Матричные игры

Тушавин В. А.

30 ноября 2015 г.

Постановка задачи

Удобным способом задания игры двух участников с нулевой суммой является платежная матрица. Отсюда, кстати, происходит еще одно их название — матричные игры. Каждый элемент платежной матрицы a_{ij} содержит числовое значение выигрыша игрока I (проигрыша игрока II), если первый применяет стратегию i, а второй —- стратегию j.

Термины выигрыш и проигрыш следует понимать в широком смысле, т. к. они могут принимать отрицательные значения и с житейской точки зрения означать противоположное. Нетривиальность задачи прежде всего заключается в том, что каждый из игроков делает свой выбор, не зная о выборе другого, что существенно осложняет процесс оптимизации выбираемой стратегии.

Пусть в игре участвуют первый и второй игрок, каждый из них может записать цифры 1,2,3. Если разница между цифрами положительна, то выигрывает первый игрок, если отрицательна, то второй. Число выигранных очков равно разности между цифрами.

```
(mtx<-matrix(c(0,1,2,-1,0,1,-2,1,0),ncol=3))

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0   -1   -2
## [2,]    1    0    1
## [3,]    2    1    0
```

Стратегия первого игрока

Наилучшая стратегия первого игрока. Если игрок выбирает стратегию 1, то в худшем случае он получает выигрыш

```
min(mtx[1,])

## [1] -2
```

Если стратегию 2

```
min(mtx[2,])

## [1] 0
```

Если стратегию 3

```
min(mtx[3,])

## [1] 0
```

Максимизируем свой минимальный выигрыш

```r
max(min(mtx[1,]),min(mtx[2,]),min(mtx[3,]))
```

```
## [1] 0
```

Это величина α -- гарантированный выигрыш игрока А или нижняя цена игры. Сама стратегия называется максиминной.

Стратегия второго игрока

Второй игрок в худшем случае при стратегии 1 получит проигрыш

```r
max(mtx[,1])
```

```
## [1] 2
```

При второй стратегии

```r
max(mtx[,2])
```

```
## [1] 1
```

При третьей стратегии

```r
max(mtx[,3])
```

```
## [1] 1
```

Минимизируем свой максимальный проигрыш/

```r
min(max(mtx[,1]),max(mtx[,2]),max(mtx[,3]))
```

```
## [1] 1
```

Это величина β -- гарантированный проигрыш игрока В или верхняя цена игры. Сама стратегия называется минимаксной.

Седловая точка

Для матричных игр справедливо неравенство $\alpha \leq \beta$

Если $\alpha = \beta = \gamma$, то такая игра называется игрой с седловой точкой. Если платежная матрица не имеет седловой точки, то поиск решения приводит к сложной стратегии, состояшей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами. такая сложная стратегия называется смешанной.

Упрощение матрицы

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
## [1,]    8    6    4    4    3
## [2,]    5    3    2    2    1
## [3,]    4    7    7    3    5
## [4,]    5    3    2    2    1
## [5,]    1    4    4    2    3
```

Решение

```r
(a<-apply(mtx,1,min))
```

```
## [1] 3 1 3 1 1
max(a)
## [1] 3
(b<-apply(mtx,2,max))
## [1] 8 7 7 4 5
min(b)
## [1] 4
```

$3 \leq \nu \leq 4$

```
mtx
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
## [1,]    8    6    4    4    3
## [2,]    5    3    2    2    1
## [3,]    4    7    7    3    5
## [4,]    5    3    2    2    1
## [5,]    1    4    4    2    3
```

Для первого игрока стратегии 2 и 4 одинаковы, Все элементы стратегии 2 меньше стратегии 1, значит тоже можно исключить. Все элементы 5 стратегии меньше 3. Исключаем пятую стратегию.

```
mtx[c(1,3),]
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
## [1,]    8    6    4    4    3
## [2,]    4    7    7    3    5
```

Для второго игрока сравниваем 1 и 4, исключаем 1. Сравниваем 2 и 5, исключаем 2.

