باقي قواعد التفاضل

إذا كان المطلوب هو إيجاد مشتقة الدالة $y=u^v$ حيث أن الدالتين u, v هما دالتين في x في هذه الحالة نأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على

$$y=u^v$$

$$\ln y=\ln u^v$$ من قوانين اللوغاريتم

$$\ln y=v\ln u$$

* ثم نقوم بالتفاضل بالنسبة لـ x نحصل على

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = v\,\frac{d}{dx}(\ln u) + \ln u\,\frac{d}{dx}(v)$$

or ممكن نكتب هكذا

$$= v\,\frac{d(\ln u)}{dx} + \ln u\,\frac{d(v)}{dx}$$

نضرب الطرفين ب y

$$y' = \frac{dy}{dx} = y\left[v\,\frac{d\ln u}{dx} + \ln u\,\frac{dv}{dx}\right]$$

$$\because\ y = u^v$$

نعوض عنها من المعادلة السابقة

$$y' = u^v\left[v\,\frac{d\ln u}{dx} + \ln u\,\frac{dv}{dx}\right]$$

مثال : اوجد y' للدالة $y = x^x$

بأخذ $\ln$ للطرفين وتطبيق قواعد اللوغاريتمات

$$\ln y = \ln x^x = \overset{1}{x}\,\overset{2}{\ln x}$$

بتفاضل الطرفين

$$\frac{1}{y}y' = \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}} + \ln x$$

بضرب الطرفين ب y

$$y' = y(1+\ln x)$$

بالتعويض عن $y = x^x$

$$\therefore y' = x^x(1+\ln x)$$

مثال أوجد y' حيث

$$y = \frac{x^2 \sqrt[3]{3x+2}}{(2x-3)^3}$$

البسط

المقام

نأخذ ln الطرفين

$$\ln y = \ln\left(\underbrace{x^2 \sqrt[3]{3x+2}}_{\text{البسط}}\right) - \ln \underbrace{(2x-3)^3}_{\text{المقام}}$$

$$= \ln\left(x^2 (3x+2)^{\frac{1}{3}}\right) - \ln(2x-3)^3$$

$$= \ln x^2 + \ln(3x+2)^{\frac{1}{3}} - \ln(2x-3)^3$$

نطبق قوانين ln

$$\ln y = 2\ln x + \frac{1}{3}\ln(3x+2) - 3\ln(2x-3)$$

$$\frac{1}{y} y' = 2\frac{1}{x} + \frac{1}{\cancel{3}} \frac{1}{3x+2} \cdot \cancel{3} - 3 \cdot \frac{1}{2x-3} \cdot 2$$

$$y' = y\left[\frac{2}{x} + \frac{1}{3x+2} - \frac{6}{2x-3}\right]$$

بالتعويض عن y

$$y' = \frac{x^2\sqrt[3]{3x+2}}{(2x-3)^3}\left[\frac{2}{x} + \frac{1}{3x+2} - \frac{6}{2x-3}\right]$$

<u>مثال :</u> أوجد y' حيث

$$y = x^{\sin x}$$

" أخذ $\ln$ للطرفين

$$\ln y = \ln x^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x \ln x$$

نفاضل الطرفين

$$\frac{1}{y} y' = \sin x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cos x$$

$$y' = y\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x\right] = x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \ln x\right]$$

تطبيقات على التفاضل

① النهايات العظمى والصغرى Maximum and Minmum points

لإيجاد نقط النهايات العظمى والصغرى لأي داله

① نفاضل الداله $f(x)$ ثم نضع $f'(x)=0$ وإيجاد قيم x المقابله

② نوجد التفاضل الثاني $f''(x)$ عند كل نقطه من ① فإذا كانت

أ) $f''(x)>0$ ∴ الداله قيمه صغرى Min.

ب) $f''(x)<0$ ∴ الداله قيمه عظمى Max.

