

# Решение задачи линейного программирования

Тушавин В. А.

20 ноября 2015 г.

## Постановка задачи

Николай Кузнецов управляет небольшим механическим заводом. В будущем месяце он планирует изготавливать два продукта (А и В), по которым удельная маржинальная прибыль оценивается в 2500 и 3500 руб., соответственно.

Изготовление обоих продуктов требует затрат на машинную обработку, сырье и труд. На изготовление каждой единицы продукта А отводится 3 часа машинной обработки, 16 единиц сырья и 6 единиц труда. Соответствующие требования к единице продукта В составляют 10, 4 и 6. Николай прогнозирует, что в следующем месяце он может предоставить 330 часов машинной обработки, 400 единиц сырья и 240 единиц труда. Технология производственного процесса такова, что не менее 12 единиц продукта В необходимо изготавливать в каждый конкретный месяц.

| Наименование ресурса | А  | В  | Объем ресурсов |
|----------------------|----|----|----------------|
| Часы маш.обработки   | 3  | 10 | 330            |
| Единиц сырья         | 16 | 4  | 400            |
| Единиц труда         | 6  | 6  | 240            |

Николай хочет построить модель с тем, чтобы определить количество единиц продуктов А и В, которые он должен производить в следующем месяце для максимизации маржинальной прибыли.

## Решение задачи

### Этап 1. Определение переменных

Существует целевая переменная (обозначим её  $Z$ ), которую необходимо оптимизировать, то есть максимизировать или минимизировать (например, прибыль, выручка или расходы). Николай стремится максимизировать маржинальную прибыль, следовательно, целевая переменная:

$Z$  --- это суммарная маржинальная прибыль (в рублях), полученная в следующем месяце в результате производства продуктов А и В.

Существует ряд неизвестных искомым переменных (обозначим их  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  и пр.), чьи значения необходимо определить для получения оптимальной величины целевой функции, которая, в нашем случае является суммарной маржинальной прибылью. Эта маржинальная прибыль зависит от количества произведенных продуктов А и В. Значения этих величин необходимо рассчитать, и поэтому они представляют собой искомые переменные в модели. Итак, обозначим:

$x_1$  --- количество единиц продукта А, произведенных в следующем месяце.

$x_2$  --- количество единиц продукта В, произведенных в следующем месяце.

Очень важно четко определить все переменные величины; особое внимание уделите единицам измерения и периоду времени, к которому относятся переменные.

## Этап. 2. Построение целевой функции

Целевая функция --- это линейное уравнение, которое должно быть или максимизировано или минимизировано. Оно содержит целевую переменную, выраженную с помощью искоемых переменных, то есть  $Z$  выраженную через  $x_1, x_2, \dots$  в виде линейного уравнения.

В нашем примере каждый изготовленный продукт А приносит 2500 руб. маржинальной прибыли, а при изготовлении  $x_1$  единиц продукта А, маржинальная прибыль составит  $2500x_1$ . Аналогично маржинальная прибыль от изготовления  $x_2$  единиц продукта В составит  $3500x_2$ . Таким образом, суммарная маржинальная прибыль, полученная в следующем месяце за счет производства  $x_1$  единиц продукта А и  $x_2$  единиц продукта В, то есть, целевая переменная  $Z$  составит:  $Z = 2500x_1 + 3500x_2$ .

Николай стремится максимизировать этот показатель. Таким образом, целевая функция в нашей модели:

$$Z = 2500x_1 + 3500x_2 \rightarrow \max$$

## Этап. 3. Определение ограничений

Ограничения – это система линейных уравнений и/или неравенств, которые ограничивают величины искоемых переменных. Они математически отражают доступность ресурсов, технологические факторы, условия маркетинга и иные требования. Ограничения могут быть трех видов: «меньше или равно», «больше или равно», «строго равно».

В нашем примере для производства продуктов А и В необходимо время машинной обработки, сырье и труд, и доступность этих ресурсов ограничена. Объемы производства этих двух продуктов (то есть значения  $x_1$  и  $x_2$ ) будут, таким образом, ограничены тем, что количество ресурсов, необходимых в производственном процессе, не может превышать имеющееся в наличии. Рассмотрим ситуацию со временем машинной обработки. Изготовление каждой единицы продукта А требует трех часов машинной обработки, и если изготовлено  $x_1$  единиц, то будет потрачено  $3x_1$  часов этого ресурса.

