Решение задачи линейного программирования

Тушавин В. А.

20 ноября 2015 г.

Постановка задачи

Николай Кузнецов управляет небольшим механическим заводом. В будущем месяце он планирует изготавливать два продукта (А и В), по которым удельная маржинальная прибыль оценивается в 2500 и 3500 руб., соответственно.

Изготовление обоих продуктов требует затрат на машинную обработку, сырье и труд На изготовление каждой единицы продукта А отводится 3 часа машинной обработки, 16 единиц сырья и 6 единиц труда. Соответствующие требования к единице продукта В составляют 10, 4 и 6. Николай прогнозирует, что в следующем месяце он может предоставить 330 часов машинной обработки, 400 единиц сырья и 240 единиц труда. Технология производственного процесса такова, что не менее 12 единиц продукта В необходимо изготавливать в каждый конкретный месяц.

Наименование ресурса	А	В	Объем ресурсов
Часы маш.обработки	3	10	330
Единиц сырья	16	4	400
Единиц труда	6	6	240

Николай хочет построить модель с тем, чтобы определить количество единиц продуктов А и В, которые он доложен производить в следующем месяце для максимизации маржинальной прибыли.

Решение задачи

Этап 1. Определение переменных

Существует целевая переменная (обозначим её Z), которую необходимо оптимизировать, то есть максимизировать или минимизировать (например, прибыль, выручка или расходы). Николай стремится максимизировать маржинальную прибыль, следовательно, целевая переменная:

Z --- это суммарная маржинальная прибыль (в рублях), полученная в следующем месяце в результате производства продуктов А и В.

Существует ряд неизвестных искомых переменных (обозначим их x_1, x_2, x_3 и пр.), чьи значения необходимо определить для получения оптимальной величины целевой функции, которая, в нашем случае является суммарной маржинальной прибылью. Эта маржинальная прибыль зависит от количества произведенных продуктов А и В. Значения этих величин необходимо рассчитать, и поэтому они представляют собой искомые переменные в модели. Итак, обозначим:

x_1 --- количество единиц продукта A, произведенных в следующем месяце.

x_2 --- количество единиц продукта B, произведенных в следующем месяце.

Очень важно четко определить все переменные величины; особое внимание уделите единицам измерения и периоду времени, к которому относятся переменные.

Этап. 2. Построение целевой функции

Целевая функция --- это линейное уравнение, которое должно быть или максимизировано или минимизировано. Оно содержит целевую переменную, выраженную с помощью искомых переменных, то есть Z выраженную через x_1, x_2, ... в виде линейного уравнения.

В нашем примере каждый изготовленный продукт A приносит 2500 руб. маржинальной прибыли, а при изготовлении x_1 единиц продукта A, маржинальная прибыль составит $2500x_1$. Аналогично маржинальная прибыль от изготовления x_2 единиц продукта B составит $3500x_2$. Таким образом, суммарная маржинальная прибыль, полученная в следующем месяце за счет производства x_1 единиц продукта A и x_2 единиц продукта B, то есть, целевая переменная Z составит: $Z = 2500x_1+3500x_2$.

Николай стремится максимизировать этот показатель. Таким образом, целевая функция в нашей модели:

$$Z = 2500x_1 + 3500x_2 \to \max$$

Этап. 3. Определение ограничений

Ограничения – это система линейных уравнений и/или неравенств, которые ограничивают величины искомых переменных. Они математически отражают доступность ресурсов, технологические факторы, условия маркетинга и иные требования. Ограничения могут быть трех видов: «меньше или равно», «больше или равно», «строго равно».

В нашем примере для производства продуктов A и B необходимо время машинной обработки, сырье и труд, и доступность этих ресурсов ограничена. Объемы производства этих двух продуктов (то есть значения x_1 и x_2) будут, таким образом, ограничены тем, что количество ресурсов, необходимых в производственном процессе, не может превышать имеющееся в наличии. Рассмотрим ситуацию со временем машинной обработки. Изготовление каждой единицы продукта A требует трех часов машинной обработки, и если изготовлено x_1, единиц, то будет потрачено $3x_1$, часов этого ресурса.

