Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Экономико-математическое моделирование – II

Томск – 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Дополнительная информация 3
1 Лабораторная работа: AR(p) 3
2 Лабораторная работа: GARCH(p, q) 6
3 Лабораторная работа: AR(p)ARCH(q) и реальные данные 8
4 Лабораторная работа: call-опцион 10
5 Лабораторная работа: броуновское движение 12
6 Лабораторная работа: оценивание параметров геометрического броуновского движения 14
7 Лабораторная работа: модель разорения страховой компании 15
Список литературы 19

Дополнительная информация

В работе [1] Вы найдете необходимую информацию, связанную с параметрической статистикой. Данная книга не является сложной монографией. Это учебник для студентов, который позволяет разобраться в матстате.

Лабораторные выполняются на языках R или $Python$.

Примечание 1. *Для удобства использования языка R скачайте оболочку Rstudio на сайте*

https://rstudio.com/

Также можно воспользоваться ресурсом

https://rstudio.cloud/

Для выполнения работ на языке Python скачайте дистрибутив Anaconda на сайте

https://www.anaconda.com/products/individual

1 Лабораторная работа: AR(p)

Рассмотрим процесс $AR(p)$ вида

$$x_k = \theta' X_{k-1} + \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$, $X_{k-1} = (x_{k-1}, \dots, x_{k-p})'$, $\varepsilon_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$, значение $X_0 = (x_0, \dots, x_{1-p})$ является случайным и не зависит от последовательности $\{\varepsilon_k\}$. Штрих $'$ означает операцию транспонирования.

Задание:

1. Построить график процесса $AR(1)$, из n наблюдений, для различных значений параметра θ: a) $|\theta| < 1$, b) $|\theta| = 1$, c) $|\theta| > 1$.

   Примечание 2. *Желательно, чтобы Вы использовали функции. Т.е. напишите функцию, которая зависит от параметров n, θ вида*

   ar=function(n,θ)#n - объем выборки, θ - параметр процесса $AR(1)$

   { ...}

   которая будет возвращать последовательность значений $AR(1)$. Затем, меняя входные параметры, постройте графики.

2. Оценить параметр $|\theta| \le 1$ по методу наименьших квадратов (МНК). Для этого минимизируйте по θ сумму квадратов ошибок, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta x_{i-1})^2 \to \min_{\theta} . \tag{2}$$

Примечание 3. *Необходимо взять производную выражения* (2) *по* θ *и приравнять к 0.*

3. Найти оценку максимального правдоподобия (МП) параметра θ процесса $AR(1)$. Сделайте вывод о взаимосвязи оценок МНК и МП для параметра θ в случае гауссовского шума.

Примечание 4. *Поскольку процесс авторегрессии полностью описывается последовательностью* $\{\varepsilon_k\}_{k\ge 1}$, *то совместное распределение процесса* (1) *может быть описано через совместное распределение последовательности* $\{\varepsilon_k\}_{k\ge 1}$. *Так как* $\{\varepsilon_k\}_{k\ge 1}$ *– последовательность независимых гауссовских случайных величин, которая не зависит от начального значения* X_0, *то ее совместное распределение представляет из себя произведение одномерных распределений каждой из случайных величин* ε_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *т.е.*

$$\mathcal{L}_\theta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \mathcal{L}_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x_k - \theta x_{k-1})^2}{2\sigma^2}\right) = \\ = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - \theta x_{k-1})^2}{2\sigma^2}\right), \tag{3}$$

где $\sigma^2 = 1$.

Оценка максимального правдоподобия находится путем максимизации функции правдоподобия по неизвестному параметру

$$\hat{\theta}_n = \arg\max_{\theta} \mathcal{L}_\theta(x_1, \ldots, x_n).$$

Следовательно, для того, чтобы максимизировать (3), *необходимо минимизировать величину*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - \theta x_{k-1})^2}{2\sigma^2}.$$

Примечание 5. *В R есть функции интегрирования и дифференцирования. Необходимую информацию вы можете найти в книге [2]. В работе [3] представлена информация, посвященная статистической составляющей пакета R.*

4. Рассчитать МНК-оценки для объема выборки $k = 10, 11, \ldots, n$. Посмотреть на динамику оценки, в зависимости от объема выборки, и сделать выводы.