Изготовление каждой единицы продукта В требует 10 часов и, следовательно, если произведено  $x_2$  продуктов, то потребуется  $10x_2$  часов. Таким образом, общий объем машинного времени, необходимого для производства  $x_1$  единиц продукта А и  $x_2$  единиц продукта В, составляет  $3x_1 + 10x_2$ . Это общее значение машинного времени не может превышать 330 часов. Математически это записывается следующим образом:

$$3x_1 + 10x_2 \leq 330$$

Аналогичные соображения применяются к сырью и труду, что позволяет записать еще два ограничения:

$$16x_1 + 4x_2 \leq 400$$

$$6x_1 + 6x_2 \leq 240$$

Наконец следует отметить, что существует условие, согласно которому должно быть изготовлено не менее 12 единиц продукта В:

$$x_2 \geq 12$$

#### Этап. 4. Запись условий неотрицательности

Искомые переменные не могут быть отрицательными числами, что необходимо записать в виде неравенств  $x_1 \geq 0$  и  $x_2 \geq 0$ . В нашем примере второе условия является избыточным, так как выше было определено, что  $x_2$  не может быть меньше 12.

Полная модель линейного программирования для производственной задачи Николая может быть записана в виде:

$$Z = 2500x_1 + 3500x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 \leq 330 \\ 16x_1 + 4x_2 \leq 400 \\ 6x_1 + 6x_2 \leq 240 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 12 \end{cases}$$

#### Решение в R

Для решения задач линейного программирования в GNU R можно использовать следующие пакеты:

- lpSolve
- linprog

Второй пакет является надстройкой над первым и позволяет выводить больше диагностической информации

#### Решение с пакетом lpSolve

```
library(lpSolve) # Подключили библиотеку
f.obj <- c(2500, 3500) # Описали целевую функцию
names(f.obj) <- c("A", "B")
a.mat <- rbind(c(3, 10), # матрица
               c(16, 4), # коэффициентов
               c(6, 6), # при ограничениях
               c(1, 0),
               c(0, 1))
a.dir <- c("<=", "<=", "<=", ">=", ">=")
b.vec <- c(330, 400, 240, 0, 12) # вектор ограничений
```

```
result<-lp ("max", f.obj, a.mat, a.dir, b.vec)
```

### Результат

```
result
## Success: the objective function is 130000
result$solution
## [1] 10 30
```

Таким образом, максимальное значение целевой функции равно 130000 и оно достигается при  $x_1$  и  $x_2$  равными, соответственно: 10 и 30.

### Решение с пакетом linprog

Поскольку пакет *linprog* является дополнением к предыдущему пакету, то переменные уже все инициализированы.

```
library(linprog)
## Warning: package 'linprog' was built under R version 3.2.2
(result<-solveLP( f.obj, b.vec, a.mat, TRUE,const.dir=a.dir,lpSolve=T))
##
##
## Results of Linear Programming / Linear Optimization
## (using lpSolve)
##
## Objective function (Maximum): 130000
##
## Solution
##   opt
## A  10
## B  30
##
## Constraints
##   actual dir bvec free
## 1    330  <=  330    0
## 2    280  <=  400   120
## 3    240  <=  240    0
## 4     10  >=    0    10
## 5     30  >=   12    18
```

Результат получился тот же, дополнительно выведена информация по свободным ресурсам. Таким образом,GNU R предоставляет достаточно удобный механизм для решения задач линейного программирования.

