Osnovne algebrske strukture

Algebrska struktura

Definicija 1.1

Naj bo $\mathbb{S}$ poljubna neprazna množica.
Vsaki preslikavi $\varphi : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ rečemo DVOMESTNA NOTRANJA OPERACIJA ali okrajšano DNO na množici $\mathbb{S}$.
Sliko urejenega para $(a, b) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}$ pišemo $a\varphi b$ (namesto običajnega zapisa $\varphi(a, b)$) in jo imenujemo KOMPOZITUM (SESTAV) ELEMENTOV a in b iz $\mathbb{S}$.
Dvomestno notranjo operacijo označujemo z znaki: $+, \cdot, \circ, \triangle, \heartsuit, \ldots$

Zgled 1.2

a) $\mathbb{S} = \mathbb{N}$
$\circ$ je običajno seštevanje naravnih števil.
Sledi, je DNO, saj $\forall a, b \in \mathbb{N}$ je $a \circ b \in \mathbb{N}$.

b) $\mathbb{S} = \mathbb{N}$
$\circ$ je običajno odštevanje naravnih števil.
Sledi, ni DNO, npr.: za $1 \circ 2 = 1 - 2 = -1 \notin \mathbb{N}$.

Definicija 1.3

DNO $\circ$ na množici $\mathbb{S} \neq \emptyset$ je ASOCIATIVNA če za vse elemente $a, b, c \in \mathbb{S}$ velja

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

KOMUTATIVNA, če za vsaka elementa $a, b \in \mathbb{S}$ velja

$$a \circ b = b \circ a$$

Zgled 1.4.

a) $\mathbb{S} = \mathbb{Z}$
$\circ$ je običajno seštevanje celih števil.
Sledi, je DNO.
Sledi, $\circ$ je komutativna, in je asociativna.

b) $\mathbb{S} = \mathbb{Z}$
$\circ$ je odštevanje celih števil.
Sledi, je DNO.
Preverimo komutativnost:

$$a = 1, b = 0$$
$$a \circ b = 1 - 0 = 1$$
$$b \circ a = 0 - 1 = -1$$

Sledi, ni komutativno.
Preverimo, asociativnost:

$$\begin{aligned} a = 1, b = 2, c = 3 \\ (a \circ b) \circ c =& (1-2)-3 = -4 \\ a \circ (b \circ c) =& 1-(2-3) = 2 \end{aligned}$$

Sledi, ni asociativno.

c) $\mathbb{S} = \mathbb{R}^{n \times n}$ (kvadratne matrike z realnimi koeficienti)
$\circ$ je običajno množenje matrik.
Sledi, je DNO, ker je rezultat zmnožka spet kvadratna matrika velikosti $n \times n$ z realnimi koeficienti.
Preverimo asociativnost:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A \circ B) \circ C &= \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a_1a_2 + b_1c_2)a_3 + (a_1b_2 + b_1d_2)c_3 & (a_1a_2 + b_1c_2)b_3 + (a_1b_2 + b_1d_2)d_3 \\ (c_1a_2 + d_1c_2)a_3 + (c_1b_2 + d_1d_2)c_3 & (c_1a_2 + d_1c_2)b_3 + (c_1b_2 + d_1d_2)d_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1a_2a_3 + b_1a_3c_2 + a_1c_2c_3 + b_1c_3d_2 & a_1a_2b_3 + b_1b_2d_3 + a_1b_2c_3 + b_1c_2d_3 \\ c_1a_2a_3 + d_1a_3c_2 + c_1c_2c_3 + d_1c_3d_2 & c_1a_2b_3 + d_1b_2d_3 + c_1b_2c_3 + d_1c_2d_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \circ (B \circ C) &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2a_3 + b_2c_3 & a_2b_3 + b_2d_3 \\ c_2a_3 + d_2c_3 & c_2b_3 + d_2d_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1(a_2a_3 + b_2c_3) + b_1(c_2a_3 + d_2c_3) & a_1(a_2b_3 + b_2d_3) + b_1(c_2b_3 + d_2d_3) \\ c_1(a_2a_3 + b_2c_3) + d_1(c_2a_3 + d_2c_3) & c_1(a_2b_3 + b_2d_3) + d_1(c_2b_3 + d_2d_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1a_2a_3 + b_1a_3c_2 + a_1c_2c_3 + b_1c_3d_2 & a_1a_2b_3 + b_1b_2d_3 + a_1b_2c_3 + b_1c_2d_3 \\ c_1a_2a_3 + d_1a_3c_2 + c_1c_2c_3 + d_1c_3d_2 & c_1a_2b_3 + d_1b_2d_3 + c_1b_2c_3 + d_1c_2d_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sledi, je asociativno.
Preverimo komutativnost:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \circ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \circ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trditev 1.5.
Če je DNO $\circ$ na $\mathbb{S} \neq \emptyset$ asociativna, potem je produkt (kompozitum) elementov $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{S}$ $(n \in \mathbb{N})$ natančno določen z vrstnim redom teh elementov.
Tak produkt označimo z $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$.
Dokaz: izpustimo!