   АЛГОРИТМ

   (a) Замоделировать процесс $AR(1)$ объема выборки $n = 1000$;

   (b) Расчитать МНК-оценку по 10 наблюдениям реализованного процесса;

   (c) Расчитать МНК-оценку по 11 наблюдениям и т.д. для всех $k = 10{,}11, \ldots, n$;

   (d) Построить последовательность полученных оценок на графике.

5. Построить график устойчивого процесса $AR(2)$, из n наблюдений. Для того, чтобы процесс $AR(2)$ был стационарным необходимо, чтобы корни уравнения

$$\lambda^2 - \theta_1\lambda - \theta_2 = 0$$

   удовлетворяли условию $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2$. Корни могут быть комплексными.

6. Вычислить значение параметра $AR(2)$, используя функцию $arima$ пакета $stats$.

   Примечание 6. *Для установки пакета используйте команду*

   install.packages("stats").

   Для подключения пакета введите команду

   library("stats").

   Примечание 7. *Одним из аргументов функциии arima выступает вектор c(p,d,q), где p – порядок авторегрессионной части модели arima, d – порядок интегрирующей части, q – порядок скользящего среднего. В данном случае необходимо использовать order = c(2,0,0).*

   Примечание 8. *Для исключения свободного члена из результатов оценивания добавить в качестве аргумента функции arima() запись*

$$include.mean = FALSE.$$

7. Загрузить лабораторную на свой GitHub.

2 Лабораторная работа: GARCH(p, q)

Рассмотрим $GARCH(p,q)$ процесс вида

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \qquad \sigma_n^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i h_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} b_j \sigma_{n-j}^2, \qquad n > 0,$$

где коэффициенты при наблюдениях процесса удовлетворяют свойствам $a_0 > 0, a_i \geq 0$, $i = \overline{1,p}$, а коэффициенты при условных волатильностях $b_j \geq 0$, $j = \overline{1,q}$; $H_0 = (h_0, h_{-1}, \ldots, h_{1-p})'$ – вектор начальных значений процесса, $\Sigma_0 = (\sigma_0, \sigma_{-1}, \ldots, \sigma_{1-q})' \geq 0$ – вектор начальных значений волатильности, элементами которого выступают положительно определенные случайные величины. Векторы H_0 и Σ_0 не зависят от последовательности $\{\varepsilon_n\}$, ε_n – случайные величины с нулевым математическим ожиданием $\mathbf{E}\varepsilon_n = 0$, единичной дисперсией $\mathbf{E}\varepsilon_n^2 = 1$ и $\mathbf{E}\varepsilon_n^4 < \infty$.

Задание:

1. Построить график стационарного процесса $\{h_n\}$ и график волатильности $\{\sigma_n\}$ процесса $GARCH(1,0)$, из $n = 1000$ наблюдений.

   Примечание 9. *Стационарность достигается при* $0 < a_1 < 1$.

2. Оценить параметры a_0 и a_1 с помощью метода наименьших квадратов (МНК), путем преобразования процесса $ARCH(1) \equiv GARCH(1,0)$ к процессу авторегрессии первого порядка.

   Примечание 10. *Если преобразовать процесс* $ARCH(p)$ *к виду*

   $$h_n^2 = \sigma_n^2 \varepsilon_n^2 = \sigma_n^2 + \sigma_n^2 \xi_n, \qquad \xi_n = \varepsilon_n^2 - 1,$$

   то в результате имеем процесс авторегрессии, p-го порядка относительно квадратов наблюдений процесса $\{h_n\}$*, описываемого уравнением*

   $$h_n^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i h_{n-i}^2 + \left(a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i h_{n-i}^2\right) \xi_n.$$

   Далее, минимизируя сумму квадратов ошибок по неизвестным параметрам

   $$\sum_{k=1}^{n} \left(a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i h_{k-i}^2\right)^2 \xi_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(h_k^2 - a_0 - \sum_{i=1}^{p} a_i h_{k-i}^2\right)^2 \to \min_{a_i : i=\overline{0,p}},$$
   $$a_0 > 0, \quad a_i \geq 0, \qquad i = \overline{1,p},$$

   получаем МНК-оценки $\hat{a}_i, i = \overline{0,p}$.

3. Оценить параметры a_0, a_1 при помощи функции $garch()$ пакета $tseries$ по выборке $\{h_n\}$.

