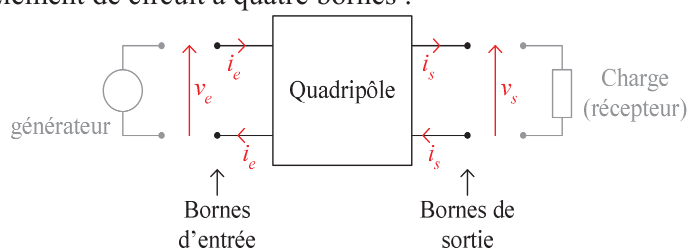
Chapitre 4 : Quadripôles, fonctions de transfert, filtres

I Quadripôle électrocinétique

A) Définition

Elément de circuit à quatre bornes :

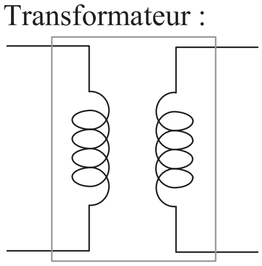


Quadripôle passif : pas de source auxiliaire de puissance électrique.
Quadripôle actif : présence d'une source auxiliaire de puissance.
Le fonctionnement électrique du quadripôle est caractérisé par :
v_e, v_s : tension d'entrée, de sortie du quadripôle
i_e, i_s : courant d'entrée, de sortie du quadripôle

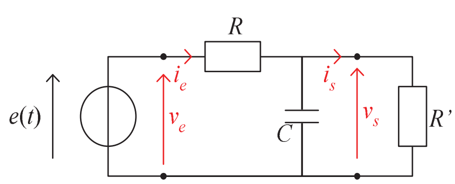
Un quadripôle est dit linéaire lorsqu'il est constitué uniquement de dipôles et éléments de circuit linéaires.

B) Exemples de quadripôles

Transformateur :

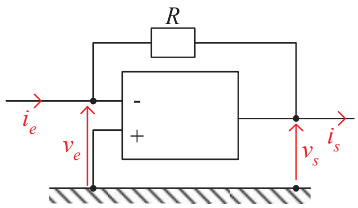


(passif)



(passif)

Montage à amplificateur opérationnel (A.O)



(actif)

II Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire en RSF(ω).

$$\underline{v_e} = \underline{V_e} e^{j\omega.t} \qquad \underline{i_e} = \underline{I_e} e^{j\omega.t}$$
$$\underline{v_s} = \underline{V_s} e^{j\omega.t} \qquad \underline{i_s} = \underline{I_s} e^{j\omega.t}$$

A) Fonction de transfert (Transmittance)

Définition :

$$\underline{H}(j\omega) \text{ (fonction de transfert)} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} \text{ (amplification en tension)}$$

$$\text{ou } \frac{\underline{i_s}}{\underline{i_e}} = \frac{\underline{I_s}}{\underline{I_e}} \text{ (amplification en courant)}$$

$$\text{ou } \frac{\underline{V_s}}{\underline{I_e}} \text{ (Transimpédance)}$$

$$\text{ou } \frac{\underline{I_s}}{\underline{V_e}} \text{ (Transadmittance)}$$

$$\left(\frac{\text{fonction d'entrée}}{\text{fonction de sortie}}\right)$$

Attention : $\underline{H}$ dépend du quadripôle et du reste du circuit.

$\underline{H}(j\omega) = |\underline{H}(j\omega)| e^{j\arg(\underline{H}(j\omega))} = G(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$

$G(\omega)$: gain du quadripôle.

$\varphi(\omega)$: avance de phase de la sortie sur l'entrée.

On définit le gain en décibel : $G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log_{10}(G(\omega))$

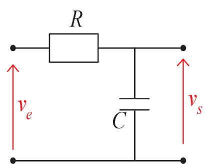
III Diagramme de Bode

A) Définition

Consiste à tracer les graphes G_{dB} et φ en fonction de $\log_{10}(\omega/\omega_0)$, où ω_0 est soit une pulsation caractéristique du circuit, soit $\omega_0 = 1\text{rad.s}^{-1}$. On peut aussi tracer en fonction de ω sur un papier millimétré en échelle logarithmique. (unité : décade).