Trditev 1.6.
Če je $\circ$ asociativna in komutativna DNO na $\mathbb{S} \neq \emptyset$, potem je naš produkt elementov $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{S}$ $(n \in \mathbb{N})$ enolično določen ne glede na vrstni red naših elementov.
Dokaz: izpustimo!

Definicija 1.7.
Naj bo $\mathbb{S} \neq \emptyset$ z DNO $\circ$.
Element $l \in \mathbb{S}$ je LEVI NEUTRALNI ELEMENT v množici $\mathbb{S}$, če za $\forall a \in \mathbb{S}$ velja

$$l \circ a = a$$

Element $d \in \mathbb{S}$ je DESNI NEUTRALNI ELEMENT v množici $\mathbb{S}$, če za $\forall a \in \mathbb{S}$ velja

$$a \circ d = a$$

Če je $e \in \mathbb{S}$ hkrati levi in desni neutralni element v množici $\mathbb{S}$, mu preprosto rečemo NEUTRALNI ELEMENT.
Oznaka: $(\mathbb{S}, \circ)$ ... neprazna množica $\mathbb{S}$ z DNO.

Trditev 1.8.
Če $(\mathbb{S}, \circ)$ premore levi in desni neutralni element, potem sta enaka.
Dokaz:
Naj bo $l \in \mathbb{S}$ levi neutralni element in $d \in \mathbb{S}$ desni neutralni element v množici $\mathbb{S}$, potem:

$$l = l \circ d = d$$

Torej sklepamo, da je $l = d$, kar smo želeli pokazati.

Zgled 1.9.

a) $S = \mathbb{R}^{2\times 2} = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$
$\circ$ je običajno množenje matrik.

Sledi, je DNO.
$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ je neutralni element, saj za $\forall A \in S$ velja $I \cdot A = A \cdot I = A$.

b) $S = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}; a, b \in \mathbb{R}$
$\circ$ je običajno množenje matrik.
$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & ay \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Sledi, je DNO. Levi neutralni element:

$$\begin{bmatrix} ax & ay \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$a = 1, b = \text{ poljuben}$$
$$\Downarrow$$
$$\forall b \in \mathbb{R} \text{ je } \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ levi neutralni element v } S$$

Desni neutralni element:

$$\begin{bmatrix} ax & ay \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$ax = a \Rightarrow x = 1$$
$$ay = b \Rightarrow y = \frac{b}{a} \text{ ni OK! Ker je odvisno od } a, b.$$
$$\Downarrow$$
desni neutralni element ne obstaja!

Definicija 1.10.
Naj $(S, \circ)$ premore neutralni element $e \in S$, ter naj bo $a \in S$ poljuben.
Potem $l \in S$ je LEVI OBRAT (ali INVERZ) ELEMENTA $a \in S$ če velja

$$l \circ a = e$$

Element $d \in S$ je DESNI OBRAT ELEMENTA $a \in S$ če velja

$$a \circ d = e$$

OBRAT ELEMENTA $a \in S$ je tak element iz S ki je hkrati levi in desni obrat od a.

Element $a \in S$ je obrnljiv (v množici S) če premore obrat v množici S.

