$A = \{2n : n \text{ מספר שלם}\}$

(1) נגדיר שני מספרים $k, m \in \mathbb{Z}$ השייכים לקבוצה A.

סכום שני המספרים יהיה זוגי משום שמקדם ההכפלה זוגי.

$$\begin{cases} 2(k+m) = 2k+2m \\ 2(k-m) = 2k-2m \end{cases}$$

(2)

$2k \cdot 2m = 4km \rightarrow$ תוצאת הכפלת k,m זוגית משום שהמקדם שלהם זוגי.

(3)

$2k^n = 2m^n \rightarrow$ תמיד זוגי. בגלל המקדם.

(4)

$$\frac{2k}{2m} = \frac{k}{m} = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{k}{m} \in \mathbb{Q}$$

נניח $k = 1$, $m = 5$

ולכן מנת שני איברים אינה איבר בק' A.

(2) $r, q \in \mathbb{Q}$, $a \notin \mathbb{Q}$

(1) נגדיר $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

$$r = \frac{a}{b}, \quad q = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} =$$

$b, d \neq 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} \in \mathbb{Q}$$

(2)

$$r \cdot q = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$$

3)

$$\frac{r}{q} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \in \mathbb{Q}$$

4) נניח כי $b,c,d,e \in \mathbb{Z}$.

$$q = \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$$

$$x = \frac{d}{e} \in \mathbb{Q}$$

$$a + \cancel{q} = \cancel{q} + x \quad / -q$$

$$a = x$$

זו סתירה משום שנתון ש- $a \notin \mathbb{Q}$ והנחנו כי $x \in \mathbb{Q}$

$$a - \cancel{q} = x - \cancel{q} \quad / +q$$

$$a = x$$

זו סתירה משום שנתון ש- $a \notin \mathbb{Q}$ והנחנו כי $x \in \mathbb{Q}$

5) נניח כי $b,c,d,e \in \mathbb{Z}$ כאשר $e,c \neq 0$.

$$q = \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$$

$$x = \frac{d}{e} \in \mathbb{Q}$$

$$a \cdot \cancel{q} = \cancel{q} \cdot x \Rightarrow a = x$$

זו סתירה משום שהוגדר כי $a \notin \mathbb{Q}$ והנחנו כי $x \in \mathbb{Q}$

③ $A = \{ n\sqrt{2} : n$ מספר טבעי $\}$

$$q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$$
$$z = n\sqrt{2} \in A$$

① יהיו $a,b \in \mathbb{N}$ כאשר $b \neq 0$.

נניח כי $z,q \in \mathbb{Q}$ ולכן:

$$z = q \Rightarrow n\sqrt{2} = \frac{a}{b} \rightarrow \sqrt{2} = \frac{na}{b}$$

סתירה.
$\sqrt{2}$ הוא מספר אי רציונלי
ולכן אין מספרים רציונליים בקבוצה A.

② יהיו $m, k \in \mathbb{N}$ כאשר $m,n \neq 0$.

נניח כי $n\sqrt{2} + m\sqrt{2} = k\sqrt{2}$

$$(n+m)\cancel{\sqrt{2}} = k\cancel{\sqrt{2}}$$

$$n+m = k \in \mathbb{N}$$

סכום
שני המקדמים הטבעיים
שווה למקדם הטבעי ולכן סכום של כל
שני איברים בקבוצה A גם כן שייך ל-A.

③ יהיו $m, k \in \mathbb{N}$ כאשר $m,n \neq 0$.

נניח כי $n\sqrt{2} - m\sqrt{2} = k\sqrt{2}$

$$(n-m)\cancel{\sqrt{2}} = k\cancel{\sqrt{2}}$$

$$n-m = k \in \mathbb{N}$$

הפרש
שני המקדמים הטבעיים
שווה למקדם הטבעי ולכן הפרש של כל
שני איברים בקבוצה A גם כן שייך ל-A.