   Примечание 11. *Для подключения и установки пакета используйте команды $install.packages("tseries")$ и $library("tseries")$.*

   Примечание 12. *Функция $garch()$ определяется как*

$$garch(x{,}order = c(q,p), start = c(a'_0, a'_1, \dots, a'_p, b'_1, \dots, b'_q), \dots),$$

   где

   - *x – выборка;*
   - *$order$ – порядок процесса $garch()$;*
   - *$start$ – начальные (предполагаемые) значения параметров процесса $garch()$.*

4. Построить график стационарного процесса $GARCH(3{,}0)$, из $n = 1100$ наблюдений. Разделить процесс на обучающую и тестовую выборки в отношении 10:1. Оценить вектор параметров $(a_0, a_1, a_2, a_3)'$ на обучающей выборке, используя функцию $garch()$. Затем вычислить последовательность прогнозов на 1 шаг $\{h_{n+1|n}\}$ на тестовой выборке и наложить прогнозы на график процесса.

   Примечание 13. *Стационарность достигается при $0 < \sum\limits_{i=1}^{3} a_i < 1$.*

   Примечание 14. *Прогноз процесса $ARCH(p)$ вычисляется по формуле*

$$h^2_{n+1|n} = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^{p} \hat{a}_i h^2_{n-i+1},$$

   где $(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)'$ – вектор оценок параметров $(a_0, a_1, a_2, a_3)'$.

5. Построить стационарный процесс $GARCH(1{,}1)$, из $n = 1000$ наблюдений и оценить его параметры $(a_0, a_1, b_1)'$ по выборке $\{h_n\}$, используя функцию $garch()$.

   Примечание 15. *Стационарность достигается при $0 < a_1 + b_1 < 1$.*

6. Загрузить лабораторную на свой GitHub..

3 Лабораторная работа: AR(p)ARCH(q) и реальные данные

Задание:

1. Реализовать $AR(2)ARCH(3)$ процесс из $n = 2100$ наблюдений с значениями параметров $\theta = (-0.3, 0.4)'$, $A = (1, 0.2, 0.1, 0.2)'$ и построить его график.

   Примечание 16. *Процесс $AR(p)ARCH(q)$ представляет из себя модель авторегрессии со случайной дисперсией шума и описывается уравнением вида*

   $$x_n = \theta' X_{n-1} + \sigma_n \varepsilon_n, \qquad \sigma_n^2 = a_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i x_{n-i}^2,$$

   где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$, $X_{n-1} = (x_{n-1}, \dots, x_{n-p})'$, $\{\varepsilon_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (н.о.р.с.в.) с нулевыми средними $\mathbf{E}\varepsilon_n = 0$ и единичными дисперсиями $\mathbf{E}\varepsilon_n^2 = 1$.

2. Разделить, полученную на первом шаге последовательность $\{x_n\}$, в отношении 20 : 1 на обучающую и тестовую выборки соответственно.

3. На основе обучающей выборки получить оценки параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2)'$ и $A = (a_0, a_1, a_2, a_3)'$.

   Примечание 17. *Оценивание параметров проходит в два этапа:*

   (a) Из условия минимизации по θ суммы квадратов невязок

   $$\sum_{k=1}^{n_l} (x_k - \theta' X_{k-1})^2 \to \min_{\theta}$$

   получаем МНК-оценку $\hat{\theta}$, где n_l – объем обучающей выборки.

   (b) Используя полученную оценку $\hat{\theta}$, находим оценку $\hat{A} = (\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_3)'$, которая минимизирует сумму квадратов ошибок

   $$\sum_{k=1}^{n_l} \left(\hat{h}_k^2 - \sigma_k^2\right)^2 \to \min_{A},$$

   где $\hat{h}_k = x_k - \hat{\theta}' X_{k-1}$.

   Примечание 18. *Для оценивания θ можно использовать функцию $arima()$ по наблюдениям процесса $\{x_n\}$, а для оценивания вектора A – функцию $garch()$ по невязкам $\{\hat{h}_n\}$.*

4. Построить последовательность прогнозов на один шаг на тестовой выборке. Наложить последовательность прогнозов на последовательность наблюдений процесса. Примерный результат вы можете видеть на рис. 1.