ج) $f''(x)=0$ لا يمكن الحكم على هذه النقطه

مثال أوجد نقط النهايات العظمى والصغرى للدالة

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 \Longrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

بالقسمة على 3

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 3 , \quad x = 1}$$

$$y'' = 6x - 12$$

عند $x = 3$

$$y'' = 6 > 0$$

بالتعويض عن $x = 3$ في الدالة الأصلية

$y = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) = 0 \Longrightarrow (3,0)$ عند النقطة

يوجد نهاية صغرى Min.

عند النقطة $x = 1$ بالتعويض في المعادلة الأصلية

$y = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) = 4 \Longrightarrow (1,4) =$ النقطة

$\longleftarrow$ عند 10

$y'' = -6 < 0$

$\therefore$ عند النقطة $(1,4)$ يوجد نهاية عظمى Max.

مثال :- اوجد نقط التحول العظمى والصغرى للدالة

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8$$ ٧

$$f'(x) = x^3 - x^2 - 6x$$

$$x^3 - x^2 - 6x = 0$$

$$x(x^2 - x - 6) = 0$$

$$x(x+2)(x-3) = 0$$

$\therefore$ $x = 0$ أو $x + 2 = 0$ أو $x - 3 = 0$

$x = 0$ $\quad$ $x = -2$ $\quad$ $x = 3$

بالتعويض عن كل قيمه من قيم المعادله الاصليه f للحصول على قيمه y

$$f(0) = \frac{1}{4}(0)^4 - \frac{1}{3}(0)^3 - 3(0)^2 + 8 = 8$$

∴ النقطة $\underbrace{(0,8)}$

$$f(-2) = \frac{1}{4}(-2)^4 - \frac{1}{3}(-2)^3 - 3(-2)^2 + 8 = \frac{8}{3}$$

∴ النقطة $\underline{\left(-2, \frac{8}{3}\right)}$

$$f(3) = -\frac{31}{4}$$

∴ النقطة $\underline{\left(3, -\frac{31}{4}\right)}$

نكشف عند كل نقطة نهاية العظمى أو الصغرى بإيجاد $f''(x)$

$$f''(x) = 3x^2 - 2x - 6$$

عند النقطة $(0,8)$

$$f''(x) = -6 < 0$$

نهاية عظمى

عند النقطة $\left(-2, \frac{8}{3}\right)$

$f''(x) = 10 > 0$ قيمة صغرى

عند النقطة $\left(3, \frac{-31}{4}\right)$

$f''(x) = 15 > 0$ قيمة صغرى

تايلور وماكلورين

متسلسلة تايلور

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

النقطة المطلوب حساب المتسلسلة عندها

متسلسلة ماكلورين

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}x^n$$

النقطة المطلوب حساب المتسلسلة عندها دائما الصفر

مثال

اوجد متسلسلة تايلور للدالة $\frac{1}{x}$ عند النقطة (-1)

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f'(-1) = -1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} \qquad f''(-1) = -1$$

بالتعويض بمعادلة متسلسلة تايلور

$$f(x) = \frac{1}{x} = (-1) + \frac{(-1)}{1!}(x-(-1)) + \frac{(-1)}{2!}(x-(-1))^2 + \cdots$$

$$= -1 - (x+1) - \frac{1}{2}(x+1)^2 + \cdots$$

مثال : أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $y = x e^{x}$

$$f(x) = y = \overset{①}{x}\,\overset{②}{e^{x}} \qquad f(0) = (0)\,e^{0} = 0$$

$$f'(x) = x e^{x} + e^{x} \qquad f'(0) = e^{(0)}(0+1) = 1$$

$$= e^{x}(x+1)$$

$$f''(x) = x e^{x} + e^{x} + e^{x} \qquad f''(0) = 2$$

$$= x e^{x} + 2 e^{x}$$

$$= e^{x}(x+2)$$

$$x e^{x} = 0 + (1)\,x + \frac{2}{2!}x^{2} + \cdots$$

مثال: اوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $y = \sin x$

$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$