Изготовление каждой единицы продукта B требует 10 часов и, следовательно, если произведено x_2 продуктов, то потребуется $10x_2$ часов. Таким образом, общий объем машинного времени, необходимого для производства x_1 единиц продукта A и x_2 единиц продукта B, составляет $3x_1+10x_2$. Это общее значение машинного времени не может превышать 330 часов. Математически это записывается следующим образом:

$3x_1+10x_2 \leq 330$

Аналогичные соображения применяются к сырью и труду, что позволяет записать еще два ограничения:

$16x_1+4x_2\leq 400$

$6x_1+6x_2\leq 240$

Наконец следует отметить, что существует условие, согласно которому должно быть изготовлено не менее 12 единиц продукта B:

$x_2\geq 12$

Этап. 4. Запись условий неотрицательности

Искомые переменные не могут быть отрицательными числами, что необходимо записать в виде неравенств $x_1\geq 0$ и $x_2\geq 0$. В нашем примере второе условия является избыточным, так как выше было определено, что x_2 не может быть меньше 12.

Полная модель линейного программирования для производственной задачи Николая может быть записана в виде:

$$Z = 2500x_1 + 3500x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 \leq 330 \\ 16x_1 + 4x_2 \leq 400 \\ 6x_1 + 6x_2 \leq 240 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 12 \end{cases}$$

Решение симплекс-методом

Симплексный метод является универсальным методом решения задачи линейного грограммирования, так как позволяет решить практически любую задачу, представленную в каноническом виде.

Идея симплексного метода заключатся в том, что, начиная с некоторого опорного решения, осуществляется последовательно направленное перемещение по опорным решениям системы к оптимальному опорному решению. Так как число опорных решений конечно, то через конечное число шагов оптимальное решение будет найдено.

Алгорим симплексного метода можно описать следующим образом:

1. Привести задачу к каноническому виду
2. Найти неотрицательное базисное решение системы ограничений
3. Рссчитать оценки свободных переменных по формуле:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{r} c_i h_{ij} - c_j, \ j = \overline{1, n},$$

где h_{ij} -- коэффициенты при свободной переменной x_j,

c_i -- коэффициенты при базисных переменных в целевой функции,

c_j -- коэффициенты при свободной переменной в целевой функции,

4. Проверить найденное опорное решение на оптмальность:

а) если все оценки $\Delta_j \geq 0$, то найденное решение оптимально и задача решена;

б) если хотя бы одна оценка $\Delta_j < 0$, а при соответствующей переменной x_j нет ни одного положительного коэффициента, то задача не имеет оптимального решения из-за ограниченности целевой функции

в) если хотя бы одна оценка $\Delta_j < 0$, а при соответствующей переменной x_j есть хотя бы один положительный коэффициент, то решение не оптимально и его можно улучшить переходом к новому базису. Если отрицательных оценок несколько,то в базис ввести переменную с наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценкой.

Приведем задачу к **каноническому виду**.

Полная модель линейного программирования для производственной задачи Николая может быть записана в виде:

$$Z = 2500x_1 + 3500x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 + x_3 = 330 \\ 16x_1 + 4x_2 + x_4 = 400 \\ 6x_1 + 6x_2 + x_5 = 240 \\ -x_2 + x_6 = 12 \\ x_j \geq 0 \ j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Б.п.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
$\mathbf{x_3}$	3	10	1	0	0	0	330
$\mathbf{x_4}$	16	4	0	1	0	0	400
$\mathbf{x_5}$	6	6	0	0	1	0	240
$\mathbf{x_6}$	0	-1	0	0	0	1	12

$$\overline{x}_{опор} = (0; 0; 330; 400; 20; 12)$$

Проверим данное решение на оптимальность, для этого найдем свободные переменные в симплексной таблице. Вычисления представлены в файле lp_simplex.xlsx.

		2500	3500	0	0	0	0		
c_j	Базовая переменная	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	b_i/h_i
0	x_3	3	**10**	1	0	0	0	330	33
0	x_4	16	4	0	1	0	0	400	100
0	x_5	6	6	0	0	1	0	240	40
0	x_6	0	-1	0	0	0	1	12	
		-2500	**-3500**	0	0	0	0	0	

Данное решение не оптимально, поскольку в нижней строчке есть отрицательные значения. Поскольку имеются положительные коэффициенты, решение можно улучшить, для этого введем в базис переменную x_2. Так как в колонке x_2 имеется несколько положительных коэффициентов, то определяем отношение свободного члена b_i к соответсвующим коэффициентам в данной колонке и выбираем наименьший результат.

