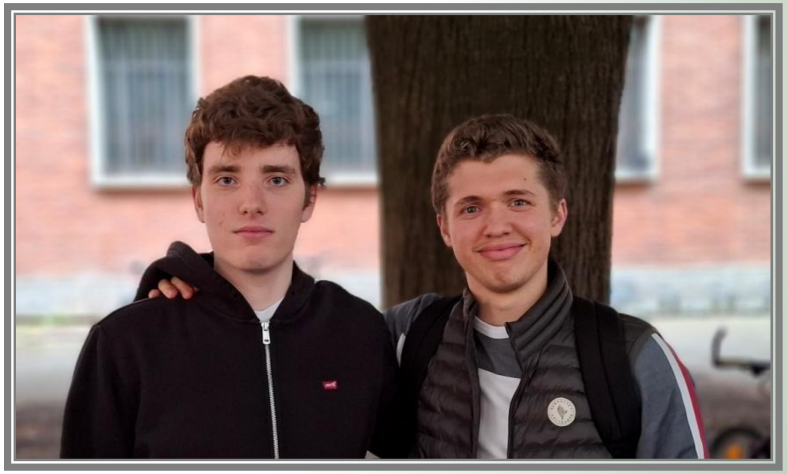
LE CANON DE GAUSS



BRANDÃO Tomás 12057 LARQUIER Amaury 43138

Exemple de Jouet du groupe RAVENSBURGER

Sommaire

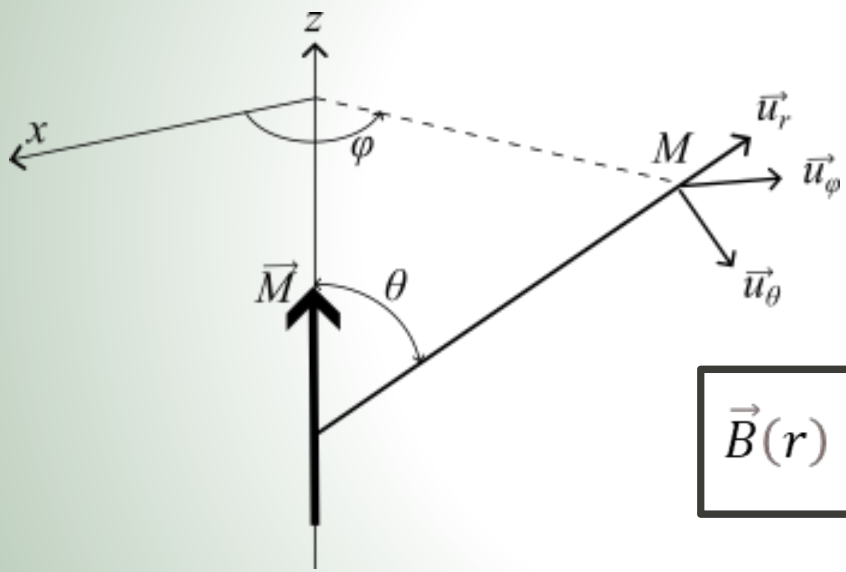
Partie I: Le modèle Théorique

Partie II: Étude Expérimentale

Partie III: Commentaire et analyse des résultats obtenus

Partie I: le modèle théorique

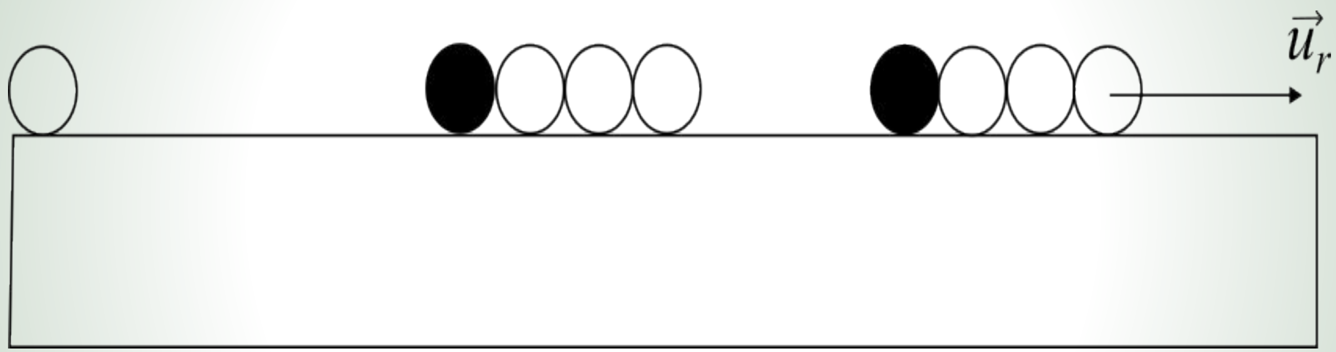
Influence du moment magnétique d’un aimant sur un point M



$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 M}{4\Pi r^3}\left(2\cos(\theta)\overrightarrow{U_r} + \sin\theta\,\overrightarrow{U_\theta}\right)$$

