_1 t) - \frac{1}{3}\cos(3\omega_1 t) + \frac{1}{5}\cos(5\omega_1 t) + \ldots\right]$$

1、方波的傅里叶级数（2）

(2)



$f_2(t)$是$f_1(t)$下移$\frac{E}{2}$的结果

$$f_2(t)=f_1(t)-\frac{E}{2}$$

$$=\frac{2E}{\pi}\left[\cos(\omega_1 t)-\frac{1}{3}\cos(3\omega_1 t)+\frac{1}{5}\cos(5\omega_1$$

直流分量： 0

基波幅度： $\frac{2E}{\pi}$

二次谐波幅度： 0

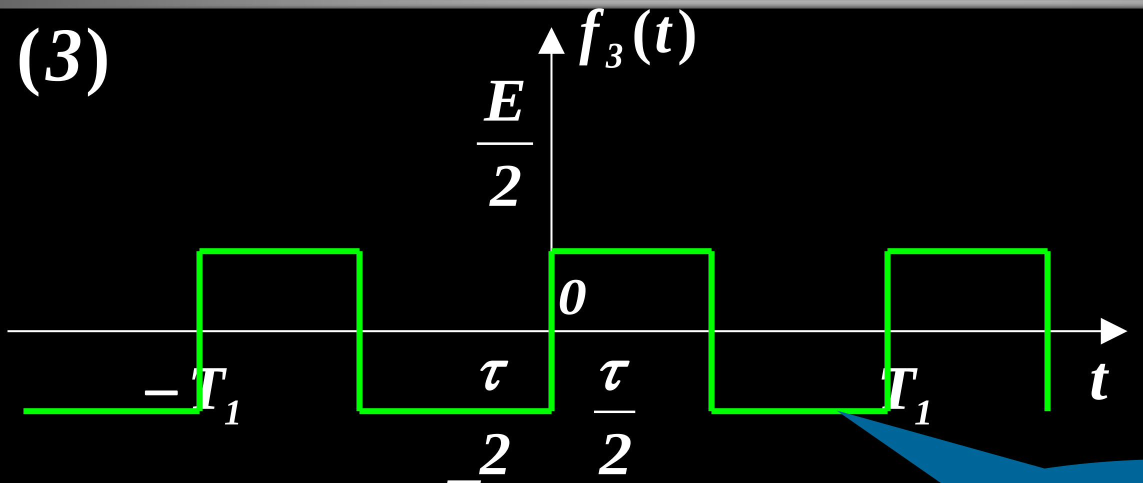
三次谐波幅度： $\frac{2E}{3\pi}$

➢ 波形沿纵轴上下移动A

直流分量改变A，基波、谐波分量不变；

1、方波的傅里叶级数（3）

(3)



$f_3(t)$是$f_2(t)$右移$\frac{T_1}{4}$（滞后90^0）的结果

奇函数
奇谐函数

$$f_3(t) = f_2\left(t - \frac{T_1}{4}\right)$$

$$= \frac{2E}{\pi}\left[\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(3\omega_1 t - \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{5}\cos\left(5\omega_1 t - \frac{5\pi}{2}\right) + \ldots\right]$$

$$= \frac{2E}{\pi}\left[\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_1 t) + \ldots\right]$$

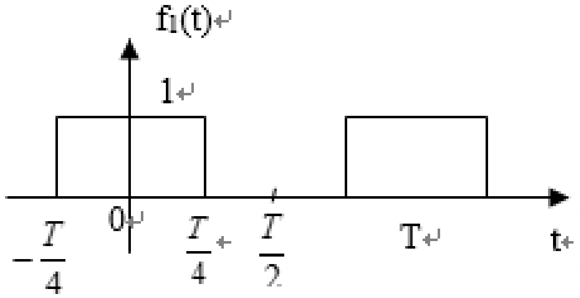
- 波形沿t轴平移

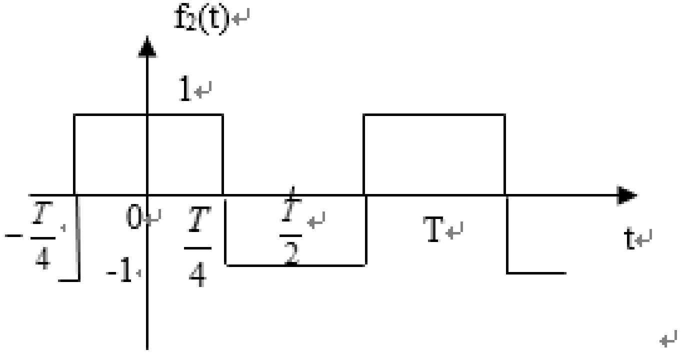
谐波项数和幅度不变，仅引入相移，相位移与谐波次数成正比。

一、傅里叶级数展开

1、周期信号 $f_1(t)$ 的傅里叶级数为

$$f_1(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\omega t-\frac{2}{3\pi}\cos3\omega t+\frac{2}{5\pi}\cos5\omega t-\cdots\cdots \qquad (\omega=2\pi/T)$$