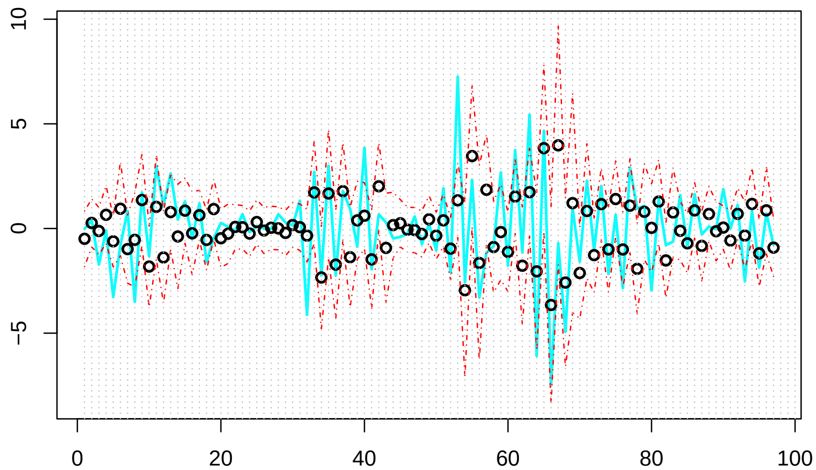

Рисунок 1 — Сплошная бирюзовая линия – последовательность $\{x_n\}$, черные окружности – последовательность прогнозов на 1 шаг $\{x_{n+1|n}\}$, красные штрих-пунктирные линии – верхняя и нижняя границы прогноза волатильности процесса (последовательность интервалов (4))

Примечание 19. *На каждом шаге вычисляется прогноз среднего значения процесса по формуле*

$$x_{n+1|n} = \mathbf{E}\left(\hat{\theta}' X_n + \hat{\sigma}_{n+1}\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) = \hat{\theta}' X_n, \qquad n \geq n_l,$$

где $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ *и*

$$\hat{\sigma}_n^2 = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^{q} \hat{a}_i x_{n-i}^2.$$

Затем для каждого прогноза $x_{n+1|n}$ *строится промежуток вида*

$$[x_{n+1|n} - \hat{\sigma}_{n+1}, x_{n+1|n} + \hat{\sigma}_{n+1}], \tag{4}$$

который показывает насколько в среднем может отклониться процесс от прогноза $x_{n+1|n}$.

5. Скачать с сайта *https://www.finam.ru/* любые дневные котировки финансовых активов или значения индексов (минимум за 3 года). Например, динамику цен акций корпораций (Microsoft, Lukoil, Норникель, Apple ...), динамику индексов (S&P500, NASDAQ, MICEX ...), курс валют и т.д.;

6. Импортировать скачанные данные в R, используя функцию $read.table()$;

7. Построить график динамики актива;

8. Привести данные к стационарному виду, используя одно из преобразований
$$z_k = \frac{P_k - P_{k-1}}{P_{k-1}}, \text{ или } z_k = \ln \frac{P_k}{P_{k-1}}, \qquad k \geq 1,$$
где P_k – значение финансового актива в момент времени k, z_k – доходность финансового актива в момент времени k;

9. Построить график доходностей $\{z_k\}$ финансового актива;

10. Повторить шаги 2-4 для последовательности $\{z_n\}$ при предположении, что процесс $\{z_n\}$ описывается моделью $AR(2)ARCH(3)$.

11. Загрузить лабораторную на свой GitHub.

4 Лабораторная работа: call-опцион

Рассмотрим (B, S)-рынок, описываемый CRR-моделью (модель Кокса–Росса–Рубинштейна), которая включает два актива: $B = \{B_n\}$ – банковский счет ($Bounds$), $S = \{S_n\}$ – акция ($Stocks$). Предполагается, что
$$\begin{aligned} B_n &= (1+r)B_{n-1}, \\ S_n &= (1+\rho_n)S_{n-1}, \end{aligned} \qquad n > 1, \tag{5}$$
где r – процентная ставка по депозиту, $\{\rho_n\}$ – последовательность независимых случайных величин (доходности – $returns$), принимающих два возможных значения a и b, притом $-1 < a < r < b$. Элементы последовательности $\{\rho_n\}$ описываются распределением
$$\mathsf{P}(\rho_n = b) = p, \quad \mathsf{P}(\rho_n = a) = q, \quad p + q = 1.$$

Рассмотрим опцион европейского типа с моментом исполнения N.

Опцион европейского типа – это договор, по которому покупатель опциона, получает право, но не обязанность, купить/продать какой-либо актив по заранее оговоренной цене (цена исполнения) в фиксированный момент времени N (момент исполнения).

