

প্রধান সূচিপত্র

অধ্যায়	অধ্যায়ের নাম	পৃষ্ঠা নং
অধ্যায়-০১	আংশিক ভগ্নাংশ	
অধ্যায়-০২	সূচক ধারা	
অধ্যায়-০৩	দ্বিপদী উপপাদ্য	
অধ্যায়-০৪	ফাংশন এবং ফাংশনের লেখ	
অধ্যায়-০৫	সীমা	
অধ্যায়-০৬	অন্তরক সহগ ও অন্তরীকরণ	
অধ্যায়-০৭	অন্তরীকরণের ধারণা	
অধ্যায়-০৮	অধ্যায়-৮ $\frac{dy}{dx}$ এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা	
অধ্যায়-০৯	পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণের সমস্যা সমাধানে মিবনীজের উপপাদ্যের ব্যবহার	
অধ্যায়-১০	আংশিক অন্তরীকরণ	
অধ্যায়-১১	অনির্দিষ্ট যোজিতফল	
অধ্যায়-১২	নির্দিষ্ট যোজিতফল	
অধ্যায়-১৩	ভেক্টর বীজগণিত	
অধ্যায়-১৪	ভেক্টরের ডট গুণফল	
অধ্যায়-১৫	ভেক্টরের ক্রস গুণফল	

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ (Board Questions Analysis)

📖 এই অধ্যায়ের প্রধান সূচিপত্র (contents)	
বিষয়	পৃষ্ঠা নং
❖ সূত্রাবলী ও শর্টকাট টেকনিক	
❖ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ রচনামূলক প্রশ্নাবলি	

এই অধ্যায় থেকে বিগত পাঁচ বছরের ডিপ্লোমা ইন ইঞ্জিনিয়ারিং, ডিপ্লোমা ইন টেক্সটাইল, ডিপ্লোমা ইন এগ্রিকালচার, ডিপ্লোমা ইন মেরিন পরীক্ষায় মোট প্রশ্ন। নিচে ‘Board Questions Analysis’ অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেখানো হলো।

সাল \ বোর্ড	অতি সংক্ষিপ্ত	সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন	রচনামূলক প্রশ্ন
২০২৪	১টি	১টি	_____
২০২৩	১টি	_____	১টি
২০২২	১টি	_____	১টি



“আমি ব্যর্থ হইনি; আমি কেবল ১০,০০০টি উপায় খুঁজে পেয়েছি
যা কাজ করে না।”



অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর :

1. প্রকৃত ভগ্নাংশের সংজ্ঞা দাও।

[বাকাশিবো : '০৩, '০৪, '১১(R), '১২(R), '২০]

অথবা, বীজগণিতীয় প্রকৃত ভগ্নাংশ বলতে কী বুঝায়?

সমাধান : $\frac{f(X)}{\phi(X)}$ আকারের মূলদ ভগ্নাংশকে প্রকৃত ভগ্নাংশ বলা হয় যদি লব $f(x)$ -এর মাত্রা হর $\phi(x)$ -এর মাত্রা অপেক্ষা ছোট বা কম হয়।

2. অপ্রকৃত ভগ্নাংশ কাকে বলে?

[বাকাশিবো : '০৫, '০৯(R), '১১(R), '১২(R), '১৬(R), '১৯]

অথবা, অপকৃত ভগ্নাংশ বলতে কী বুঝায়?

সমাধান : $\frac{f(X)}{\phi(X)}$ আকারের মূলদ ভগ্নাংশকে প্রকৃত ভগ্নাংশ বলা হয় যদি লব $f(x)$ -এর মাত্রা হর $\phi(x)$ -এর মাত্রার সমান অথবা বড় বা বেশি হয়।

3. $\frac{x+2}{(x+1)(x-1)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশ আকারে ধ্রুবকের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

[বাকাশিবো : '১৪ (R), '২২R]

সমাধান : $\frac{x+2}{(x+1)(x-1)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$ (উত্তর)

4. $\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে ধ্রুবকের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

[বাকাশিবো : '১৮]

সমাধান : $\frac{3x+1}{(x+1)(x^2+3)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$ (উত্তর)

5. $\frac{(x^2-x-1)}{(x^2+1)(x+2)^2}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে ধ্রুবকের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

[বাকাশিবো : '১৩, '১৫]

সমাধান : $\frac{x^2-x-1}{(x^2+1)(x+2)^2} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ (উত্তর)

6. $\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x+1)^2}$ কে আংশিক ভগ্নাংশের আকারে প্রকাশ কর।

[বাকাশিবো : '১৫]

সমাধান : $\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x+1)^2} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ (উত্তর)

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর :

1. $\frac{x^2+1}{x(x-2)^2}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : $\Rightarrow \frac{x^2+1}{x(x-2)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \dots \dots \dots$ (i)

(i) নং সমীকরণের উভয় পক্ষকে $x(x-2)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 + 1 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx \dots \dots \dots \text{(ii)}$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = Ax^2 - 4Ax + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx \dots \dots \dots \text{(iii)}$$

(ii) এ $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$$0^2 + 1 = A(0 - 2)^2 + 0 + 0$$

$$\Rightarrow 1 = 4A$$

$$\therefore A = \frac{1}{4}$$

x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$1 = A + B$$

$$\Rightarrow B = 1 - A$$

$$= 1 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4-1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

A, B ও C এর মান (i) নং বসাই,

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{x(x-2)^2} &\equiv \frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{3}{4}}{x-2} + \frac{\frac{5}{2}}{(x-2)^2} \\ &= \frac{1}{4x} + \frac{3}{4(x-2)} + \frac{5}{2(x-2)^2} \quad (\text{উত্তর}) \end{aligned}$$

2. $\frac{2x+1}{(x+1)^2(2x-5)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

$$\text{সমাধান : } \Rightarrow \frac{2x+1}{(x+1)^2(2x-5)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{2x-5} \dots \dots \dots (i)$$

(i) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে $(x+1)^2(2x-5)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$2x+1 = A(x+1)(2x-5) + B(2x-5) + C2(x+1)^2 \dots \dots \dots (ii)$$

$$\Rightarrow 2x+1 = 2Ax^2 + 1Ax - 5Ax - 5A + 2Bx - 5B + Cx^2$$

$$+ 2Cx^2 + C \dots \dots \dots (iii)$$

(ii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$-2+1 = 0 + B(-2-5) + 0$$

$$\Rightarrow -1 = 7B$$

$$\therefore B = \frac{1}{7}$$

(ii) নং এ $x = \frac{5}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$5+1 = 0 + 0 + c\left(\frac{5}{2}+1\right)^2$$

$$\Rightarrow 6 = C\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 1 + 1^2\right\}$$

$$\Rightarrow 6 = C\left(\frac{25}{4} + 5 + 1\right)$$

$$\Rightarrow 6 = C\left(\frac{25}{4} + 6\right)$$

$$\Rightarrow 6 = C \left(\frac{25+24}{4} \right)$$

$$\Rightarrow 6 = C \frac{49}{4}$$

$$\Rightarrow C = \frac{24}{49}$$

x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$0 = 2A + C$$

$$\Rightarrow -2A = C$$

$$\Rightarrow = -\frac{C}{2}$$

$$= -\frac{12}{49}$$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসাই,

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{(x+1)^2(2x-5)} &= \frac{\left(-\frac{12}{49}\right)}{x+1} + \frac{\frac{1}{7}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{24}{59}}{2x-5} \\ &= -\frac{12}{49(x+1)} + \frac{1}{7(x+1)^2} + \frac{24}{49(2x-5)} \\ &= \frac{1}{7(x+1)^2} + \frac{1}{7(x+1)^2} + \frac{24}{49(2x-5)} \quad (\text{উত্তর}) \end{aligned}$$

3. $\frac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

$$\text{সমাধান : } \Rightarrow \frac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \dots \dots \dots (i)$$

(i) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে $(x-1)^2(x^2+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 - x + 1 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2 \dots \dots \dots (ii)$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 = A(x^3 - x^2 + x - 1) + Bx^2 + B + Cx^3 - 2Cx^2 + Cx + Dx^2 - 2Dx + D \dots \dots \dots (iii)$$

(ii) এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$1 - 1 + 1 = 0 + B(1+1) + 0$$

$$\Rightarrow 1 = 2B \quad \therefore B = \frac{1}{2}$$

x^3, x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$0 = A + C$$

$$\therefore C = -A \dots \dots \dots (iv)$$

$$\text{এবং } 1 = -A + B - 2C + D \Rightarrow 1 = -A + \frac{1}{2} + 2A + D$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + A + D \Rightarrow A + D = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2}$$

$$\therefore A + D = \frac{1}{2} \dots \dots \dots (v)$$

আবার, $-1 = A + C - 2D$

$$\Rightarrow -1 = A - A - 2D$$

$$\Rightarrow D = \frac{1}{2}$$

D এর মান (v) নং এ বসাই,

$$A + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\therefore A = 0$$

A এর মান (iv) নং এ বসাই,

$$C = 0$$

A, B ও C এর মান (i) নং এ বসাই,

$$\begin{aligned} \frac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x^2+1)} &= \frac{0}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{(0+\frac{1}{2})}{x^2+1} \\ &= 0 + \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{2(x^2+1)} \\ &= \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{2(x^2+1)} \text{ (উত্তর)} \end{aligned}$$

4. $\frac{6x-3}{(x+1)^2(x-2)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

$$\text{সমাধান : } \frac{6x-3}{(x+1)^2(x-2)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \dots \dots \dots (i)$$

(i) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে $(x+1)^2(x-2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$6x-3 = A(x+1)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x-2) \dots \dots \dots (ii)$$

$$\Rightarrow 6x-3 = Ax^2 + 2Ax + 1 + Bx^2 - Bx - 2Bx + 2B + Cx - 2c \dots \dots \dots (iii)$$

(ii) এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$6(-1) - 3 = c(-1 - 2) + 0 + 0$$

$$\Rightarrow -6 - 3 = 3c$$

$$\Rightarrow 9 = 3c$$

$$\Rightarrow C = \frac{9}{3}$$

$$\therefore C = 3$$

(ii) এ $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$$6 \times 2 - 3 = A(2 + 1)^2 + 0 + 0$$

$$\Rightarrow 12 - 3 = 9A$$

$$\Rightarrow 9A = 9$$

$$\therefore A = 1$$

x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$0 = A + B$$

$$\Rightarrow 0 = 1 + B$$

$$\therefore B = -1$$

A, B ও C এর মান (i) নং সমীকরণে বসাই,

$$\frac{6x-3}{(x+1)^2(x-2)} \equiv \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} \text{ (উত্তর)}$$

5. $\frac{5x-12}{x^2 5x+6}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{5x-12}{x^2 5x+6} = \frac{5x-12}{x^2-3x-2x+6} = \frac{5x-12}{x(x-3)-2(x-3)} = \frac{5x-12}{(x-3)(x-2)}$

ধরি, $\frac{5x-12}{(x-3)(x-2)} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} \dots \dots \dots (i)$

$\Rightarrow (x-3)(x-2) \times \frac{5x-12}{(x-3)(x-2)} \equiv (x-3) \times \frac{A}{x-3} + (x-3)(x-2) \times \frac{B}{x-2}$

$\Rightarrow 5x-12 = A(x-2) + B(x-3) \dots \dots \dots (ii)$

x এর মান 3, 2 (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$5x-12 = A(x-2) + B(x-3)$

$\Rightarrow 5 \times 3 - 12 = A(3-2) + B(3-3)$

$\Rightarrow 15 - 12 = A \times 1 + B \times 0$

$\Rightarrow 3 = A + 0$

$\Rightarrow A = 3$

আবার, $5x-12 = A(x-2) + B(x-3)$

$\Rightarrow 5 \times 2 - 12 = A(2-2) + B(2-3)$

$\Rightarrow 10 - 12 = A \times 0 + B \times (-1)$

$\Rightarrow -2 = 0 - B$

$\Rightarrow +2 = +B$

$\Rightarrow B = 2$

A ও B এর মান (i) নং সমীকরণে বসাই,

$\frac{5x-12}{(x-3)(x-2)} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$

$\Rightarrow \frac{5x-12}{(x-3)(x-2)} = \frac{3}{x-3} + \frac{2}{x-2}$ (উত্তর)

6. $\frac{x^2+1}{x(x-2)^2}$

সমাধান : ধরি, $\frac{x^2+1}{x(x-2)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \dots \dots \dots (i)$

$\Rightarrow x^2 + 1 = A(x-x)^2 + Bx(x-2) + Cx \dots \dots \dots (ii)$

$\Rightarrow x^2 + 1 = A(x^2 - 4x + 4) + Bx(x-2) + C$

$\Rightarrow 0.x + x^2 + 1 = Ax^2 - 4Ax + 4A + Bx - 2Bx + Cx \dots \dots \dots (iii)$

x এর মান 0, 2 (ii) নং সমীকরণে বসাই,

$x^2 + 1 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$

$\Rightarrow 0^2 + 1 = A(0-2)^2 + Bx(x-2) + C \times 0$

$\Rightarrow 1 = A(-2)^2 + 0 + 0$

$\Rightarrow 1 = A \times 4$

$\Rightarrow A = \frac{1}{4}$

আবার, $x^2 + 1 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$

$\Rightarrow 2^2 + 1 = A(2-)^2 + B.2(2-2) + C \times 2$

$\Rightarrow 5 = 0 + 0 + 2c$

$\Rightarrow c = \frac{5}{2}$

(iii) নং সমীকরণ হতে পাই,

এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$1 = A + B$

$\Rightarrow 1 = \frac{1}{4} + B$

$\Rightarrow B = 1 - \frac{1}{4}$

$= \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$

A, B, C এর মান (i) নং এ বসাই,

$$\frac{x^2+1}{x(x-2)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{x(x-2)} = \frac{1}{4x} + \frac{3}{4(x-2)} + \frac{5}{2(x-2)^2} \quad (\text{উত্তর})$$

অথবা, x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= -4A - 2B + C \\ \Rightarrow 0 &= -4 \times \frac{1}{4} \cdot 2B + \frac{5}{2} \\ \Rightarrow 0 &= -1 - 2B + \frac{5}{2} \\ \Rightarrow 2B &= -1 + \frac{5}{2} \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} &\Rightarrow \frac{-2+5}{2} \\ &\Rightarrow 2B = \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow 4B = 3 \\ &\Rightarrow B = \frac{3}{4} \end{aligned} \right.$$

রচনামূলক প্রশ্নোত্তর :

নিম্নলিখিত ভাঙ্গাংশগুলোকে আংশিক ভাঙ্গাংশে প্রকাশ কর :

1. $\frac{x^2-x+1}{(x-1)(x^2+1)}$ কে আংশিক ভাঙ্গাংশে প্রকাশ কর।

$$\Rightarrow \frac{x^2-x+1}{(x-1)(x^2+1)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x+1)^2} \dots \dots \dots (i)$$

(i) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে $(x-1)(x^2+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 - x + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x^2 - 1) \dots \dots \dots (ii)$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx + Bx - C \dots \dots \dots (iii)$$

(ii) এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$1 - 1 + 1 = A((1 + 1) + 0)$$

$$\Rightarrow 1 = 2A$$

$$\therefore A = \frac{1}{2}$$

আবার,

$$-1 = C - B$$

$$\Rightarrow -1 = C - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow C - \frac{1}{2} = -1$$

$$\Rightarrow C = -1 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow C = \frac{-2+1}{2} \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore C = -\frac{1}{2}$$

(iii) x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$1 = A + B$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + B \Rightarrow -B = \frac{1}{2} - 1$$

$$\Rightarrow -B = \frac{1-2}{2} \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore B = \frac{1}{2}$$

A, B ও C এর মান (i) নং সমীকরণে বসাই,

$$\frac{x^2-x+1}{(x-1)(x^2+1)} \equiv \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}x + (-\frac{1}{2})}{x^2+1}$$

$$\equiv \frac{1}{2(x-1)} + \frac{\frac{x-1}{2}}{x^2+1} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{x-1}{2(x^2+1)} \quad (\text{উত্তর})$$

2. $\frac{(x^2-x+1)}{(x^2+1)(x+1)^2}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : ধরি, $\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x+1)^2} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} \dots \dots \dots (i)$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 = (Ax + B)(x + 1)^2 + C(x^2 + 1)(x + 1) + D(x^2 + 1) \dots \dots (ii)$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 = (Ax + B)(x^2 + 2x + 1) + C(x^3 + x^2 + x + 1) + Dx^2 + D$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 = Ax^2 + 2Ax^2 + Ax + Bx^2 + 2Bx + B + Cx^3 + Cx^2 + Cx^2 + D \dots \dots \dots (iii)$$

x এর মান - 1 (ii) নং এ বসাই,

$$x^2 - x + 1 = (Ax + B)(x + 1)^2 + C(x^2 + 1)(x + 1) + D(x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow (-1)^2 - (-1) + 1 = 0 + 0 + D\{(-1)^2 + 1\}$$

$$\Rightarrow 1 + 1 + 1 = D(1 + 1)$$

$$\Rightarrow D = \frac{3}{2}$$

এখন, x^3, x^2, x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$\Rightarrow 0 = A + C$$

$$\Rightarrow A = -C \dots \dots \dots (iv)$$

আবার, $1 = 2A + B + C + D$

$$\Rightarrow 1 = 2(-C) + B + C + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 1 = -2C + B + C + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{3}{2} = -C + B$$

$$\Rightarrow \frac{2-3}{2} = B - C$$

$$\Rightarrow B - C = -\frac{1}{2} \dots \dots \dots (v)$$

আবার,

$$-1 = +2B + A + C$$

$$\Rightarrow -1 = 2B + (-C) + C$$

$$\Rightarrow -1 = 2B - C + C$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

B এর মান (v) নং এ বসাই,

$$-\frac{1}{2} - C = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -C = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -C = 0$$

$$\Rightarrow C = 0$$

C এর মান (iv) নং এ বসাই,

$$A = -0$$

$$\Rightarrow A = 0$$

i নং A, B, C, D এর মান বসাই,

$$\begin{aligned} \frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x+1)^2} &\equiv \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} \\ \Rightarrow \frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x+1)^2} &= \frac{0x+1}{-2(x^2+1)} + \frac{0}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2(x+1)^2} = \frac{3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2(x^2+1)} \quad (\text{উত্তর}) \end{aligned}$$

📖 এই অধ্যায়ের প্রধান সূচিপত্র (contents)

বিষয়	পৃষ্ঠা নং
❖ সূত্রাবলী ও শর্টকাট টেকনিক	
❖ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ রচনামূলক প্রশ্নাবলি	

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ (Board Questions Analysis)

এই অধ্যায় থেকে বিগত পাঁচ বছরের ডিপ্লোমা ইন ইঞ্জিনিয়ারিং, ডিপ্লোমা ইন টেক্সটাইল, ডিপ্লোমা ইন এগ্রিকালচার, ডিপ্লোমা ইন মেরিন পরীক্ষায় মোট প্রশ্ন। নিচে ‘Board Questions Analysis’ অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেখানো হলো।