①试写出周期信号 $f_2(t)$ 的傅里叶级数，指出其直流分量，基波、二次谐波、三次谐波的幅值。

②若 T=4S，将 $f_2(t)$ 通过单位冲激响应为 $Sa(\pi t)$ 的系统，判断输出信号中含有哪些频率成分？

解：①$f_2(t)=2f_1(t)-1=2[\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\omega t-\frac{2}{3\pi}\cos3\omega t+\frac{2}{5\pi}\cos5\omega t-\ldots\ldots]-1$

$$=\frac{4}{\pi}\cos\omega t-\frac{4}{3\pi}\cos3\omega t+\frac{4}{5\pi}\cos5\omega t-\ldots\ldots$$

所以 $f_2(t)$的直流分量为 0，基波幅度为 $\frac{4}{\pi}$，二次谐波幅值为 0，三次谐波幅值为 $\frac{4}{3\pi}$。

②因为 $F[Sa(\pi t)]=u(\omega+\pi)-u(\omega-\pi)$，$f_2(t)$的周期为 4s, 基波频率为 $\omega_1=\frac{\pi}{2}$ rad/s，

所以只有频率为 $\pi/2$ 的频率通过。

奈奎斯特（Nyquist） 抽样率和抽样间隔

重建原信号的必要条件：

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi \cdot f_s \geq 2\omega_m = 2 \cdot 2\pi f_m$$

演 示

不满足此条件，就会发生频谱混叠现象。

即 抽样频率$f_s \geq 2f_m$是必要条件， 或抽样间隔 $T_s \leq \dfrac{1}{2f_m}$。

$$T_s = \frac{1}{2f_m}$$

例题

是最大抽样间隔，称为“奈奎斯特抽样间隔”。

例题

$$f_s = 2f_m$$

是最低允许的抽样频率，称为“奈奎斯特抽样频率”

8．求下列信号的奈奎斯特频率与奈奎斯特周期。

（1） $f(t)=Sa(100t)$ （2） $f(t)=Sa^2(100t)$

（3） $f(t)=3\cos(2000\pi t)+5\sin(6000\pi t)+10\cos(1200\pi t)$

答：1） $\omega_m=100\text{ rad/s}$ ， $\omega_s=200\text{ rad/s}$， $f_s=\dfrac{100}{\pi}\text{Hz}$， $T_s=\dfrac{2\pi}{\omega_s}=\dfrac{\pi}{100}\text{s}$

2） $\omega_m=200\text{ rad/s}$， $\omega_s=400\text{ rad/s}$， $f_s=\dfrac{200}{\pi}\text{Hz}$， $T_s=\dfrac{2\pi}{\omega_s}=\dfrac{\pi}{200}\text{s}$

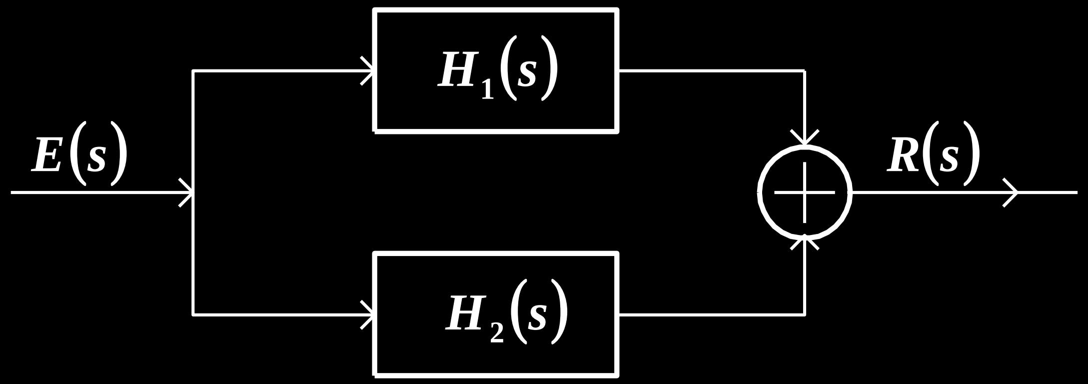
3） $\omega_m=6000\pi\text{ rad/s}$， $\omega_s=12000\pi\text{ rad/s}$， $f_s=6000\text{ Hz}$， $T_s=\dfrac{2\pi}{\omega_s}=\dfrac{1}{6000}\text{s}$

对于带宽为 $20kHz$（假设信号的最高频率为 $20kHz$ ）的信号 $f(t)$ 进行采样，其奈奎斯特频率 f_N 为多少？(2)信号 $f(2t)$ 的带宽为多少？其奈奎斯特间隔 T_N 为多少？