Необходимо рассчитать *справедливую цену* опционного контракта, которая устраивает и продавца и покупателя опциона. Формально эту величину можно записать в виде

$$\mathcal{C}(f_N;\mathsf{P}) = \inf\{x \geq 0 : \exists \pi \text{ с } X_0^\pi = x \text{ и } X_N^\pi = f_N \ (\mathsf{P}\text{-п.н.})\}$$

где f_N – функция выплат опционного контракта, $\pi = (\beta, \gamma)$ – портфель ценных бумаг, представляющий из себя предсказуемую последовательность с $\beta = \{\beta_n\}$ (величина банковского счета) и $\gamma = \{\gamma_n\}$ (количество акций), $X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$ – капитал портфеля ценных бумаг в момент времени n. Отметим, что величины β_n и γ_n могут принимать отрицательные значения, что означает взятие в долг с банковского счета и возможность продажи акций.

Рассмотрим европейский *call*-опцион, который дает право приобрести актив по оговоренной цене в момент времени N. Функция выплат в этом случае будет иметь вид

$$f_N = (S_N - K)^+, \tag{6}$$

где N – момент исполнения (*maturity time*), S_N – цена актива (акции) в момент N, K – цена исполнения, т.е. оговоренная цена актива в опционном контракте (*strike price*), $(a)^+ = \max(a, 0)$.

Формулы рассчета справедливой цены *call*-опциона для рынка вида (5) представлены в следующей теореме.

Теорема 1. *Для стандартного опциона Европейского типа с функцией выплат* (6) *справедливая (рациональная) стоимость рассчитывается*

$$\mathcal{C}_N = \begin{cases} S_0\mathcal{B}(K_0,N;p^*) - K(1+r)^{-N}\mathcal{B}(K_0,N;\tilde{p}), & \text{если } K_0 \leq N \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}, \tag{7}$$

где

$$\mathcal{B}(j,N;p) = \sum_{k=j}^{N} C_N^k p^k (1-p)^{N-k}, \qquad K_0 = 1 + \left[\ln \frac{K}{S_0(1+a)^N}\left(\ln\frac{1+b}{1+a}\right)^{-1}\right],$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad p^* = \frac{1+b}{1+r}\tilde{p}, \qquad \tilde{p} = \frac{r-a}{b-a}$$

где $[x]$ *– целая часть числа* x.

Задание:

1. Реализовать последовательность $\{B_n\}$ для заданного значения ставки $r = 0.01$, используя формулу (5), за период $N = 200$ при $B_0 = 1$. Построить график;

2. Реализовать случайный процесс $\{S_n\}$, используя формулу (5), при следующих значениях параметров: $S_0 = 1$, $N = 200$, $a = -0.3$, $b = 0.8$, $p = 0.4$. Построить график.

   Примечание 20. *Для построения последовательности $\{\rho_n\}$ необходимо реализовать бернуллиевскую случайную величину при помощи команды $rbinom(1, 1, p)$. Далее, если реализация бернуллиевской случайной величины приняла значение 1, то присвоить ей значение $b = 0.8$, если же приняла значение 0, то присвоить ей значение $a = -0.3$;*

3. Рассчитать справедливую цену *call*-опциона по формуле (7) при следующих значениях параметров: $S_0 = 100$, $N = 10$, $a = -0.3$, $b = 0.8$, $r = 0.2$, $K = 100$.

4. Загрузить лабораторную на свой GitHub.

5 Лабораторная работа: броуновское движение

Рассмотрим процесс $(B_t)_{t\geq 0}$, который является непрерывным гауссовским процессом с однородными независимыми приращениями. Характеристики процесса имеют следующий вид $B_0 = 0$, $\mathbf{E}B_t = 0$, $\mathbf{E}B_t^2 = t$, а также ковариационную функцию $\mathbf{E}B_tB_s = \min(t,s)$. Данный процесс носит название броуновского движения или винеровского процесса.

Примечание 21. *Броуновское движение моделируется как случайное блуждание с малым шагом дискретизации Δ. Шум представляет из себя гауссовскую случайную величину с нулевым математическим ожиданием и дисперсией равной Δ. Т.е. дискретный аналог броуновского движения имеет вид*

$$B_{(k+1)\Delta} = B_{k\Delta} + \varepsilon_{(k+1)\Delta}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{8}$$

где $\varepsilon_{k\Delta} \sim \mathcal{N}(0, \Delta)$, а $(k+1)\Delta$ – последовательность моментов наблюдений процесса $\{B_t\}$, $t \geq 0$.