সাল \ বোর্ড	অতি সংক্ষিপ্ত	সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন	রচনামূলক প্রশ্ন
২০২৪	১টি	—	১টি
২০২৩	১টি	১টি	—
২০২২	১টি	১টি	১টি



“গণিত পারেন না বলে কষ্টে থাকবেন না। আমি নিশ্চিত করে বলছি, আমার সমস্যা তার চেয়েও বেশি।”



এই অধ্যায়ের এর সূত্র

1. $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \infty$
2. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \infty$
3. $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \infty$
4. $a^x = 1 + \frac{x}{1!} \log_e a + \frac{x^2}{2!} (\log_e a)^2 + \dots + \infty$
5. $e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \infty$
6. সমান্তর ধারার n তম পদ $= a + (n-1)d$
7. গুণোত্তর ধারার যোগফল $S = a \frac{1-r^n}{1-r}$

গুরুত্বপূর্ণ একটি প্রমাণ যা পরিক্ষায় ৯৯% আসার সম্ভাবনা রয়েছে → Lets do it

i. প্রমাণ কর যে, $2 < e < 3$ ।

সমাধান :

আমরা জানি,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \infty$$

$$\text{বা, } e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \infty$$

$$\text{বা, } e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \infty$$

সুতরাং, $e > 2$ ।

এখানে, $\frac{1}{6!} < \frac{1}{25}$, $\frac{1}{7!} < \frac{1}{26}$ ইত্যাদি ।

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \infty \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \infty$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \infty$$

$$= 1 + 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\infty}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1 - 0}{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + 2 = 3$$

সুতরাং, $e < 3$ ।

$\therefore 2 < e < 3$ (প্রমাণিত)

$$\text{আবার, } 3! = 3.2.1 > 2^2$$

$$\therefore \frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$$

$$4! = 4.3.2.1 > 2^3$$

$$\therefore \frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}$$

$$5! = 5.4.3.2.1 > 2^4$$

$$\therefore \frac{1}{5!} < \frac{1}{2^4}$$

এখানে,

$$a = 1$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$\therefore S = \frac{a(1-r^\infty)}{1-r}$$

ii. $\frac{2}{|1} + \frac{2+4}{|2} + \frac{2+4+6}{|3} + \dots = 3e$

সমাধান : প্রদত্ত ধারার n তম পদ $= \frac{2+4+6+\dots}{|a+(n-1)d} = \frac{2(1+2+3+\dots+n)}{|1+(n-1).1} = \frac{2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}}{|1+n-1} = \frac{n(n+1)}{|n}$

$$= \frac{n(n+1)}{n|n-1} = \frac{n+1}{|n-1} = \frac{n-1+3}{|n-1} = \frac{n-1}{|n-1} + \frac{2}{|n-1}$$

$$= \frac{n-1}{(n-1)|n-2} + \frac{2}{|n-1} = \frac{1}{|n-2} + \frac{2}{|n-1}$$

n এর মান $1, 2, 3, 4, \dots$ ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$$S = \left(\frac{1}{(1-2)!} + \frac{1}{(2-2)!} + \frac{1}{(3-2)!} + \frac{1}{(4-2)!} + \dots + \infty \right)$$

$$+ 2 \left(\frac{1}{(1-1)!} + \frac{1}{(2-1)!} + \frac{1}{(3-1)!} + \frac{1}{(4-1)!} + \dots + \infty \right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots \dots \dots + \infty \right) + 2 \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \infty \right)$$

$$= e + 2e = 3e \text{ (প্রমাণিত)}$$

iii. $1 + \frac{1+2}{|2} + \frac{1+2+3}{|3} + \dots = \frac{3}{2}e$

(iii) প্রদত্ত ধারার n তম পদ $= \frac{1+2+3+\dots+n}{|a+(n-1)d} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{|1+(n-1).1} = \frac{n(n+1)}{2|n} = \frac{n+1}{2|n-1}$

$$= \frac{n-1+2}{2|n-1} = \frac{n-1}{2|n-1} + \frac{2}{2|n-1} = \frac{1}{2|n-2} + \frac{1}{|n-1}$$

n এর মান $1, 2, 3, 4, \dots$ ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$$S = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|2} + \frac{1}{|3} + \dots + \infty \right) + \left(1 + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|2} + \frac{1}{|3} + \dots + \infty \right)$$

$$= \frac{1}{2}e + e = \frac{e}{2} + e = \frac{e+2e}{2} = \frac{3e}{2} = \frac{3}{2}e \text{ (প্রমাণিত)}$$

iv. $\frac{1}{|2} + \frac{1+2}{|3} + \frac{1+2+3}{|4} + \frac{1+2+3+4}{|5} + \dots = \frac{1}{2}e$

সমাধান: পদত্ত ধারার n তম পদ $= \frac{1+2+3+\dots+n}{|a+(n-1)d} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{|2+(n-1).1} = \frac{n(n+1)}{2|2+n-1} = \frac{n(n+1)}{2|n+1} = \frac{n}{2|n} = \frac{1}{2|n-1}$

n এর মান $1, 2, 3, 4, \dots$ ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$$S = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|2} + \frac{1}{|3} + \frac{1}{|4} + \dots + \infty \right) = \frac{1}{2}e \text{ (প্রমাণিত)}$$

Type-2 :

1. $1 + \frac{2}{|1} + \frac{3}{|2} + \frac{4}{|3} + \dots$

সমাধান: প্রদত্ত ধারার n তম পদ $= \frac{a+(n-1)d}{|a+(n-1)d} = \frac{1+n(n-1)1}{|0+(n-1)1} = \frac{n-1+1}{|n-1} = \frac{n-1}{|n-1} + \frac{1}{|n-1}$
 $= \frac{1}{|n-2} + \frac{1}{|n-1}$

n এর মান 1, 2, 3, 4, ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$$S = \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \infty\right) + \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \infty\right) = e + e = 2e \text{ (প্রমাণিত)}$$

2. $\frac{5}{|1} + \frac{7}{|2} + \frac{9}{|3} + \frac{11}{|4} + \dots$

3. $1 + \frac{3}{|1} + \frac{5}{|2} + \frac{7}{|3} + \dots$

(ii) বাড়ির কাজ ।

(iii) বাড়ির কাজ ।

Type-3 :

1. $\frac{1^2}{|1} + \frac{3^2}{|2} + \frac{5^2}{|3} + \frac{7^2}{|4} + \dots \infty$

সমাধান : পদত্ত ধারা n তম পদ $= \frac{\{a+(n-1)d\}^2}{|a+(n-1)d} = \frac{\{1+(n-1)2\}^2}{|1+(n-1)1} = \frac{(1+2n-2)^2}{|n}$
 $= \frac{(2n+1)^2}{|n} = \frac{4n^2+4n+1}{|n} = \frac{4n(n-1)+1}{|n} = \frac{4n(n-1)}{|n} + \frac{1}{|n}$

n এর মান 1, 2, 3, 4, ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$$S = 4 \left(1 + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|2} + \frac{1}{|3} + \dots + \infty\right) + \left(1 + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|2} + \frac{1}{|3} + \dots + \infty - 1\right)$$

$$= 4e + e - 1 = 5e - 1 \text{ (উত্তর)}$$

2. $\frac{1^2}{|1} + \frac{2^2}{|2} + \frac{3^2}{|3} + \dots \infty$

2. বাড়ির কাজ ।

অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর :

1. e^x ধারাটি লেখ।

[বাকাশিবো : '০৮, '১৫(R), '১৬, '২২, '২২]

$$\text{সমাধান : } e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \infty$$

2. e এর মানের সীমা লেখ।

[বাকাশিবো : '১৪, '১৫, '১৫(R), '২১]

$$\text{সমাধান : } 2 < e < 3$$

3. e^{-x} ধারাটি লেখ।

[বাকাশিবো : '০৫, '১২, '১৩(R), '১৪, '১৭, '১৭(R), '১৮, '২০(R), '২১]

অথবা, e^{-x} ধারাটি বিস্তৃতি কর।

[বাকাশিবো : '০৯(R), '১১(R), '১২(R)]

$$\text{সমাধান : } e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots \infty$$

4. e^{-1} ধারাটি লেখ।

$$\text{উত্তর : } e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots \infty$$

5. a^x ধারাটি লেখ।

[বাকাশিবো : '০০, '০৪, '০৪(R), '০৯, '১০(R), '১৫(R), '২০]

$$\text{সমাধান : } a^x = 1 + \frac{x}{1} \log_e a + \frac{x^2}{2} (\log_e a)^2 + \dots \infty$$

6. $\frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{e} \right)$ সমান কত?

[বাকাশিবো : '১৮(R)]

$$\text{সমাধান : } \frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{e} \right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \infty \right)$$

7. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ কে e এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

[বাকাশিবো : '১৯, '০১, '১৩, '১৮(R)]

$$\text{সমাধান : আমরা জানি } e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \infty$$

$$\text{এবং } e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots \infty$$

$$\text{যোগ করে পাই, } e + e^{-1} = 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \infty \right)$$

$$\text{বা, } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \infty = \frac{1}{2} (e + e^{-1}) \text{ (উত্তর)}$$

8. $1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots$ এর মান e এর মাধ্যমে লেখ।

[বাকাশিবো : '১৩, '১৬(R)]

$$\text{অথবা, } 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \text{ এর মান কত?}$$

[বাকাশিবো : '০৬]

$$\text{সমাধান : আমরা জানি } e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \infty$$

$$\text{এবং } e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots \infty$$

বিয়োগ করে পাই,

$$e - e^{-1} = 2 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \infty \right) \therefore 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \infty = \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \text{ (উত্তর)}$$

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর :

1. $\frac{2}{1!} + \frac{2+4}{2!} + \frac{2+4+6}{3!} + \dots = 3e$

সমাধান : প্রদত্ত ধারার n তম পদ $= \frac{2+4+6+\dots}{(a+(n-1)d)!} = \frac{2(1+2+3+\dots)}{(1+(n-1) \times 1)!} = \frac{2 \times \frac{n(n+1)}{2}}{(1+n-1)!} = \frac{n(n+1)}{n!}$
 $\frac{n(n+1)}{n(n-1)!} = \frac{n+1}{(n-1)!} = \frac{n-1+2}{(n-1)!} = \frac{n-1}{(n-1)!} + \frac{2}{(n-1)!} = \frac{(n-1)1}{(n-1)(n-1)!} + \frac{2}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!}$

n তম পদ $= a + (n-1)d$
 $S = \frac{n(n+1)}{2} = a \frac{1-r^{\infty}}{1-r}$
 $d = 1, a = 1$

এখন, n এর মান 1, 2, 3, 4, 5, ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$S = \left(\frac{1}{(1-2)!} + \frac{1}{(2-2)!} + \frac{1}{(3-2)!} + \frac{1}{(4-2)!} + \frac{1}{(5-2)!} + \dots \right)$
 $+ 2 \left(\frac{1}{(1-1)!} + \frac{1}{(2-1)!} + \frac{1}{(3-1)!} + \frac{1}{(4-1)!} + \frac{1}{(5-1)!} + \dots \right)$
 $\Rightarrow S = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right) + 2 \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \right) = e + 2e = 3e$ (প্রমাণিত)

2. $\frac{1}{1!} + \frac{1+2}{2!} + \frac{1+2+3}{3!} + \dots = \frac{3}{2}e$

সমাধান : পদত্ত ধারার n তম পদ $= \frac{1+2+3+\dots}{(a+(n-1)d)!} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{(1+(n-1)1)!} = \frac{n(n+1)}{2n!} = \frac{n(n+1)}{2n(n-1)!} = \frac{n+1}{2(n-1)!}$
 $= \frac{n-1+2}{2(n-1)!} = \frac{n-1}{2(n-1)!} + \frac{2}{2(n-1)!} = \frac{n-1}{2(n-1)(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{2(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$

এখন, n এর মান 1, 2, 3, 4, 5, ইত্যাদি বসিয়ে,

$S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-2)!} + \frac{1}{(2-2)!} + \frac{1}{(3-2)!} + \frac{1}{(4-2)!} + \frac{1}{(5-2)!} \right)$
 $+ \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(2-1)!} + \frac{1}{(3-1)!} + \frac{1}{(4-1)!} + \dots \right)$
 $= \frac{1}{2}e + e = \frac{e+2e}{2} = \frac{3}{2}e$ (প্রমাণিত)

3. $\frac{1}{2!} + \frac{1+2}{3!} + \frac{1+2+3}{4!} + \frac{1+2+3+4}{5!} + \dots = \frac{1}{2}e$

সমাধান : n তম পদ $= \frac{1+2+3+\dots}{a+(n-1)d} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{2+(n-1)1} = \frac{n(n+1)}{2(2+n+n-1)} = \frac{n(n+1)}{2(n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(n+1)(n+1-1)!}$
 $= \frac{n}{2n!} = \frac{n}{2n(n-1)!} = \frac{1}{2(n-1)!}$

n এর মান 1, 2, 3, 4, 5, ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-1)!} + \frac{1}{(2-1)!} + \frac{1}{(3-1)!} + \frac{1}{(4-1)!} + \dots \right) = \frac{1}{2}e$ (প্রমাণিত)

$$4. \frac{1}{0!} + \frac{2}{1!} + \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} + \dots$$

$$\text{সমাধান : প্রদত্ত ধারার } n \text{ তম পদ} = \frac{a+(n-1)d}{(a+(n-1)d)!} = \frac{1+(n-1)1}{(0+(n-1)1)!} = \frac{1+n-1}{(n-1)!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{n-1+1}{(n-1)!}$$

$$\frac{n-1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{n-1}{(n-1)(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

n এর মান 1, 2, 3, 4, 5, ইত্যাদি বসিয়ে পাই,

$$S = \left(\frac{1}{(1-2)!} + \frac{1}{(2-2)!} + \frac{1}{(3-2)!} + \frac{1}{(4-2)!} + \frac{1}{(5-2)!} + \dots \right) \\ + \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(2-1)!} + \frac{1}{(3-1)!} + \dots \right) = e + e = 2e \quad (\text{প্রাপ্ত})$$

০৩

দ্বিপদী উপপাদ্য (ক)

📖 এই অধ্যায়ের প্রধান সূচিপত্র (contents)

বিষয়	পৃষ্ঠা নং
❖ সূত্রাবলী ও শর্টকাট টেকনিক	
❖ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ রচনামূলক প্রশ্নাবলি	

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ (Board Questions Analysis)

এই অধ্যায় থেকে বিগত পাঁচ বছরের ডিপ্লোমা ইন ইঞ্জিনিয়ারিং, ডিপ্লোমা ইন টেক্সটাইল, ডিপ্লোমা ইন এগ্রিকালচার, ডিপ্লোমা ইন মেরিন পরীক্ষায় মোট প্রশ্ন। নিচে ‘Board Questions Analysis’ অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেখানো হলো।

সাল \ বোর্ড	অতি সংক্ষিপ্ত	সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন	রচনামূলক প্রশ্ন
২০২৪	১টি	_____	১টি
২০২৩	_____	১টি	_____
২০২২	_____	১টি	_____



“এ পর্যন্ত আমি একজনও গণিতবিদ দেখিনি, যিনি যুক্তি প্রয়োগ করতে পারেন।”



এই অধ্যায়ের প্রয়োজনীয় সূত্রাবলিঃ

ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা সূচকের দ্বিপদী বিস্তৃতি:

$$1. (a + x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1} x^1 + {}^nC_2 a^{n-2} x^2 + {}^nC_3 a^{n-3} x^3 + \dots + {}^nC_r a^{n-r} x^r + \dots + x^n$$

($r + 1$) তম পদ = ${}^nC_r a^{n-r} x^r$

$$2. \text{পদের সংখ্যা বিজোড় হলে মধ্যপদ হবে 1 টি। মধ্যপদ} = \left(\frac{n}{2} + 1\right)$$

$$3. \text{পদের সংখ্যা জোড় হলে মধ্যপদ হবে ২ টি।}$$

$$\text{১ম পদ} = \frac{n-1}{2} + 1, \text{ ২য় পদ} = \frac{n+1}{2} + 1$$

অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

1. $(a + x)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদটি কত?

[বাকাশিবো : '০৬(R), '২২]

সমাধান : $(a + x)^{20}$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ

$$\text{বা } (r + 1) \text{ তম পদ} = {}^{20}C_r a^{20-r} x^r$$

2. ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা সূচকের দ্বিপদী উপপাদ্য লিখ।

[বাকাশিবো : '৯৬, '৯৭, '১৫, '১৯]

সমাধান : n এর মান যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে,

$$(a + x)^n = a^n + {}^nC_2 a^{n-2} x^2 + \dots + {}^nC_2 a^{n-2} x^2 + \dots + {}^nC_r a^{n-r} x^r + \dots + x^n.$$

3. $(2 + x)^{21}$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদটি লিখ।

[বাকাশিবো : '১৬]

সমাধান : সাধারণ পদ = $(r + 1)$ তম পদ

$$= {}^{21}C_r 2^{21-r} x^r. (\text{উত্তর})$$

4. $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে মোট কয়টি পদ আছে?