四、

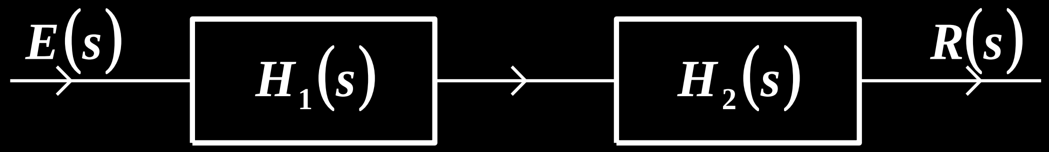
二. LTIS互联的系统函数

1. LTI系统的并联



$h(t)=h_1(t)+h_2(t)$ $\quad$ $H(s)=H_1(s)+H_2(s)$

2. LTI系统的级联

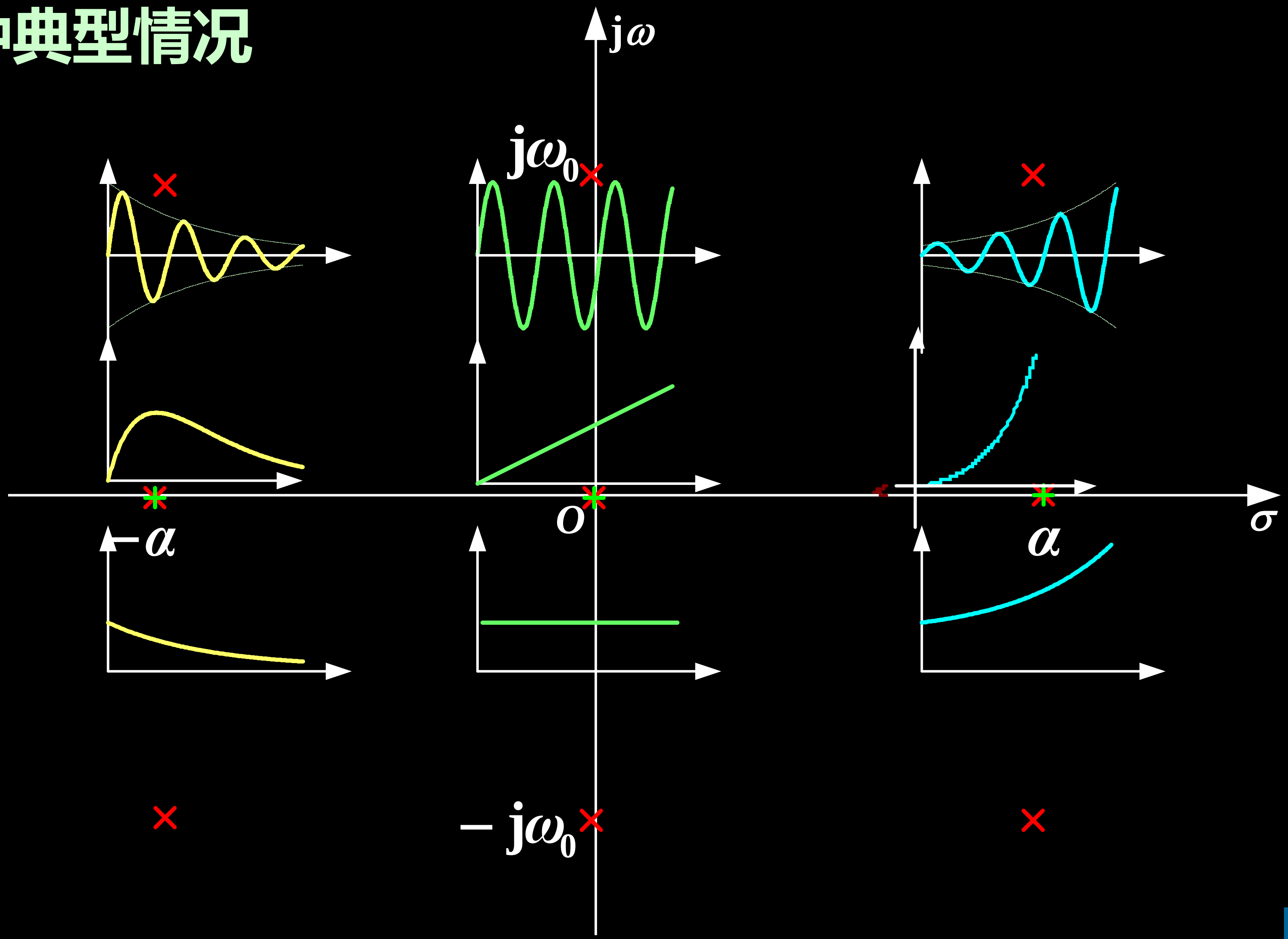


时域：$h(t)=h_1(t)*h_2(t)$

频域：$H(s)=H_1(s)\cdot H_2(s)$

2. $H(s)$极点分布与原函数的对应关系

几种典型情况



一阶极点

$H(s)=\frac{1}{s}$， $p_1=0$在原点， $h(t)=L^{-1}[H(s)]=u(t)$
$H(s)=\frac{1}{s+a}$， $p_1=-a$ $a>0$，在左实轴上， $h(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)$，指数衰减 $a<0$，在右实轴上， $h(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)$，$-a>0$，指数增加
$H(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$， $p_1=\mathrm{j}\omega$，在虚轴上 $h(t)=\sin\omega t u(t)$，等幅振荡
$H(s)=\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$， $p_1=-\alpha+\mathrm{j}\omega$，$p_2=-\alpha-\mathrm{j}\omega$，共轭根 **当$\alpha>0$，极点在左半平面，衰减振荡** **当 $\alpha<0$，极点在右半平面，增幅振荡**