Trditev 1.11.
Naj veljajo oznake iz definicije 1.10.
Neutralni element e je obrat samega sebe.
Dokaz:

$$e \circ e = e$$

Trditev 1.12.
Naj bo $S \neq \emptyset$ z DNO $\circ$, ki je asociativna in naj bo $e \in S$ neutralni element.
Če ima element $a \in S$ levi in desni obrat v S, potem sta enaka.

Dokaz: Naj veljajo predpostavke iz trditve 1.12. in $a \in S$.

$$\exists \text{levi obrat za } a \text{ v } S \Rightarrow \exists l \in S : l \circ a = e$$
$$\exists \text{desni obrat za } a \text{ v } S \Rightarrow \exists d \in S : a \circ d = e$$

Potem je

$$(l \circ a) \circ d = e \circ d = d$$
$$l \circ (a \circ d) = l \circ e = l$$

ker je $\circ$ asociativna operacija.
Torej, je $l = d$.

Definicija 1.13.
Če je $S \neq \emptyset$ z DNO $\circ$, ki je asociativna, potem rečemo, da je $(S, \circ)$ POLGRUPA.
Polgrupa z neutralnim elementom je MONOID.
Monoid v katerem je vsak element obrnljiv je GRUPA.

$(S, \circ)$	$\circ$ asociativna	$\exists$ neutralen element	$\forall a \in S$ je obrnljiv
POLGRUPA	✓	×	×
MONOID	✓	✓	×
GRUPA	✓	✓	✓

Definicija 1.14.
Če izbrano DNO na $S \neq \emptyset$ označimo s $+$, potem govorimo o SEŠTEVAJOČEM (ali ADITIVNEM) ZAPISU.
Element $a + b$ je VSOTA elementov $a, b \in S$, neutralni element označimo z $0 \in S$ (in mu rečemo ničla), obratu elementa $a \in S$ rečemo NASPROTNI ELEMENT in ga označimo z $-a$.

Če izbrano DNO na $S \in \emptyset$ označimo z $\cdot$, potem govorimo o MNOŽEČEM (ali MULTIPLIKATIVNEM) ZAPISU.

$$a \cdot b = ab$$

Element ab je zmnožek (ali PRODUKT) elementa $a, b \in S$, neutralni element označimo z $1 \in S$ (in mu rečemo enka), obrat elementa $a \in S$ rečemo INVERZ, označimo z a^{-1}.

Definicija 1.15.
Naj bo $\Omega \neq \emptyset$.
$Map(\Omega) = \{f : \Omega \to \Omega\} \leftarrow$ množica vseh preslikav iz Ω v Ω.
Množico $Map(\Omega)$ opremimo z (običajno) operacijo levega sestavljanja preslikav:

$$\forall f, g : \Omega \to \Omega \text{ je } f \circ g : \Omega \to \Omega$$

$$\text{in } \forall x \in \Omega \text{ velja } (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Operacija $\circ$ iz definicije 1.15 je DNO na $Map(\Omega)$.

Trditev 1.16.
$(Map(\Omega), \circ)$ je monoid.

Dokaz:

I) $\circ$ je asociativna. (moramo dokazati, oz. dokazano spodaj)

$$\forall f, g, g \in Map(\Omega) : (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

Opazimo:

$$((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$
$$(f \circ (g \circ h))(x) = f(g(h(x)))$$

II) $\exists$ neutralnega elementa v $Map(\Omega)$ za $\circ$

$$\forall x \in \Omega \text{ naj bo } id : x \to x \text{ (identična preslikava)}$$

$$\text{Pogazati moramo: } \forall f \in Map(\Omega) : f \circ id = id \circ f = features$$

$$\forall x\Omega \text{ velja: } (f \circ id)(x) = f(id(x)) = f(x)$$
$$(id \circ f)(x) = id(f(x)) = f(x)$$

Definicija 1.15. (nadaljevanje)
Podobno definiramo:

$$Inj(\Omega) = \{f : \Omega \to \Omega; f \text{ je injektivna } \}$$

$$Sur(\Omega) = \{f : \Omega \to \Omega; f \text{ je surjektivna } \}$$
$$Bij(\Omega) = \{f : \Omega \to \Omega; f \text{ je bijektivna } \}$$
in jih opremimo z operacijo sestavljanja preslikav z istim predpisom.