[বাকাশিবো : '০৯, '১২, '১৬R]

সমাধান : $(a + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদ আছে = $(n + 1)$ সংখ্যক।

5. $(1 - x)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদটি লিখ।

[বাকাশিবো : '০৪(R), '৬০(R), '১০(R), '১৩, '১৪, '১৫R]

সমাধান : সাধারণ পদ = $(r + 1)$ তম পদ = ${}^nC_r (1)^{n-r} (-x)^r = {}^nC_r (-1)^r x^r$. (উত্তর)

6. $\left(2 + \frac{x}{2}\right)^5$ - এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদগুলোর নাম লেখ।

[বাকাশিবো : '১৫]

সমাধান : এখানে $n = 5$ একটি বিজোড় সংখ্যা। অতএব বিস্তৃতিতে মধ্যপদ হবে দুটি।

এর ১মটি হবে $\left(\frac{5+1}{2}\right)$ তমপদ = 3rd পদ এবং

২য়টি হবে $\left(\frac{5+3}{2}\right)$ তমপদ = 4th পদ।

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর :

(i) $\left(3x - \frac{2}{x^2}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে x এর নিরপেক্ষ পদটি নির্ণয় কর।

সমাধান : $\left(3x - \frac{2}{x^2}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে $(n + 1)$ তম পদ, ${}^nC_r a^{n-r} x^r$

$$\begin{aligned}
 &= {}^{15}C_r (3x)^{15-r} \left(-\frac{2}{x^2}\right)^r \\
 &= {}^{15}C_r 3^{15-r} x^{15-r} (-2)^r \left(\frac{1}{x^2}\right)^r \\
 &= {}^{15}C_r 3^{15-r} x^{15-r} (-2)^r x^{-2r} \\
 &= {}^{15}C_r 3^{15-r} x^{15-3r} (-2)^r \dots \dots \dots (i)
 \end{aligned}$$

যেহেতু x নিরপেক্ষ পদ সেহেতু x এর পাওয়ার 0।

$$\therefore 15 - 3r = 0$$

$$\Rightarrow r = 5$$

তাহলে $(5 + 1) = 6$ তম পদটি x নিরপেক্ষ হবে r এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$= {}^{15}C_5 \cdot 3^{15-5} x^{15-3 \cdot 5} (-2)^5 = -{}^{15}C_5 3^{10} x^0 2^5 = -{}^{15}C_5 3^{10} 2^5 \text{ (উত্তর)}$$

(ii) $\left(2x - \frac{3}{x}\right)^{21}$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\left(2x - \frac{3}{x}\right)^{21}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদ, ${}^nC_r n^{n-r} x^r$

$$\begin{aligned}
 &= {}^{21}C_r (2x)^{21-r} \left(-\frac{3}{x}\right)^r = {}^{21}C_r 2^{21-r} (-3)^r \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}^{21}C_r 2^{21-r} x^{21-r} (-3)^r x^{-r} \\
 &= {}^{21}C_r 2^{21-r} x^{21-2r} (-3)^r \dots \dots \dots (i)
 \end{aligned}$$

যেহেতু x এর পাওয়ার 1 সেহেতু,

$$21 - 2r = 1$$

$$\Rightarrow 21 - 1 = 2r$$

$$\Rightarrow 20 = 2r$$

$$\Rightarrow r = 10$$

r এর মান (i) নং বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned}
 &{}^{21}C_{10} 2^{21-10} x^{21-2 \cdot 10} (-3)^{10} = {}^{21}C_{10} 2^{11} 3^{10} x \\
 &= {}^{21}C_{10} 2^{11} 3^{10} x
 \end{aligned}$$

সুতরাং, x এর সহগ ${}^{21}C_{10} 2^{11} 3^{10}$ (উত্তর)

(iii) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{18}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ কয়টি এবং এর মান কত?

সমাধান : $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{18}$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদসংখ্যা $(n + 1) = 18 + 1$

যা একটি বিজোড় সংখ্যা। সুতরাং মধ্যপদ ১ টি।

মধ্যপদ হবে, $\frac{n}{2} + 1 = \frac{18}{2} + 1 = 10$ তম পদ।

১০ তম পদ বা $(9 + 1)$ তম পদ $= {}^nC_r a^{n-r} x^r$

$$\begin{aligned} &= {}^{18}C_9 x^{18-9} \left(-\frac{1}{x}\right)^9 \\ &= {}^{18}C_9 x^9 (-1)^9 x^{-9} \\ &= {}^{18}C_9 x^{9-9} (-1)^9 \\ &= {}^{18}C_9 \end{aligned}$$

রচনামূলক প্রশ্নোত্তর :

(i) $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{17}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ বের কর এবং এদের মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{17}$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদ $(n + 1) = 17 + 1 = 18$ যা একটি জোড় সংখ্যা।

সুতরাং, মধ্যপদ হবে ২টি।

১ম তম মধ্যপদ $= \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{17-1}{2} + 1 = 8 + 1 = 9$ তম

২য় তম মধ্যপদ $= \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{17+1}{2} + 1 = 10$ তম পদ।

৩য় তম মধ্যপদ $= {}^{17}C_8 x^{17-8} \left(-\frac{1}{x}\right)^8 = {}^{17}C_8 x^9 (-1)^8 \left(\frac{1}{x}\right)^8 = {}^{17}C_8 x^9 (-1)^8 x^{-8}$
 $= {}^{17}C_8 x$ (উত্তর)

৪র্থ তম মধ্যপদ $= {}^{17}C_9 x^{17-9} \left(-\frac{1}{x}\right)^9 = {}^{17}C_9 x^8 (-1)^9 \left(\frac{1}{x}\right)^9 = -{}^{17}C_9 x^8 x^{-9}$
 $= -{}^{17}C_9 x^{-1}$ (উত্তর)

(ii) $\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ এবং এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\left(2x - \frac{1}{4x^2}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদ, $= {}^nC_r a^{n-r} x^r$

$$\begin{aligned} &= {}^{12}C_r (2x)^{12-r} \left(\frac{1}{4x^2}\right)^r \\ &= {}^{12}C_r 2^{12-r} x^{12-r} \left(\frac{1}{4}\right)^r x^{-2r} \end{aligned}$$

$$= {}^{12}C_r 2^{12-r} x^{12-3r} \left(\frac{1}{4}\right)^r \dots \dots (i)$$

যেহেতু x বর্জিত পদ সেহেতু x এর পাওয়ার 0 হবে,

$$12 - 3r = 0$$

$$\Rightarrow r = 4 \quad [(r + 1) = 4 + 1 = 5 \text{ তম পদ}]$$

r এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned} & {}^{12}C_4 2^{12-4} x^{12-3 \cdot 4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \\ &= {}^{12}C_4 \cdot 2^8 \frac{1}{4^4} \\ &= 495 \times 256 \times \frac{1}{256} \\ &= 495 \quad (\text{উত্তর}) \end{aligned}$$

(iii) $(1 + x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে 21 তম পদ ও 22 তম পদ দুটি সমান হলে x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $(1 + x)^{44}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদ $= {}^nC_r a^{n-r} x^r$

$$\therefore 21 \text{ তম পদ } {}^{44}C_{20} \cdot 1^{44-20} x^{20} = {}^{44}C_{20} x^{20}$$

$$\therefore 22 \text{ তম পদ } = {}^{44}C_{21} 1^{44-21} x^{21} = {}^{44}C_{21} x^{21}$$

$$\begin{aligned} \text{শর্তমতে, } & {}^{44}C_{20} x^{20} = {}^{44}C_{21} x^{21} \\ \Rightarrow & {}^{44}C_{20} = {}^{44}C_{21} x^{21} \\ \Rightarrow & \frac{[44]}{[20][44-20]} = \frac{[44]}{[21][44-21]} x \\ \Rightarrow & \frac{1}{[20][24]} = \frac{1}{21[20][44-21]} x \\ \Rightarrow & \frac{1}{24[23]} = \frac{1}{21[20][23]} x \\ \Rightarrow & \frac{1}{24} = \frac{x}{21} \\ x = & \frac{21}{24} \\ = & \frac{7}{8} \quad (\text{উত্তর}) \end{aligned}$$

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ (Board Questions Analysis)

📖 এই অধ্যায়ের প্রধান সূচিপত্র (contents)

বিষয়	পৃষ্ঠা নং
❖ সূত্রাবলী ও শর্টকাট টেকনিক	
❖ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ রচনামূলক প্রশ্নাবলি	

এই অধ্যায় থেকে বিগত পাঁচ বছরের ডিপ্লোমা ইন ইঞ্জিনিয়ারিং, ডিপ্লোমা ইন টেক্সটাইল, ডিপ্লোমা ইন এগ্রিকালচার, ডিপ্লোমা ইন মেরিন পরীক্ষায় মোট প্রশ্ন। নিচে ‘Board Questions Analysis’ অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেখানো হলো।

সাল \ বোর্ড	অতি সংক্ষিপ্ত	সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন	রচনামূলক প্রশ্ন
২০২৪	_____	১টি	১টি
২০২৩	_____	_____	_____
২০২২	_____	_____	_____



“গণিত কেবল সত্যই প্রকাশ করে না, তার মধ্যে রয়েছে অনন্ত সৌন্দর্য।”



এই অধ্যায়ের এর সূত্র

1. $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}x^r + \dots \infty$
2. $(1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \dots$
3. $(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \dots$

অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর :

1. $(1-x)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে ৪র্থ পদ পর্যন্ত নির্ণয় কর।

[বাকাশিবো : '১০(R), '১৪, '১৬]

সমাধান : আমরা জানি,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

এখন $n = -3$ এবং $x = -x$ বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned}\therefore (1-x)^{-3} &= 1 + (-3)(-x) + \frac{-3(-3-1)}{2!}(-x)^2 + (-\frac{3(-1)(-3-2)}{3!})(-x)^3 + \dots \\ &= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots \text{ (উত্তর)}\end{aligned}$$

2. $(1+\frac{x}{3})^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতির ২য় ও ৩য় পদ নির্ণয় কর।

[বাকাশিবো : '১৬R]

সমাধান : আমরা জানি, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে ২য় পদ $= nx$ ও ৩য় পদ $= \frac{n(n-1)}{2!}x^2$

$$\therefore (1+\frac{x}{3})^{-\frac{1}{2}} \text{ এর বিস্তৃতিতে ২য় পদ} = -\frac{1}{2} \times \frac{x}{3} = -\frac{1}{6}x \text{ (উত্তর)}$$

$$\text{৩য় পদ} = \frac{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} \cdot (\frac{x}{3})^2 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2 \cdot 9} = \frac{x^2}{24} \text{ (উত্তর)}$$

৩. $(1-\frac{x}{8})^{\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতির ২য় ও ৩য় পদ নির্ণয় কর।

[বাকাশিবো : '০৪(R), '১৩R, '১৫R]

সমাধান : আমরা জানি, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে ২য় পদ $= nx$

$$\therefore (1-\frac{x}{8})^{\frac{1}{2}} \text{ এর বিস্তৃতিতে ২য় পদ} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{x}{16} \text{ (উত্তর)}$$

$$\text{এবং ৩য় পদ} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} \left(-\frac{x}{8}\right)^2 = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} \frac{x^2}{64} = -\frac{1}{8} \frac{x^2}{64} = \frac{x^2}{512} \text{ (উত্তর)}$$

4. $(1+x)^{-1}$ এর বিস্তৃতির প্রথম চারটি পদ লিখ।

[বাকাশিবো : '০২(R), '০৩R, '১৪]

সমাধান : $(1+x)^{-1}$ এর $(r+1)$ তম পদ $= (-1)^r \cdot x^r \cdot r = 0, 1, 2, 3$ বসিয়ে পাই,

$$\text{প্রথম চারটি পদ} = 1 - x + x^2 - x^3 \text{ (উত্তর)}$$

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর :

1. যদি $y = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \infty$ হয় তাহলে দেখাও যে,

$$x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \dots \infty$$

$$\Rightarrow y = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \infty$$

$$\Rightarrow 1 + y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \infty \text{ [উভয়পক্ষে 1 যোগ করে]}$$

$$\Rightarrow 1 + y = \frac{1}{1-y}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+y}$$

$$\Rightarrow 1 - x = (1 + y)^{-1}$$

$$\Rightarrow 1 - x = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - \dots \infty$$

$$\Rightarrow -x = -y + y^2 - y^3 + y^4 - \dots \infty$$

$$\Rightarrow x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \dots \infty \text{ (উত্তর)}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad (1 - x + x^2 + \dots)^{-1} &= \left\{ \frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x} \right\}^{-1} \\ &= \left(\frac{1+x^3}{1+x} \right)^{-1} \\ &= \{(1+x)^{-1}\}^{-1} (1+x^3)^{-1} \\ &= (1+x) \{1 - x^3 + (x^3)^2 - (x^3)^3 + (x^3)^4 - (x^3)^5 + \dots\} \\ &= (1+x) \{1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12} - x^{15} + \dots\} \text{ (উত্তর)} \end{aligned}$$

$$[\text{Notebook :- } (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^r x^r + \dots]$$

রচনামূলক প্রশ্নোত্তর :

1. দেখাও যে, $(1 - 4x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদটির মান $\frac{|2r}{(r)^2} x^2$

সমাধান : আমরা জানি,

$$(1+x)^n \text{ এর বিস্তৃতিতে } (r+1) \text{ তম পদ} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots}{r!} x^r$$

$$\therefore (1-4x)^{-\frac{1}{2}} \text{ এর বিস্তৃতিতে } (r+1) \text{ তম পদ}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!} (4x)^r$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots\left(\frac{2r-1}{2}\right)}{r!} (-1)^2 \cdot 4^r \cdot x^r$$

$$= (-1)^r \frac{1}{2^r} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1)}{r!} (-1)^r (2^r)^r x^r$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{2r} \frac{1.3.4.....(2r-1)}{|r|} 2^r x^r \quad [\because (-1)^{2r} = 1] \\
 &= \frac{1.3.4.....(2r-1) \cdot \{2.4.6.....(2r)\}}{|r\{2.4.5.....(2r)\}|} 2^r x^r = \frac{1.2.3.4.5.....(2r)}{|r\{(2.1).(2.2).(2.3).....(2.r)\}|} 2^r x^r \\
 &= \frac{|2r|}{|r \cdot 2^r (1.2.3.....r)|} 2^r x^r = \frac{|2r|}{|r \cdot |r|} x^r = \frac{|2r|}{(|r|)^2} x^r \quad (\text{প্রমাণিত})
 \end{aligned}$$

2. দেখাও যে, $(1 - 2x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতিতে $(r + 1)$ তম পদের সহগ $\frac{|2r|}{(|r|)^2 2^r}$

সমাধান : আমরা জানি,

$$(1 + x)^2 \text{ এর বিস্তৃতিতে } (r + 1) \text{ তম পদ} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots}{|r|} x^n$$

$$(1 - 2x)^{-\frac{1}{2}} \text{ এর বিস্তৃতিতে } r - 1 \text{ তম পদ}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right) \dots \left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{|r|} (-2x)^r$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) \dots \left(-\frac{2r-1}{2}\right)}{|r|} (-1)^r 2^r x^r$$

$$= (-1)^{2r} \frac{1}{2^r} \frac{1.3.5.....(2r-1)}{|r|} 2^r x^r$$

$$= (-1)^{2r} \frac{1.3.5.....(2r-1) \cdot \{2.4.6.....(2r)\}}{|r\{2.4.6.....(2r)\}|} x^r$$

$$= \frac{1.2.3.4.5.....(2r-1)2r}{|r\{(2.1)(2.2)(2.3) \dots (2.r)\}|} x^r = \frac{|2r|}{|r 2^r (1.2.3.....r)|} x^r$$

$$= \frac{|2r|}{|r 2^r| r} x^r = \frac{|2r|}{(|r|)^2 2^r}$$

$$\therefore x^r \text{ এর সহগ} = \frac{|2r|}{(|r|)^2 2^r} \quad (\text{প্রমাণিত})$$

3. প্রমাণ কর যে, $(1 - 5x + 6x^2)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $3^{n+1} - x^{n+1}$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান : } (1 - 5x + 6x^2)^{-1} &= \frac{1}{1-5x+6x^2} = \frac{1}{1-3x-2x+6x^2} \\
 &= \frac{1}{1(1-3x)-2x(1-3x)} = \frac{1}{(1-2x)(1-3x)}
 \end{aligned}$$

ধরি,

$$\frac{1}{(1-2x)(1-3x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-3x} \dots \dots (i)$$

(i) নং সমীকরণের উভয় পক্ষকে $(1 - 2x)(1 - 3x)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$1 = A(1 - 3x) + B(1 - 2x) \dots \dots (ii)$$

(ii) নং এ $x = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned} 1 &= A \left(1 - \frac{3}{2}\right) \\ \Rightarrow 1 &= A \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \therefore A &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{প্রদত্ত রাশি} &= \frac{1}{(1-2x)(1-3x)} = -\frac{2}{1-2x} + \frac{3}{1-3x} \\ &= -2(1-2x)^{-1} + 3(1-3x)^{-1} \\ &= -2\{1 + 2x + (2x)^2 + \dots + (2x)^5 + \dots\} \\ &\quad + 3\{1 + 3x + (3x)^2 + \dots + (3x)^r + \dots\} \end{aligned}$$

$$\therefore x^2 \text{ এর সহগ} = -2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 = 3^{2+1} - 2^{2+1}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় } x^n \text{ এর সহগ} = 3^{n+1} - 2^{n+1} \text{ (প্রমাণিত)}$$

(ii) নং এ $x = \frac{1}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned} 1 &= B \left(1 - \frac{2}{3}\right) \\ \Rightarrow 1 &= B \left(\frac{1}{3}\right) \\ \therefore B &= 3 \end{aligned}$$

উদাহরণ

উদাহরণ-১ : $(2 + 3x)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর।

সমাধান : $(2 + 3x)^{-3}$

$$\begin{aligned} &= \left\{2 \left(1 + \frac{3}{2}x\right)\right\}^{-3} = 2^{-3} \left(1 + \frac{3}{2}x\right)^{-3} \\ &= \frac{1}{8} \left\{1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots\right\} \\ &= \frac{1}{8} \left\{1 + (-3) \cdot \frac{3}{2}x + \frac{-3(-3-1)}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 x^2 + \frac{-3(-3-1)(-3-2)}{6} \left(\frac{3}{2}\right)^3 x^3 + \dots\right\} \\ &= \frac{1}{8} \left\{1 - \frac{9}{2}x + \frac{3 \times 4}{2} \times \frac{9}{4}x^2 - \frac{3 \times 4 \times 5}{6} \times \frac{27}{8}x^3 + \dots\right\} \\ &= \frac{1}{8} \left\{1 - \frac{9}{2}x + \frac{27}{2}x^2 - \frac{135}{4}x^3 \dots\right\} \text{ (উত্তর)} \end{aligned}$$

০৪

ফাংশন এবং ফাংশনের লেখ

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ (Board Questions Analysis)

📖 এই অধ্যায়ের প্রধান সূচিপত্র (contents)

বিষয়	পৃষ্ঠা নং
❖ সূত্রাবলী ও শর্টকাট টেকনিক	
❖ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ রচনামূলক প্রশ্নাবলি	

এই অধ্যায় থেকে বিগত পাঁচ বছরের ডিপ্লোমা ইন ইঞ্জিনিয়ারিং, ডিপ্লোমা ইন টেক্সটাইল, ডিপ্লোমা ইন এগ্রিকালচার, ডিপ্লোমা ইন মেরিন পরীক্ষায় মোট প্রশ্ন। নিচে ‘Board Questions Analysis’ অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেখানো হলো।

সাল \ বোর্ড	অতি সংক্ষিপ্ত	সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন	রচনামূলক প্রশ্ন
২০২৪	১টি	১টি	_____
২০২৩	_____	১টি	_____
২০২২	১টি	১টি	_____



“আমার কাছে কোনো সমীকরণের কোনো অর্থ নেই, যদি না এটি আল্লাহর চিন্তা প্রকাশ করে।”



অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

1. যদি $f(x) = e^x$ হয়, তবে $f(0)$ কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = e^x = f(0) = e^0 = 1$ $[\because a^0 = 1]$

2. $f(x) = \sin x$ হলে, $f\left(\frac{1}{3}\right) =$ কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = \sin x \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \sin \frac{1}{3}$

3. $f(x) = \tan x$ হলে, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = \tan x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tan \frac{\pi}{2} = \infty$

4. ফাংশন বা অপেক্ষা কাকে বলে ?