二阶极点

$H(s)=\dfrac{1}{s^2}$,极点在原点 $h(t)=tu(t), t\to\infty, h(t)\to\infty$
$H(s)=\dfrac{1}{(s+a)^2}$,极点在实轴上 $h(t)=t\,\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t), \alpha>0, t\to\infty, h(t)\to 0$
$H(s)=\dfrac{2s}{(s^2+\omega^2)^2}$,在虚轴上, $h(t)=t\sin t u(t), t\to\infty, h(t)$ 增幅振荡

在系统理论研究中,按照 $h(t)$ 呈现衰减或增长的两种情况将系统划分为稳定系统与非稳定系统,H(s)极点出现在左半平面,系统稳定.

一. 定义

所谓“频响特性”是指系统在正弦信号激励下稳态响应随频率的变化情况。$H(\mathrm{j}\omega)$

前提：稳定的因果系统。

有实际意义的物理系统都是稳定的因果系统。

时域：$\lim\limits_{t\to\infty} h(t)=0$

频域：$H(s)$的全部极点落在s左半平面。

其收敛域包括虚轴：

拉氏变换 ……..存在

傅里叶变换…….存在

三. $H(s)$ 、 $E(s)$的极点分布与自由响应、强迫响应特性的对应

激励： $e(t) \leftrightarrow E(s)$

系统函数： $h(t) \leftrightarrow H(s)$

$$E(s)=\frac{\prod_{l=1}^{u}(s-z_l)}{\prod_{k=1}^{v}(s-P_k)}$$

$$H(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-P_i)}$$

响应： $r(t) \leftrightarrow R(s)$

$$R(s)=\frac{\prod_{l=1}^{u}(s-z_l)}{\prod_{k=1}^{v}(s-P_k)}\bullet\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

$$R(s)=\sum_{k=1}^{v}\frac{A_k}{s-p_k}+\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s-p_i}$$

$$r(t)=L^{-1}\left[R(s)\right]=\sum_{i=1}^{n}A_i\,\mathrm{e}^{p_i t}u(t)+\sum_{k=1}^{v}A_k\,\mathrm{e}^{p_k t}u(t)$$

自由响应分量 + 强迫响应分量

几点认识

- 响应函数$r(t)$由两部分组成：

  系统函数的极点→自由响应分量；

  激励函数的极点→强迫响应分量。

- 定义系统行列式（特征方程）的根为系统的固有频率（或称“自然频率”、“自由频率”）。

  $H(s)$的极点都是系统的固有频率；

  $H(s)$零、极点相消时，某些固有频率将丢失。

- 自由响应的极点只由系统本身的特性所决定，与激励函数的形式无关，然而系数 A_i, A_k与$H(s), E(s)$都有关。

例4-6-1

已知系统 $\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2}+5\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+6r(t)=2\frac{\mathrm{d}^2 e(t)}{\mathrm{d}t^2}+6\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$，激励为 $e(t)=(1+\mathrm{e}^{-t})u(t)$，求系统的冲激响应 $h(t)$ 和零状态响应 $r_{zs}(t)$。

解答

(1)在零起始状态下，对原方程两端取拉氏变换

$$s^2R(s)+5sR(s)+6R(s)=2s^2E(s)+6sE(s)$$

则 $H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}=\frac{2s}{s+2}=2-\frac{4}{s+2}$ 所以 $h(t)=2\delta(t)-4\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

(2) 因为 $r_{zs}(t)=h(t)*e(t)$ 或 $R_{ZS}(s)=H(s)\cdot E(s)$

所以 $R_{ZS}(s)=\frac{2s}{s+2}\cdot\frac{2s+1}{s(s+1)}=\frac{2(2s+1)}{(s+2)(s+1)}=\frac{6}{s+2}-\frac{2}{s+1}$

所以 $r_{ZS}(t)=-2\mathrm{e}^{-t}u(t)+6\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

例4-7-2，教材习题2-6(1)

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+2r(t)=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+3e(t)$$

激励$e(t)=u(t)$，起始状态为$r(0_-)=1, r'(0_-)=2$

试分别求它们的完全响应，并指出其零输入响应，零状态响应，自由响应，强迫响应各分量

解：

方程两端取拉氏变换

$$s^2R(s)-sr(0_-)-r'(0_-)+3[sR(s)-r(0_-)]+2R(s)$$
$$=sE(s)-e(0_-)+3E(s)$$

零输入响应 / 零状态响应

$$\left(s^2+3s+2\right)R(s)=(s+3)E(s)+sr(0_-)+r'(0_-)+3r(0_-)$$

则

$$R_{zi}(s)=\frac{sr(0_-)+r'(0_-)+3r(0_-)}{s^2+3s+2}$$

$$R_{zs}(s)=\frac{(s+3)E(s)}{\left(s^2+3s+2\right)}$$

零输入响应为:

$$r_{zi}(t)=4\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t}\quad(t\geq 0)$$

即零状态响应为:

$$r_{zs}(t)=0.5\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-t}+1.5\qquad(t\geq 0)$$