Преобразуем таблицу и повторим расчет.

		2500	3500	0	0	0	0		
c_j	Базовая переменная	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	b_i/h_i
3500	x_2	0.3	1	0.1	0	0	0	33	110
0	x_4	14.8	0	-0.4	1	0	0	268	18.10811
0	x_5	**4.2**	0	-0.6	0	1	0	42	10
0	x_6	0.3	0	0.1	0	0	1	45	150
		-1450	0	350	0	0	0	115500	

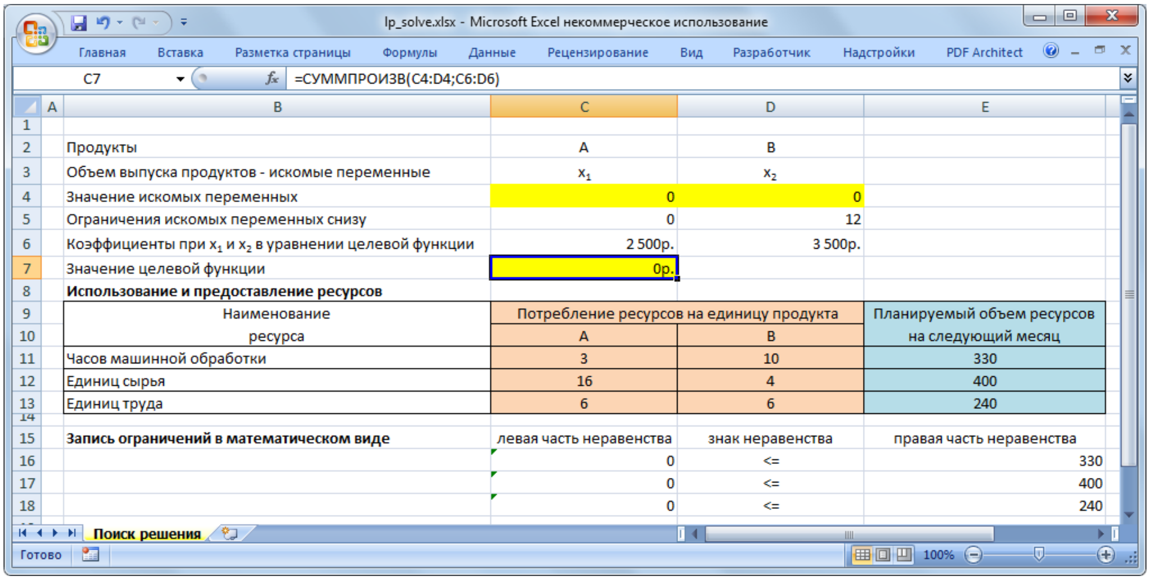
Данное решение не оптимально, поскольку в нижней строчке есть отрицательные значения. Поскольку имеются положительные коэффициенты, решение можно улучшить, для этого введем в базис переменную x_1.

		2500	3500	0	0	0	0	
c_j	Базовая переменная	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
3500	x2	0	1	0.1428571	0	-0.0714286	0	30
0	x4	0	0	1.7142857	1	-3.5238095	0	120
2500	x1	1	0	-0.142857	0	0.2380952	0	10
0	x6	0	0	0.1428571	0	-0.0714286	1	42
		0	0	142.85714	0	345.2381	0	130000

Полученное решение (10; 30) является оптимальным.

Решение с помощью Excel и LibreOffice

Решение в Excel осуществляется с помощью надстройки "Поиск решения", также использующей симплекс-метод.



	B	C	D	E
2	Продукты	A	B	
3	Объем выпуска продуктов - искомые переменные	x_1	x_2	
4	Значение искомых переменных	0	0	
5	Ограничения искомых переменных снизу	0	12	
6	Коэффициенты при x_1 и x_2 в уравнении целевой функции	2 500р.	3 500р.	
7	Значение целевой функции	0р.		
8	Использование и предоставление ресурсов			
9	Наименование ресурса	Потребление ресурсов на единицу продукта		Планируемый объем ресурсов на следующий месяц
10		A	B	
11	Часов машинной обработки	3	10	330
12	Единиц сырья	16	4	400
13	Единиц труда	6	6	240
15	Запись ограничений в математическом виде	левая часть неравенства	знак неравенства	правая часть неравенства
16		0	<=	330
17		0	<=	400
18		0	<=	240

Файл с решением lp_solve.xlsx

Анологично даную задач можно решить с помощью Решателя в LibreOffice. Следует отметить, что в LibreOffice нет ограничений на число переменных, в отличии от Excel.