সমাধান :

5. $f(x) = \frac{x}{1-x}$ এর ডোমেইন নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty$

6. যদি $f(x) = e^x$ হয় তবে $f\left(\log \cos \frac{\pi}{4}\right)$ এর মান কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = e^x \Rightarrow f\left(\log \cos \frac{\pi}{4}\right) = e = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

7. যদি $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $f(\cos \theta) = \tan^2 \frac{\theta}{2}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow f(\cos \theta) = \frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}$

$$L.H.S = f(\cos \theta) = \frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta} = \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$R.H.S = \tan^2 \theta = \sin^2 2\theta = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta \Rightarrow 1 - \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta$$

$$1 + \cos \theta = 2 \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{and} \quad 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

1. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ ।

সমাধান : ধরি,

$$y = f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

$$\therefore f(x) = \frac{x}{x^2-1} \dots\dots\dots(i)$$

$$\therefore y = \frac{x}{x^2-1} \dots\dots\dots(ii)$$

i. নং হতে,

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

প্রদত্ত $f(x)$ ফাংশন অসংঙ্গায়িত হবে, যদি $x^2 - 1 = 0$ হয় বা, $x = \pm 1$ হয়। অর্থাৎ $\Rightarrow x = \pm 1$ ব্যতীত সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান নির্ণয় করা যায়।

$$\therefore \text{ডোমেন, } f = R - \{\pm 1\}$$

ii. নং হতে,

$$y = \frac{x}{x^2-1}$$

$$\text{বা, } y(x^2-1) = x$$

$$\text{বা, } x^2y - y = x$$

$$\text{বা, } x^2y - x - y = 0$$

$$\text{বা, } x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4y^2}}{2y}$$

এখানে, $y = 0$ হলে x এর মান অসংঙ্গায়িত হয়।

সুতরাং,

$$\text{রেঞ্জ, } f = R - \{0\} \quad \underline{\text{Ans:}}$$

$$\text{Note: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

এখানে,

$$b = -1$$

$$a = y$$

$$c = -y$$

$$2. f(x) = \frac{x}{1-x}$$

সমাধান: ধরি,

$$y = f(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$\therefore f(x) = \frac{x}{1-x} \dots\dots\dots(i)$$

$$\therefore y = \frac{x}{1-x} \dots\dots\dots(ii)$$

$y = -1$ হলে x এর মান অসংঙ্গায়িত

$$\text{সুতরাং: রেঞ্জ, } f = R - \{-1\}$$

(i) নং হতে,

$$y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow y(1-x) = x$$

$$\Rightarrow y - xy = x$$

$$\Rightarrow y = x + xy$$

$$\Rightarrow y = x(1+y)$$

$$\Rightarrow x = \frac{y}{1+y}$$

রচনামূলক প্রশ্নউত্তর

1. যদি $f(x) = \sin x$ এবং $\phi(x) = \cos x$ হয় তবে প্রমাণ কর যে,

সমাধান : $\phi(2x) = 1 - 2f^2(x)$

দেয়া আছে,

$$f(x) = \sin x$$

$$\phi(x) = \cos x$$

$$\therefore \phi(2x) = \cos 2x$$

$$L.S = \phi(2x)$$

$$= \cos 2x$$

$$R.S = 1 - 2f^2(x)$$

$$= 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$$

$$\therefore L.S = R.S \quad (\text{proved})$$

2. যদি $f(x) = e^{-x}$ হয় তবে দেখাও যে, $(x+y)f(x-y)f(2x)f(2y)$.

সমাধান : দেয়া আছে,

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

$$\therefore f(x) = e^{x+y} + e^{-x-y}$$

$$\therefore f(x-y) = e^{x-y} + e^{-x+y}$$

$$\therefore f(2x) = e^{2x} + e^{-2x}$$

$$\therefore f(x) = e^{2y} + e^{-2y}$$

$$L.H.S = f(x+y) \cdot f(x-y)$$

$$= (e^{x+y} + e^{x-y}) \times (e^{x-y} + e^{-x+y}) = e^{2x} + e^{2y} + e^{-2y} + e^{-2x}$$

$$= (e^{2x} + e^{-2x}) + (e^{2y} + e^{-2y})$$

$$R.H.S = f(2x) + f(2y)$$

$$= (e^{2x} + e^{-2x}) + (e^{2y} + e^{-2y})$$

$$\therefore L.S = R.S \quad (\text{Showed})$$

3. যদি $f(x) = \log \sin x$ এবং $\phi(x) = \log \cos x$ হয় তবে প্রমাণ কর যে,

(i) $e^{2\phi(a)} - e^{2f(a)} = e^{\phi(2a)}$

সমাধান : দেয়া আছে,

$$f(x) = \log \sin x$$

$$\therefore f(a) = \log \sin a$$

$$\phi(x) = \log \cos x$$

$$\therefore \phi(a) = \log \cos a$$

$$\therefore \phi(2a) = \log \cos 2a$$

$$L.S = e^{2\phi(a)} - e^{2f(a)}$$

Note:

$e^{\log a}$ পরস্পর কাটা যায়। তাই,

$$e^{\log a} = a$$

অথবা, $e^{\log \cos^2 a} = \cos^2 a$

$$\begin{aligned}
 &= e^{2\log\cos a} - e^{2\log\sin a} = e^{\log\cos^2 a} - e^{\log\sin^2 a} \\
 &= \cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a \\
 R.S &= e^{\log(\cos^2 a)} = e^{\log\cos^2 a} = \cos^2 a \\
 \therefore L.S &= R.S
 \end{aligned}$$

4. যদি $y = f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$ হয় তবে প্রমাণ করতে হবে যে, $f(y) = x$

সমাধান: দেয়া আছে,

$$y = f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$$

$$\therefore f(x) = \frac{4x-7}{2x-4} \dots\dots(i)$$

$$\therefore y = \frac{4x-7}{2x-4} \dots\dots(ii)$$

(i) নং হতে ,

$$f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$$

$$f(y) = \frac{4y-7}{2y-4}$$

ii. হতে পাই

$$y = \frac{4x-7}{2x-4}$$

$$\Rightarrow 2xy - 4y = 4x - 7$$

$$\Rightarrow 2xy - 4x = 4y - 7$$

$$\Rightarrow x(2y - 4) = 4y - 7$$

$$\Rightarrow x = \frac{4y - 7}{2y - 4}$$

সুতরাং, $f(y) = x$ (প্রমানিত)

5. যদি $f(x) = h \frac{x-k}{h-k} + k \frac{x-h}{k-h}$ হয় তবে প্রমাণ করতে হবে যে, $f(h) + f(k) = f(h+k)$

সমাধান:

$$\text{দেয়া আছে, } f(x) = h \frac{x-k}{h-k} + k \frac{x-h}{k-h}$$

$$\therefore f(h) = h \frac{h-k}{h-k} + k \frac{h-h}{k-h}$$

$$\therefore f(h) = h$$

$$\therefore f(k) = h \frac{k-k}{h-k} + k \frac{k-h}{k-h}$$

$$f(k) = k$$

$$\text{আবার, } f(h+k) = h \frac{h+k-k}{h-k} + k \frac{h+k-h}{k-h}$$

$$= \frac{h^2}{h^2 - k^2} + \frac{k^2}{h^2 - k^2} = \frac{h^2}{h^2 - k^2} + \frac{k^2}{h^2 - k^2}$$

$$= \frac{h^2 + k^2}{h^2 - k^2} = \frac{(h+k)(h-k)}{(h-k)(h+k)}$$

$$= \frac{h+k}{1} = h+k$$

$$f(h+k) = h+k$$

$$L.S = f(x) + f(k) = h+k$$

$$R.S = f(x + k) = h + k$$

সুতরাং , L.S= R.S (Proved)

6. যদি $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ হয় তবে দেখাও যে, $f(\cos\theta) = \tan^2 \frac{\theta}{2}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

$$f(\cos\theta) = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \tan^2 \frac{\theta}{2} \quad f(\cos\theta) = \tan^2 \frac{\theta}{2}$$

সুতরাং , L.S = R.S (প্রমাণিত)

০৫

সীমা

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ (Board Questions Analysis)

📖 এই অধ্যায়ের প্রধান সূচিপত্র (contents)	
বিষয়	পৃষ্ঠা নং
❖ সূত্রাবলী ও শর্টকাট টেকনিক	
❖ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ রচনামূলক প্রশ্নাবলি	

এই অধ্যায় থেকে বিগত পাঁচ বছরের ডিপ্লোমা ইন ইঞ্জিনিয়ারিং, ডিপ্লোমা ইন টেক্সটাইল, ডিপ্লোমা ইন এগ্রিকালচার, ডিপ্লোমা ইন মেরিন পরীক্ষায় মোট প্রশ্ন। নিচে ‘Board Questions Analysis’ অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেখানো হলো।

সাল \ বোর্ড	অতি সংক্ষিপ্ত	সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন	রচনামূলক প্রশ্ন
২০২৪	১টি	১টি	_____
২০২৩	১টি	১টি	_____
২০২২	১টি	১টি	_____



“গণিত তার কাছেই প্রকৃত সৌন্দর্য সহকারে ধরা দেয়, যে
বিশুদ্ধ মন ও ভালোবাসা নিয়ে গণিতের দিকে অগ্রসর হয়।”



এই অধ্যায়ের এর সূত্র

$$1. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$3. \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin \theta} = 1 \quad \text{বা, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin \theta} = 1$$

$$4. \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\tan \theta} = 1 \quad \text{বা, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan \theta} = 1$$

অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

$$1. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \text{ এর মান লেখ।}$$

$$\text{সমাধান: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1} = na^{n-1} \quad (\text{উত্তর})$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x-1} \text{ এর মান নির্ণয় কর।}$$

$$\text{সমাধান : } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x-1} = \lim_{\frac{1}{x} \rightarrow 0} 1 \frac{1}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2} \quad (\text{উত্তর})$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \text{কত?}$$

$$\text{সমাধান : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4 \quad (\text{উত্তর})$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{cosec} x = \text{কত?}$$

$$\text{সমাধান : } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{cosec} x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad (\text{উত্তর})$$

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

1. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(\pi - x)^2}$

সমাধান

ধরি,

যখন, $h \rightarrow 0$

$$x = \pi + h$$

$$\Rightarrow \pi + h = x \Rightarrow \pi - x = -h$$

$$\left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \right]$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(\pi + h)}{(-h)^2}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) \times \frac{1}{4}$$

$$= 2 \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (\text{Ans:})$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}$

সমাধান :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a - \sqrt{a^2 - x^2})(a + \sqrt{a^2 - x^2})}{x^2(a + \sqrt{a^2 - x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 - (\sqrt{a^2 - x^2})^2}{x^2(a + \sqrt{a^2 - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 - a^2 + x^2}{x^2(a + \sqrt{a^2 - x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(a + \sqrt{a^2 - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - 0}} \\ &= \frac{1}{a + a} = \frac{1}{2a} \quad (\text{Ans.}) \end{aligned}$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-4x}}{x}$

সমাধান :

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-4x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-4x})(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x})}{x(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+3x})^2 - (\sqrt{1-4x})^2}{x(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x})} \end{aligned}$$

উভয়পক্ষকে $(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x})$ দ্বারা গুণ করে।

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 + 3x - 1 + 4x}{x(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{x(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7}{\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x}} = \frac{7}{\sqrt{1+3 \times 0} + \sqrt{1-4 \times 0}} \\
 &= \frac{7}{1+1} = \frac{7}{2} \quad (\text{Ans:})
 \end{aligned}$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

সমাধান :

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1-x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} \\
 &= \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1 \text{ Ans}
 \end{aligned}$$

উভয়পক্ষকে
($\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$)
দ্বারা গুণ করে।

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

সমাধান :

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \times \frac{1}{4} \\
 &= 2 \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (\text{Ans})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &[1 - \cos 2\theta \\
 &= 2 \sin^2 \theta]
 \end{aligned}$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \right]$$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 9x}{\cos 3x - \cos 5x}$

সমাধান :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 9x}{\cos 3x - \cos 5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{7x+9x}{2} \sin \frac{9x-7x}{2}}{2 \sin \frac{3x+5x}{2} \sin \frac{5x-3x}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x \cdot \sin x}{\sin 4x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\sin 4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 4x \cdot \cos 4x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos 4x \\ &= 2 \times \cos 4 \times 0 = 2 \times 1 = 2 \quad (\text{Ans}) \end{aligned}$$

$$[\cos C - \cos D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{D-C}{2}]$$

$$[\sin 2A = 2 \sin A \cdot \cos A]$$

7. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

সমাধান,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5 - \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^5}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x})^5 - (\sqrt{a})^5}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 5(\sqrt{a})^{5-1} \\ &= 5(\sqrt{a})^4 = 5\{(\sqrt{a})^2\}^2 = 5a^2 \quad (\text{Ans}) \end{aligned}$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1} \right]$$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{3x^2}$

সমাধান:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{7x}{2}}{3x^2} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}} \right)^2 \times \frac{49}{4} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{49}{4} = \frac{49}{6} \quad (\text{Ans}) \end{aligned}$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right]$$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 2x}$

সমাধান :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(\sin 2x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4(1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4(1 + \cos x)(1 - \cos x) \cdot \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(1 + \cos x) \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{4(1+1) \cdot 1} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x} [\because \sin^2 x = 1 - \cos^2 x]$$

$$[a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$$

(Ans)

10. $\lim_{x \rightarrow y} \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$

সমাধান :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow y} \frac{\sin x - \sin y}{x - y} &= \lim_{x \rightarrow y} \frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}}{x - y} \\
 &= \lim_{x \rightarrow y} \cos \frac{x+y}{2} \times \lim_{x \rightarrow y} \left(\frac{\sin \frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}} \right) \times \frac{1}{2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow y} \cos \frac{y+y}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow y} \frac{\sin \frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}} \times \frac{1}{2} \\
 &= 2 \cos y \times \frac{1}{2} = \cos y \quad (\text{Ans})
 \end{aligned}$$

০৬

অন্তরক সহগ ও অন্তরীকরণ

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ (Board Questions Analysis)

📖 এই অধ্যায়ের প্রধান সূচিপত্র (contents)	
বিষয়	পৃষ্ঠা নং
❖ সূত্রাবলী ও শর্টকাট টেকনিক	
❖ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ রচনামূলক প্রশ্নাবলি	

এই অধ্যায় থেকে বিগত পাঁচ বছরের ডিপ্লোমা ইন ইঞ্জিনিয়ারিং, ডিপ্লোমা ইন টেক্সটাইল, ডিপ্লোমা ইন এগ্রিকালচার, ডিপ্লোমা ইন মেরিন পরীক্ষায় মোট প্রশ্ন। নিচে ‘Board Questions Analysis’ অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেখানো হলো।

সাল \ বোর্ড	অতি সংক্ষিপ্ত	সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন	রচনামূলক প্রশ্ন
২০২৪	_____	১টি	_____
২০২৩	১টি	১টি	_____
২০২২	১টি	_____	১টি



“গণিত ভালবাসার মতই; সাধারণ একটি ব্যাপার, কিন্তু জটিল হয়ে উঠতেই পারে।”



ধর্মাস এডিসন

এই অধ্যায়ের এর সূত্র

$$1. \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

$$1. \frac{d}{dx} (e^x) \text{ এর মান কত?}$$

[বকাশিবো : ২১]

$$\text{সমাধান : } \frac{d}{dx} (e^x) = e^x \text{ (উত্তর)}$$

$$2. \text{মূল নিয়মে অন্তরক সহগ সূত্রটি লেখ।}$$

$$\text{সমাধান : মনে করি, } y = f(x) \therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ (উত্তর)}$$

$$3. \frac{d}{dx} (e^x \cdot \cos x) \text{ নির্ণয় কর।}$$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } \frac{d}{dx} (e^x \cos x) &= \cos x \frac{d}{dx} (e^x) + e^x \frac{d}{dx} (\cos x) \\ &= e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x) \end{aligned} \text{ (উত্তর)}$$

$$4. \frac{d}{dx} (x^n) = \text{কত?}$$

$$\text{সমাধান : } \frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1} \text{ (উত্তর)}$$

$$5. \frac{d}{dx} (\sec^{-1} x) = \text{কত?}$$

$$\text{সমাধান : } \frac{d}{dx} (\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \text{ (উত্তর)}$$

$$6. S = ut + \frac{1}{2}ft^2 \text{ হলে } \frac{ds}{dt} \text{ নির্ণয় কর।}$$

$$\text{সমাধান : } s = ut + \frac{1}{2}ft^2, \therefore \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \left(ut + \frac{1}{2}ft^2 \right) = u + ft \text{ (উত্তর)}$$

$$7. 10^x \text{ এর অন্তরীকরণ কর।}$$

$$\text{সমাধান : } \frac{d}{dx} (10^x) = 10^x \log_e 10 \text{ (উত্তর)}$$

$$8. \frac{d}{dx} \left(x - \frac{1}{x} \right) = \text{কত?}$$

$$\text{সমাধান : } \frac{d}{dx} \left(x - \frac{1}{x} \right) = \frac{d}{dx} (x - x^{-1}) = 1 - (-1)x^{-1-1} = 1 + x^2 = 1 + \frac{1}{x^2} \text{ (উত্তর)}$$

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

1. মূল নিয়মে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, $y = \sqrt{x}$

$$\therefore f(x) = \sqrt{x}$$

$$\therefore f(x+h) = \sqrt{x+h}$$

আমরা জানি,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad [\text{উভয় পক্ষকে } (\sqrt{x+h} + \sqrt{x}) \text{ দ্বারা গুণ করে}]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}))}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \quad [a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}$$

$$\therefore \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (\text{উত্তর})$$

2. e^x

সমাধান :

ধরি, $y = e^x$

$$\therefore f(x) = e^x$$

$$\therefore f(x+h) = e^{x+h}$$

আমরা জানি,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(e^x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h-1}{h} \quad [\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h-1}{h} = 1]$$

$$= e^x \times 1 = e^x \quad (\text{উত্তর})$$

3. $\sin 2x$

সমাধান :

ধরি, $y = f(x) = \sin 2x$

$$\therefore f(x+h) = \sin 2(x+h)$$

আমরা জানি,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{d}{dx}(\sin 2x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2(x+h) - \sin 2x}{h} \\
 &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cos \frac{2(x+h)+2x}{2} \sin \frac{2(x+h)-2x}{2}}{h}}{h} \quad [\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}] \\
 &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{2x+2h+2x}{2} \sin \frac{2x+2h-2x}{2}}{h} = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos \left(\frac{4x+2h}{2} \right) \sin \frac{2h}{h}}{h} \\
 &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos \left(\frac{2(2x+h)}{2} \right) \sin \frac{2h}{h}}{h} = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(2x+h) \sin h}{h} \\
 &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \cos(2x+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \quad [\because \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1] \\
 &= 2 \times \cos(2x + 0) \times 1 = 2 \cos 2x \quad (\text{উত্তর})
 \end{aligned}$$

4. $\cos 2x$

সমাধান :