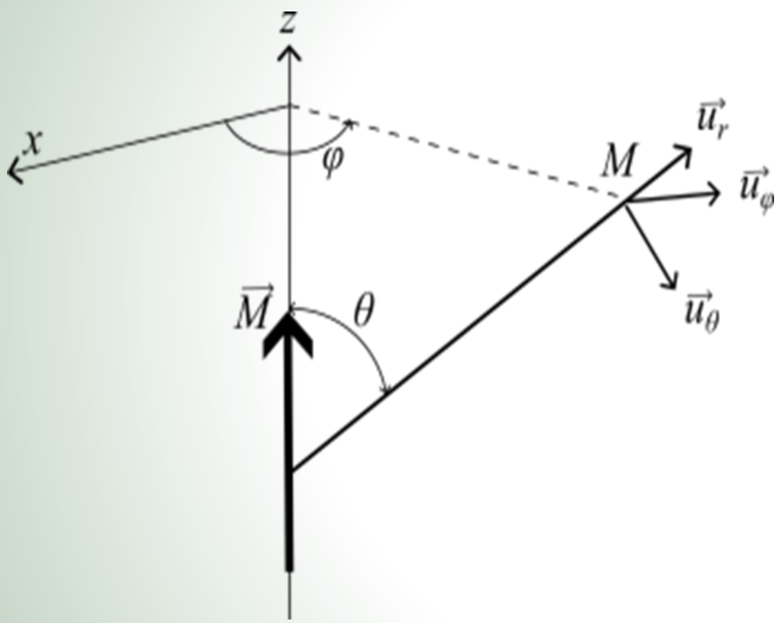
Dipôle Magnétique de moment $\vec{M}$

Modèle théorique du canon de Gauss



Modèle simple du Canon de Gauss

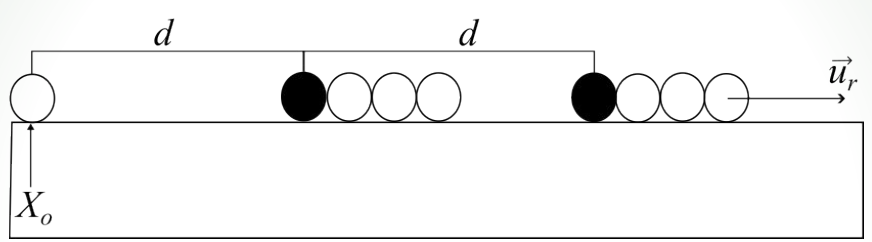
Application à notre modèle du canon de GAUSS



$$\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 M}{2\Pi r^3}\overrightarrow{u_r}}$$

Modèle théorique du canon de Gauss

Phase d'accélération (début):



$$\overrightarrow{m_b} = \frac{4\Pi R^3}{3\mu_0}\overrightarrow{B_0}$$

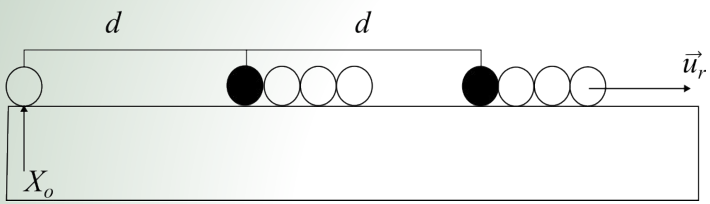
$$\overrightarrow{F_m} = -\nabla\left(-\overrightarrow{m_b} \cdot \vec{B}\right)$$

$$F = \frac{6\mu_0 R^3 M_0^2}{\Pi r^7}$$

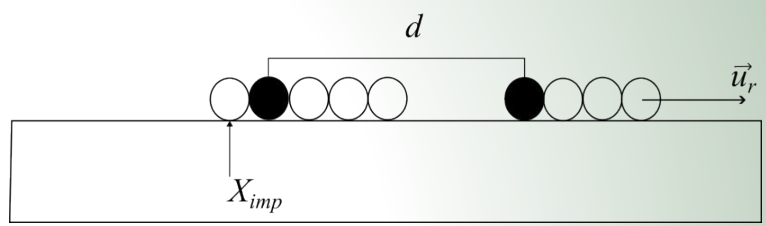
m_b := moment magnétique de la bille

Modèle théorique du Canon de Gauss

Phase d'accélération (début):



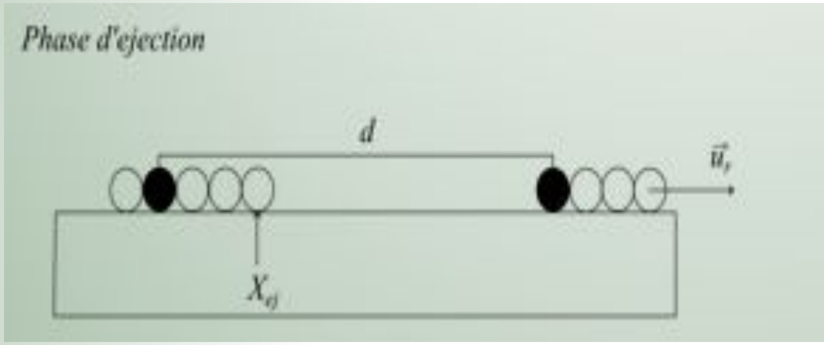
Phase d'accélération (moment d'impact):

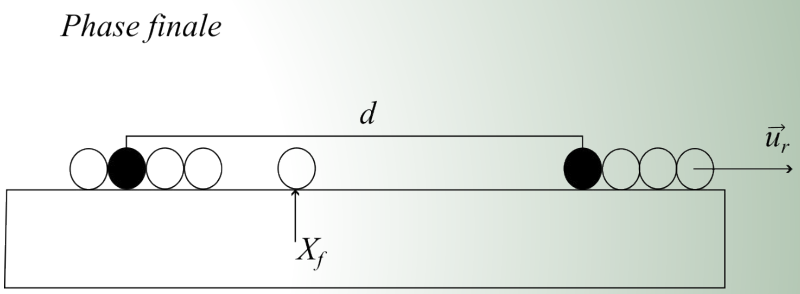


$$\varepsilon_{k,imp} - \varepsilon_{k_o} = W\left(\overrightarrow{F_m}\right) = \int_{X_0}^{X_{imp}} \overrightarrow{F_m}(r) \cdot \overrightarrow{d_r}$$

$$v\left(X_{imp}\right) = \sqrt{\frac{2}{m} W\left(\overrightarrow{F_m}\right) + v_0^2}$$