Рассмотрим диффузионный процесс, называемый геометрическим броуновским движением или экономическим броуновским движением [4]. Данный процесс определяется через стохастическое дифференциальное уравнение

$$dS_t = S_t(adt + \sigma dB_t), \qquad a \in \mathcal{R}^1, \sigma \in \mathcal{R}^1, \sigma > 0,$$

что интерпретируется, как то, что для любого $t > 0$ выполняется интегральное уравнение

$$S_t = S_0 + \int_0^t aS_u\ du + \int_0^t \sigma S_u\ dB_u.$$

Данное уравнение с начальным условием S_0, не зависящим от броуновского движения $B = (B_t)_{t\geq 0}$, имеет решение

$$S_t = S_0 e^{\left(a-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma B_t}, \qquad t > 0, \tag{9}$$

где величина $(a-\sigma^2/2)$ называется локальным сносом, а σ^2 диффузией, дифференциальной дисперсией или волатильностью.

Задание:

1. Провести выкладки и обосновать, что для процесса (8) выполняются условия, накладываемые на броуновское движение. В частности, доказать, что $\mathbf{E}B_{k\Delta} = 0$, $\mathbf{E}B_{k\Delta}^2 = k\Delta$, $\mathbf{E}B_{k\Delta}B_{l\Delta} = \Delta\min(l,k)$, при $B_0 = 0$.

   Примечание 22. *Представьте процесс $(B_{k\Delta})_{k\geq 0}$ через сумму случайных величин $\varepsilon_{k\Delta}$, $k = 0, 1, \ldots$ Обратите внимание, что процесс является мартингалом относительно потока σ-алгебр $\{\mathcal{F}_{k\Delta}\}_{k\geq 0}$, задаваемых как $\mathcal{F}_{k\Delta} = \sigma\{\varepsilon_\Delta, \varepsilon_{2\Delta}, \ldots, \varepsilon_{k\Delta}\}$. Следовательно, для обоснования его свойств можно пользоваться свойствами условных математических ожиданий.*

2. Замоделировать процесс (8) для $\Delta = 0.0001$ (т.е. средне-квадратическое отклонение с.в. $\varepsilon_{k\Delta}$ равно $\sqrt{\Delta} = 0.01$) и $k = 0, 1, \ldots, 10^3$.

3. Построить ансамбль реализаций процесса, замоделированного на предыдущем шаге, и вывести все реализации процесса на один график. Т.е. построить 200 реализаций процесса (8) на одном графике.

4. Ограничить ансамбль реализаций, построенный на предыдущем шаге по правилу трех сигм.

   Примечание 23. *Поскольку выполняется условие $\mathbf{E}B_{k\Delta}^2 = k\Delta$, то по правилу трех сигм можем получить доверительный интервал вида*

   $$\mathsf{P}\left(-3\sqrt{k\Delta} \leq B_{k\Delta} \leq 3\sqrt{k\Delta}\right) = 0.997, \qquad k \geq 0.$$

5. Реализовать процесс (9) при следующих входных значениях параметров: $S_0 = 1$, $a = 0.5$, $\sigma = 0.9$, $\sqrt{\Delta} = 0.01$, $k = 0, 1, \ldots, 10^3$.

Примечание 24. *После подстановки дискретного аналога броуновского движения в выражение* (9), *имеем*

$$S_{(k+1)\Delta} = S_0 e^{\left(a-\frac{\sigma^2}{2}\right)(k+1)\Delta+\sigma B_{(k+1)\Delta}} \tag{10}$$

6. Построить 200 реализаций процесса (10) на одном графике.

7. Загрузить лабораторную на свой GitHub.