ধরি, $y = f(x) = \cos 2x$
 $\therefore f(x+h) = \cos 2(x+h)$

আমরা জানি,

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 \therefore \frac{d}{dx}(\cos 2x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2(x+h) - \cos 2x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin \frac{2(x+h)+2x}{2} \sin \frac{2x-2(x+h)}{2}}{h}}{h} \quad [\cos C - \cos D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{D-C}{2}] \\
 &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{2x+2h+2x}{2} \sin \frac{2x-2x-2h}{2}}{h} = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{4x+2h}{2} \sin -\frac{2h}{2}}{h} \\
 &= -2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{2(2x+h)}{2} \sin h}{h} = -2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(2x+h) \sin h}{h} \\
 &= -2 \lim_{h \rightarrow 0} \sin(2x+h) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \quad \left[\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \right] \\
 &= -2 \times \sin(2x + 0) \times 1 = -2 \sin 2x \quad (\text{উত্তর})
 \end{aligned}$$

5. a^x

সমাধান :

ধরি, $y = a^x$
 $\therefore f(x) = a^x$
 $\therefore f(x+h) = a^{x+h}$

আমরা জানি,

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 \Rightarrow \frac{d}{dx}(a^x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} \\
 &= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\log a^h} - 1}{h}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h \log a} - 1}{h} = a^x \lim_{h \log a \rightarrow 0} \frac{e^{h \log a} - 1}{h \log a \times \frac{1}{\log a}} \quad \left[\frac{e^{h \log a} - 1}{h \log a} = 1 \right] \\
 &= a^x \times 1 \times \log a = a^x \log a \quad (\text{উত্তর})
 \end{aligned}$$

6. $\log_e x$

সমাধান :

ধরি, $y = \log_e x$

$$\therefore f(x) = \log_e x$$

$$\therefore f(x+h) = \log_e(x+h)$$

আমরা জানি,

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 \therefore \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_e(x+h) - \log_e x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_e \frac{x+h}{x}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_e \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x} \times x} = \lim_{\frac{h}{x} \rightarrow 0} \frac{\log_e \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} \quad \left[\therefore \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1 \right] \\
 &= 1 \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \therefore \frac{d}{dx} (\log_e x) = \frac{1}{x} \quad (\text{উত্তর})
 \end{aligned}$$

7. e^{ax}

সমাধান :

ধরি, $y = e^{ax}$

$$\therefore f(x) = e^{ax}$$

$$\therefore f(x+h) = e^{a(x+h)} = e^{ax+ah}$$

আমরা জানি,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 \frac{d}{dx} e^{ax} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ax+ah} - e^{ax}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ax} e^{ah} - e^{ax}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ax} (e^{ah} - 1)}{h} \\
 &= e^{ax} \lim_{ah \rightarrow 0} \frac{e^{ah} - 1}{ah \times \frac{1}{a}} = e^{ax} \cdot a \quad \left[\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \right] \\
 &= ae^{ax} \quad (\text{উত্তর})
 \end{aligned}$$

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ (Board Questions Analysis)

📖 এই অধ্যায়ের প্রধান সূচিপত্র (contents)

বিষয়	পৃষ্ঠা নং
❖ সূত্রাবলী ও শর্টকাট টেকনিক	
❖ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ রচনামূলক প্রশ্নাবলি	

এই অধ্যায় থেকে বিগত পাঁচ বছরের ডিপ্লোমা ইন ইঞ্জিনিয়ারিং, ডিপ্লোমা ইন টেক্সটাইল, ডিপ্লোমা ইন এগ্রিকালচার, ডিপ্লোমা ইন মেরিন পরীক্ষায় মোট প্রশ্ন। নিচে ‘Board Questions Analysis’ অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেখানো হলো।

সাল \ বোর্ড	অতি সংক্ষিপ্ত	সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন	রচনামূলক প্রশ্ন
২০২৪	—	১টি	১টি
২০২৩	১টি	১টি	১টি
২০২২	১টি	১টি	—



“গণিত তার কাছেই প্রকৃত সৌন্দর্য সহকারে ধরা দেয়, যে
বিশুদ্ধ মন ও ভালোবাসা নিয়ে গণিতের দিকে অগ্রসর হয়।”



থমাস এডিসন

এই অধ্যায়ের এর সূত্র

$$1. \frac{d}{dx}(c) = 0 \text{ বা, } \frac{d}{dx}(\text{সংখ্যা বা ধ্রুবক}) = 0$$

$$2. \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$3. \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$4. \frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$$

$$5. \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$6. \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$7. \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

$$8. \frac{d}{dx}\cot x = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$9. \frac{d}{dx}\sec x = \sec x \cdot \tan x$$

$$10. \frac{d}{dx}\sec x = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$$

$$11. \frac{d}{dx}x = 1$$

$$12. \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$13. \frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14. \frac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15. \frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$16. \frac{d}{dx}\cot^{-1} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$17. \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$18. \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$19. \frac{d}{dx}u^2 = u \frac{d}{dx}v + v \frac{d}{dx}u$$

$$20. \frac{d}{dx} \cdot \frac{u}{v} = \frac{v \frac{d}{dx}u - u \frac{d}{dx}v}{v^2}$$

অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

$$1. \frac{d}{dx}(\sin x) = \text{কত?}$$

[বাকশিবো: ২১]

$$\text{সমাধান : } \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad (\text{উত্তর})$$

$$2. \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \text{কত?}$$

[বাকশিবো: ২০]

$$\text{সমাধান : } \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{উত্তর})$$

$$3. \frac{d}{dx}(uv) = \text{কত?}$$

[বাকশিবো: ২০]

$$\text{সমাধান : } \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad (\text{উত্তর})$$

$$4. \frac{d}{dx}(e^{-x}\sin x) \text{ নির্ণয় কর।}$$

[বাকশিবো: ১৯]

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } \frac{d}{dx}(e^x \sin x) &= e^x \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \frac{d}{dx}e^x = e^x \cos x + \sin x \cdot e^x \\ &= e^x(\cos x + \sin x) \quad (\text{উত্তর}) \end{aligned}$$

5. $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} 2x) =$ কত?

[বাকশির্বো: ৯৮, ১৪, ১৮]

সমাধান : $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} 2x) = -1/(2x\sqrt{(2x)^2 - 1}) \cdot 2 = -\frac{1}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$ (উত্তর)

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

(i) $y = \sin^2 \log (\cos^2)$

সমাধান : দেওয়া আছে, $y = \sin^2 \log (\cos x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= (\sin \log \cos x)^2 = 2 \sin \log \cos x \cdot \frac{d}{dx} \sin \log \cos x \\ &= 2 \sin \log \cos x \cdot \cos \log \cos x \cdot \frac{d}{dx} \log \cos x \\ &= 2 \sin \log \cos x \cdot \cos \log \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} \frac{d}{dx} \cos x \\ &= \sin 2 \log \cos x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x} = \sin 2 \log \cos x \cdot x - \tan x \\ &= -\tan x \sin 2 \log \cos x \quad (\text{উত্তর}) \end{aligned}$$

(ii) $\frac{d}{dx} \cdot \frac{x^x + \tan x}{e^x - \cot x}$

সমাধান : $= \frac{(e^x - \cot x) \frac{d}{dx} (x^x + \tan x) - (x^x + \tan x) \frac{d}{dx} (e^x - \cot x)}{(e^x - \cot x)^2}$
 $= \frac{(e^x + \cot x)(nx^{n+1} + \sec x \cdot \tan x) - (x^x + \tan x)(e^x + \cos x)}{(e^x - \cot x)^2}$ (উত্তর)

(iii) $\frac{d}{dx} \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

সমাধান : $= \frac{(1 - \sin x) \frac{d}{dx} (1 + \sin x) - (1 + \sin x) \frac{d}{dx} (1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2} = \frac{(1 - \sin x) \cos x - (1 + \sin x) \cdot (-\cos x)}{(1 - \sin x)^2}$
 $= \frac{\cos x - \sin x \cdot \cos x + (1 + \sin x) \cdot \cos x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2}$ [Ans]

(iv) $\frac{d}{dx} e^{5x} \log \sec x$

সমাধান : $= e^{5x} \frac{d}{dx} \log \sec x + \log \sec x \cdot \frac{d}{dx} e^{5x}$
 $= e^{5x} \frac{1}{\sec x} \frac{d}{dx} \sec x + \log \sec x e^{5x} \frac{d}{dx} 5x$
 $= e^{5x} \frac{1}{\sec x} \sec x \tan x + \log \sec x \cdot e^{5x} \cdot 5 = e^{5x} (5 \log \sec x + \tan x)$

v. $\tan^{-1} \frac{4\sqrt{x}}{1-4x}$

সমাধান : $= \tan^{-1} \frac{2 \cdot 2\sqrt{x}}{1-(2\sqrt{x})^2} = 2 \tan^{-1} 2\sqrt{x} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \sqrt{\frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \sqrt{\cot^2 \frac{x}{2}}$
 $= \cot \frac{x}{2} \therefore \frac{d}{dx} \cot \frac{x}{2} = -\operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{d}{dx} \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}$ (উত্তর)

vi. $\sqrt{\sin \sqrt{x}}$

সমাধান : ধরি, $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$
 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{\sin \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{\sin \sqrt{x}}} \times \frac{d}{dx} \sin \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{\sin \sqrt{x}}} \times \cos \sqrt{x} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{x}$
 $= \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{\sin \sqrt{x}}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos \sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin \sqrt{x}}}$ (উত্তর)

vii. $\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1 - \sin 2x}}$

সমাধান : $\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1 - \sin 2x}} \left[\begin{array}{l} 1 = \sin^2 x + \cos^2 x \\ \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x \end{array} \right]$
 $= \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\frac{\sin^2 x}{a} + \frac{\cos^2 x}{b} - \frac{2 \sin x \cos x}{a} \frac{b}{b}}}$
 $= \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{(\sin x - \cos x)^2}} \left[\begin{array}{l} a^2 + b^2 - 2ab \\ = (a - b)^2 \end{array} \right] = 1 \therefore \frac{d}{dx} (1) = 0$ [ans]

০৮

 $\frac{dy}{dx}$ এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ (Board Questions Analysis)

📖 এই অধ্যায়ের প্রধান সূচিপত্র (contents)

বিষয়	পৃষ্ঠা নং
❖ সূত্রাবলী ও শর্টকাট টেকনিক	
❖ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ রচনামূলক প্রশ্নাবলি	

এই অধ্যায় থেকে বিগত পাঁচ বছরের ডিপ্লোমা ইন ইঞ্জিনিয়ারিং, ডিপ্লোমা ইন টেক্সটাইল, ডিপ্লোমা ইন এগ্রিকালচার, ডিপ্লোমা ইন মেরিন পরীক্ষায় মোট প্রশ্ন। নিচে ‘Board Questions Analysis’ অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেখানো হলো।

সাল \ বোর্ড	অতি সংক্ষিপ্ত	সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন	রচনামূলক প্রশ্ন
২০২৪	_____	১টি	_____
২০২৩	১টি	১টি	_____
২০২২	১টি	১টি	_____



“গণিতকে অবজ্ঞা করা জ্ঞানার্জনের পক্ষে ক্ষতিকর কারণ গণিত ছাড়া বিজ্ঞান বা বিশ্বব্রহ্মাণ্ড সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ করা অসম্ভব।”



এই অধ্যায়ের এর সূত্র

1. $\frac{dy}{dx} = \tan 90^\circ$ [স্পর্শক x অক্ষের উপর লম্ব]
2. $\frac{dy}{dx} = \tan 0^\circ = 0$ [স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল]

অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

1. স্পর্শক x অক্ষের উপর লম্ব হলে $\frac{dy}{dx}$ কত?

[বাকশিবো: ১৮, ২০, ২১]

সমাধান : স্পর্শক x অক্ষের উপর লম্ব হলে $\frac{dy}{dx} =$ কত?

2. $y = \frac{1}{x^2}$ বক্ররেখার $x = -1$ বিন্দুতে ঢাল নির্ণয় কর।

[বাকশিবো: ১৯]

সমাধান : $y = \frac{1}{x^2}$ বা, $y = x^{-2}$ বা, $\frac{dy}{dx} = -2x^{-2-1}, \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3},$

$$\therefore x = -1 \text{ বিন্দুতে ঢাল} = -\frac{2}{(-1)^3} = 2.$$

3. স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল হলে $\frac{dy}{dx}$ কত?

[বাকশিবো: ১৪, ১৫]

সমাধান : স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল হলে $\frac{dy}{dx} = \tan 0^\circ = 0.$

4. $\frac{dy}{dx} = 1$ হলে স্পর্শক x অক্ষের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করবে।

[বাকশিবো: ১৪, ১৫]

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{dy}{dx} = 1$, বা, $\tan \theta = \tan 45^\circ, \therefore \theta = 45^\circ, \therefore$ নির্ণেয় কোণ 45°

5. $\frac{dy}{dx} = 0$ হলে স্পর্শক x অক্ষের সাথে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করবে।

[বাকশিবো: ১২, ১৫]

সমাধান : $\frac{dy}{dx} = 0$, বা, $\tan \theta = \tan 0^\circ, \therefore \theta = 0^\circ$

6. $y^2 = x^2$ বক্ররেখার $(1, 1)$ বিন্দুতে ঢাল কত?

[বাকশিবো: ১৫]

সমাধান : $y^2 = x^2$, বা, $2y \frac{dy}{dx} = 2x$ বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \therefore (1,1)$ বিন্দুতে ঢাল $\frac{dy}{dx} = 1$

7. $\frac{dy}{dx} = \infty$ হলে স্পর্শক অক্ষের সাথে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করবে।

[বাকশিবো: ১৩]

সমাধান : $\frac{dy}{dx} = \infty$, বা, $\tan \theta = \tan 90^\circ, \therefore \theta = 90^\circ, \therefore$ নির্ণেয় কোণ 90°

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

1. $x^2 + xy + y^2 = 0$ বক্সরেখার $(2, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেওয়া আছে, $x^2 + xy + y^2 = 0$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\Rightarrow (x + 2y) \frac{dy}{dx} = -(2x + y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

$$\therefore (2, -2) \text{ বিন্দুতে} = -\frac{2 \cdot 2 + (-2)}{2 + 2(-2)} = -\frac{4-2}{2-4} = -\frac{2}{-2} = 1$$

$$\text{ঢাল} = 1 \quad (\text{উত্তর})$$

2. $y = \sqrt{x}$ বক্সরেখার উপর কোন বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে?

সমাধান :

দেওয়া আছে, $y = \sqrt{x} \dots \dots (i)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

প্রশ্নমতে, $\frac{dy}{dx} = \tan 45^\circ$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$$

$$[\because \tan 45^\circ = 1]$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{1}{4}$$

x এর মান (i) নং সমীকরণে বসাই,

$$y = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

\therefore নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (উত্তর)

3. $y = x^2 + \sqrt{1-x^2}$ বক্সরেখার উপর যেসব বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের উপর লম্ব সেই সব বিন্দু গুলো বের কর।

সমাধান :

দেওয়া আছে, $y = x^2 + \sqrt{1-x^2}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

যেহেতু স্পর্শকটি x অক্ষের উপর লম্ব সুতরাং $\frac{dy}{dx} = \infty$

$$\Rightarrow \frac{2x(\sqrt{1-x^2})-x}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$$

$$\Rightarrow \frac{2x(\sqrt{1-x^2})-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0} \quad [\therefore = \frac{1}{0}]$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 1-x^2 = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 = -1$$

$$\Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{যখন } x = 1 \text{ তখন } y = (1)^2 + \sqrt{1-1^2} \\ = 1$$

$$\text{যখন } x = -1 \text{ তখন } y = (-1)^2 + \sqrt{1-(-1)^2} \\ = 1$$

\therefore নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1,1), (-1,1)$ (উত্তর)

4. $y = 2x^3 + 2x^3 - 12x + 10$ বক্সরেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সাথে সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেওয়া আছে, $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 12 \quad [x \text{ এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে}]$$

যেহেতু স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল সেহেতু $\frac{dy}{dx} = 0$

$$6x^2 + 6x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 6(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } x + 2 = 0$$

$$\therefore x = -2$$

$$\therefore x = -2, 1$$

$$\text{অথবা, } x - 1 = 0$$

$$\therefore x = 1$$

$$\begin{aligned} \text{যখন, } x = -2 \text{ তখন } y &= 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(2) + 10 \\ &= -16 + 12 + 24 + 10 \\ &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{যখন, } x = 1 \text{ তখন, } y &= 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) + 10 \\ &= 2 + 3 - 12 + 10 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক } (1, 3), (-2, 30) \quad (\text{উত্তর})$$

5. $y = x^3 - 3x + 2$ বক্সরেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক গুলো x অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান :

$$\text{দেওয়া আছে, } y = x^3 - 3x + 2$$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$$

যেহেতু স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল কাজেই $\frac{dy}{dx} = 0$ হবে।

$$\text{সুতরাং } 3x^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 1$$

$$\therefore x = \pm 1$$

$$\text{যখন } x = 1 \text{ তখন } y = (1)^3 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

$$\text{যখন } x = -1 \text{ তখন } y = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক } (1, 0), (-1, 4) \quad (\text{উত্তর})$$

$$\frac{dy}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}(x^3) &= 3x^{3-1} \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

রচনামূলক প্রশ্নোত্তর

1. $y = x^2 + \sqrt{4 - x^2}$ বক্সরেখার উপর যেসব বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের উপর লম্ব সেই সব বিন্দুগুলো বের কর।

সমাধান :

দেওয়া আছে, $y = x^2 + \sqrt{4 - x^2}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2x + \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}(-2x) \\ &= 2x - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{2x\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}\end{aligned}$$

যেহেতু x অক্ষের উপর লম্ব কাজেই $\frac{dy}{dx} = \infty$

$$\Rightarrow \frac{2x\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}} = \infty$$

$$\Rightarrow \frac{2x\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{0}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4-x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 = -4$$

$$\Rightarrow x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

$$\begin{aligned}\text{যখন } x = 2 \text{ তখন } y &= (2)^2 + \sqrt{4 - (2)^2} \\ &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{যখন } x = -2 \text{ তখন } y &= (-2)^2 + \sqrt{4 - (-2)^2} \\ &= 4\end{aligned}$$

\therefore নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2,4), (-2,4)$ (উত্তর)

০৯

পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণের সমস্যা সমাধানে মিবনীজের উপপাদ্যের ব্যবহার

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ (Board Questions Analysis)

📖 এই অধ্যায়ের প্রধান সূচিপত্র (contents)

বিষয়	পৃষ্ঠা নং
❖ সূত্রাবলী ও শর্টকাট টেকনিক	
❖ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ রচনামূলক প্রশ্নাবলি	

এই অধ্যায় থেকে বিগত পাঁচ বছরের ডিপ্লোমা ইন ইঞ্জিনিয়ারিং, ডিপ্লোমা ইন টেক্সটাইল, ডিপ্লোমা ইন এগ্রিকালচার, ডিপ্লোমা ইন মেরিন পরীক্ষায় মোট প্রশ্ন। নিচে ‘Board Questions Analysis’ অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেখানো হলো।

সাল \ বোর্ড	অতি সংক্ষিপ্ত	সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন	রচনামূলক প্রশ্ন
২০২৪	১টি	_____	১টি
২০২৩	১টি	১টি	_____
২০২২	_____	_____	১টি



“গণিতে আপনার সমস্যা নিয়ে চিন্তা করবেন না। নিশ্চিত থাকুন আমার সমস্যা আরও বেশি।”



এই অধ্যায়ের এর সূত্র

$$1. (uv)_n = uv_n + {}^nC_1 u_1 v_{n-1} + {}^nC_2 u_2 v_{n-2} + \cdots + {}^nC_r u_r v_{n-r} + \cdots + U_{n^2}$$

অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

1. $y = e^x$ হলে $Y_n =$ কত?