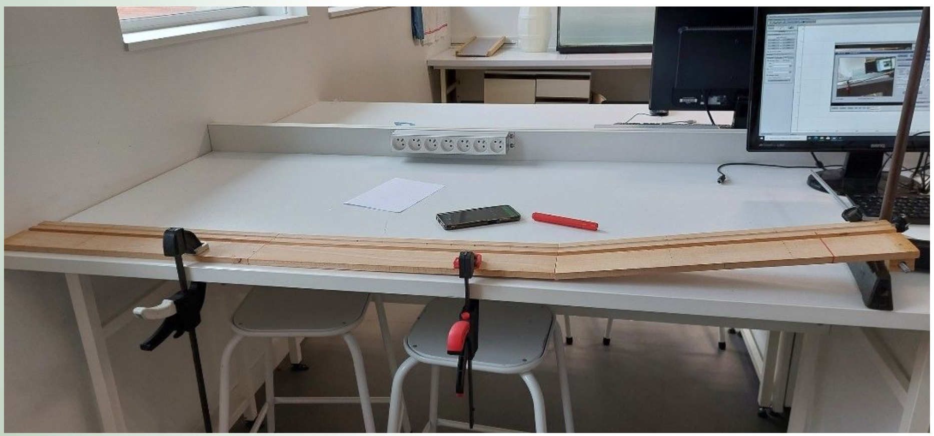
Modèle théorique du canon du Gauss





$$\varepsilon_{k_f} = \varepsilon_{ke} - \left| w\left(\overrightarrow{F_m}\right) \right|$$

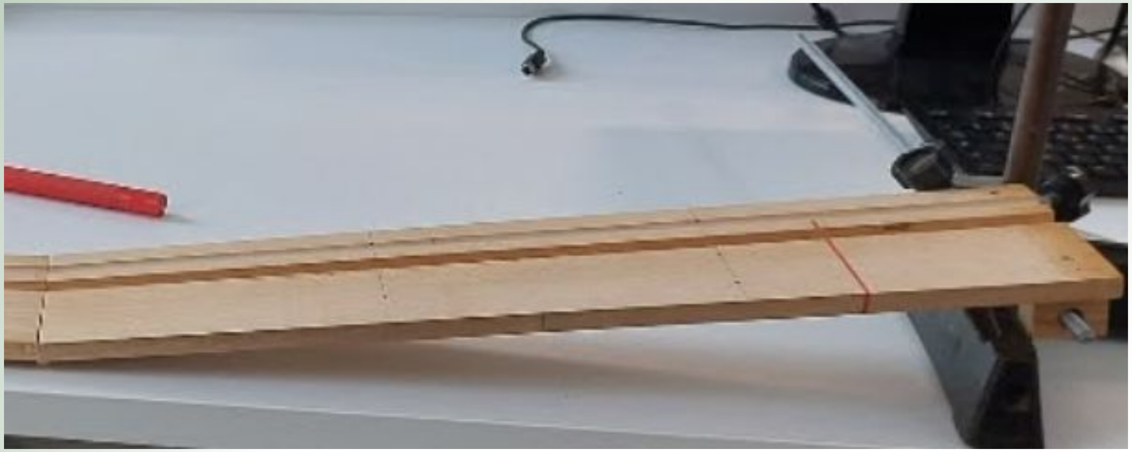
PARTIE II: ÉTUDE EXPÉRIMENTALE



1) Maquettes
2) Matériel
3) Protocole
4) Expériences
5) Résultats

Maquette

Matériel:
- Rampe inclinée de 10°
- Banc principal en bois
- Potence
- 2 aimants sphériques
- 7 billes en acier



Rampe d'impulsion initiale

Vitesse au bout de la rampe:

$$v_0 = 0{,}44m \cdot s^{-1}$$

PROTOCOLE EXPERIMENTAL

Caméra

- Fixer la caméra à la bonne hauteur

Luminosité

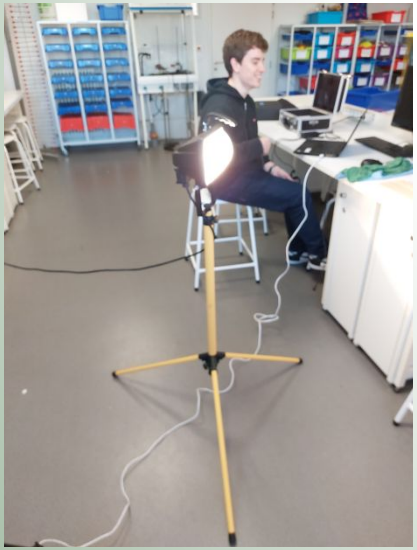
- Mise en place des projecteurs

Placement des billes

Réglage de la caméra

- Nettet é

Pointag e



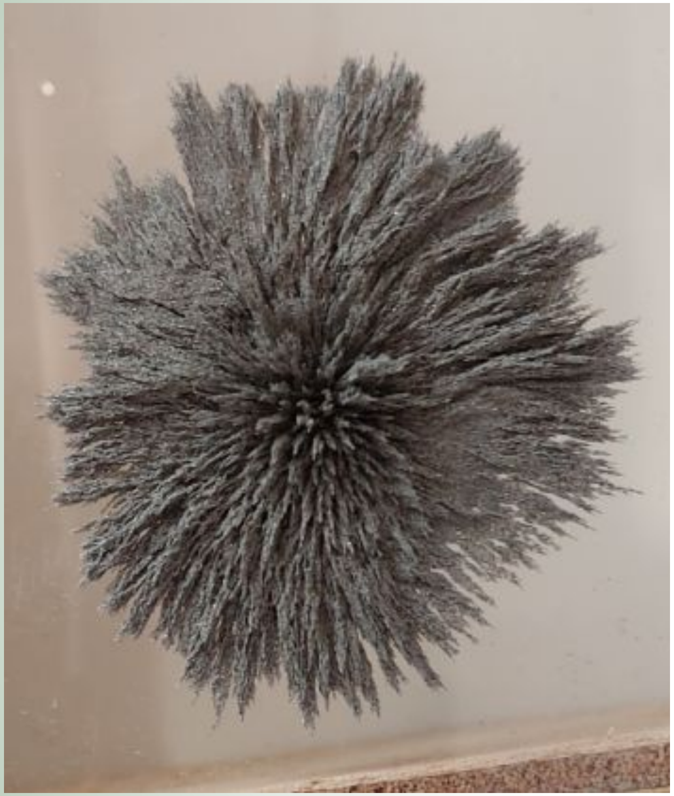
Choix de la Caméra

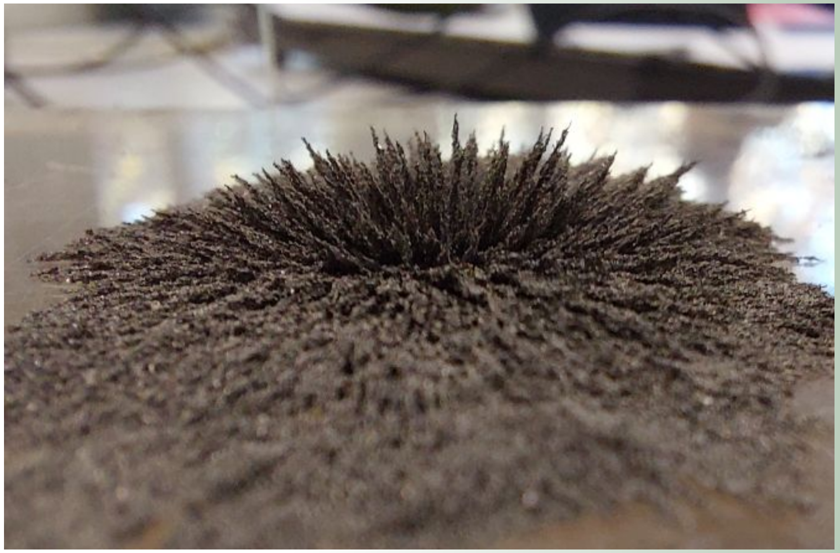
30 images/sec

330 images/sec
Grand angle

430 images/sec
Caméra choisie

Détermination de l’axe d’aimantation





Détermination du champ magnétique

$$\overrightarrow{B}(r) = \frac{\mu_0 M}{2\Pi r^3}\overrightarrow{u_r}$$

Matériel: - Tesla mètre
- aimant

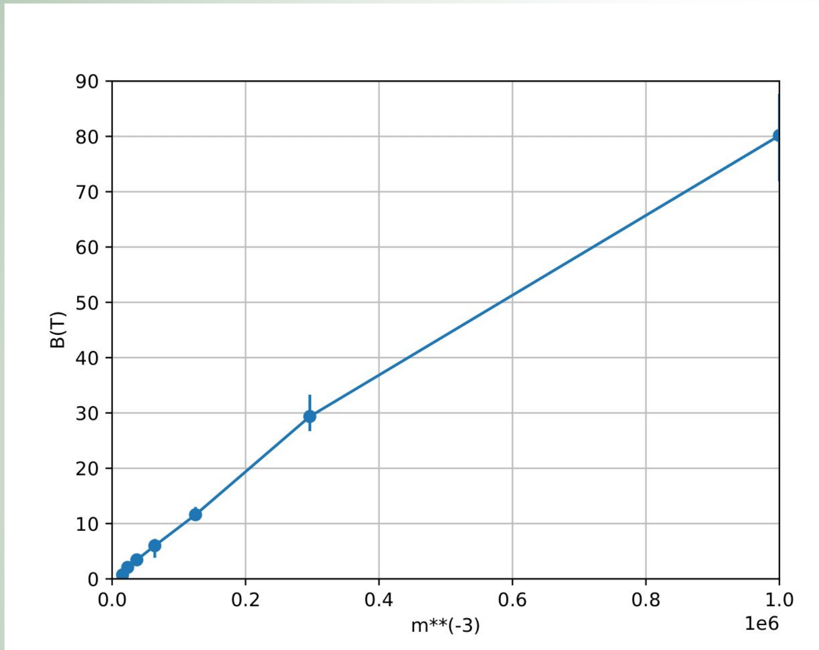
```python
def find_avg( list_of_lists_of_y_vals ):
    n = len( list_of_lists_of_y_vals )
    m = len( list_of_lists_of_y_vals[0] )
    list_of_avgs = [ 0.0 for i in range(m) ]# On va créer une liste de valeur moyenne de la force mesurée
    list_of_errsup = [ 0.0 for i in range(m) ]# On va créer une liste d'écart supérieur à la moyenne
    list_of_errinf = [ 0.0 for i in range(m) ]# On va créer une liste d'écart inférieur à la moyenne
    list_of_mins = list_of_lists_of_y_vals[0].copy()
    list_of_maxs = list_of_lists_of_y_vals[0].copy()
    for j in range(m):
        for i in range(n):
            list_of_avgs[j] += list_of_lists_of_y_vals[i][j]
            list_of_mins[j] = min( list_of_mins[j], list_of_lists_of_y_vals[i][j] )
            list_of_maxs[j] = max( list_of_maxs[j], list_of_lists_of_y_vals[i][j] )
        list_of_avgs[j] /= n
        list_of_errsup[j] = list_of_maxs[j] - list_of_avgs[j]
        list_of_errinf[j] = -list_of_mins[j] + list_of_avgs[j]
    return ( list_of_avgs, list_of_errinf, list_of_errsup )

measurements = [ \
   [ 100, 87.0, 29.8, 11.8, 3.8, 2.5, 1.4, 0.8 ], \
   [ 100, 71.9, 33.3, 13.0, 6.1, 3.6, 2.2, 0.7 ], \
   [ 100, 79.2, 26.7, 11.3, 6.1, 4.2, 2.3, 0.7 ], \
   [ 100, 75, 29.6, 11.1, 7.2, 3.5, 2.4, 0.7 ], \
   [ 100, 87.7, 27.4, 10.8, 6.8, 3.4, 2.1, 0.7 ] \
  ]
                                                                        #Nos mesures
```