```
(mtx1<-mtx[c(1,3),c(3,4,5)])
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    4    4    3
## [2,]    7    3    5
max(apply(mtx1,1,min))
## [1] 3
min(apply(mtx1,2,max))
## [1] 4
```

Решение матричных игр сведением к линейному программированию

Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой заданную платежами

$$A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$$

Применение первым игроком оптимальной стратегии должно обеспечить ему при любых действиях второго игрока выигрыш не менее цены игры

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{i\ \text{опт}} \geq \nu,\ \ j = \overline{1, n}$$

Рассмотрим задачу отыскания оптимальной стратегии игрока при огрнаничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \geq \nu \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq \nu \\ \cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \geq \nu \end{cases}$$

Величина ν неизвестна, однако можно считать что цена игры $\nu > 0$. Последнее условие выполняется всегда, если все элементы платежной матрицы неотрицательны, а это можно достигнуть прибавив ко всем элементам некую константу. Преобразуем ограничения поделив неравентва на ν.

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \cdots + a_{m1}t_m \geq 1 \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{m2}t_m \geq 1 \\ \cdots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \cdots + a_{mn}t_m \geq 1 \end{cases}$$

где

$$t_i = \frac{x_i}{\nu} \geq 0$$

По условию $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$ (сумма вероятностей). Разделим обе части этого неравенства на ν.

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_m = \frac{1}{\nu}$$

Оптимальная стратегия игрока А должна максимизировать величину ν, следовательно, функция:

$$L(\bar{t}) = \sum_{1}^{m} t_i \to \min$$

Для второго игрока проигрыш не должен превышать цену игры. В результате имеем симметричную пару двойственных задач.

Пример решения в R

Дана матрица игры

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
## [1,]    3    7    1    1    5
## [2,]    4    9    3    6    2
## [3,]    2    3    1    4    7

(a<-max(apply(mtx,1,min)))
```

```
## [1] 2
(b<-min(apply(mtx,2,max)))
## [1] 3
```

Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий.

```
library(lpSolve)
(result<-lp("min",c(1,1,1), t(mtx), rep(">=",5),c(1,1,1,1,1)))
## Success: the objective function is 0.3684211
result$objval
## [1] 0.3684211
result$solution
## [1] 0.00000000 0.31578947 0.05263158
(a<-result$solution/result$objval)
## [1] 0.0000000 0.8571429 0.1428571
(result<-lp("max",c(1,1,1,1,1), mtx, rep("<=",3),c(1,1,1)))
## Success: the objective function is 0.3684211
result$objval
## [1] 0.3684211
result$solution
## [1] 0.0000000 0.0000000 0.2631579 0.0000000 0.1052632
(b<-result$solution/result$objval)
## [1] 0.0000000 0.0000000 0.7142857 0.0000000 0.2857143
```

Таким образом цена игры равна 2.7142857, оптимальная стратегия А равна (0, 0.8571429, 0.1428571), оптимальная стратегия В равна (0, 0, 0.7142857, 0, 0.2857143).

Построение имитационной модели

```
# Функция, возвращающая индекс стратегии
get.k<-function(vec){
  cusum=0
  tst=runif(1)
  for(i in 1:length(vec)) {
   if(vec[i]==0) next
   cusum<-cusum+vec[i]
   if(tst>cusum) next
  return(i)
  }
}
```

```r
set.seed(2015)
test<-c()
for(i in 1:1000) test=c(test,mtx[get.k(a),get.k(b)])

table(test)

## test
##   1   2   3   7
##  86 221 656  37

summary(test)

##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##   1.000   2.000   3.000   2.755   3.000   7.000
```

Пусть A выбирает стратегию случайно

```r
test<-c()
for(i in 1:1000) test=c(test,mtx[sample(1:3, 1),get.k(b)])

table(test)

## test
##   1   2   3   5   7
## 478  79 249  97  97

summary(test)

##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##   1.000   1.000   2.000   2.547   3.000   7.000
```

Как видим, результат хуже. Аналогично рассмотрим вариант для B.

```r
test<-c()
for(i in 1:1000) test=c(test,mtx[get.k(a),sample(1:5, 1)])

table(test)

## test
##   1   2   3   4   6   7   9
##  22 183 211 203 164  22 195

summary(test)

##    Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##   1.000   3.000   4.000   4.726   6.000   9.000
```

В этом случае, B проигрывает больше.

Решение в LibreOffice

Пример решения приведен в файле matrix.ods.

Решение сводится к решениям прямой и обратной задач линейного программирования с помощью встроенной системы Решатель.

