Матричные игры

Тушавин В. А.

30 ноября 2015 г.

### Постановка задачи

Удобным способом задания игры двух участников с нулевой суммой является платежная матрица. Отсюда, кстати, происходит еще одно их название — матричные игры. Каждый элемент платежной матрицы aij содержит числовое значение выигрыша игрока I (проигрыша игрока II), если первый применяет стратегию i, а второй —- стратегию j.

Термины выигрыш и проигрыш следует понимать в широком смысле, т. к. они могут принимать отрицательные значения и с житейской точки зрения означать противоположное. Нетривиальность задачи прежде всего заключается в том, что каждый из игроков делает свой выбор, не зная о выборе другого, что существенно осложняет процесс оптимизации выбираемой стратегии.

Пусть в игре участвуют первый и второй игрок, каждый из них может записать цифры 1,2,3. Если разница между цифрами положительна, то выигрывает первый игрок, если отрицательна, то второй. Число выигранных очков равно разности между цифрами.

(mtx<-matrix(c(0,1,2,-1,0,1,-2,1,0),ncol=3))

## [,1] [,2] [,3]  
## [1,] 0 -1 -2  
## [2,] 1 0 1  
## [3,] 2 1 0

#### Стратегия первого игрока

Наилучшая стратегия первого игрока. Если игрок выбирает стратегию 1, то в худшем случае он получает выигрыш

min(mtx[1,])

## [1] -2

Если стратегию 2

min(mtx[2,])

## [1] 0

Если стратегию 3

min(mtx[3,])

## [1] 0

Максимизируем свой минимальный выигрыш

max(min(mtx[1,]),min(mtx[2,]),min(mtx[3,]))

## [1] 0

Это величина -- гарантированный выигрыш игрока A или нижняя цена игры. Сама стратегия называется максиминной.

#### Стратегия второго игрока

Второй игрок в худшем случае при стратегии 1 получит проигрыш

max(mtx[,1])

## [1] 2

При второй стратегии

max(mtx[,2])

## [1] 1

При третьей стратегии

max(mtx[,3])

## [1] 1

Минимизируем свой максимальный проигрыш/

min(max(mtx[,1]),max(mtx[,2]),max(mtx[,3]))

## [1] 1

Это величина -- гарантированный проигрыш игрока B или верхняя цена игры. Сама стратегия называется минимаксной.

#### Седловая точка

Для матричных игр справедливо неравенство

Если , то такая игра называется игрой с седловой точкой. Если платежная матрица не имеет седловой точки, то поиск решения приводит к сложной стратегии, состояшей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами. такая сложная стратегия называется смешанной.

#### Упрощение матрицы

## [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]  
## [1,] 8 6 4 4 3  
## [2,] 5 3 2 2 1  
## [3,] 4 7 7 3 5  
## [4,] 5 3 2 2 1  
## [5,] 1 4 4 2 3

Решение

(a<-apply(mtx,1,min))

## [1] 3 1 3 1 1

max(a)

## [1] 3

(b<-apply(mtx,2,max))

## [1] 8 7 7 4 5

min(b)

## [1] 4

mtx

## [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]  
## [1,] 8 6 4 4 3  
## [2,] 5 3 2 2 1  
## [3,] 4 7 7 3 5  
## [4,] 5 3 2 2 1  
## [5,] 1 4 4 2 3

Для первого игрока стратегии 2 и 4 одинаковы, Все эелементы стратегии 2 меньше стратегии 1, значит тоже можно исключить. Все элементы 5 стратегии меньше 3. Исключаем пятую стратегию.

mtx[c(1,3),]

## [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]  
## [1,] 8 6 4 4 3  
## [2,] 4 7 7 3 5

Для второго игрока сравниваем 1 и 4, исключаем 1. Сравниваем 2 и 5, исключаем 2.

(mtx1<-mtx[c(1,3),c(3,4,5)])

## [,1] [,2] [,3]  
## [1,] 4 4 3  
## [2,] 7 3 5

max(apply(mtx1,1,min))

## [1] 3

min(apply(mtx1,2,max))

## [1] 4

### Решение матричных игр сведением к линейному программированию

Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой заданную платежами

Применение первым игроком оптимальной стратегии должно обеспечить ему при любых действиях второго игрока выигрыш не менее цены игры

Рассмотрим задачу отыскания оптимальной стратегии игрока при огрнаничениях

Величина неизвестна, однако можно считать что цена игры . Последнее условие выполняется всегда, если все элементы платежной матрицы неотрицательны, а это можно достигнуть прибавив ко всем элементам некую константу. Преобразуем ограничения поделив неравентва на .