Création de la liste moyenne des valeurs de champ et de la liste des erreurs sup et inf respectives

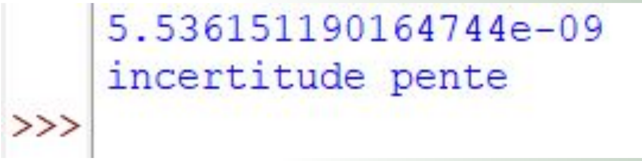
```python
dm = x3 #inverse de la distance au cube
champ =avg


# Précision de mesure de la distance
Deltamd = 5000
Deltachamp = 0 #en N


# Cacul de la valeur mesurée par régression unique

pente_moy,ordonnee_moy = np.polyfit(dm,champ,1)# calcul la pente de la courbe du champ en fonction
                                            #de l'inverse de la distance au cube (on conserver uniquement
                                            #le premier terme(pente)
# Estimation de l'incertitude par monte carlo

N = 10000

pente = []
ordonnee = []

for i in range(0,N):     # On réalise la méthode de Monté Carlo en mettant
                         #en place une liste de pente, prenant en compte l'incertiude surles mesures
    l = len(dm)
    mx= dm + Deltamd*np.random.uniform(-1,1,l)
    my= champ + Deltachamp*np.random.uniform(-1,1,l)
    p=np.polyfit(mx,my,1)# met en place une methode polynomiale (ici ax+b et nous renvoie le couple(a,b)
    pente.append(p[0])  # on prend uniquement le coefficient correspondant à la pente

u_pente = np.std(pente) # Renvoie l'écart type, une mesure de la propagation d'une distribution,

print(u_pente)
```

Méthode de Monte Carlo conduisant à l'incertitude sur la valeur du moment

Résultats



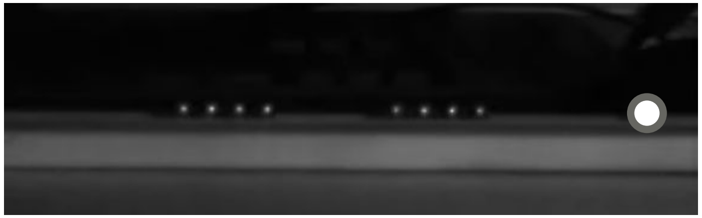
Champ magnétique en fonction de l'inverse de la distance au cube



Incertitude sur le moment magnétique en $6*10^{-09}$ T.m^3

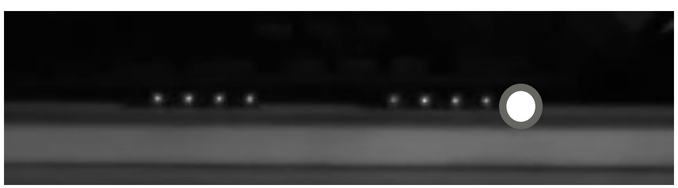
$$\boxed{M_{inf} = 0{,}37 A \cdot m^2 \leq M_0 \leq M_{sup} = 0{,}43\ A \cdot m^2}$$

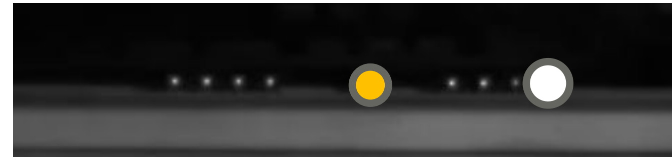
POINTAGES:



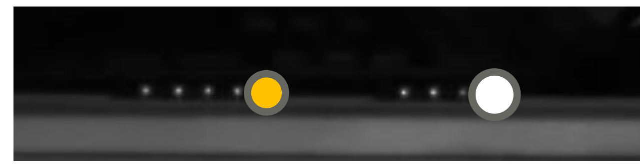
La première bille qui arrive

Le premier choc

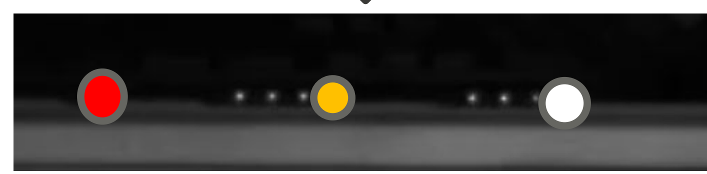


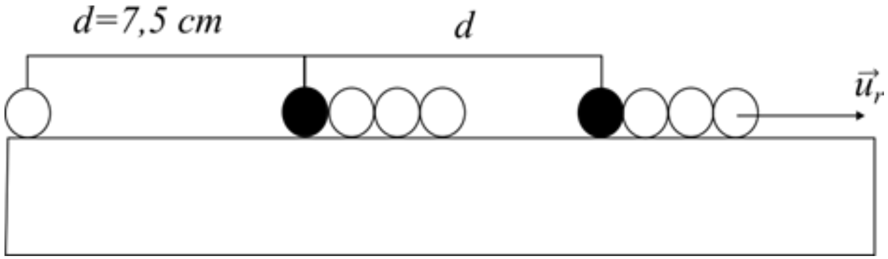


La deuxième bille qui s’échappe



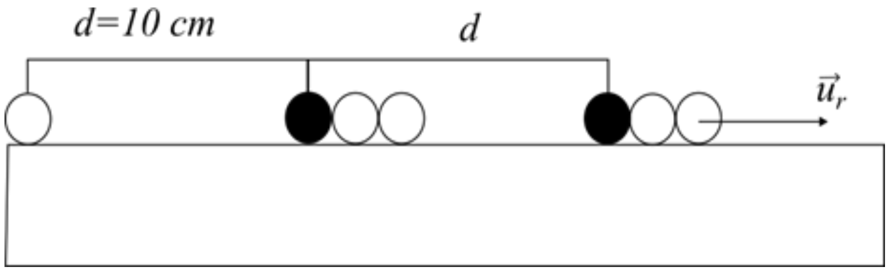
Le deuxième choc avec la troisième bille qui s’échappe