稳态响应 / 暂态响应，自由响应 / 强迫响应

$$R(s)=\underline{1.5\frac{1}{s}}+\underbrace{2\frac{1}{s+1}+2.5\frac{1}{s+2}}_{\text{极点位于}s\text{左半平面}}$$

$$r(t)=\underline{1.5}+\underbrace{2e^{-t}-2.5e^{-2t}}_{\text{暂态响应}}\quad(t\geq 0)$$

$$R(s)=\underline{1.5\frac{1}{s}}+\underbrace{2\frac{1}{s+1}+2.5\frac{1}{s+2}}_{H(s)\text{的极点}}$$

$$r(t)=\underline{1.5}+\underbrace{2e^{-t}-2.5e^{-2t}}_{\text{自由响应}}\quad(t\geq 0)$$

$H(s)$和系统稳态响应的关系

设系统函数为$H(s)$，激励源$e(t)=E_{m}\sin(\omega_0 t)$

系统的稳态响应

$$r_{mm}(t)=E_{m}H_{0}\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$$

$$\text{其中}H(s)\Big|_{s=\mathrm{j}\omega_0}=H(\mathrm{j}\omega_0)=H_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_0}$$

频响特性

$$H(s)\Big|_{s=\mathrm{j}\omega}=H(\mathrm{j}\omega)=\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

$\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|$——**幅频特性**

$\varphi(\omega)$——**相频特性（相移特性）**

五、

二．正弦信号激励下系统的稳态响应

设激励信号为$\sin(\omega_0 t)$，系统的频率响应为$H(\omega)=|H(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$，**则系统的稳态响应为**

$$|H(\omega_0)|\sin[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]$$

说明

正弦信号$\sin(\omega_0 t)$作为激励的稳态响应为与激励同频率的信号，幅度由$|H(j\omega_0)|$加权，相移$\varphi(\omega_0)$。$H(j\omega)$代表了系统对信号的处理效果。

例题

8．已知一 LTI 系统函数 H(s) 的零点 z=1，极点 p=-1，且冲激响应初值 $h(0_+)=2$，试求：

（1）系统函数 H(s)；

(2) 系统的幅频特性 H(ω)，相频特性 Φ(ω)；

（3）若激励 $e(t)=3\sin\sqrt{3}t\cdot u(t)$，求系统稳态响应。

解答：（1） $h(0_+)=\lim\limits_{s\to\infty} sH(s)=2$

4

$$H(s)=\frac{2(s-1)}{(s+1)^2}$$

（2） $H(j\omega)=\dfrac{2(j\omega-1)}{(j\omega+1)^2}$

$$|H(j\omega)|=\frac{2}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\omega-\arctan\frac{2\omega}{1-\omega^2}$$

（3）将 $\omega=\sqrt{3}$ 代入 $|H(j\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$，

例5-2-1

若$H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega}$当输入分别为 $\sin t,\sin(2t),\sin(3t)$时的输出为多少 ?

解:

$$\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \qquad \varphi(\omega)=-\arctan\omega$$

$$\sin t: \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t-45^\circ)$$

$$\sin(2t): \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(2t-63^\circ)$$

$$\sin(3t): \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{10}}\sin(3t-72^\circ)$$

1. 如果 LTI 系统的频率响应为 $H(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega+2}$，试求：

（1）系统的阶跃响应；

（2）输入 $e(t)=e^{-t}u(t)$ 时的响应；

（3）输入 $e(t)=4\cos 2t$ 时的稳态响应。

解答：（1） $F[u(t)]=\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$

$$R(j\omega)=H(j\omega)\cdot F[u(t)]=\frac{1}{j\omega+2}[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}]$$

$$=\frac{\pi}{2}\delta(\omega)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{j\omega+2}\right)$$

$$r(t)=F^{-1}[R(j\omega)]=\frac{1}{2}u(t)-\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

（2） $E(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega}$

$$R(j\omega)=H(j\omega)E(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{j\omega+2}$$

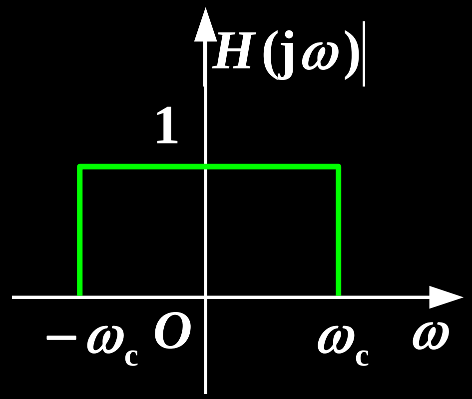
$$r(t)=F^{-1}[R(j\omega)]=e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$$