$A = \{ p + q\sqrt{2}$: מספרים רציונליים $p, q \}$

$\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \pm a_2 \in A$

יהיו $a_1, a_2 \to A$

$a_1 = p_1 + q_1\sqrt{2} \qquad p_1, q_1 \in \mathbb{Q}$

$a_2 = p_2 + q_2\sqrt{2} \qquad p_2, q_2 \in \mathbb{Q}$

$$a_1 \pm a_2 = (p_1 \pm q_1\sqrt{2}) \pm (p_2 + q_2\sqrt{2}) = \underbrace{p_1 + p_2}_{p} \pm \sqrt{2}\,\underbrace{(q_1 \pm q_2)}_{q \,\in\, \mathbb{Q}} \in A$$

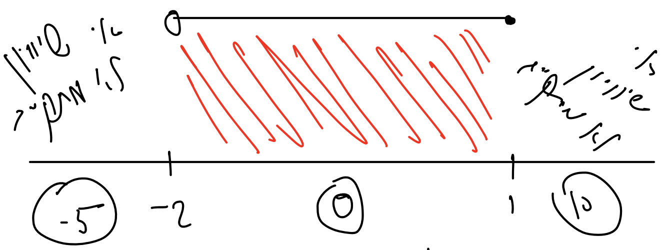
$\in \mathbb{Q}$ כי $\mathbb{Q}$ סגורה לפעולת חיבור

$$\frac{1}{p + q\sqrt{2}} \in A$$

ה

$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{x+2} \le 0 \}$ $\quad x \neq -2$

$\frac{x-1}{x+2} \le 0 \ / \cdot (x+2)^2$



$(x+2)(x-1) \le 0$

$x^2 - x + 2x - 2 \le 0$

$x^2 + x - 2 \le 0$

$\boxed{-2 < x \le 1}$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$

$x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$

$\max A = 1$:

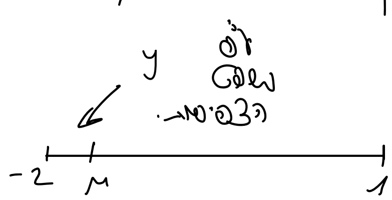
לכן קיים $x \in A$ מקיים $-2 < x \le 1$ מה זה? שוויון מתקיים במספר $x \in A$

שמקיים $x = 1$. ולכן $\max A = \sup A = 1$.

$\min A$ לא קיים: .

נניח בשלילה כי קיים min לקבוצה A, $m \in A$ לכן M חסם מלרע A

לכל $x \in A$, $x \ge M$ כיוון ש-M חסם מלרע A $\iff -2 < M \le 1$

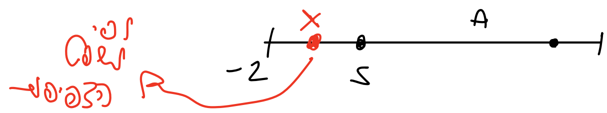


לפי משפט הצפיפות קיים y $\quad -2 < y < M \le 1$

לכן $y \in A$..

קיבלנו שיש איבר ב-A הנקרא y שהוא קטן מ-M. $\inf(A) = -2$

נניח בשלילה שקיים z החוסם את הקבוצה מלמטה וגם $z > -2$



אם נצליח ונמצא איבר $x \in A$ כך ש: $z > x$ נקבל ש- z אינו חסם מלרע.

$$x = \frac{z + (-2)}{2}$$

וגם $-2 < x < z$

$x \in A$

ולכן z אינו חסם מלרע

מסקנה $Inf(A) = -2$.

ג

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$A = \underbrace{A_1}_{\text{זוגי}} \cup \underbrace{A_2}_{\text{אי-זוגי}} :$$

זוגי:

$$A_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$$

$$A_1 : \frac{1}{n} = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \max A = \sup A = \frac{1}{2}$$

אי זוגי:

$$A_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$$

$$A_2 : -\frac{1}{n} = \frac{(-1)^1}{1} = -1 \rightarrow \min A = \inf A = -1$$

אז קבוצה A:

$$A \rightarrow -1 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$\max A = \frac{1}{2}$

אם $x\in A$ מתקיים $x\in A_1$ או $x\in A_2$

ואם $x\in A_1$ אז $0<x\le\frac{1}{2}$ ואם $x\in A_2$ אז $-1\le x<0$

לכן אם $x\in A$ מתקיים $x\le\frac{1}{2}$ לפי ההגדרה

$\min A = -1$

אם $x\in A$ מתקיים $x\in A_1$ או $x\in A_2$

ואם $x\in A_1$ אז $0<x\le\frac{1}{2}$ ואם $x\in A_2$ אז $-1\le x<0$

לכן אם $x\in A$ מתקיים $-1\le x$. לפי ההגדרה.