где

По условию (сумма вероятностей). Разделим обе части этого неравенства на .

Оптимальная стратегия игрока A должна максимизировать величину , следовательно, функция:

Для второго игрока проигрыш не должен превышать цену игры. В результате имеем симметричную пару двойственных задач.

#### Пример

Дана матрица игры

## [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]  
## [1,] 3 7 1 1 5  
## [2,] 4 9 3 6 2  
## [3,] 2 3 1 4 7

(a<-max(apply(mtx,1,min)))

## [1] 2

(b<-min(apply(mtx,2,max)))

## [1] 3

Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий.

library(lpSolve)  
(result<-lp("min",c(1,1,1), t(mtx), rep(">=",5),c(1,1,1,1,1)))

## Success: the objective function is 0.3684211

result$objval

## [1] 0.3684211

result$solution

## [1] 0.00000000 0.31578947 0.05263158

(a<-result$solution/result$objval)

## [1] 0.0000000 0.8571429 0.1428571

(result<-lp("max",c(1,1,1,1,1), mtx, rep("<=",3),c(1,1,1)))

## Success: the objective function is 0.3684211

result$objval

## [1] 0.3684211

result$solution

## [1] 0.0000000 0.0000000 0.2631579 0.0000000 0.1052632

(b<-result$solution/result$objval)

## [1] 0.0000000 0.0000000 0.7142857 0.0000000 0.2857143

Таким образом цена игры равна 2.7142857, оптимальная стратегия A равна (0, 0.8571429, 0.1428571), оптимальная стратегия B равна (0, 0, 0.7142857, 0, 0.2857143).

#### Построение имитационной модели

# Функция, возвращающая индекс стратегии  
get.k<-function(vec){  
 cusum=0  
 tst=runif(1)  
 for(i in 1:length(vec)) {  
 if(vec[i]==0) next  
 cusum<-cusum+vec[i]  
 if(tst>cusum) next  
 return(i)  
 }  
}  
set.seed(2015)  
test<-c()  
for(i in 1:1000) test=c(test,mtx[get.k(a),get.k(b)])  
  
table(test)

## test  
## 1 2 3 7   
## 86 221 656 37

summary(test)

## Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max.   
## 1.000 2.000 3.000 2.755 3.000 7.000

Пусть A выбирает стратегию случайно

test<-c()  
for(i in 1:1000) test=c(test,mtx[sample(1:3, 1),get.k(b)])  
  
table(test)

## test  
## 1 2 3 5 7   
## 478 79 249 97 97

summary(test)

## Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max.   
## 1.000 1.000 2.000 2.547 3.000 7.000

Как видим, результат хуже. Аналогично рассмотрим вариант для B.

test<-c()  
for(i in 1:1000) test=c(test,mtx[get.k(a),sample(1:5, 1)])  
  
table(test)

## test  
## 1 2 3 4 6 7 9   
## 22 183 211 203 164 22 195

summary(test)

## Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max.   
## 1.000 3.000 4.000 4.726 6.000 9.000

В этом случае, B проигрывает больше.

#### Информация о параметрах R

sessionInfo()

## R version 3.2.0 (2015-04-16)  
## Platform: x86\_64-w64-mingw32/x64 (64-bit)  
## Running under: Windows 7 x64 (build 7601) Service Pack 1  
##   
## locale:  
## [1] LC\_COLLATE=Russian\_Russia.1251 LC\_CTYPE=Russian\_Russia.1251   
## [3] LC\_MONETARY=Russian\_Russia.1251 LC\_NUMERIC=C   
## [5] LC\_TIME=Russian\_Russia.1251   
##   
## attached base packages:  
## [1] stats graphics grDevices utils datasets methods base   
##   
## other attached packages:  
## [1] lpSolve\_5.6.11  
##   
## loaded via a namespace (and not attached):  
## [1] magrittr\_1.5 formatR\_1.2.1 tools\_3.2.0 htmltools\_0.2.6  
## [5] yaml\_2.1.13 stringi\_0.4-1 rmarkdown\_0.6.1 knitr\_1.10.5   
## [9] stringr\_1.0.0 digest\_0.6.8 evaluate\_0.8