[বাকশিৰো : ৯৮, '১১, '২০, '২২]

সমাধান : $y = e^x, \Rightarrow y_1 = e^x, \Rightarrow y_2 = e^x, \Rightarrow y_n = e^x$ (উত্তর)

2. $y = e^{-ax}$ হলে $Y_n =$ কত?

[বাকশিৰো : ০১, ০৩R, ০৯, '১০, '১২, '১৩, '১৪R, '১৫R, '১৭R]

সমাধান : $y = e^{-ax}, \Rightarrow y_1 = -ae^{-ax} = (-1)ae^{-ax},$
 $\Rightarrow y_2 = (-1)a.(-1)ae^{-ax} = (-1)^2 a^2 e^{-ax}$
 $\Rightarrow y_3 = (-1)^3 a^3 e^{-ax}, \Rightarrow y_n = (-1)^n a^n e^{-ax}$ (উত্তর)

3. লিববনিজের উপপাদ্যটি লেখ।

[বাকশিৰো : '১৭T]

সমাধান : যদি u এবং v উভয়ই x এর ফাংশন হয়, তবে এদের গুণফলের n তম অন্তরক সহগ হলো,

$$(uv)_n = uv_n + {}^nC_1 u_1 v_{n-1} + {}^nC_2 u_2 v_{n-2} + {}^nC_3 u_3 v_{n-3} + \cdots + {}^nC_1 u_r v_{n-r} + \cdots + u_n v$$

4. $y = x^n$ হলে $Y_n =$ কত?

[বাকশিৰো : '০২R, '১১R, '১৫]

সমাধান : $y = x^n, \Rightarrow y_1 = nx^{n-1}, \Rightarrow y_2 = n(n-1)x^{n-2}$
 $\Rightarrow y_3 = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

অনুরূপভাবে,

$$y_n = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1. x^{n-n} = n!. x^0 = n! \quad (\text{উত্তর})$$

5. $y = a^x$ হলে $Y_n =$ কত?

[বাকশিৰো : '১৫]

সমাধান : $y = a^x, \Rightarrow y_1 = a^x \log_e a, \Rightarrow y_2 = a^x (\log_e a)^2, \Rightarrow y_3 = a^x (\log_e a)^3$
 $\therefore y_n = a^x (\log_e a)^3$ (উত্তর)

6. $y = \cos x$ হলে দেখাও যে, $y_4 - y = 0$

[বাকশিৰো : '১২, '১৫]

সমাধান: $y = \cos x, \Rightarrow y_1 = -\sin x, \Rightarrow y_2 = -\cos x, \Rightarrow y_3 = \sin x$

$$y_4 = \cos x = y, \Rightarrow y_4 - y = 0 \quad (\text{দেখানো হলো})$$

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

1. $y = (\cos^{-1} x)^2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 2$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} y &= (\cos^{-1} x)^2 \\ \Rightarrow y_1 &= 2 \cos^{-1} x \frac{d}{dx} \cos^{-1} x \\ \Rightarrow y_1 &= 2 \cos^{-1} x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \Rightarrow y_1 (\sqrt{1-x^2}) &= -2 \cos^{-1} x \\ \Rightarrow y_1^2 (1-x^2) &= 4 (\cos^{-1} x)^2 \\ \Rightarrow y_1^2 (-2x) 2y_1 y_2 (1-x^2) &= 4y_1 \\ \Rightarrow 2y_1 (-y_1 x) + (1-x^2)y_2 &= 2.2y_1 \\ \Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 &= 2 \quad (\text{প্রমাণিত}) \end{aligned}$$

2. $y = (\sin^{-1} x)^2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 2$

অথবা, $\sin \sqrt{y} = x$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = 2$

3. $y = \sin(msin^{-1}x)$ হলে, দেখাও যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} y &= e^{ain^{-1}x} \\ \Rightarrow y_1 &= e^{ain^{-1}x} \cdot a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \Rightarrow y_1 (\sqrt{1-x^2}) &= a e^{ain^{-1}x} \\ \Rightarrow y_1^2 (1-x^2) &= a^2 (e^{ain^{-1}x})^2 \\ \Rightarrow y_1^2 (1-x^2) &= a^2 y^2 \\ \Rightarrow y_1^2 (-2x) + (1-x^2) 2y_1 y_2 &= a^2 2yy_1 \\ \Rightarrow 2y_1 \{-xy_1 + (1+x^2)y_2\} &= a^2 y_1 2y_1 \\ \Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 &= a^2 y_1 \quad (\text{দেখানো হলো}) \end{aligned}$$

4. $y = \tan(mtan^{-1}x)$ হলে, দেখাও যে, $(1 - x^2)y_1 = m(1 + y^2)$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} y &= \tan(mtan^{-1}x) \\ \Rightarrow y_1 &= \sec^2(mtan^{-1}x) m \frac{d}{dx} \tan^{-1} x \\ \Rightarrow y_1 &= \sec^2(mtan^{-1}x) m \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow y_1(1+x^2) &= \{1 + \tan^2(m \tan^{-1} x)\}m \\ \Rightarrow y_1(1+x^2) &= (1+y^2)m \\ \Rightarrow (1+x^2)y_1 &= m(1+y^2) \quad (\text{দেখানো হলো})\end{aligned}$$

5. $y = \sin^{-1} x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned}\sin \sqrt{y} &= x \\ \Rightarrow \sqrt{y} &= \sin^{-1} x \\ \Rightarrow y &= (\sin^{-1} x)^2 \\ \Rightarrow y_1 &= 2x \sin^{-1} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \Rightarrow y_1 \sqrt{1-x^2} &= 2 \sin^{-1} x \\ \Rightarrow y_1^2 (1-x^2) &= 4(\sin^{-1} x)^2 \\ \Rightarrow y_1^2 (-2x) + (1-x^2) 2y_1 y_2 &= 4y_1 \\ \Rightarrow 2y_1 \{-xy_1 + (1-x^2)y_2\} &= 2 \cdot 2y_1 \\ \Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 &= 2\end{aligned}$$

6. $y = e^{a \sin x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 = a^2 y$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned}y &= \sin(m \sin^{-1} x) \\ \Rightarrow y_1 &= \cos(m \sin^{-1} x) m \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \Rightarrow y_1 (\sqrt{1-x^2}) &= \cos(m \sin^{-1} x) m \\ \Rightarrow y_1^2 (1-x^2) &= \cos^2(m \sin^{-1} x) m^2 \\ \Rightarrow y_1^2 (1-x^2) &= 1 - \sin^2(m \sin^{-1} x) m^2 \\ \Rightarrow y_1^2 (1-x^2) &= (1-y^2) m^2 \\ \Rightarrow y_1^2 (-2x) + (1-x^2) 2y_1 y_2 &= (0 - 2yy_1) m^2 \\ \Rightarrow 2y_1 \{-xy_1 + (1-x^2)y_2\} &= -2y_1 y m^2 \\ \Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 &= -m^2 y \\ \Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2 y &= 0 \quad (\text{উত্তর})\end{aligned}$$

রচনামূলক প্রশ্নোত্তর

1. $y = \cos(m\cos^{-1}x)$ হলে দেখাও যে, $(1 - x^2)y_{n+1} - (2x + 1)xy_{n+1} - (m^2 - n^2)y_n = 0$

সমাধান : দেয়া আছে,

$$\begin{aligned} y &= \cos(m\cos^{-1}x) \\ \Rightarrow y_1 &= -\sin(m\cos^{-1}x) \frac{d}{dx} m\cos^{-1}x \\ \Rightarrow y_1 &= -\sin(m\cos^{-1}x) - \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \\ \Rightarrow y_1(\sqrt{1-x^2}) &= \sin(m\cos^{-1}x) m \\ \Rightarrow y_1^2(1-x^2) &= \sin^2(m\cos^{-1}x) m^2 \\ \Rightarrow y_1^2(1-x^2) &= 1 - \cos^2(m\cos^{-1}x) m^2 \\ \Rightarrow y_1^2(1-x^2) &= (y - y^2)m^2 \\ \Rightarrow y_1^2(-2x) + (1-x^2)2y_1y_2 &= 0 - 2yy_1m^2 \\ \Rightarrow 2y_1\{-xy_1 + (1-x^2)y_2\} &= -m^2y \cdot 2y \\ \Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y &= 0 \end{aligned}$$

লিবনিজের উপপাদ্য অনুযায়ী,

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} + {}^nC_1(-2x)y_{n+2-1} + {}^nC_2(-2)y_{n+2-2} \\ - (xy_{n+1} {}^nC_1 \cdot 1 \cdot y_{n+1-1}) + m^2y_n &= 0 \\ (1-x^2)y_{n+1} = n(-2x)y_{n+1} = \frac{n(-1)}{2} \times -2 \times y_n \\ -xy_{n+1} - ny_n + m^2y_n &= 0 \\ \Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} - xy_{n+1} - n(n-1)y_n \\ \{n(n-1) + n - m^2\} &= 0 \\ \Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - y_n(n^2 - n + n - m) &= 0 \\ \Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} &= (m^2 - n^2)y_n = 0 \end{aligned}$$

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ (Board Questions Analysis)

📖 এই অধ্যায়ের প্রধান সূচিপত্র (contents)

বিষয়	পৃষ্ঠা নং
❖ সূত্রাবলী ও শর্টকাট টেকনিক	
❖ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ রচনামূলক প্রশ্নাবলি	

এই অধ্যায় থেকে বিগত পাঁচ বছরের ডিপ্লোমা ইন ইঞ্জিনিয়ারিং, ডিপ্লোমা ইন টেক্সটাইল, ডিপ্লোমা ইন এগ্রিকালচার, ডিপ্লোমা ইন মেরিন পরীক্ষায় মোট প্রশ্ন। নিচে ‘Board Questions Analysis’ অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেখানো হলো।

সাল \ বোর্ড	অতি সংক্ষিপ্ত	সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন	রচনামূলক প্রশ্ন
২০২৪	১টি	১টি	_____
২০২৩	১টি	_____	১টি
২০২২	_____	১টি	_____



“অধিকাংশ মানুষ উপলব্ধি করার লক্ষ্য নিয়ে অন্যের বক্তব্য শোনে না, তাদের লক্ষ্য থাকে পাল্টা বক্তব্য দেয়া।”



অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নউত্তর

1. $u = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ হলে $\frac{\delta u}{\delta x} =$ কত?

[বাকশির্বো : '৯৫,'০৮R,'১৫R,'২২]

সমাধান : $u = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right), \therefore \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$ (উত্তর)

2. যদি $f = 2x^2 + 4x^2y + y^2$ হয়, তবে $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} =$ কত?

[বাকশির্বো : '১৬]

সমাধান : দেওয়া আছে, $f = 2x^2 + 4x^2y + y^2, \therefore \frac{\delta f}{\delta x} = 2.2x + 4.2xy + 0, \therefore \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 4 + 8y$

3. $u = \log(x^2 + y^2)$ হলে $\frac{\delta u}{\delta x}$ এর মান নির্ণয় কর।

[বাকশির্বো : ০০R,'০৭,'১৫]

সমাধান : $u = \log(x^2 + y^2), \therefore \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y = \frac{2y}{x^2+y^2}$ (উত্তর)

4. $u = x^3 + x^2y^2 + y^3$ হলে $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ এর মান কত?

[বাকশির্বো : ৯৫,'১৫]

সমাধান : $u = x^3 + x^2y^2 + y^3, \therefore \frac{\delta u}{\delta x} = 3x^2 + 2xy^2, \therefore \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 6x + 2y^2$ (উত্তর)

5. $u = e^{ax}$ হলে $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ এর মান নির্ণয় কর?

[বাকশির্বো : ০০,'৯৭,'১৪]

সমাধান : $u = e^{ax}, \therefore \frac{\delta u}{\delta x} = e^{ax} \cdot a \therefore \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = e^{ax} \cdot a^2 = a^2 e^{ax}$ (উত্তর)

6. $u = e^{xyz}$ হলে $\frac{\delta u}{\delta x}$ এর মান কত?

[বাকশির্বো : ০১,'১২,]

সমাধান : $u = e^{xyz}, \therefore \frac{\delta u}{\delta x} = e^{xyz} \cdot \frac{\delta}{\delta x}(xyz) = e^{xyz} \cdot (yz) = yz e^{xyz}$ (উত্তর)

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নউত্তর

1. $u = x^2y + y^2z + z^2x$ হয়, তবে দেখাও যে, $ux + uy + uz = (x + y + z)^2$

সমাধান : দেওয়া আছে, $U = x^2y + y^2z + z^2x$

$$\therefore Ux = 2xy + x^2 \dots \dots \dots (i)$$

$$\therefore Uy = x^2 + 2yz \dots \dots \dots (ii)$$

$$\therefore Uz = y^2 + 2zx \dots \dots \dots (iii)$$

(i) + (ii) + (iii) করে পাই,

$$Ux + Uy + Uz = 2xy + z^2 + x^2 + 2yz + y^2 + 2zx$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = (x + y + z)^2 \quad (\text{উত্তর})$$

2. যদি $U = \log(x^2 + y^2 - 2xy)$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{\delta x}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} = 0$

সমাধান : দেওয়া আছে, $U = \log(x^2 + y^2 - 2xy)$

$$\therefore \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{2x-2y}{x^2+y^2-2xy} \text{ এবং } \frac{\delta u}{\delta y} = \frac{2y-2x}{x^2+y^2-2xy} = \frac{-(2x-2y)}{x^2+y^2-2xy}$$

$$L.H.S = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} = \frac{2x-2y}{x^2+y^2-2xy} - \frac{2x-2y}{x^2+y^2-2xy} = 0 = R.H.S \quad (\text{প্রমাণিত})$$

3. $u = \sin^{-1} \frac{x}{y} + \tan^{-1} \frac{y}{x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x \frac{\delta u}{\delta x} + y \frac{\delta u}{\delta y} = 0$

সমাধান : দেওয়া আছে, $u = \sin^{-1} \frac{x}{y} + \tan^{-1} \frac{y}{x}$

$$\therefore \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} - \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\therefore \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}} - \frac{xy}{x^2+y^2} \dots \dots \dots (i)$$

$$\text{এবং } \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}} + \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\therefore y \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}} + \frac{xy}{x^2+y^2} \dots \dots \dots (ii)$$

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$$x \frac{\delta u}{\delta x} + y \frac{\delta u}{\delta y} = \frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}} - \frac{xy}{x^2+y^2} - \frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}} + \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\therefore x \frac{\delta u}{\delta x} + y \frac{\delta u}{\delta y} = 0 \quad (\text{প্রমাণিত})$$

4. যদি $u = \log(x^2 + y^2)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0$

সমাধান : দেওয়া আছে, $u = \log(x^2 + y^2)$

$$\therefore \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x$$

$$\therefore \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = \frac{(x^2+y^2) \cdot 2 - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2+2y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\therefore \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \dots \dots \dots (i)$$

আবার, $\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y$

$$\therefore \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = \frac{(x^2+y^2) \cdot 2 - (2y) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2+2y^2-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \dots \dots \dots (ii)$$

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\therefore \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0 \quad (\text{প্রমাণিত})$$

5. যদি $v = x^2 + y^2 + z^2$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta z^2} = 6$

সমাধান : দেওয়া আছে, $v = x^2 + y^2 + z^2$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\delta v}{\delta x} &= 2x & \text{আবার, } \therefore \frac{\delta v}{\delta y} &= 2y & \text{আবার, } \frac{\delta v}{\delta z} &= 2z \\ \therefore \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} &= 2 & \therefore \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} &= 2 & \therefore \frac{\delta^2 v}{\delta z^2} &= 2 \\ \therefore \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta z^2} &= 2 + 2 + 2 = 6 & (\text{প্রমাণিত}) \end{aligned}$$

রচনামূলক প্রশ্নোত্তর

1. যদি $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $ux^2 + uy^2 + uz^2 = 1$

সমাধান : দেওয়া আছে, $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\Rightarrow u^2 = x^2 + y^2 + z^2$,
 $\Rightarrow 2uux = 2x$, $\Rightarrow ux = \frac{2x}{2u}$, $\therefore ux = \frac{x}{u} \dots \dots \dots (i)$

অনুরূপভাবে, $uy = \frac{y}{u} \dots \dots \dots (ii)$

$uz = \frac{z}{u} \dots \dots \dots (iii)$

$$\begin{aligned} L.H.S &= Ux^2 + uy^2 + uz^2 = \left(\frac{x}{u}\right)^2 + \left(\frac{y}{u}\right)^2 + \left(\frac{z}{u}\right)^2 = \frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{u^2} + \frac{z^2}{u^2} \\ &= \frac{x^2+y^2+z^2}{u^2} = \frac{u^2}{u^2} = 1 = R.H.S \quad (\text{প্রমাণিত}) \end{aligned}$$

2. যদি $u = \cos^{-1} \frac{x}{y} + \tan^{-1} \frac{y}{x}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x \frac{\delta u}{\delta x} + y \frac{\delta u}{\delta y} = 0$

সমাধান : দেওয়া আছে, $u = \cos^{-1} \frac{x}{y} + \tan^{-1} \frac{y}{x}$

$$\therefore \frac{\delta u}{\delta x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{\frac{y^2-x^2}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} - \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} - \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\therefore x \frac{\delta u}{\delta x} = -\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}} - \frac{xy}{x^2+y^2} \dots \dots \dots (i)$$

$$\text{আবার, } \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{y^2-x^2}{y^2}}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}} + \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\therefore y \frac{\delta u}{\delta y} = \frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}} + \frac{xy}{x^2+y^2} \dots \dots \dots (ii)$$

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$$x \frac{\delta u}{\delta x} + y \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{x}{\sqrt{y^2-x}} - \frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}} + \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\therefore x \frac{\delta u}{\delta x} + y \frac{\delta u}{\delta y} = 0 \quad (\text{প্রমাণিত})$$

