Diskretna matematika II - Zapiski predavanj

Amar Ustavdić

Vsebina

1 Uvod

1.1 Uporabna matematika (nekaj zgodovine)

a) Zgodovinsko (od Newtona in Leibniza):

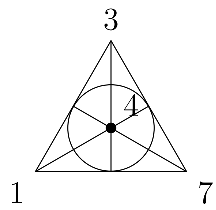
- temelji na zvezno spreminjajočih se procesih.
- motivirani predvsem z fizikalnimi aplikacijami.
- in študiranih z uporabo analize (diferencialni račun, integralni račun).

b) Z rastjo računalnikov in drugih digitalnih naprav:

- diskretna matematika postaja vse pomembnejša.
- diskretna matematika študira končne ali števno neskončne diskretne objekte
- Zajema številna področja matematike:
  - teorijo množic,
  - logiko,
  - kombinatoriko,
  - teorijo grafov,
  - teoretično računalništvo,
  - teorijo števil,
  - pa tudi (vsaj delno):
    * algebro,
    * operacijske raziskave,
    * terijo iger,
    * verjetnost,
    * statistiko.

Uporaba diskretne matematike v resničnem življenju (poleg računalnikov):

- organizacija sestankov,
- sestavljanje proizvodnih in šolskih urnikov,
- kriptografija,
- načrtovanje kod,
- oblikovanje prometnih, električnih in komunikacijskih omrežij,
- dodeljevanje zaposlenih na delovna mesta,
- oblikovanje glasovnih shem,
- načrtovanje poskusov (npr.: Recimo da imate kmetijo, pa želite preiskusit različna gnoila za zemljo, imate na voljo samo 3 njive, pa 7 različnih gnojil, kako jih boste zdej preiskusili katero je boljše. In potem lahko razvijete načrt kako boste to naredili na nek pošten način)



- v kemiji in biologiji (lasti bioinformatiki, v študiju sekvence DNA in filogenetiki),
- v razvedrilnih matematiki (Sudoku, Rubikova kocka, Hanoijski stolpi. . .)

Pri tem predmetu bomo obravnavali kombinatoriko pa teorijo grafov:

- reševanje problemov
- dokazovanje

1.2 Kaj je kombinatorika?

Kombinatorika se ukvarja z rasporejanjem predmetov v skladu s predpisanimi pravili:

- Prvič preučuje uprašanje ali je določena razporeditev sploh možna?
- Če je odgovor pritrdilen, na koliko različnih načinov?

Če so pravila preprosta (npr.: izbira nogometne ekipe iz razreda učencov je obstoj razporeditve jasen in se osredotočimo na problem štetja.)

Vendar za bolj zapletena pravila morda ne bo jasno, ali je razporeditev sploh mogoča. (npr.: Eulerjev problem časnikov.)

Včasih je podana tudi kriterijska funkcija, ki meri, kako dobra je neka razporeditev.
U tem primeru iščemo optimalne rešitve glede na kriterijsko funkcijo (npr.: poiščite tak razpored tekm nogometnega turnirja, da bo turnir trajal čim manj dni.)

1.3 Zgled kombinatoričnih problemov

1.3.1 Deranžmaji

Danih n pisem in n ovojni.
Na koliko načinov lahko pisma vstavite v ovojnice, da nobeno pismo ni v pravilnid ovojnici?

Diskusija:
Najprej se vprašamo na koliko načinov lahko damo n pisem v n ovojnic če ni nobenih omejitev? (vse je dovoljeno)

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$$
$$n! = n \cdot (n-1) \dots 1$$

Skupno število dajanja pisem v ovojnice je število vseh permutacij n objektov ki je $n!$.

Videli bomo da je delež premutacij, ki so nepravilno naslovljene, zelo blizu $\frac{1}{e}$, kjer je $e \approx 2,71828\ldots$ osnova naravnih logaritmov.

Presenetljiv rezultat na prvi pogled.

Iskaže se, da je število (deranžmajev) načinov napačnega naslavljanja pisem enako celemu številu, najbližjemu številu $\frac{n!}{e}$.

Domača naloga: Za $n = 4$ in $n = 5$ izračunajte število (deranžmajev) načinov razporeditev n pisem v ovojnice, tako da je vsako pismo napačno naslovljeno. Za vsak tak n izračunajte razmerje tega števila s številom $n!$.

1.3.2 Kirkumnove šolarke (na e-učilnici)

1.3.3 Eulerjevi častniki

To je pa ta zanimiv problem kjer se iskaže da ni preprosto ugotovit ali rešitev obstaja. Opazimo da je Eulerjev problem zelo podoben Latinskemu kvadratu, samo da ni $n = 3$, ampak je $n = 6$.