B) Exemple : circuit R,C et C,R

Circuit R,C :



Source : $v_e = V_e \cos(\omega . t + \varphi)$

Charge : circuit ouvert ($i_s = 0$)

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_R}} \text{ (diviseur de tension)}$$

$\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$. On pose $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$

Donc $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

Ainsi, $G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$; $\varphi(\omega) = -\arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$

Diagramme de Bode :

En basse fréquence ($\omega << \omega_0$) :

$\lim\limits_{\omega \to 0} G(\omega) = 1$ donc $\lim\limits_{\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \to -\infty} G_{\text{dB}} = 0$. On a donc une asymptote horizontale en $-\infty$.

$\lim\limits_{\omega \to 0} \varphi(\omega) = 0$ donc $\lim\limits_{\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \to -\infty} \varphi(\omega) = 0$. On a aussi une asymptote horizontale.

En haute fréquence ($\omega >> \omega_0$) :

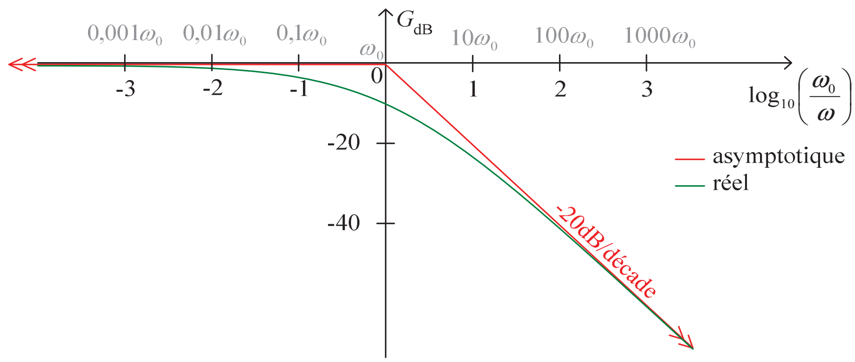
$$G(\omega) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\omega}{\omega_0}$$

Donc $\lim\limits_{\omega \to +\infty} \left(\log(G\omega) - \log\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right) \right) = 0$

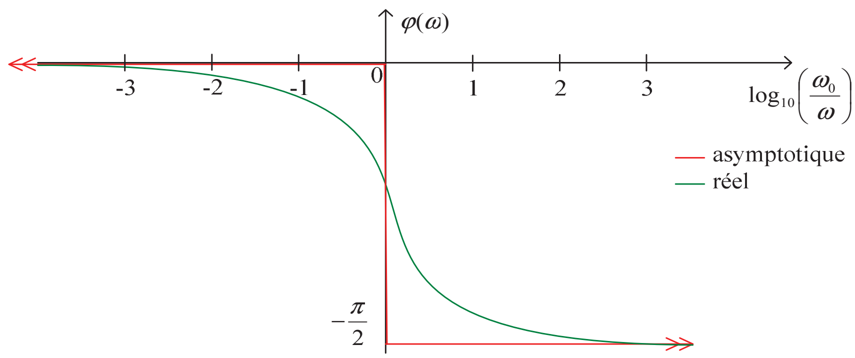
Soit $\lim\limits_{\omega \to +\infty} \left(\underbrace{G_{\text{dB}}(\omega)}_{Y} - (-20\underbrace{\log\frac{\omega_0}{\omega}}_{X}) \right) = 0$

On a une asymptote d'équation $Y = -20X$ (soit $G_{\text{dB}}(\omega) = -20\log\dfrac{\omega_0}{\omega}$) en $+\infty$.