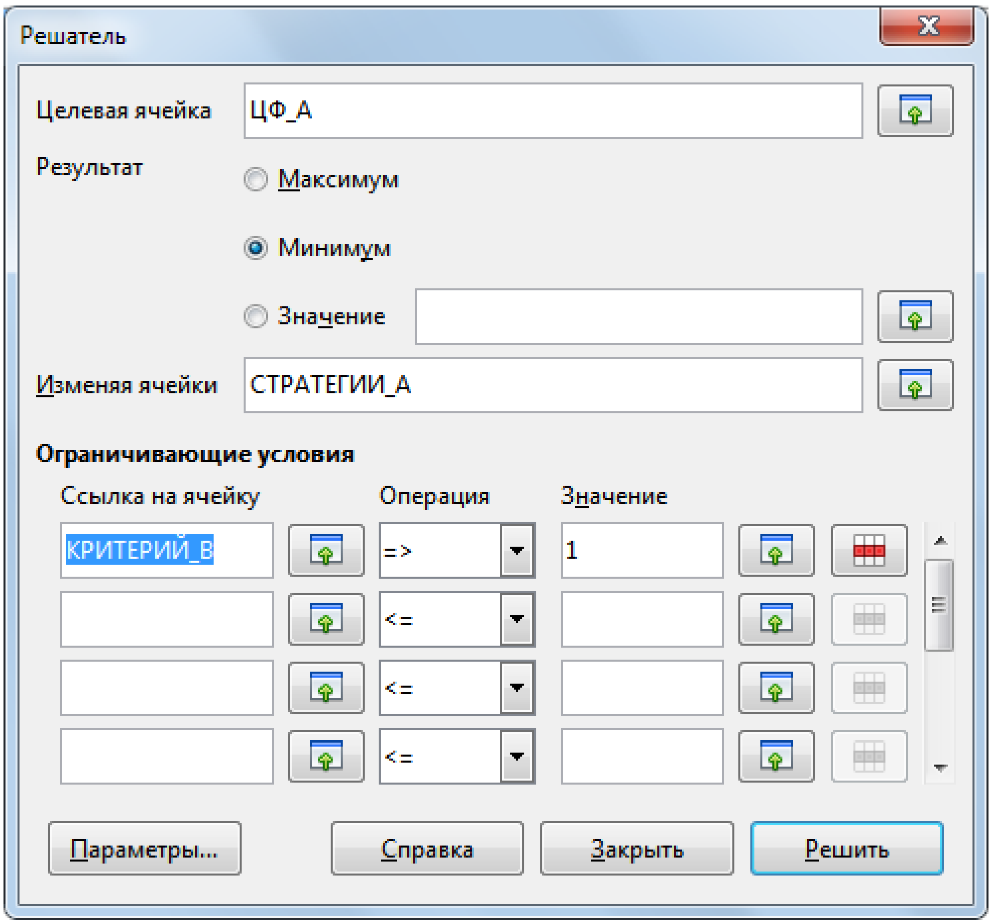
	A1	A2	A3	Критерий		
B1	3	4	2	1,3684210526	>=	1
B2	7	9	3	3	>=	1
B3	1	3	1	1	>=	1
B4	1	6	4	2,1052631579	>=	1
B5	5	2	7	1	>=	1
	0	0,3157894737	0,0526315789			

Целевая функция $\boxed{0{,}3684210526}$ →min

Цена игры 2,7142857143

Стратегии

0	0,8571428571	0,1428571429



	B1	B2	B3	B4	B5	Критерий		
A1	3	7	1	1	5	0,789473684	<=	1
A2	4	9	3	6	2	1	<=	1
A3	2	3	1	4	7	1	<=	1
	0	0	0,263158	0	0,105263			

Целевая функция $\boxed{0{,}368421}$ →max

Цена игры 2,714286

Стратегии

0	0	0,714286	0	0,285714

Результаты получаются аналогичными вышеприведенному решению.

Информация о параметрах R

```
sessionInfo()
```

```
## R version 3.2.0 (2015-04-16)
## Platform: x86_64-w64-mingw32/x64 (64-bit)
## Running under: Windows 7 x64 (build 7601) Service Pack 1
##
## locale:
## [1] LC_COLLATE=Russian_Russia.1251  LC_CTYPE=Russian_Russia.1251
## [3] LC_MONETARY=Russian_Russia.1251 LC_NUMERIC=C
## [5] LC_TIME=Russian_Russia.1251
##
## attached base packages:
## [1] stats     graphics  grDevices utils     datasets  methods   base
##
## other attached packages:
## [1] lpSolve_5.6.11
##
## loaded via a namespace (and not attached):
##  [1] magrittr_1.5    formatR_1.2.1   tools_3.2.0     htmltools_0.2.6
##  [5] yaml_2.1.13     stringi_0.4-1   rmarkdown_0.6.1 knitr_1.10.5
##  [9] stringr_1.0.0   digest_0.6.8    evaluate_0.8
```