

Матричные игры

Тушавин В. А.

30 ноября 2015 г.

Постановка задачи

Удобным способом задания игры двух участников с нулевой суммой является платежная матрица. Отсюда, кстати, происходит еще одно их название — матричные игры. Каждый элемент платежной матрицы a_{ij} содержит числовое значение выигрыша игрока I (проигрыша игрока II), если первый применяет стратегию i , а второй — стратегию j .

Термины выигрыш и проигрыш следует понимать в широком смысле, т. к. они могут принимать отрицательные значения и с житейской точки зрения означать противоположное. Нетривиальность задачи прежде всего заключается в том, что каждый из игроков делает свой выбор, не зная о выборе другого, что существенно осложняет процесс оптимизации выбираемой стратегии.

Пусть в игре участвуют первый и второй игрок, каждый из них может записать цифры 1,2,3. Если разница между цифрами положительна, то выигрывает первый игрок, если отрицательна, то второй. Число выигранных очков равно разности между цифрами.

```
(mtx<-matrix(c(0,1,2,-1,0,1,-2,1,0),ncol=3))  
##      [,1] [,2] [,3]  
## [1,]    0  -1  -2  
## [2,]    1   0   1  
## [3,]    2   1   0
```

Стратегия первого игрока

Наилучшая стратегия первого игрока. Если игрок выбирает стратегию 1, то в худшем случае он получает выигрыш

```
min(mtx[1,])  
## [1] -2
```

Если стратегию 2

```
min(mtx[2,])  
## [1] 0
```

Если стратегию 3

```
min(mtx[3,])  
## [1] 0
```

Максимизируем свой минимальный выигрыш

```
max(min(mtx[1,]),min(mtx[2,]),min(mtx[3,]))
```

```
## [1] 0
```

Это величина α -- гарантированный выигрыш игрока А или нижняя цена игры. Сама стратегия называется максиминной.

Стратегия второго игрока

Второй игрок в худшем случае при стратегии 1 получит проигрыш

```
max(mtx[,1])
```

```
## [1] 2
```

При второй стратегии

```
max(mtx[,2])
```

```
## [1] 1
```

При третьей стратегии

```
max(mtx[,3])
```

```
## [1] 1
```

Минимизируем свой максимальный проигрыш/

```
min(max(mtx[,1]),max(mtx[,2]),max(mtx[,3]))
```

```
## [1] 1
```

Это величина β -- гарантированный проигрыш игрока В или верхняя цена игры. Сама стратегия называется минимаксной.

Седловая точка

Для матричных игр справедливо неравенство $\alpha \leq \beta$

Если $\alpha = \beta = \gamma$, то такая игра называется игрой с седловой точкой. Если платежная матрица не имеет седловой точки, то поиск решения приводит к сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами. такая сложная стратегия называется смешанной.

Упрощение матрицы

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
## [1,]    8    6    4    4    3
## [2,]    5    3    2    2    1
## [3,]    4    7    7    3    5
## [4,]    5    3    2    2    1
## [5,]    1    4    4    2    3
```

Решение

```
(a<-apply(mtx,1,min))
```

```
## [1] 3 1 3 1 1
max(a)
## [1] 3
(b<-apply(mtx,2,max))
## [1] 8 7 7 4 5
min(b)
## [1] 4
```

$3 \leq v \leq 4$

```
mtx
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
## [1,]    8    6    4    4    3
## [2,]    5    3    2    2    1
## [3,]    4    7    7    3    5
## [4,]    5    3    2    2    1
## [5,]    1    4    4    2    3
```

Для первого игрока стратегии 2 и 4 одинаковы, Все элементы стратегии 2 меньше стратегии 1, значит тоже можно исключить. Все элементы 5 стратегии меньше 3. Исключаем пятую стратегию.

```
mtx[c(1,3),]
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
## [1,]    8    6    4    4    3
## [2,]    4    7    7    3    5
```

Для второго игрока сравниваем 1 и 4, исключаем 1. Сравниваем 2 и 5, исключаем 2.