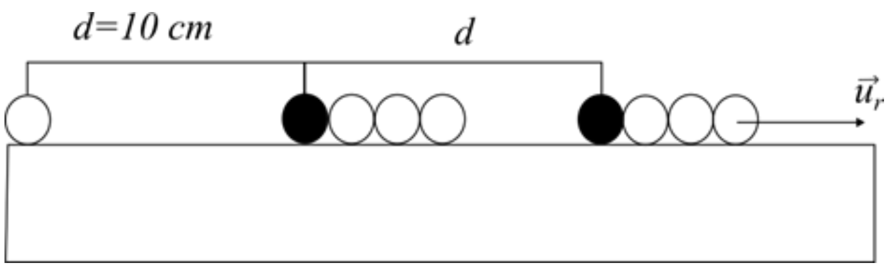
Dispositif 1:

7.5 cm entre les aimants et 3 billes derrière chaque aimant



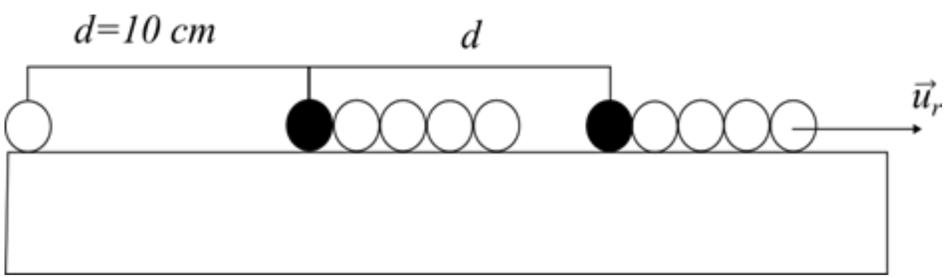
Dispostif 2:

10 cm entre les aimants et 2 billes derrière chaque aimant



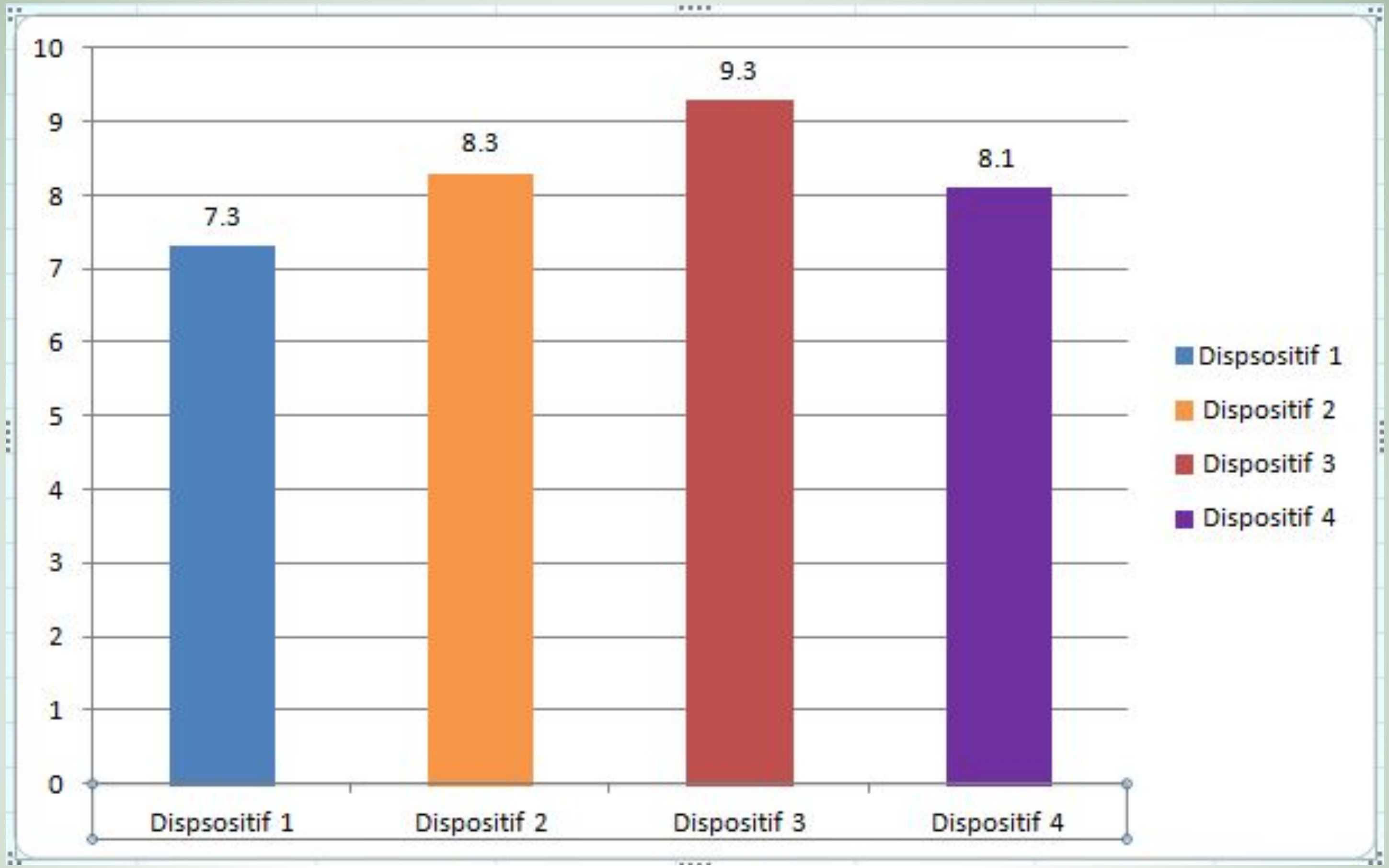
Dispositif 3:

10 cm entre les aimants et 3 billes derrière chaque aimant



Dispositif 4:

10 cm entre les aimants et 4 billes derrière chaque aimant



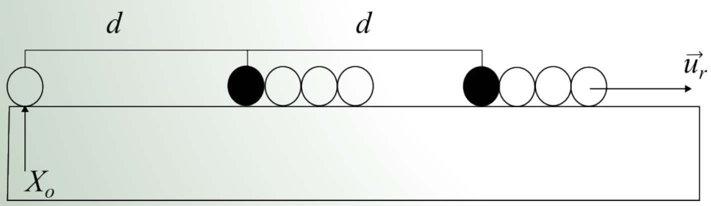
Rapport d’énergie cinétique entre le début et la fin des experiences par dispositif

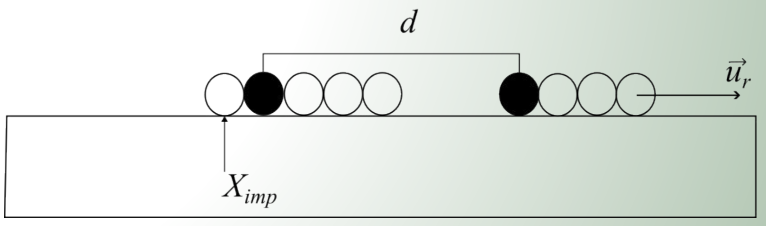
PARTIE III: CONFRONTATION THÉORIE/PRATIQUE ET PRÉVISIONS

Confrontation Théorie/pratique et prévisions

$$M_{in_f} = 0{,}375 A \cdot m^2 \leq M_0 \leq M_{\text{sup}} = 0{,}43 A \cdot m^2$$

$$F = \frac{6\mu_0 R^3 M_0^2}{\Pi r^7}$$





Xi= 1cm
Xo=10cm

$$W\left(\overrightarrow{F_m}\right) = \int_{X_0}^{X_{imp}} \overrightarrow{F_m}(r) \cdot \overrightarrow{d_r} = 0.020 \text{ J}$$

Valeurs obtenues (à partir du modèle théorique):

En considérant :

- M= 0,43 $A \cdot m^2$
- une distance de 9,5 cm (=Ximp-X0)
- V(0)= 0,4 m/sec

On obtient un travail de la force magnétique:

W = 20**10-3 J

$$\varepsilon_{k,i_P} - \varepsilon_{k_i} = W\left(\overrightarrow{F_m}\right) = \int_{x_0}^{x_i} \overrightarrow{F_m}(r) \cdot \overrightarrow{d_r}$$

Et donc une vitesse d'impact :

-Vimp= 1,92 m/s

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m} w\left(\vec{F}\right) + v_0^2}$$

Calcul du travail résistif de l'aimant lors de l'éjection de la bille

Hypothèse:

- l'aimant n'est plus soumis a la force magnétique de l'ancien aimant au bout de 2 cm

On trouve un travail résistif :

- $W = 22*10^{-6}$ J

$\Rightarrow$ $\boxed{W_{résistif} << W_{attract}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{V_{impact(n-1)} = V_{eject(n)}}$

Ecart avec la pratique

Nous avons obtenu: $v_{exp}(X_{imp}) = 1{,}0\text{m/s}$

Ces écarts peuvent être dus à plusieurs facteurs:

- **les frottements (sur bois)**
- **dissipation d'énergie lors du choc**
- **Toutes les incertitudes de mesures :**

  -pointage manuel

  - placement des billes

  - Mesure du moment de l'aimant

  - maquette (inclinaison de la rampe à 10 degrés, la jointure imparfaite de la rampe avec le banc)

- **convertion numérique de nos vidéos**
- **Rotation de la bille sur elle-même: en la prenant en compte on obtient une vitesse théorique à l'impact de :** $v_{théo}(X_{imp}) = 1{,}75\text{m/s}$

Prévision théorique dans notre cas idéal

```python
import numpy as np

def vitesse(n):
    v0=0.4
    m=0.01 #masse de la bille
    W= 0.02 #travail de la force magnétique pendant la phase d'accélération
    v=0
    for k in range(0,n):
        v=np.sqrt((2/m)*W+v0**2)
        v0=v
    return v
```

Donne la vitesse au bout de n aimants (canon en série)