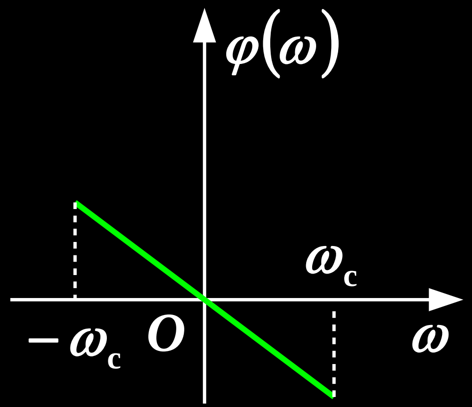
（3） $|H(j\omega)|_{\omega=2}=\dfrac{1}{\sqrt{\omega^2+4}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\frac{\omega}{2}\Big|_{\omega=2}=-45^\circ$$

$$r(t)=\sqrt{2}\cos(2t-45^\circ)$$

一．理想低通的频率特性





$$H(j\omega)=\begin{cases}1\cdot e^{-j\omega t_0} & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}|H(j\omega)|=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases} \\ \varphi(\omega)=-\omega t_0\end{cases}$$

- ω_c为截止频率，称为理想低通滤波器的通频带，简称频带。
- ω在$0\sim\omega_c$的低频段内，传输信号无失真(只有时移t_0)。

2. 理想低通滤波器的传输函数 $H(j\omega)=G_{2\pi}(\omega)$，求输入为 $e(t)=Sa(\pi t)$ 时的响应 $r(t)$。

解答：$e(t)=Sa(\pi t)$　　　$E(j\omega)=u(\omega+\pi)-u(\omega-\pi)$

$$R(j\omega)=H(j\omega)E(j\omega)=E(j\omega)$$

$$r(t)=e(t)=Sa(\pi t)$$

5.4,5.6

第七、八章

1. 对于下列每一个系统判别它是否为：线性系统；非移变系统；因果系统；稳定系统：

（1） $y(n)=2x(n-1)+3x(n-3)$

解答： 线性、非移变、因果、稳定系统

（2） $y(n)=(n-1)x(n)$

解答： 线性、移变、因果、非稳定系统

（3） $y(n)=\sum_{m=n-3}^{n+3}x(m)$

解答： 线性、非移变、非因果、稳定系统

$$x(n)\xrightarrow{\text{经系统}}\sum_{m=n-3}^{n+3}x(m)\xrightarrow{\text{时移}}\sum_{m=n-n_0-3}^{n-n_0+3}x(m)$$

$$x(n)\xrightarrow{\text{时移}}x(n-n_0)\xrightarrow{\text{经系统}}\sum_{m=n-3}^{n+3}x(m-n_0)\Leftrightarrow\sum_{m=n-n_0-3}^{n-n_0+3}x(m)$$

3．离散时间 LTI 系统的单位样值响应如下，试判断系统的因果性和稳定性，并简要说明理由。

（1） $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

解答：因为，n<0 时，h(n)=0

所以该系统是因果性的

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$，该系统是稳定的。

（2） $h(n)=4^n u(2-n)$

解答：因为，n<0 时，h(n)≠0

所以该系统是非因果性的

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{2}4^n=\sum_{n=-2}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{16}{1-\frac{1}{4}}=\frac{64}{3}$$

所以该系统是稳定的。

例7-6-4

已知$x(n)=R_3(n), h(n)=\left\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1},2,3\right\}$，求$x(n)*h(n)$。

解答

$$x(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)$$

$$h(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)+3\delta(n-2)$$

利用分配律

$$\begin{aligned}
&x(n)*h(n)\\
&=\delta(n)+2\delta(n-1)+3\delta(n-2)\\
&\qquad+\delta(n-1)+2\delta(n-2)+3\delta(n-3)\\
&\qquad\qquad+\delta(n-2)+2\delta(n-3)+3\delta(n-4)\\
&=\delta(n)+3\delta(n-1)+6\delta(n-2)+5\delta(n-3)+3(n-4)
\end{aligned}$$

4．一线性非移变系统的单位样值响应 $h(n)$ 如图 7-1 所示，输入信号 $x(n)=\delta(n)-\delta(n-1)$，试画出 $x(n)$ 的图形和该系统输出信号 $y(n)$ 的图形。

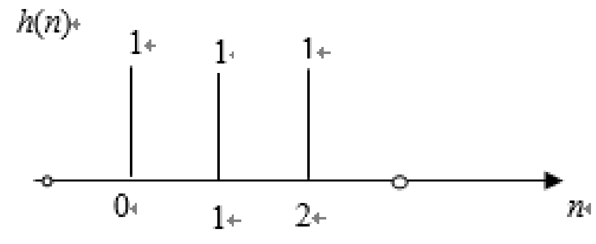
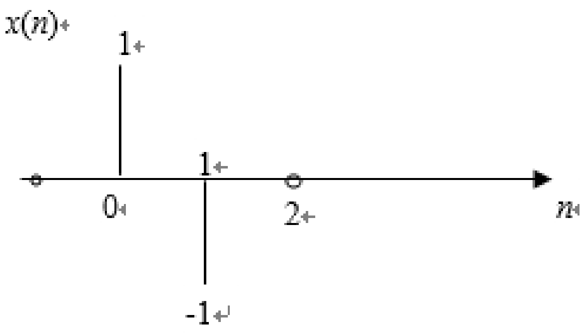
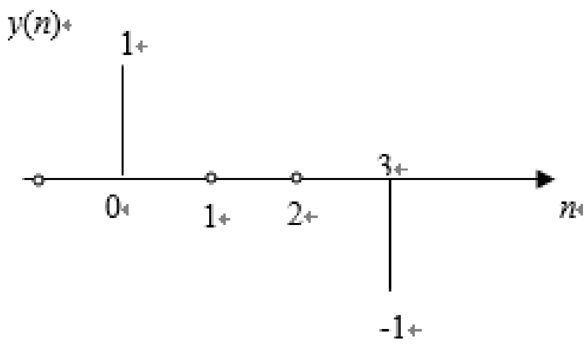