```
(mtx1<-mtx[c(1,3),c(3,4,5)])
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    4    4    3
## [2,]    7    3    5
max(apply(mtx1,1,min))
## [1] 3
min(apply(mtx1,2,max))
## [1] 4
```

Решение матричных игр сведением к линейному программированию

Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой заданную платежами

$$A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$$

Применение первым игроком оптимальной стратегии должно обеспечить ему при любых действиях второго игрока выигрыш не менее цены игры

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \text{ опт} \geq v, \quad j = \overline{1, n}$$

Рассмотрим задачу отыскания оптимальной стратегии игрока при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq v \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq v \end{cases}$$

Величина v неизвестна, однако можно считать что цена игры $v > 0$. Последнее условие выполняется всегда, если все элементы платежной матрицы неотрицательны, а это можно достигнуть прибавив ко всем элементам некую константу. Преобразуем ограничения поделив неравенства на v .

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \dots + a_{m1}t_m \geq 1 \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{m2}t_m \geq 1 \\ \dots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \dots + a_{mn}t_m \geq 1 \end{cases}$$

где

$$t_i = \frac{x_i}{v} \geq 0$$

По условию $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$ (сумма вероятностей). Разделим обе части этого неравенства на v .

$$t_1 + t_2 + \dots + t_m = \frac{1}{v}$$

Оптимальная стратегия игрока А должна максимизировать величину v , следовательно, функция:

$$L(\bar{t}) = \sum_1^m t_i \rightarrow \min$$

Для второго игрока проигрыш не должен превышать цену игры. В результате имеем симметричную пару двойственных задач.

Пример

Дана матрица игры

##	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]
## [1,]	3	7	1	1	5
## [2,]	4	9	3	6	2
## [3,]	2	3	1	4	7

```
(a<-max(apply(mtx,1,min)))
```

```
## [1] 2
(b<-min(apply(mtx,2,max)))
## [1] 3
```

Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий.

```
library(lpSolve)
(result<-lp("min",c(1,1,1), t(mtx), rep(">=",5),c(1,1,1,1,1)))
## Success: the objective function is 0.3684211
result$objval
## [1] 0.3684211
result$solution
## [1] 0.00000000 0.31578947 0.05263158
(a<-result$solution/result$objval)
## [1] 0.00000000 0.8571429 0.1428571
(result<-lp("max",c(1,1,1,1,1), mtx, rep("<=",3),c(1,1,1)))
## Success: the objective function is 0.3684211
result$objval
## [1] 0.3684211
result$solution
## [1] 0.00000000 0.00000000 0.2631579 0.00000000 0.1052632
(b<-result$solution/result$objval)
## [1] 0.00000000 0.00000000 0.7142857 0.00000000 0.2857143
```

Таким образом цена игры равна 0.3684211, оптимальная стратегия А равна (0, 0.8571429, 0.1428571), оптимальная стратегия В равна (0, 0, 0.7142857, 0, 0.2857143).

Построение имитационной модели

```
# Функция, возвращающая индекс стратегии
get.k<-function(vec){
  cusum=0
  tst=runif(1)
  for(i in 1:length(vec)) {
    if(vec[i]==0) next
    cusum<-cusum+vec[i]
    if(tst>cusum) next
    return(i)
  }
}
```

```

set.seed(2015)
test<-c()
for(i in 1:1000) test=c(test,mtx[get.k(a),get.k(b)])

table(test)

## test
##  1  2  3  7
## 86 221 656 37

summary(test)

##   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##  1.000  2.000  3.000  2.755  3.000  7.000

```

Пусть А выбирает стратегию случайно

```

test<-c()
for(i in 1:1000) test=c(test,mtx[sample(1:3, 1),get.k(b)])

table(test)

## test
##  1  2  3  5  7
## 478 79 249 97 97

summary(test)

##   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##  1.000  1.000  2.000  2.547  3.000  7.000

```

Как видим, результат хуже. Аналогично рассмотрим вариант для В.

```

test<-c()
for(i in 1:1000) test=c(test,mtx[get.k(a),sample(1:5, 1)])

table(test)

## test
##  1  2  3  4  6  7  9
## 22 183 211 203 164 22 195

summary(test)

##   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##  1.000  3.000  4.000  4.726  6.000  9.000

```

В этом случае, В проигрывает больше.

Информация о параметрах R

```

sessionInfo()

## R version 3.2.0 (2015-04-16)
## Platform: x86_64-w64-mingw32/x64 (64-bit)
## Running under: Windows 7 x64 (build 7601) Service Pack 1
##

```

```
## locale:
## [1] LC_COLLATE=Russian_Russia.1251 LC_CTYPE=Russian_Russia.1251
## [3] LC_MONETARY=Russian_Russia.1251 LC_NUMERIC=C
## [5] LC_TIME=Russian_Russia.1251
##
## attached base packages:
## [1] stats      graphics  grDevices  utils      datasets  methods   base
##
## other attached packages:
## [1] lpSolve_5.6.11
##
## loaded via a namespace (and not attached):
## [1] magrittr_1.5      formatR_1.2.1    tools_3.2.0      htmltools_0.2.6
## [5] yaml_2.1.13      stringi_0.4-1    rmarkdown_0.6.1  knitr_1.10.5
## [9] stringr_1.0.0     digest_0.6.8     evaluate_0.8
```