Решение в R

Для решения задач линеного программирования в GNU R можно использовать следующие пакеты:

- lpSolve
- linprog

Второй пакет является надстройкой над первым и позволяет выводить больше диагностической информации

Решение с пакетом lpSolve

```
library(lpSolve) # Подключили библиотеку
f.obj <- c(2500, 3500) # Описали целевую функцию
names(f.obj) <-c("A","B")
a.mat<-rbind(c(3,10), # матрица
             c(16,4),  # коэффициентов
             c(6,6),   # при ограничениях
             c(1,0),
             c(0,1))
a.dir<-c("<=","<=","<=",">=",">=")
b.vec<-c(330,400,240,0,12) # вектор ограничений

result<-lp ("max", f.obj, a.mat, a.dir, b.vec)
```

Результат

```
result

## Success: the objective function is 130000
```

```
result$solution

## [1] 10 30
```

Таким образом, максимальное значение целевой функции равно 130000 и оно достигается при x_1 и x_2 равными, соответственно: 10 и 30.

Решение с пакетом linprog

Поскольку пакет *linprog* является дополнением к предыдущему пакету, то переменные уже все инициализированы.

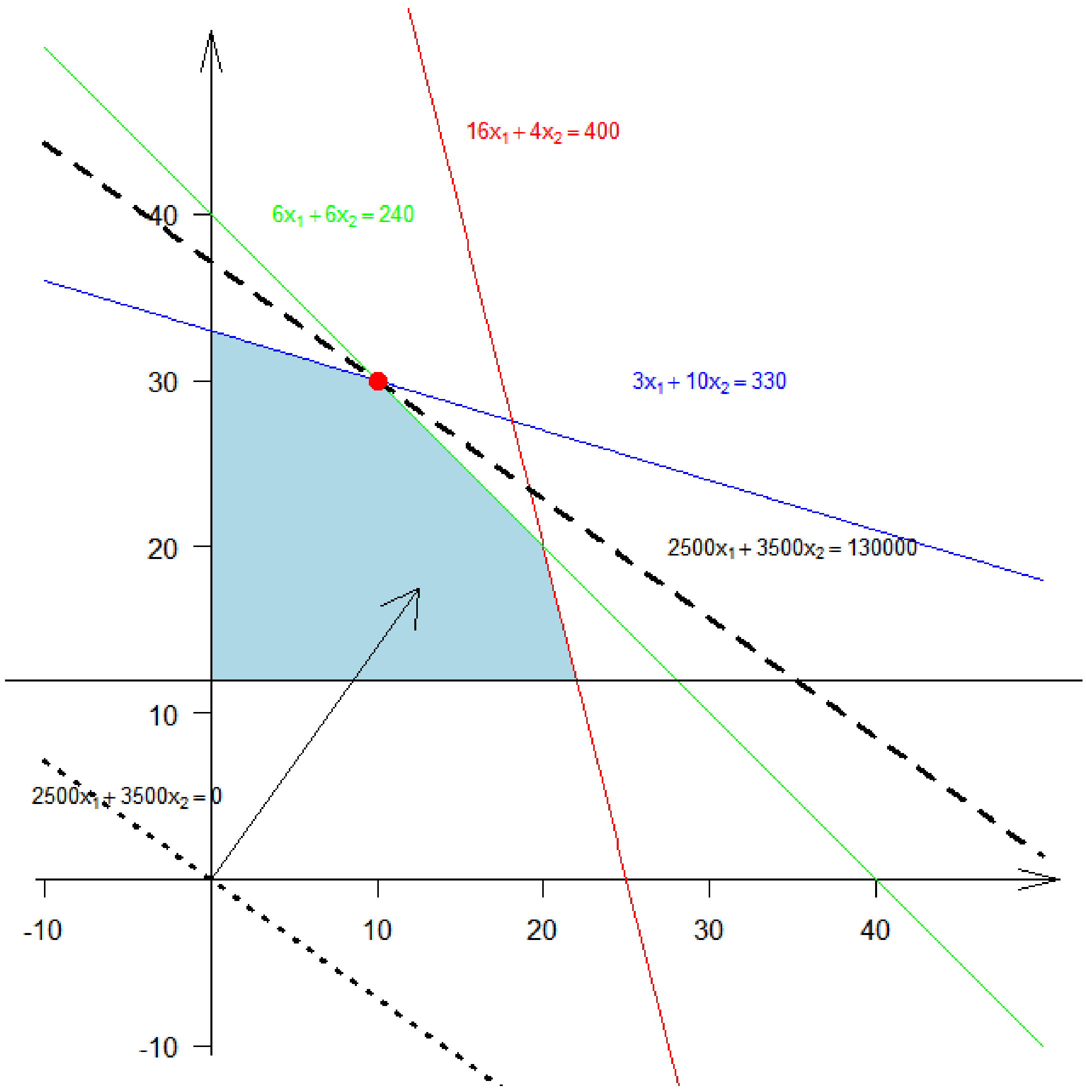
```
library(linprog)

## Warning: package 'linprog' was built under R version 3.2.2

(result<-solveLP( f.obj, b.vec, a.mat, TRUE,const.dir=a.dir,lpSolve=T))

##
##
## Results of Linear Programming / Linear Optimization
## (using lpSolve)
##
## Objective function (Maximum): 130000
##
## Solution
##    opt
## A   10
## B   30
##
## Constraints
##    actual dir bvec free
## 1     330  <=  330    0
## 2     280  <=  400  120
## 3     240  <=  240    0
## 4      10  >=    0   10
## 5      30  >=   12   18
```