$\frac{1}{2} = \max A = \sup A$, $-1 = \min A = \inf A$

ג)

$A = \{x\in\mathbb{R} \mid x=(-1)^n+\frac{n}{n+1},\ n\in\mathbb{N}\}$

זוגי $A_1 = \{x = 1+\frac{n}{n+1}\}$

$A_1 \to \frac{5}{3}\le x<2$

$\max A_1 = 1+\frac{2}{2+1} = 1\frac{2}{3}$

אי-זוגי $A_2 = \{x=-1+\frac{n}{n+1}\}$

$A_2 \to -\frac{1}{2}\le x<0$

$A_2 = (-1)+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$A = A_1\cup A_2$

$\min A$:

כל $x\in A$ מקיים $x\in A_1$ או $x\in A_2$.

אם $x\in A_1$ אז הוא מקיים את התנאי $\frac{5}{3}\le x<2$ ולכן $x\in A_2$

אז מקיים את התנאי $-\frac{1}{2}\le x<0$.

אם $x\in A_2$ אז הוא מקיים $-\frac{1}{2}\le x<0$ ובפרט $-\frac{1}{2}\le x$

ולכן ניתן להסיק כי $\min A=\inf A=-\frac{1}{2}$.

$\sup A$:

כל $x\in A$ מקיים $x\in A_1$ או $x\in A_2$

אם $x\in A_1$ אז $\frac{5}{3}\le x<2$. ואם $x\in A_2$ אז $-\frac{1}{2}\le x<0$.

אם $x\in A_1$ אז הוא מקיים $\frac{5}{3}\le x<2$ ובפרט $x<2$ ולכן

$\sup A=2$.

ניתן להסיק כי הקבוצה A לא קיים max משום שאף

ובפרט, אין לנו מספר אחר מקסימלי במספרים

$\frac{5}{3}\le x<2$ שמקיימים את התנאי $x<2$ בפרט.

(2)

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = \tfrac{1}{n} + \cos(\pi n),\ n \in \mathbb{N} \}$$

$A = A_1 \cup A_2$ $\qquad\qquad$ $\cos\pi = -1$

זוגי $A_1 \Rightarrow x = \frac{1}{n} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2}$

אי זוגי $A_2 \Rightarrow x = \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{1} - 1 = 0$

$1\frac{1}{2} = \max A = \sup A$:

לכל $x \in A$ מתקיים $x \in A_1$ או $x \in A_2$

אם $x \in A_1$ אז $1 < x \leq 1\frac{1}{2}$ ואם $x \in A_2$ אז $-1 < x \leq 0$.

לכן $x \in A_1$ אזי מתקיים $1 < x \leq 1\frac{1}{2}$ ומכאן $x \leq 1\frac{1}{2}$ וכן |

$\max A = \sup A = 1\frac{1}{2}$

$\operatorname{Inf} = 0$, $\min A$ ← לא קיים :

לכל $x \in A$ מתקיים $x \in A_1$ או $x \in A_2$

אם $x \in A_2$ אז $-1 < x \leq 0$ ואם $x \in A_2$ אז $-1 < x \leq 0$.

לכן $x \in A_2$ אזי מתקיים $-1 \leq x \leq 0$ וכן :

$\operatorname{Inf} A = 0$, $\min A$ לא קיים .

1

$A = \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$a_1 = 1 \; , \; a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$

$a_2 = \sqrt{3} \; ,$

$\min A = m = 1$ מתקיים לכל n כלומר השייך לקבוצה ומתקיים

$a_n \ge a_1 = 1$, $a_1 = 1$ הוא חסם תחתון של הקבוצה A.

נוכיח באינדוקציה:

$a_1 = 1 < 2$

נניח עבור $n = k$ מתקיים $1 \le a_k < 2 \Rightarrow 1 \le a_n < 2$

$a_{k+1} = \sqrt{a_n + 2} < \sqrt{2+2}$ וגם $a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2} \ge \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \ge 1$

$a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2} < 2$ וגם $\sqrt{a_k + 2} \ge \sqrt{3} \ge 1$

$a_k < 2$

$M = 2$ הוא חסם מלעיל של הקבוצה A.

ה