$\lim\limits_{\omega \to +\infty} \varphi(\omega) = -\dfrac{\pi}{2}$. On a donc une asymptote horizontale en $+\infty$

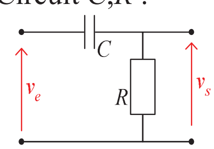


$$G(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{\mathrm{dB}}(\omega_0) = -3\mathrm{dB}$$



$$\varphi(\omega_0) = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$$

Circuit C,R :



Source : $v_e = V_e \cos(\omega.t + \varphi)$

Charge : R_∞.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \text{, avec } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$G(\omega) = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

En basse fréquence ($\omega << \omega_0$) :

$$G(\omega) \underset{0}{\sim} \frac{\omega}{\omega_0}$$

Donc $\lim_{\omega \to 0} \left(G_{\mathrm{dB}}(\omega) - 20 \log \frac{\omega_0}{\omega} \right) = 0$

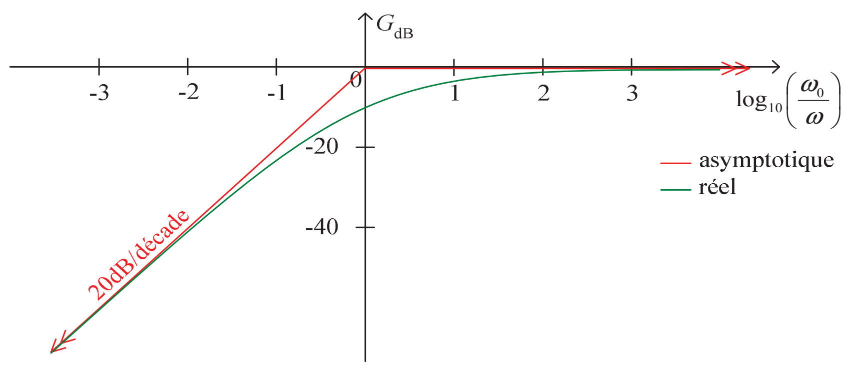
On a une asymptote d'équation $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20 \log \frac{\omega_0}{\omega}$ en $-\infty$.

$$\lim_{\omega \to 0} \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

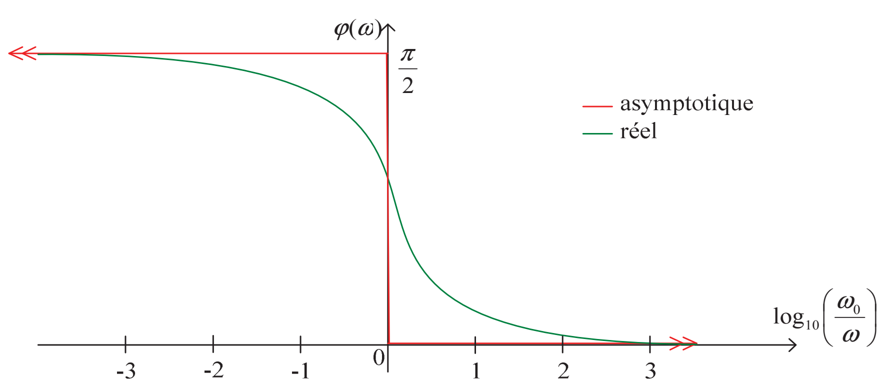
En haute fréquence ($\omega >> \omega_0$) :

$G(\omega) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\omega / \omega_0}{\omega / \omega_0} \underset{+\infty}{\sim} 1$. Donc $\lim_{\omega \to +\infty} G(\omega) = 1$; $\lim_{\omega \to +\infty} G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 0$

$$\lim_{\omega \to +\infty} \varphi(\omega) = 0$$



Pour $\varphi(\omega)$, c'est le même que le précédent décalé de $\pi / 2$ vers le haut :



C) Diagramme de Bode asymptotique

Définition du diagramme de Bode asymptotique : c'est la réunion des asymptotes haute fréquence et basse fréquence. (Le diagramme de Bode asymptotique est très proche du réel.) Remarque : on peut avoir plusieurs domaines de fréquences (haute fréquence, basse fréquence et intermédiaire).