图 7-1

解答： $y(n)=x(n)*h(n)=\delta(n)-\delta(n-3)$

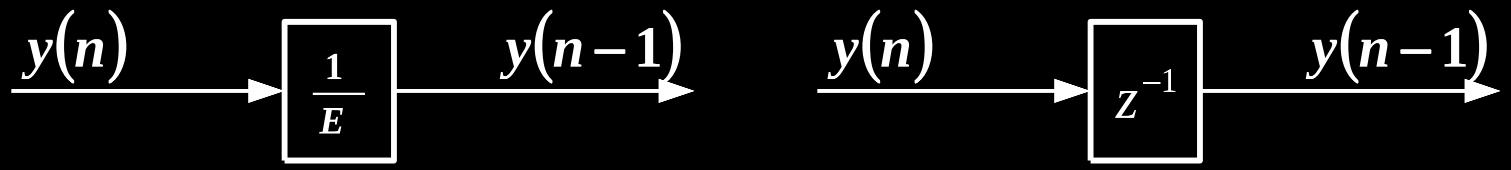




系统框图

标量乘法器

延时器

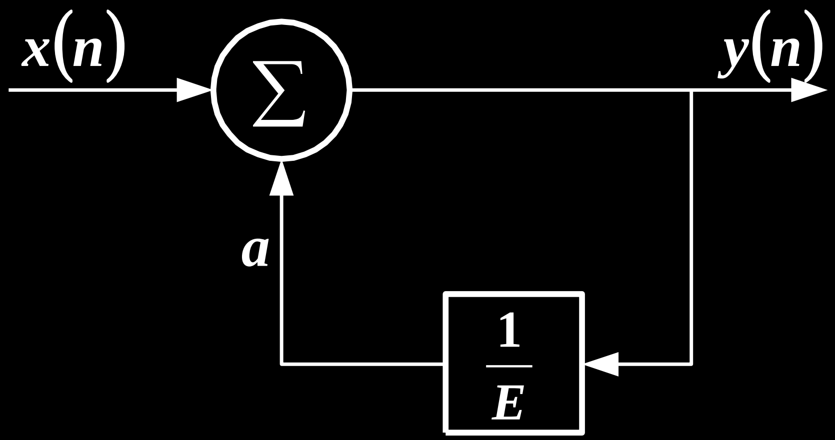


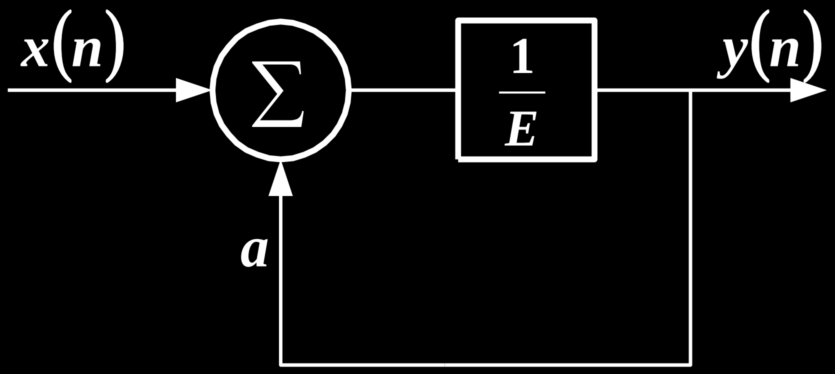
单位延时实际是一个移位寄存器，把前一个离散值顶出来，递补。

例题

例7-3-1

框图如图，写出差分方程





解：

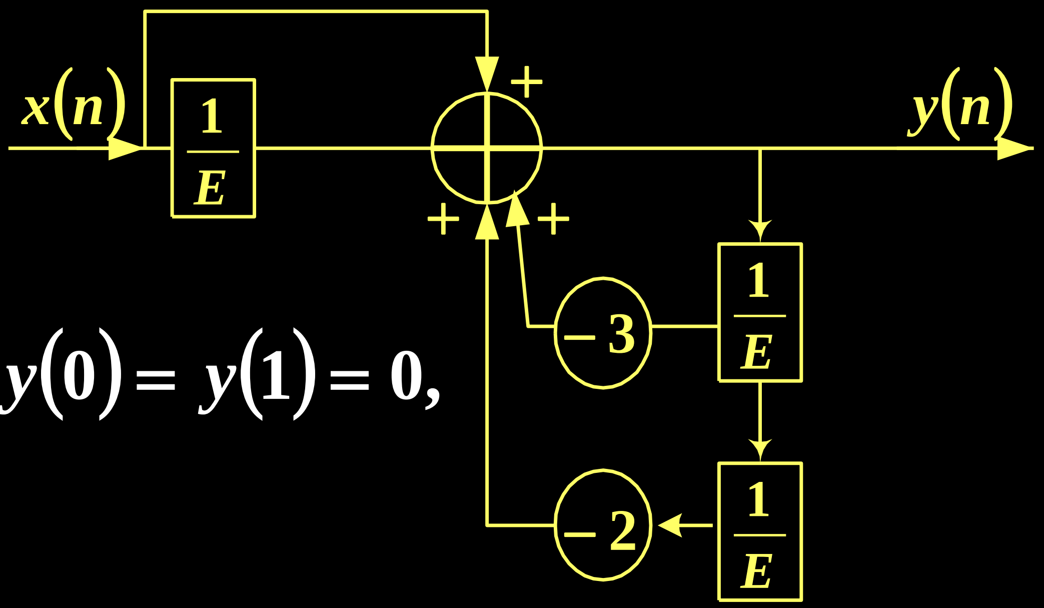
$$y(n)=x(n)+ay(n-1)$$

$$y(n+1)=x(n)+ay(n)$$

或 $$y(n)=\frac{1}{a}\left[y(n+1)-x(n)\right]$$

一阶后向差分方程　　　**一阶前向差分方程**

例8-7-2



$$x(n)=\begin{cases}(-2)^n & n\ge 0\\ 0 & n<0\end{cases},\ y(0)=y(1)=0,$$

解：

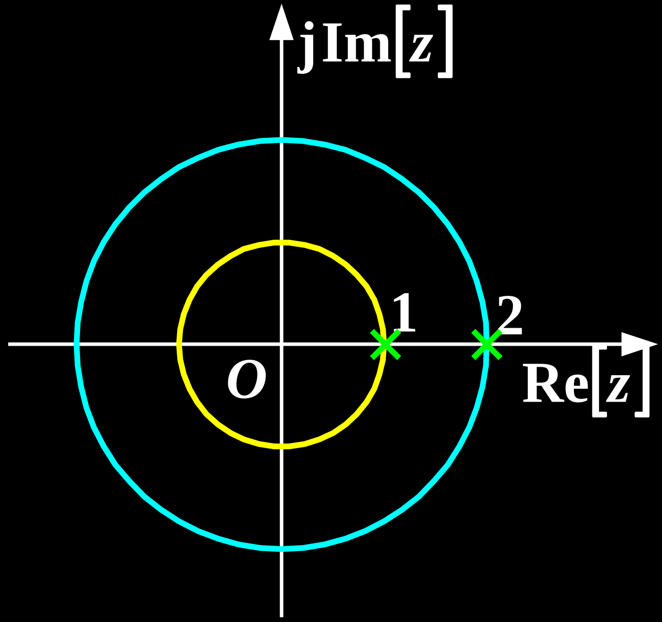
（1） 列差分方程，从加法器入手

$$x(n)+x(n-1)-3y(n-1)-2y(n-2)=y(n)$$

所以 $y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)+x(n-1)$

收敛域与原函数的对应

$$X(z)=\frac{-z}{z-1}+\frac{2z}{z-2}$$