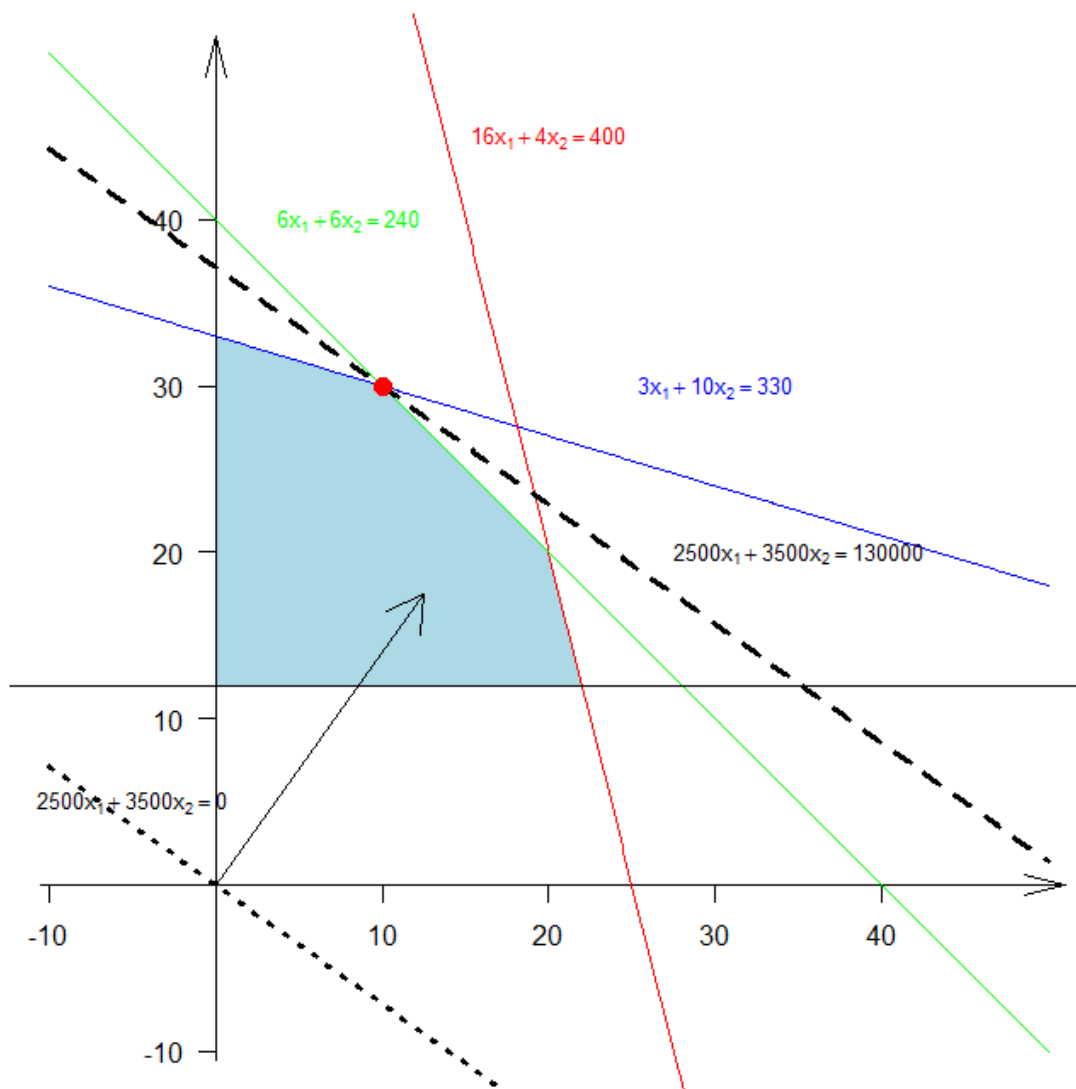
### Графическое представление решения

```
x1<- (-100:500)/10
old<-par(mar=c(1,1,1,1))
```

```

plot(0,type="n",xlab="",ylab="", xlim=c(-10, 50),ylim = c(-10,
50),bty="n",xaxt="n",yaxt="n")
polygon(c(0,0,10,20,22),c(12,33,30,20,12), col = "lightblue", border = NA)
axis(1,pos=c(0,0),at=c(-10,10,20,30,40))
axis(2,pos=c(0,0),las=2,at=c(-10,10,20,30,40))
arrows(-10.5,0,51,0,angle=15)
arrows(0,-10.5,0,51,angle=15)
lines(x1,(330-3*x1)/10,col="blue")
text(30,30,expression(3*x[1]+10*x[2]==330),cex=0.8,col="blue")
lines(x1,(400-16*x1)/4,col="red")
text(20,45,expression(16*x[1]+4*x[2]==400),cex=0.8,col="red")
lines(x1,(240-6*x1)/6,col="green")
text(8,40,expression(6*x[1]+6*x[2]==240),cex=0.8,col="green")
abline(h=12)
lines(x1,(-25*x1)/35,lty=3,lwd=3)
text(-5,5,expression(2500*x[1]+3500*x[2]==0),cex=0.8)
arrows(0,0,12.5,17.5)
lines(x1,(130000-2500*x1)/3500,lty=2,lwd=3)
text(35,20,expression(2500*x[1]+3500*x[2]==130000),cex=0.8)
points(10,30,cex=1.5,col="red",pch=19)

```



### Информация о параметрах R

`sessionInfo()`

```
## R version 3.2.0 (2015-04-16)
## Platform: x86_64-w64-mingw32/x64 (64-bit)
## Running under: Windows 7 x64 (build 7601) Service Pack 1
##
## locale:
## [1] LC_COLLATE=Russian_Russia.1251 LC_CTYPE=Russian_Russia.1251
## [3] LC_MONETARY=Russian_Russia.1251 LC_NUMERIC=C
## [5] LC_TIME=Russian_Russia.1251
##
## attached base packages:
## [1] stats      graphics  grDevices  utils      datasets  methods   base
##
## other attached packages:
## [1] linprog_0.9-2 lpSolve_5.6.11
##
```

```
## loaded via a namespace (and not attached):  
## [1] magrittr_1.5      formatR_1.2.1     tools_3.2.0       htmltools_0.2.6  
## [5] yaml_2.1.13       stringi_0.4-1     rmarkdown_0.6.1   knitr_1.10.5  
## [9] stringr_1.0.0     digest_0.6.8      evaluate_0.8
```