2. যদি $v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ হয়, তবে দেখাও যে $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = \frac{2}{v}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\therefore V^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Rightarrow 2_{v vx} = 2x$$

$$\therefore VVx = x$$

আবার, আংশিক অন্তরীকরণ করে পাই,

$$VVx_x + VxVx = 1$$

$$\Rightarrow VVxx + \left(\frac{x}{v}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow VVxx + \frac{x^2}{v^2} = 1 \dots \dots (i)$$

$$\left| \begin{array}{l} VVx = x \\ \Rightarrow Vx = \frac{x}{v} \end{array} \right.$$

অনুরূপভাবে, $VVyy + \frac{y^2}{v^2} = 1 \dots \dots (ii)$

এবং $VVzz + \frac{z^2}{v^2} = 1 \dots \dots (iii)$

(i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$$VVxx + \frac{x^2}{v^2} + VVyy + \frac{y^2}{v^2} + VVzz + \frac{z^2}{v^2} = 1 + 1 + 1$$

$$\Rightarrow V(Vxx + Vyy + Vzz) + \frac{x^2}{v^2} + \frac{y^2}{v^2} + \frac{z^2}{v^2} = 3$$

$$\Rightarrow V(Vxx + Vyy + Vzz) + \frac{x^2+y^2+z^2}{v^2} = 3$$

$$\Rightarrow V(Vxx + Vyy + Vzz) + \frac{v^2}{v^2} = 3$$

$$\Rightarrow V(Vxx + Vyy + Vzz) + 1 = 3$$

$$\Rightarrow V(Vxx + Vyy + Vzz) = 3 - 1$$

$$\Rightarrow V(Vxx + Vyy + Vzz) = 2$$

$$\Rightarrow Vxx + Vyy + Vzz = \frac{2}{v} \quad (\text{প্রমাণিত})$$

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ (Board Questions Analysis)

📖 এই অধ্যায়ের প্রধান সূচিপত্র (contents)	
বিষয়	পৃষ্ঠা নং
❖ সূত্রাবলী ও শর্টকাট টেকনিক	
❖ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ রচনামূলক প্রশ্নাবলি	

এই অধ্যায় থেকে বিগত পাঁচ বছরের ডিপ্লোমা ইন ইঞ্জিনিয়ারিং, ডিপ্লোমা ইন টেক্সটাইল, ডিপ্লোমা ইন এগ্রিকালচার, ডিপ্লোমা ইন মেরিন পরীক্ষায় মোট প্রশ্ন। নিচে ‘Board Questions Analysis’ অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেখানো হলো।

সাল \ বোর্ড	অতি সংক্ষিপ্ত	সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন	রচনামূলক প্রশ্ন
২০২৪	১টি	১টি	১টি
২০২৩	১টি	—	১টি
২০২২	—	১টি	১টি



“আপনি না চাইলে কেউ আপনাকে হীনমন্যতায় ভোগাতে পারবে না।”



এই অধ্যায়ের এর সূত্র

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$2. \int 1 dx = x + c$$

$$3. \int \frac{1}{x} dx = \log x + c$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$6. \int \tan x dx = \log \cos x + c$$

$$7. \int \cot x dx = \log \sin x + c$$

$$8. \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$9. \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + c$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a} = c$$

$$11. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x} + c$$

$$12. \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$$

$$13. \int u v dx = u \int v dx - \int \left(\frac{du}{dx} \int v dx \right) dx$$

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নউত্তর

1. $\int \sin ax dx$ কত?

[বাকাশিবো : ১৬, '১৯, '২২]

সমাধান : $\int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$. (উত্তর)

2. $\int \frac{1}{x} dx$ = কত?

[বাকাশিবো : ১৭, '২১]

সমাধান : $\int \frac{1}{x} dx = \log x + c$ (উত্তর)

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$ কত?

[বাকাশিবো : ২০R]

সমাধান : $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$ (উত্তর)

4. $\int uv dx =$ কত?

[বাকাশিবো : ১৫T, '২০]

সমাধান : $\int uv dx = u \int v dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} u \int v dx \right\} dx$ (উত্তর)

5. $\int \sec^2 x dx =$ কত?

[বাকাশিবো : ০২, '১৭]

সমাধান : $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$ (উত্তর)

6. $\int e^{ax} dx =$ কত?

[বাকাশিবো : ১৫R, ']

সমাধান : $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$ (উত্তর)

7. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} =$ কত?

[বাকাশিবো : ৯৬, '৯৭, '০১, ']

সমাধান : $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$ (উত্তর)

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নউত্তর

Type : 1

$$\begin{aligned}
 2\sin A \cdot \cos B &= \sin(A+B) + \sin(A-B) \\
 2\cos A \cdot \sin B &= \sin(A+B) - \sin(A-B) \\
 2\cos A \cdot \cos B &= \cos(A+B) + \cos(A-B) \\
 2\sin A \cdot \sin B &= \cos(A-B) - \cos(A+B)
 \end{aligned}$$

1. $\int \sin 5x \cdot \sin 3x dx$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান : } &= \int \frac{1}{2} \cdot 2 \sin 5x \cdot \sin 3x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int \cos 8x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 8x}{8} + C \\
 &= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + c \quad (\text{উত্তর})
 \end{aligned}$$

2. $\int 5 \cos 4x \cdot \sin 3x dx$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান : } &5 \int \cos 4x \cdot \sin 3x dx = 5 \int \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 4x \cdot \sin 3x dx = \frac{5}{2} \int (\sin 7x - \sin x) dx \\
 &= \frac{5}{2} \int \sin 7x dx - \frac{5}{2} \int \sin x dx = \frac{5}{2} \int -\frac{\cos 7x}{7} - \frac{5}{2} (-\cos x) + C \\
 &= \frac{5}{2} (\cos x - \cos 7x) \quad (\text{উত্তর})
 \end{aligned}$$

Type : 2

$$\begin{aligned}
 1 - \cos 2x &= 2 \sin^2 x \\
 1 + \cos 2x &= 2 \cos^2 x
 \end{aligned}$$

(i) $\int \sin^4 x dx$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান : } &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (2x \sin^2 x)^2 dx = \frac{1}{4} \int 1 - \cos 2x)^2 dx \\
 &= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int 1 dx - \frac{1}{4} \int 2\cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx \\
 &= \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{4} \cdot 2 \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} \cdot 2 \cos^2 2x dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \int 1 + \cos 4x dx \\
 &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \int 1 dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 4x}{4} + C \\
 &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c = \frac{1}{4} \left(\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) + C \quad (\text{উত্তর})
 \end{aligned}$$

(ii) $\cos^4 x \, dx$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } \int (\cos^2 x)^2 \, dx &= \frac{1}{4} \int (2 \cos^2 x)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx = \frac{1}{4} \left[\int 1 \, dx + \int 2 \cos 2x \, dx + \int \cos^2 2x \, dx \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[x + 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2} \int 2 \cos^2 2x \, dx \right] = \frac{1}{4} \left[x + \sin^2 x + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) \, dx \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[x + \sin 2x + \frac{1}{2} \int 1 \, dx + \frac{1}{2} \int \cos 4x \, dx \right] = \frac{1}{4} \left[x + \sin 2x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 4x}{4} \right] + C \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{3x}{2} + \sin 2x + \frac{\cos 4x}{8} \right] + C \quad (\text{উত্তর}) \end{aligned}$$

Type : 3

(i) $\int \frac{\cot(\cos^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\int \frac{\cot(\cos^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$

$$= -\int \cot z \, dz = -\log \sin z + c = -\log \sin(\cos^{-1} x) + C$$

ধরি, $z = \cos^{-1} x$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -dz$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

$$\int \cot x \, dx = \log \sin x + c$$

(ii) $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)} \, dx$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } \int \frac{1}{\cos^2(xe^x)} \cdot e^x(1+x) \, dx \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 z} \cdot dz = \int \sec^2 z \, dx \\ &= \tan z + c \\ &= \tan(xe^x) + C \quad (\text{উত্তর}) \end{aligned}$$

ধরি, $xe^x = z$

$$\Rightarrow xe^x + e^x = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow e^x(1+x) = \frac{dz}{dx}$$

$$\therefore e^x(1+x) \, dx = dz$$

Type : 4

(i) $\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)} \, dx$

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } &= \int \frac{1}{\log(\cos x)} \cdot \tan x \, dx \\ &= -\int \frac{1}{z} \cdot dz \\ &= -\log z + c \\ &= -\log(\log \cos x) + C \quad (\text{উত্তর}) \end{aligned}$$

ধরি, $\log(\cos x) = z$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} (-\sin x) = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx = -dz$$

$$\therefore \tan x \, dx = -dz$$

Type : 5

$$\int u v dx = u \int v dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} u \int v dx \right\} dx$$

(i) $\int e^x \cos x dx$ সমাধান : ধরি, $I = \int e^x \cos x dx$

$$\Rightarrow I = \cos x \int e^x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} \cos x \int e^x dx \right\} dx$$

$$\Rightarrow I = \cos x \cdot e^x + \int \sin x \cdot e^x dx$$

$$\Rightarrow I = \cos x \cdot e^x + \sin x \int e^x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} \sin x \int e^x dx \right\} dx$$

$$\Rightarrow I = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x - \int \cos x \cdot e^x dx$$

$$\Rightarrow I = e^x (\cos x + \sin x) - I$$

$$\Rightarrow I + I = e^x (\cos x + \sin x) + C$$

$$\Rightarrow 2I = e^x (\cos x + \sin x) + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C \quad (\text{উত্তর})$$

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ (Board Questions Analysis)

📖 এই অধ্যায়ের প্রধান সূচিপত্র (contents)	
বিষয়	পৃষ্ঠা নং
❖ সূত্রাবলী ও শর্টকাট টেকনিক	
❖ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ রচনামূলক প্রশ্নাবলি	

এই অধ্যায় থেকে বিগত পাঁচ বছরের ডিপ্লোমা ইন ইঞ্জিনিয়ারিং, ডিপ্লোমা ইন টেক্সটাইল, ডিপ্লোমা ইন এগ্রিকালচার, ডিপ্লোমা ইন মেরিন পরীক্ষায় মোট প্রশ্ন। নিচে ‘Board Questions Analysis’ অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেখানো হলো।

সাল \ বোর্ড	অতি সংক্ষিপ্ত	সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন	রচনামূলক প্রশ্ন
২০২৪	_____	_____	১টি
২০২৩	_____	_____	১টি
২০২২	১টি	_____	১টি



“যে সময় হারিয়ে গেছে তাকে ফিরিয়ে আনা অসম্ভব। কিন্তু তুমি চাইলে যে সময় সামনে আসছে, তাকে সুন্দর করতে পারো।”



অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নউত্তর

1. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x} =$ কত?

সমাধান : $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x} = [\log x]_1^{e^2} = \log e^2 - \log e - 0 = 2.1 = 2$ (উত্তর)

2. $\int_b^a \frac{dx}{x} =$ কত?

সমাধান : $\int_b^a \frac{dx}{x} = [\log x]_b^a = \log a - \log b = \log \left(\frac{a}{b}\right)$ (উত্তর)

3. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} =$ কত?

সমাধান : $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = [\tan^{-1} x]_0^{\sqrt{3}} = \tan^{-1} \sqrt{3} - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{3}$ (উত্তর)

4. $\int_1^2 x^4 dx =$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\int_1^2 x^4 dx = \left[\frac{x^{4+1}}{4+1}\right]_1^2 = \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \left(\frac{2^5}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{32-1}{5} = \frac{31}{5}$ (উত্তর)

5. $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}$ এর মান কত?

সমাধান : $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}\right]_0^a$
 $= \frac{1}{a} \left(\tan^{-1} \frac{a}{a} - \tan^{-1} 0\right) = \frac{1}{a} (\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0) = \frac{1}{a} \tan^{-1} \tan \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4a}$

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নউত্তর

১। $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^2 \sin x dx$

সমাধান

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^2 \sin x dx \\ &= - \int_0^1 z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_2^1 \\ &= - \left[\frac{z^3}{3}\right] = -\frac{1}{3} [(1)^3 - (2)^3] \\ &= -\frac{1}{3} [1 - 8] = -\frac{1}{3} (-7) \\ &= \frac{7}{3} \quad (\text{Ans}) \end{aligned}$$

ধরি,

$$1 + \cos x = z$$

$$\Rightarrow -\sin x dx = dz$$

$$\therefore \sin x dx = dz$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
z	2	1

2। $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin^3 x \, dx$

সমাধান:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin^3 x \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \cdot \cos x \, dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^3 \, dz \\ &= \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4}{4} - 0 = \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \quad (\text{ans}) \end{aligned}$$

ধরি,

$$\sin x = z$$

$$\therefore \cos x \, dx = dz$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$
z	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

3। $\int_0^{\pi} \sqrt[3]{1 - \cos x} \cdot \sin x \, dx$

সমাধান:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \sqrt[3]{1 - \cos x} \cdot \sin x \, dx \\ &= 3 \int_0^2 \sqrt{z} \, dz = 3 \int_0^2 z^{\frac{1}{2}} \, dz \\ &= 3 \left[\frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^2 = 3 \left[\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2 \\ &= 3 \left(\frac{2^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 0 \right) = 3 \times 2^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3} = 2 \cdot 2^{\frac{3}{2}} \\ &= 2(\sqrt{2})^3 = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \quad (\text{Ans}) \end{aligned}$$

ধরি,

$$1 - \cos x = z$$

$$\therefore \sin x \, dx = dz$$

x	0	π
z	0	2

8। $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \cdot \sec^2 x \, dx$

সমাধান:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \cdot \sec^2 x \, dx \\ &= \int_0^1 z^2 \, dz = \left[\frac{z^{2+1}}{2+1} \right]_0^1 \\ &= \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} [(1)^3 - (0)^3] = \frac{1}{3} (\text{Ans}) \end{aligned}$$

ধরি,

$$\tan x = z$$

$$\therefore \sec^2 x \, dx = dz$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$
z	0	1

৫। $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x \cdot \sin x \, dx$

সমাধান:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x \cdot \sin x \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos 5x \cdot \sin x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 6x - \sin 4x) \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos 6x}{6} + \frac{\cos 4x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{12} [\cos^3 \pi - \cos 0] \frac{1}{8} [\cos 2\pi - \cos 0] \\ &= -\frac{1}{2} [-1 - 1] + \frac{1}{8} [1 - 1] = \frac{1}{6} \quad (\text{Ans}) \end{aligned}$$

৬। $\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$

সমাধান:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 2 \sin^2 x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left[\pi - 0 - \frac{1}{2} (\sin 2\pi - \sin 0) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} \quad (\text{Ans}) \end{aligned}$$

৭। $\int_0^1 x^3 \sqrt{1+3x^4} \, dx$

সমাধান:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^3 \sqrt{1+3x^4} \, dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1+3x^4} \, x^3 \, dx = \frac{1}{12} \int_1^4 \sqrt{z} \, dz \\ &= \frac{1}{12} \left[\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{1}{12} \left[\frac{4^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] \end{aligned}$$

ধরি,

$$\begin{aligned} 1 + 3x^4 &= z \\ \Rightarrow 4 \cdot 3x^3 \cdot dx &= dz \\ \Rightarrow 12x^3 \cdot dx &= dz \\ \therefore x^3 dx &= \frac{1}{12} dz \end{aligned}$$

x	0	1
z	1	4

$$= \frac{1}{12} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{12} \left(\frac{16}{3} - \frac{2}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{12} \left(\frac{16-2}{3} \right) = \frac{1}{12} \times \frac{14}{3} = \frac{7}{8}$$

৮। $\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1-x^2} dx$

সমাধান:

$$\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1-x^2} dx = \int_0^1 (\tan^{-1} x)^2 \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 dz = \left[\frac{z^{2+1}}{2+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\left(\frac{\pi}{4} \right)^3}{3} - 0 = \frac{\pi^3}{64}$$

$$= \frac{\pi^3}{64} \times \frac{1}{3} = \frac{\pi^3}{192} \quad (Ans)$$

ধরি,

$$\tan^{-1} x = z$$

$$\therefore \frac{1}{1+x^2} dx = dz$$

x	0	1
z	1	4

৯। $\int_0^1 \frac{(\sin^{-1} x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

সমাধান:

$$\int_0^1 \frac{(\sin^{-1} x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 (\sin^{-1} x)^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} z dz = \left[\frac{z^{1+1}}{1+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} \right)^2}{2} - 0$$

$$= \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{16} \quad (Ans)$$

ধরি,

$$\sin^{-1} x = z$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dz$$

x	0	1
z	0	$\frac{\pi}{2}$

১০। $\int_1^{e^{-2}} \frac{dx}{x(1-\log x)}$

সমাধান:

$$\int_1^{e^{-2}} \frac{dx}{x(1-\log x)}$$

$$\int_1^{e^{-2}} \frac{1}{1-\log x} \cdot \frac{1}{x} dx = - \int_1^3 \frac{1}{z} dz$$

ধরি,

$$1 - \log x = z$$

$$\therefore \frac{1}{x} dx = -dz$$

x	1	e^{-2}
z	1	3

$$= -[\log_z]_1^3 = -(\log_3 - \log_1) \\ = -(\log_3 + 0) = -\log_3 \quad (Ans)$$

১১। $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\log x)}$

সমাধান:

$$\int_1^{e^2} \frac{dx}{1+\log x} = \int_1^{e^2} \frac{1}{1+\log x} \cdot \frac{1}{x} dx \\ = \int_1^3 \frac{1}{z} \cdot dz = [\log z]_1^3 = \log_3 - \log_1 \\ = \log_3 - 0 = \log_3 \quad (Ans)$$

Note Book :

$$1 - \log_e - 2 = z \\ \Rightarrow 1 + 2 \log_e = z \\ \Rightarrow 1 + 2.1 = z \\ \therefore 3 = z$$

ধরি,

$$1 + \log x = z$$

$$\therefore \frac{1}{x} dx = dz$$

x	1	e ²
z	1	3

১২। $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\log x)^2}$

সমাধান:

$$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\log x)^2} \\ = \int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^3 \frac{1}{z^2} \cdot dz \\ = \left[\frac{z^{-2+1}}{-2+1} \right]_1^3 = \left[\frac{Z^{-1}}{-1} \right]_1^3 = \left[\frac{1}{z} \right]_1^3 = -\left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\ = -\left(\frac{1-3}{3} \right) = \frac{2}{3} \quad (Ans)$$

ধরি,

$$1 + \log x = z$$

$$\therefore \frac{1}{x} dx = dz$$

x	1	e ²
z	1	3

১৩। $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt{\sin x}}$

সমাধান:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \cos x dx \\ = \int_0^1 (1 - z^2) \frac{1}{\sqrt{z}} dz = \int_0^1 \frac{1-z^2}{\sqrt{z}} dz \\ = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{z^2}{\sqrt{z}} dz \quad [\because \cos^2 x = 1 - \sin^2 x]$$

ধরি,

$$\sin x = z$$

$$\therefore \cos x \cdot dx = dz$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}} dz - \int_0^1 z^{2-\frac{1}{2}} dz \\
 &= \left[\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 - \left[\frac{z^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{5}{2}} = 2 - \frac{2}{5} = \frac{10-2}{5} = \frac{8}{5} \quad (\text{Ans.})
 \end{aligned}$$

14. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$

সমাধান:-

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int_0^1 \frac{e^x dx}{(e^x)^2+1} \\
 &= \int_0^e \frac{dz}{1+z^2} = [\tan^{-1} z]_1^e \\
 &= \tan^{-1} e - \tan^{-1} 1 = \tan^{-1} e - \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

ধরি,

$$\begin{aligned}
 e^x &= z \\
 \therefore e^x dx &= dz
 \end{aligned}$$

x	0	1
z	1	e

15. $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

সমাধান:-

$$\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \sin^{-1} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

ধরি,

$$\begin{aligned}
 \sin^{-1} x &= z \\
 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= dz
 \end{aligned}$$

x	0	1
z	0	$\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} z dz = \left[\frac{z^{1+1}}{1+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} [z^2]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - 0 \right\} = \frac{\pi^2}{8} \quad (\text{Ans.})
 \end{aligned}$$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

সমাধান:-

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot 2 \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi - 0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0 \right] = \frac{\pi}{4} \quad (\text{Ans.})
 \end{aligned}$$

$$17. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$$

সমাধান:-

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} &= \frac{1}{-2} \int_0^1 \frac{-2x dx}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{2} \left[2\sqrt{4-x^2} \right]_0^1 \\ &= -[\sqrt{4-1} - \sqrt{4-0}] = -[\sqrt{3} - 2] \\ &= 2 - \sqrt{3} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

১৩

ভেক্টর বীজগণিত

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ (Board Questions Analysis)

📖 এই অধ্যায়ের প্রধান সূচিপত্র (contents)	
বিষয়	পৃষ্ঠা নং
❖ সূত্রাবলী ও শর্টকাট টেকনিক	
❖ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ রচনামূলক প্রশ্নাবলি	

এই অধ্যায় থেকে বিগত পাঁচ বছরের ডিপ্লোমা ইন ইঞ্জিনিয়ারিং, ডিপ্লোমা ইন টেক্সটাইল, ডিপ্লোমা ইন এগ্রিকালচার, ডিপ্লোমা ইন মেরিন পরীক্ষায় মোট প্রশ্ন। নিচে ‘Board Questions Analysis’ অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেখানো হলো।

সাল \ বোর্ড	অতি সংক্ষিপ্ত	সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন	রচনামূলক প্রশ্ন
২০২৪	১টি	১টি	_____
২০২৩	_____	১টি	১টি
২০২২	১টি	১টি	_____



“যে অজুহাত তৈরিতে দক্ষ সে সাধারণত কোন কাজে দক্ষ হয় না।”



এই অধ্যায়ের এর সূত্র

1. একক ভেক্টর $\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

1. ভেক্টরের ত্রিভুজ সূত্রটি লেখ।

সমাধান : যদি কোনো ত্রিভুজের সম্বিহিত বাহু দুইটি একই দিকে দুইটি ভেক্টর রাশি নির্দেশ করে তবে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীত দিকে ভেক্টর দুইটির লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করবে।

ΔOAB এর ক্ষেত্রে : $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$ বা, $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$

2. $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয়।

সমাধান : $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore A = |\vec{A}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$

\therefore নির্ণেয় সমান্তরাল একক ভেক্টর $= \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2}{3}\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$ (উত্তর)

3. একক ভেক্টর কাকে বলে।

সমাধান : যে ভেক্টর রাশির পরমমান এক তাকে একক ভেক্টর বলা হয়। একক ভেক্টরকে সাধারণত \hat{a} দ্বারা প্রকাশ করা হয়। \hat{a} কে পড়া হয় a হ্যাট।

4. $4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ দিক রাশির মান কত?

সমাধান : $|4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 9 + 25} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$

\therefore নির্ণেয় দিক কোসাইনসমূহ যথাক্রমে $\frac{4}{5\sqrt{2}}, -\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{5}{5\sqrt{2}}$ (উত্তর)

5. নাল বা শূন্য ভেক্টর কাকে বলে।

সমাধান : যে ভেক্টর রাশির মান শূন্য তাকে নাল বা শূন্য ভেক্টর বলা হয়। শূন্য ভেক্টরের আদিবিন্দু এবং শীর্ষবিন্দু একই।

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নউত্তর

(১) $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে \vec{A} ও \vec{B} এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর?

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$$

$$\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A} + \vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k} + \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$= 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 36 + 4}$$

$$= \sqrt{49} = 7$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় একক ভেক্টর} = \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{7} = \frac{3}{7}\hat{i} + \frac{6}{7}\hat{j} - \frac{2}{7}\hat{k}$$

(২) P ও Q এর অবস্থান্তর ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $5\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ হয় তবে \overrightarrow{PQ} এর মান কত?

সমাধান:

এখানে,

$$\overrightarrow{OP} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\text{এবং } \overrightarrow{OQ} = 5\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$= 5\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k} - (2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$$

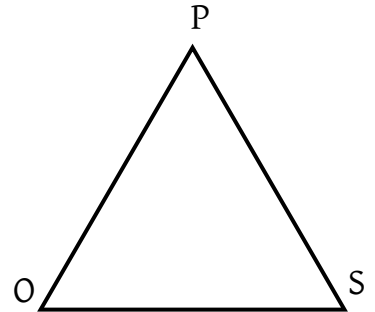
$$= 5\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k} - 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

$$= 3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$\therefore |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (6)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49}$$

$$= 7$$



(৩) \vec{A} ও \vec{B} এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $(1, 1, 1)$ ও $(2, 3, -2)$ হলে \vec{AB} ভেক্টর, এর মান ও দিক কোসাইনগুলো নির্ণয় কর।

সমাধান:-

$$\text{এখানে, } \vec{OA} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{OB} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\therefore \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$= 2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k} - (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

$$= 2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k} - \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$

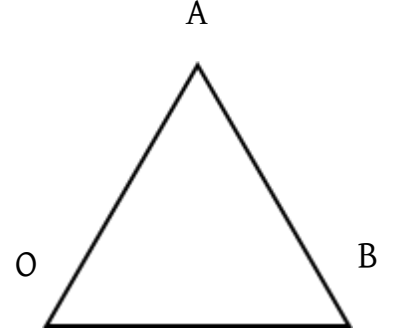
$$= \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} \quad (\text{Ans})$$

$$\therefore |\vec{AB}| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 4 + 9}$$

$$= \sqrt{14} \quad (\text{Ans})$$

$$\therefore \text{দিক কোসাইনগুলো যথাক্রমে: } \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}} \quad (\text{Ans})$$



(4) $\vec{P} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ও $\vec{Q} = 4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ দিক রাশি দুটির লব্ধির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান:-

দেওয়া আছে,

$$\vec{P} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{Q} = 4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$\therefore \vec{P} + \vec{Q} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + 4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$= 6\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{P} + \vec{Q}| = \sqrt{(6)^2 + (3)^2 + (-2)^2}$$

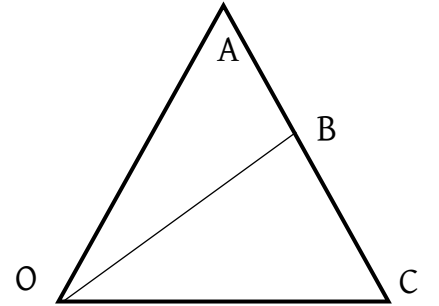
$$= \sqrt{36 + 9 + 4}$$

$$= \sqrt{49}$$

$$= 7$$

$$\therefore \hat{P} \text{ ও } \hat{Q} \text{ এর ভেক্টর} = \frac{6\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}}{7}$$

$$= \frac{6}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} - \frac{2}{7}\hat{k} \quad (\text{Ans.})$$



5. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, বিন্দুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থান করে।

সমাধান:-

ধরি,

$$\overrightarrow{OA} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = 3\hat{i} + 8\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= 2\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k} - (\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) = 2\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k} - \hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$= \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-5)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$$

$$\text{যেহেতু } AB + BC = \sqrt{35} + \sqrt{35} = 2\sqrt{35} = AC$$

\therefore বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থান করবে। (Proved)

রচনামূলক প্রশ্ন

6. প্রমাণ কর যে, $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$, $3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

সমাধান:-ধরি,

$$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} - (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$$

$$= \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} - 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$= -\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

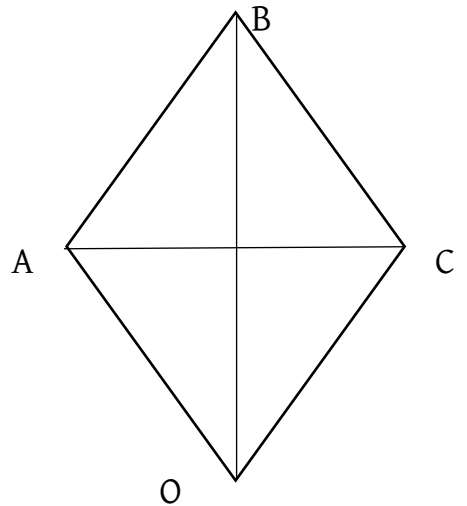
$$\therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

$$= 3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k} - (\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) = 3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k} - \hat{i} + 5\hat{k}$$

$$= 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$



$$\therefore |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$

$$= 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k} - (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k} - 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$= \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = (\sqrt{35})^2 + (\sqrt{6})^2$$

$$= 35 + 6 = 41 = AB^2$$

\therefore ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে। (Proved)

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ (Board Questions Analysis)

📖 এই অধ্যায়ের প্রধান সূচিপত্র (contents)	
বিষয়	পৃষ্ঠা নং
❖ সূত্রাবলী ও শর্টকাট টেকনিক	
❖ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ রচনামূলক প্রশ্নাবলি	

এই অধ্যায় থেকে বিগত পাঁচ বছরের ডিপ্লোমা ইন ইঞ্জিনিয়ারিং, ডিপ্লোমা ইন টেক্সটাইল, ডিপ্লোমা ইন এগ্রিকালচার, ডিপ্লোমা ইন মেরিন পরীক্ষায় মোট প্রশ্ন। নিচে ‘Board Questions Analysis’ অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেখানো হলো।

সাল \ বোর্ড	অতি সংক্ষিপ্ত	সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন	রচনামূলক প্রশ্ন
২০২৪	_____	_____	_____
২০২৩	_____	১টি	_____
২০২২	_____	_____	_____



“প্রয়োজনের চেয়ে বেশি কথা ঠেকাতে প্রকৃতির এক চমৎকার কৌশল হচ্ছে চুপসন।”



এই অধ্যায়ের এর সূত্র

$$1. \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

$$2. \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

1. $2\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$ ও $2\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর দুটির স্কেলার গুণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $(2\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}) \cdot (2\hat{j} + 2\hat{k}) = 0 + 10 - 2 = 8$ (উত্তর)

2. $\underline{A} = 3\underline{i} - 4\underline{j} - \underline{k}$ এবং $\underline{B} = 2\underline{i} + 3\underline{j} - 6\underline{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তরভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\underline{A} \cdot \underline{B} = (3\underline{i} - 4\underline{j} - \underline{k}) \cdot (2\underline{i} + 3\underline{j} - 6\underline{k}) = 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 + (-1) \cdot (-6)$
 $= 6 - 12 + 6 = 0$

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$B = |\underline{B}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

ধরি, মধ্যবর্তী কোণ θ

$$\therefore \cos \theta = \frac{\underline{A} \cdot \underline{B}}{AB} = \frac{0}{\sqrt{26} \cdot 7} = 0 = \cos 90^\circ \therefore \theta = 90^\circ \quad (\text{উত্তর})$$

3. \vec{A} ও \vec{B} ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 90° হলে $\vec{A} \cdot \vec{B}$ মান কত হবে?

সমাধান : $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos 90^\circ = AB \cdot 0 = 0$ (উত্তর)

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

১। m এর কোন মানের জন্য $\vec{A} = m\hat{i} - 3m\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হবে? (P-260)

সমাধান:-দেওয়া আছে,

$$\vec{A} = m\hat{i} - 3m\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{B} = m\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow (m\hat{i} - 3m\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (m\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 0$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow m^2 - 3m + 2 &= 0 \\ \Rightarrow m^2 - 2m - m + 2 &= 0 \\ \Rightarrow m(m-2) - 1(m-2) &= 0 \\ \Rightarrow (m-2)(m-1) &= 0\end{aligned}$$

হয়,

$$m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow m = 2$$

$$\therefore m = 1, 2 \text{ (Ans.)}$$

অথবা,

$$m - 1 = 0$$

২. a এর কোন মানের জন্য $\vec{A} = a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = a\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে?

সমাধান:-

দেওয়া আছে,

$$\vec{A} = a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{B} = 2a\hat{i} - a\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow (a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (2a\hat{i} - a\hat{j} + 4\hat{k}) = 0$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 2a - 4 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a + a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow a(a - 2) + 1(a - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0$$

হয়,

$$a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 2$$

অথবা,

$$a + 1 = 0$$

$$\therefore a = -1, 2 \text{ (Ans.)}$$

৩. P এর মান কত হলে $P\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2P\hat{i} + P\hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে। (P-260)

সমাধান:

ধরি,

$$\vec{A} = P\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{B} = 2P\hat{i} - P\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow (p\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (2p\hat{i} - p\hat{j} - 4\hat{k}) = 0$$

$$\Rightarrow 2p^2 + 2p - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2(p^2 + p - 2) = 0$$

$$\Rightarrow p^2 + p - 2 = 0$$

$$\Rightarrow p^2 + 2p - p - 2 = 0$$

$$\Rightarrow p(p + 2) - 1(p + 2) = 0$$

$$\Rightarrow (p + 2)(p - 1) = 0$$

হয়,

$$p + 2 = 0$$

$$\Rightarrow p = -2$$

$$\therefore P = 1, -2 \text{ (Ans.)}$$

অথবা,

$$p - 1 = 0$$

$$\Rightarrow p = 1$$

8. $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = 4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান:-

দেওয়া আছে,

$$\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{B} = 4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= 4 + 2 - 6$$

$$= 0 \quad \text{যেহেতু, } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{সুতরাং মধ্যবর্তী কোণ} = 90^\circ \quad (\text{Ans.})$$

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ (Board Questions Analysis)

📖 এই অধ্যায়ের প্রধান সূচিপত্র (contents)

বিষয়	পৃষ্ঠা নং
❖ সূত্রাবলী ও শর্টকাট টেকনিক	
❖ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি	
❖ রচনামূলক প্রশ্নাবলি	

এই অধ্যায় থেকে বিগত পাঁচ বছরের ডিপ্লোমা ইন ইঞ্জিনিয়ারিং, ডিপ্লোমা ইন টেক্সটাইল, ডিপ্লোমা ইন এগ্রিকালচার, ডিপ্লোমা ইন মেরিন পরীক্ষায় মোট প্রশ্ন। নিচে ‘Board Questions Analysis’ অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেখানো হলো।

সাল \ বোর্ড	অতি সংক্ষিপ্ত	সংক্ষিপ্ত প্রশ্ন	রচনামূলক প্রশ্ন
২০২৪			
২০২৩			
২০২২			
২০২১			



“যেখানে লক্ষ্য নেই, সেখানে আশাও নেই।”



এই অধ্যায়ের এর সূত্র

1. $\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \times \hat{n}$
2. $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$
3. $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

অতিসংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

1. $\hat{i} \times (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ এর মান নির্ণয় কর।

[বাকাশিবো: ১৬]

সমাধান : $\hat{i} \times (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(0 + 0) - \hat{j}(1 + 0) + \hat{k}(-1 - 0) = -\hat{j} - \hat{k}$

2. $(2\hat{i} - 4\hat{k}) \times (\hat{i} + 2\hat{j})$

[বাকাশিবো: ১৪]

সমাধান : $(2\hat{i} - 4\hat{k}) \times (\hat{i} + 2\hat{j}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(0 + 8) - \hat{j}(0 - 4) + \hat{k}(4 - 0) = -8\hat{i} - 84\hat{j} + 4\hat{k}$

(উত্তর)

3. $(\hat{j} \times \hat{i}) \times \hat{k}$ =কত?

[বাকাশিবো: ১৪, '২২R]

সমাধান : $(\hat{j} \times \hat{i}) \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{k} = -0 = 0$ (উত্তর)

4. $\hat{j} \times (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})$ =কত?

[বাকাশিবো: ০৯, '১২]

সমাধান : $\hat{j} \times (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-4 - 0) - \hat{j}(0 - 0) + \hat{k}(0 - 2) = -4\hat{i} - 2\hat{k}$

5. $(\hat{j} \times \hat{i}) \cdot \hat{k}$ =কত?

[বাকাশিবো: ০৬, '১৯]

সমাধান : $(\hat{i} \times \hat{j}) \cdot \hat{k} = (\hat{k}) \cdot (\hat{k}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 1(1 - 0) = 1$ (উত্তর)

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর

1. $\vec{A} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ হয়, তবে \vec{A} ও \vec{B} উভয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান :- দেওয়া আছে,

$$\vec{A} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{B} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & 3\hat{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(2 - 3) - \hat{j}(-8 + 6) + \hat{k}(4 - 2) = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\therefore \text{একক ভেক্টর} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3} = -\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$$

2. $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$ হলে $\vec{A} \times \vec{B}$ নির্ণয় কর।

সমাধান:-

দেওয়া আছে,

$$\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(9 + 4) - \hat{j}(6 + 1) + \hat{k}(8 + 3) = -5\hat{i} - 7\hat{j} + 11\hat{k}$$

3. $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ হয় তবে, $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ নির্ণয় কর।

সমাধান:-

দেওয়া আছে,

$$\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{C} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \hat{i}(2+3) - \hat{j}(-1+6) + \hat{k}(1+4) = 5\hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k} \\
\therefore (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & -5 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\
&= \hat{i}(10-15) - \hat{j}(-10-5) + \hat{k}(15+5) = 5\hat{i} + 15\hat{j} + 20\hat{k}
\end{aligned}$$

রচনামূলক প্রশ্নোত্তর

১. একটি সামান্তরিকের কর্ণ দুটো $4\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ও $2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ হলে এর ক্ষেত্রফল কত?

সমাধান:-

ধরি, ABCD সামান্তরিকের দুটি কর্ণ যথাক্রমে $\vec{AC} = 4\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{BD} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$

$$\begin{aligned}
\therefore \vec{AC} \times \vec{BD} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \hat{i}(2+9) - \hat{j}(4-6) + \hat{k}(-12-4) \\
&= 11\hat{i} - 2\hat{j} - 16\hat{k} \\
\therefore |\vec{AC} \times \vec{BD}| &= \sqrt{(11)^2 + (-2)^2 + (-16)^2} \\
&= \sqrt{121 + 4 + 256} \\
&= \sqrt{381} \\
\therefore \text{সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল} &= \frac{1}{2} |\vec{AC} \cdot \vec{BD}| \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{381} \text{ বর্গ একক}
\end{aligned}$$