6 Лабораторная работа: оценивание параметров геометрического броуновского движения

Рассмотрим задачу оценивания параметров диффузионного процесса (9) по дискретным наблюдениям процесса (10). Для этой цели [6] преобразуем (9) к виду

$$\log \frac{S_t}{S_0} = \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t, \qquad t > 0.$$

Для двух различных моментов времени t и u найдем приращение процесса $(\log(S_t/S_0))_{t\geq 0}$. Имеем

$$\log \frac{S_t}{S_u} = \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-u) + \sigma(B_t - B_u) \sim \mathcal{N}\left(\left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-u), \sigma^2(t-u)\right).$$

Возьмем наблюдения процесса $(S_t)_{t\geq 0}$ в равноудаленные дискретные моменты времени Δ, 2Δ, $\ldots n\Delta$. Обозначим через $X_k = \log(S_{k\Delta}) - \log(S_{(k-1)\Delta})$. Следовательно,

$$X_k = \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta + \sigma(B_{k\Delta} - B_{(k-1)\Delta}), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Учитывая тот факт, что $\mathbf{E} B_{k\Delta} = 0$ и $\mathbf{E}\left[B_{k\Delta} - B_{(k-1)\Delta}\right]^2 = \Delta$, то из этого следует, что $\{X_k\}$ – последовательность независимых гауссовских случайных величин с математическими ожиданиями μ и дисперсиями Σ^2, равными соответственно

$$\mu = \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta, \qquad \Sigma^2 = \sigma^2\Delta. \tag{11}$$

Далее, используя метод максимального правдоподобия, получаем ММП-оценки по формулам

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad \hat{\Sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \hat{\mu})^2.$$

Следовательно, оценки параметров броуновского движения (a, σ^2) легко выводятся из уравнений (11), путем подстановки в них оценок $\hat{\mu}$ и $\hat{\Sigma}^2$. Т.е. оценки волатильности и сноса рассчитываются по формулам

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\Sigma}^2}{\Delta}, \qquad \hat{a} = \frac{\hat{\mu}}{\Delta} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2},$$

соответственно.

Задание:

1. Замоделировать процесс (10) для $S_0 = 100$, $a = 0.5$, $\sigma = 0.8$, $\sqrt{\Delta} = 0.01$, $k = 0, 1, \ldots, 10^3$;

2. Рассчитать оценки параметров броуновского движения $(\hat{a}, \hat{\sigma}^2)$ по наблюдениям процесса $\{S_{k\Delta}\}_{k\geq 1}$;

3. Загрузить лабораторную на свой GitHub.

7 Лабораторная работа: модель разорения страховой компании

Рассмотрим модель Крамера–Лундберга [7], описывающую деятельность страховой компании. Введем априорные предположения:

1. В компанию поступают средства клиентов в размере c в единицу времени (премии);

2. В моменты $T_1, T_2, \ldots$ происходят страховые случаи. Промежутки времени между страховыми случаями $\tau_i = T_i - T_{i-1}$, $i \geq 1$ имеют экспоненциальное распределение с параметром λ и являются независимыми;

3. Размеры страховых выплат $X_i \geq 0$, $i \geq 1$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием $\mathbf{E}X_i = \mu < \infty$;

4. Последовательность $\{X_i\}_{i\geq 1}$ не зависит от $\{T_i\}_{i\geq 1}$.

В результате имеем, что капитал страховой компании описывается выражением

$$U_t = U_0 + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \tag{12}$$

где N_t – количество страховых случаев, реализованных на промежутке времени $[0, t]$. Отметим, что случайная величина N_t имеет пуассоновское распределение вида

$$\mathsf{P}(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \tag{13}$$

Определим событие A, связанное с разорением страховой компании,

$$A = \{U_t < 0 \text{ для некоторого конечного } t > 0\}. \tag{14}$$

Величина

$$T = \inf\{t > 0 : A\}$$

называется моментом разорения.

Определим вероятность разорения

$$\psi(u) = \mathsf{P}(T < \infty).$$

В соответствии с [7] можем утверждать, что $\psi(u) < 1$ на бесконечном промежутке времени, если

$$\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0. \tag{15}$$

По неравенству Лундберга имеем, что если выполнено условие (15) и страховые выплаты X_i экспоненциально распределены с параметром $1/\mu$, то вероятность разорения страховой компании ограничена величеной

$$\psi(u) \leq \exp\left(-\frac{1}{\mu}\frac{\rho}{1+\rho}u\right), \qquad \text{для любого } u > 0, \tag{16}$$

где u – значение начального капитала U_0.