Danih je 36 časnikov, ki pripadaju 6 polkom in imajo 6 činov (pri čemer vsaka kombinacija čina in polka samo enemu častniku). Ali je častnike mogoče razvrstiti v tako 6×6 formacijo tako da bo vsaki vrstici in v vsakem stolpcu natanko en častnik iz vsakega polka in natanko en častnik iz vsakega polka in natanko en častnik vsakega čina?

Problem je sestavil Euler leta 1782.
Vrejel je da je odgovor ne, kar pa je šele leta 1900 dokazal Taury.
Problem je mogoče posplošiti na n^2 častnikov, kjer je število polkov, činov, vrstic in stolpcev enako n.

$$n : 1, {\color{red}2}, 3, 4, 5, {\color{red}6}, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots$$

Euler je pokazal rešitve za vsa števila n ki niso kongruentna 2 po modulu 4, in ugotovil da rešitev za $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$ ne obstaja.

$$a \equiv b (\mathrm{mod}\ k) \quad (k \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}) \text{ če } k | a - b$$

Euler se je glede tega motil. Trije matematiki, Bose, Shirikande in Parker so leta 1960 pokazali, da obstaja rešitev za vse n razen za 2 in 6.

Domača naloga: Rešite problem za 16 in 25 častnikov.

1.3.4 Ramseyjeva igra

Igra dveh igralcev ki zahteva list papirja in svinčnik dveh barv, npr.: rdečega pa zelenega. Izberemo 6 točk na papirju, tako da nobene 3 niso na skupni premici in igralca vzameta svinčnika in izmenjojoče z daljico povežeta dve izmed izbranih točk. In igralec ki prvi nariše trikotnik svoje barve izgubi (štejejo samo trikotniki z oglišči v izbranih točkah).

Ali se lahko igra konča z neodločenim izidom (da nihče ne izgubi)?

Diskusija:
Iskaže se, da neodločen izid ni mogoč, saj eden igralc bo prisiljen vstvariti trikotnik.

Remzi je dokazal široko posplošitev tega dejstva. Njegov izrek se včasih zapiše v obliki "Popoln nered je nemogoč."

Domača naloga: Igrajte to igro s prijatelji in preverite da nedoločen izid ni mogoč.

2 Osnovna kombinatorična načela

Če želimo prešteti neke objekte s predpisanimi lastnostmi, to lahko storimo v dveh delih:

- najprej objekte ki jih preštevamo, združimo jih v neko natančno opisano množico
- nato pa tej množici določimo moč

2.1 Definicija

Pravimo da končna množica X vsebuje n elementov, če obstaja bijekcija iz množice X v množico $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. U tem primeru pištemo $|x| = n$ in rečemo da je moč množice X enaka n. Prazno množico obravnavamo posebej in postavimo $|\emptyset| = 0$.

Pri določanju moči množice si pomagamo z nekaj preprostimi načeli.

2.2 Izrek (načelo vsote)

Če sta A in B končni disjunktni množici potem velja $|A \cup B| = |A| + |B|$.

S pomočjo matematične indukcije načelo vsote posplošimo na končno unijo paroma disjunktnih končnih množic.

Če so $A_1, A_2, \ldots, A_n$ končne in paroma disjunktne množice (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$), potem velja naslednje

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

oziroma

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

2.3 Zgled

Od mesta X do mesta Y lahko pridemo z letalom, vlakom ali avtobusom. Med X in Y je 12 različnih letalskih poletov, 5 različnih vlakov in 10 različnih avtobusov. Koliko različnih množic imamo, da pridemo iz X v Y?

Izberemo lahko le en način prevoza.
In za vsak način imamo izbiro: $12 + 5 + 10 = 27$

2.4 Izrek (načelo enakosti)

Če obstaja bijekcija med dvema končnima množicama A in B, potem je $|A| = |B|$.

2.5 Zgled

Naj bo X množica z n elementi:
Koliko podmnožic premore X?

Naloga sprašuje po moči potenčne množice $P(X)$ množice X. (2^X)
Rešimo jo tako da poiščemo bijekcijo med množico $P(X)$ in množico vseh narejenih n-teric z elementi iz množice $\{0, 1\}$
Označimo elemente množice X z $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
Poljubni množici $Y \in P(X)$ priredimo $\chi(Y) = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \in \{0, 1\}^n$ za katerega je

$$y_i = \begin{cases} 1; & \text{če } x_i \in Y \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

Na ta način smo definirali preslikavo

$$\chi : P(X) \to \{0, 1\}^n$$

Ta preslikava je bijektivna. Zato je

$$|P(X)| = |\{0, 1\}^n| = 2^n$$