Результат получился тот же, дополнительно выведена информация по свободным ресурсам. Таким образом,GNU R предоставляет достаточно удобный механизм для решения задач линейного программирования.

Графическое представление решения

```
x1<- (-100:500)/10
old<-par(mar=c(1,1,1,1))
plot(0,type="n",xlab="",ylab="", xlim=c(-10, 50),ylim = c(-10,
50),bty="n",xaxt="n",yaxt="n")
polygon(c(0,0,10,20,22),c(12,33,30,20,12), col = "lightblue", border = NA)
axis(1,pos=c(0,0),at=c(-10,10,20,30,40))
axis(2,pos=c(0,0),las=2,at=c(-10,10,20,30,40))
arrows(-10.5,0,51,0,angle=15)
arrows(0,-10.5,0,51,angle=15)
lines(x1,(330-3*x1)/10,col="blue")
```

```
text(30,30,expression(3*x[1]+10*x[2]==330),cex=0.8,col="blue")
lines(x1,(400-16*x1)/4,col="red")
text(20,45,expression(16*x[1]+4*x[2]==400),cex=0.8,col="red")
lines(x1,(240-6*x1)/6,col="green")
text(8,40,expression(6*x[1]+6*x[2]==240),cex=0.8,col="green")
abline(h=12)
lines(x1,(-25*x1)/35,lty=3,lwd=3)
text(-5,5,expression(2500*x[1]+3500*x[2]==0),cex=0.8)
arrows(0,0,12.5,17.5)
lines(x1,(130000-2500*x1)/3500,lty=2,lwd=3)
text(35,20,expression(2500*x[1]+3500*x[2]==130000),cex=0.8)
points(10,30,cex=1.5,col="red",pch=19)
```



Информация о параметрах R

```
sessionInfo()

## R version 3.2.0 (2015-04-16)
## Platform: x86_64-w64-mingw32/x64 (64-bit)
```

```
## Running under: Windows 7 x64 (build 7601) Service Pack 1
##
## locale:
## [1] LC_COLLATE=Russian_Russia.1251  LC_CTYPE=Russian_Russia.1251
## [3] LC_MONETARY=Russian_Russia.1251 LC_NUMERIC=C
## [5] LC_TIME=Russian_Russia.1251
##
## attached base packages:
## [1] stats     graphics  grDevices utils     datasets  methods   base
##
## other attached packages:
## [1] linprog_0.9-2  lpSolve_5.6.11
##
## loaded via a namespace (and not attached):
##  [1] magrittr_1.5    formatR_1.2.1   tools_3.2.0     htmltools_0.2.6
##  [5] yaml_2.1.13     stringi_0.4-1   rmarkdown_0.6.1 knitr_1.10.5
##  [9] stringr_1.0.0   digest_0.6.8    evaluate_0.8
```