$|z|>2$ 右 右

$$x(n)=-u(n)+2(2)^n u(n)$$

$1<|z|<2$ 右 左

$$x(n)=-u(n)-2(2)^n u(-n-1)$$

$|z|<1$ 左 左

$$x(n)=u(-n-1)-2(2)^n u(-n-1)$$

8. 一个因果线性非移变系统由下列差分方程描述

$$6y(n)-5y(n-1)+y(n-2)=12x(n)-5x(n-1)$$

（1） 求该系统的系统函数 $H(z)$

（2） 在 z 平面上画 $H(z)$ 的零极点，指出其收敛域。

（3） 求系统单位抽样响应 $h(n)$ 。

解答：（1）对差分方程的两边进行 z 变换

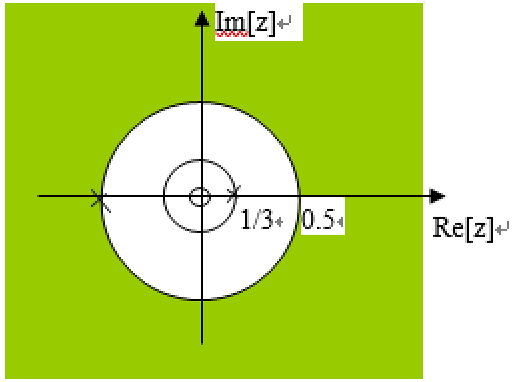
$$6Y(z)-5z^{-1}Y(z)+z^{-2}Y(z)=12X(z)-5z^{-1}X(z)$$

系统函数 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{12z^2-5z}{6z^2-5z+1}$

（2）零点：z=0， $z=\dfrac{5}{12}$

极点： $z=\dfrac{1}{3},z=\dfrac{1}{2}$

收敛域： $|z|>\dfrac{1}{2}$



（3） $h(n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(n)+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n u(n)$

1μs 1kHz