Задание:

1. Реализовать 1000 случайных величин N_t при фиксированном значении $t = 50$, $\lambda = 2$;

   Примечание 25. *Моделирование производится через подсчет моментов* $\{T_n\}$ *в промежутке* $[0,t]$. *При моделировании используйте цикл*

   $$while\left(\sum \tau_i < t\right)\{\ldots\}.$$

2. Построить гистограмму реализованной последовательности и наложить на гистограмму график (13);

   Примечание 26. *Для изображения функции вероятности пуассоновского распределения* (13) *можете использовать команду*

   $$curve(f(x), add = TRUE)$$

где $f(x)$ – функция вида

$$f(x) = \frac{(\lambda t)^x}{\Gamma(x+1)} e^{-\lambda t},$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, которая является расширением понятия факториала на множестве вещественных и комплексных чисел. Для реализации гамма-функции в R используйте команду $factorial(x)$.

3. Реализовать процесс (12) до фиксированного момента времени t_{max} и построить его график. Предполагаем, что страховые выплаты X_i распределены по экспоненциальному закону с параметром равным $1/\mu$ т.е. $X_i \sim \exp(1/\mu)$ (следовательно, $\mathbf{E}X_i = \mu$). Рассмотрим 2 случая:

   (a) $U_0 = 50$, условие (15) выполнено;

   (b) $U_0 = 50$, условие (15) не выполнено.

   АЛГОРИТМ:

   (a) Реализуйте с.в. τ_1, которой соответствует величина $T_1 = \tau_1$;

   (b) В момент T_1 реализуйте с.в. X_1 и рассчитайте величину U_{T_1};

   (c) Реализуйте с.в. τ_2, которой соответствует величина $T_2 = \tau_1 + \tau_2$;

   (d) В момент T_2 реализуйте с.в. X_2 и рассчитайте величину U_{T_2} при уже известном значении U_{T_1};

   (e) и т.д.

   Примечание 27. *Формулу* (12) *можно свести к рекуррентному виду*

   $$U_{T_i} = U_{T_{i-1}} + c\tau_i - X_i;$$

   (f) В момент T_n, когда $\sum_{i=1}^{n} \tau_i \geq t_{max}$ останавливаем процедуру.

   (g) Выводим на график случайный процесс, где по оси абсцисс идут значения T_i, а по оси оринат Y значения U_{T_i}.

4. Рассчитать выборочную вероятность разорения фирмы при следующих значениях параметров: $t_{max} = 1000$, $c = 1$, $\lambda = 0.3$, $\mu = 3$, $U_0 = 100$, по формуле

   $$\hat{\psi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \chi_{(A_i)}$$

   где $N = 1000$ – количество реализаций процесса (12), $\chi_{(A_i)}$ – индикатор события (14) (индикатор разорения) для i-ой реализации. Проверить выполнимость условия (16) с заменой величины $\psi(u)$ на $\hat{\psi}$.

Примечание 28. *При каждой реализации процесса* $\{U_t\}$ *производится параллельная проверка условия* $U_{T_i} < 0$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, N_{t_{max}}$. *Если условие выполнилось до момента* t_{max}, *т.е. если момент разорения* $T \leq t_{max}$, *то считаем, что компания разорилась.*

5. Загрузить лабораторную на свой GitHub.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шуленин В. П. Математическая статистика. Ч.1. Параметрическая статистика: учебник. / В. П. Шуленин –Томск: Изд-во НТЛ, 2012. – 540 с.

2. Зарядов И. С. Введение в статистический пакет R: типы переменных, структуры данных, чтение и запись информации, графика. / И. С. Зарядов – Москва: Изд-во Российского университета дружбы народов, 2010. – 207 с.

3. Зарядов И. С. Статистический пакет R: теория вероятностей и математическая статистика. / И. С. Зарядов – Москва: Изд-во Российского университета дружбы народов, 2010. – 141 с.

4. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики: в 2 т./ А. Н. Ширяев – М: МЦНМО, 2016. – Т. 1-2.

5. Ширяев А. Н. Вероятность. В 2-х кн. – 3-е изд., перераб. и доп. / А. Н. Ширяев – М: МЦНМО, 2004. – Кн. 1-2.

6. Brigo D. A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management / D. Brigo, A. Dalessandro, M. Neugebauer, F. Triki.

7. Воробейчиков С.Э. Математическое моделирование экстремальных событий в актуарной и финансовой математике : учебное пособие / С.Э. Воробейчиков – Томск : Издательский Дом ТГУ, 2014. – 76 с.