Trditev 1.17.
$(Inj(\Omega), \circ)$ in $(Sur(\Omega), \circ)$ sta monoida, $(Bij(\Omega), \circ)$ je grupa.

Dokaz: D.N. (za domačo nalogo)

Trditev 1.18.
Naj bo $(A, \cdot)$ polgrupa z neutralnim elementom in naj bo

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in A \ (n \in \mathbb{N}) \text{ obrnljivi.}$$

Potem velja: produkt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je obrnljiv in njegov obrat je

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)^{-1} = a_n^{-1}, \ldots, a_2^{-1}, a_1^{-1}$$

Dokaz: Indukcija po n:
$n = 2$; Naj bosta $a_1, a_2 \in A$ obrnljiva

$$(a_1a_2) \cdot (a_1a_2)^{-1} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_2^{-1} \cdot a_1^{-1} = a_1 \cdot 1 \cdot a_1^{-1} = a_1a_1^{-1} = 1$$
$$(a_1a_2)^{-1} \cdot (a_1a_2) = \ldots \text{ podobno}$$

$n = n + 1$; D.N. (za domačo nalogo)

Definicija 1.19.
Naj bo $(A, \cdot)$ polgrupa z neutralnim elementom.
Za $\forall a \in A$ in $\forall n \in \mathbb{N}$ definirajmo POTENCO a^n kot

$$a^1 = a$$
$$a^2 = a \cdot a$$
$$\vdots$$
$$a^{n+1} = a^n \cdot a = a \cdot a \cdot a \ldots a$$

Dodatno definirajmo, $a^0 = 1$.
Če je element $a \in A$ obrnljiv definiramo

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a^{-n} = a^{(-1)n} = (a^{-1})^n$$

Izrek 1.20. (Adicijski izrek)
Naj bo $(A, \cdot)$ polgrupa z neutralnim elementom in naj bosta $m, n \in \mathbb{N}_0$.
Potem $\forall a \in A$ velja $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
Če je $a \in A$ obrnljiv, velja adicijski izrek $\forall m, n \in \mathbb{Z}$.

Definicija 1.21.
Naj bo $(A, \cdot)$ polgrupa z neutralnim elementom.

Element $a \in A$ ima KONČEN RED, če obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $a^n = 1$.
V tem primeru najmanjšem številu $r \in \mathbb{N}$ za katerega je $a^r = 1$, rečemo
RED ELEMENTA a.

opomba 1: $|a|$ (red elementa a)
opomba 2: v primeru $(A, +)$ $a^n \to na$ in $1 \to 0$

Zgled 1.22.

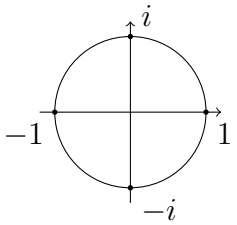
a) $A = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$
$\cdot$ je običajno množenje celih števil $\implies (\mathbb{Z}\backslash\{0\}, \cdot)$

$1 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} : 1^1 = 1, 1^2 = 1, 1^3 = 1, \ldots$ element 1 ima končen red, red elementa 1 je 1
$2 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} : 2^1 = 2, 2^2 = 2 \cdot 2 = 4, 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \ldots$ nima končnega reda

Torej, števila večja od 1 nimajo končnega reda.

$$-1 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} : (-1)^1 = -1, (-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \text{ red elementa -1 je 2}$$

b) $A = S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$
$\cdot$ običajno množenje kompleksnih števil.



$$0 + 1i = i \in S^1 : i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1 \text{ red elementa } i \text{ je } 4$$

$$\begin{aligned} -i \in S^1 : (-i)^1 &= -i, (-i)^2 = (-i) \cdot (-i) = -1 \\ (-i)^3 &= (-i)^1 \cdot (-i)^2 = -i \cdot (-1) = i \\ (-i)^4 &= (-i)^2 \cdot (-i)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \text{ red elementa } -i \text{ je } 4 \end{aligned}$$

c) $A = \mathbb{Z}$