FIN

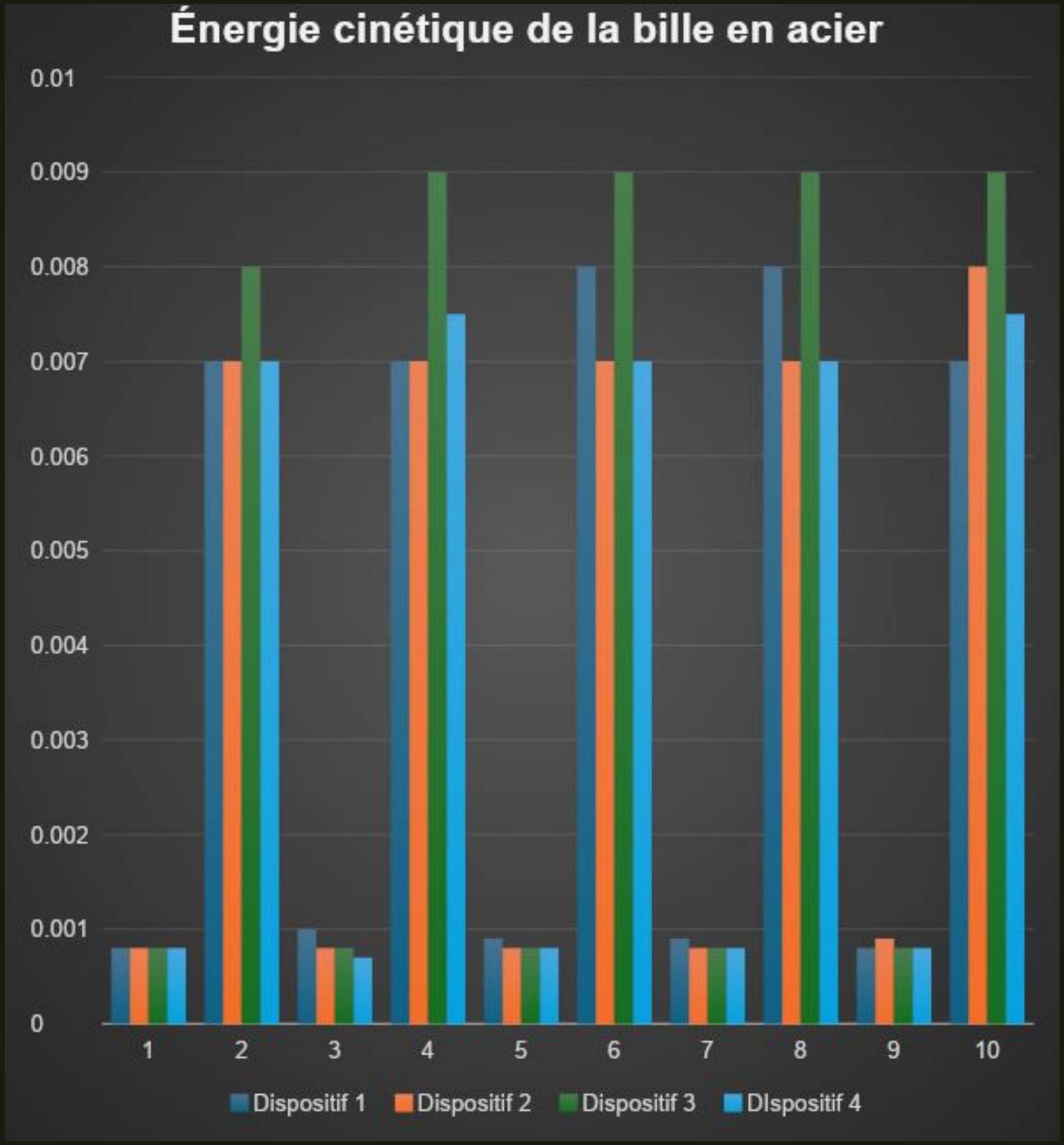
ANNEXES

ANNEXES

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


def find_avg( list_of_lists_of_y_vals ):
    n = len( list_of_lists_of_y_vals )
    m = len( list_of_lists_of_y_vals[0] )
    list_of_avgs = [ 0.0 for i in range(m) ]# On va créer une liste de valeur moyenne de la force mesurée
    list_of_errsup = [ 0.0 for i in range(m) ]# On va créer une liste d'écart supérieur à la moyenne
    list_of_errinf = [ 0.0 for i in range(m) ] # On va créer une liste d'écart inférieur à la moyenne
    list_of_mins = list_of_lists_of_y_vals[0].copy()
    list_of_maxs = list_of_lists_of_y_vals[0].copy()
    for j in range(m):
        for i in range(n):
            list_of_avgs[j] += list_of_lists_of_y_vals[i][j]
            list_of_mins[j] = min( list_of_mins[j], list_of_lists_of_y_vals[i][j] )
            list_of_maxs[j] = max( list_of_maxs[j], list_of_lists_of_y_vals[i][j] )
        list_of_avgs[j] /= n
        list_of_errsup[j] = list_of_maxs[j] - list_of_avgs[j]
        list_of_errinf[j] = -list_of_mins[j] + list_of_avgs[j]
    return ( list_of_avgs, list_of_errinf, list_of_errsup )

measurements = [ \
   [ 100, 87.0, 29.8, 11.8, 3.8, 2.5, 1.4, 0.8 ], \
   [ 100, 71.9, 33.3, 13.0, 6.1, 3.6, 2.2, 0.7 ], \
   [ 100, 79.2, 26.7, 11.3, 6.1, 4.2, 2.3, 0.7 ], \
   [ 100, 75, 29.6, 11.1, 7.2, 3.5, 2.4, 0.7 ], \
   [ 100, 87.7, 27.4, 10.8, 6.8, 3.4, 2.1, 0.7 ] \
  ]
                                          #Nos mesures



# distance est mesurée centre à centre
x = [ i*0.005+0.005 for i in range( len( measurements[0] ) ) ]
x3 = [ x[i]**(-3) for i in range( len(x) ) ]

avg, erri, errs = find_avg( measurements )# On attribut les listes crées par le premier programme à
                                          #notre expérience


plt.figure()
plt.errorbar(x3, avg, yerr=[erri, errs], fmt='-o')# tracé totale et barre d'erreur réalisé à partir de
                                                  #l'erreur sup et min
plt.grid()
```

ANNEXE

```
plt.figure()
plt.errorbar(x3, avg, yerr=[erri, errs], fmt='-o')# tracé avec zoom et barre d'erreur réalisé à partir
                                                   #de l'erreur sup et min
plt.xlim( (-0.2, 1.2*10**6) )
plt.ylim( (0.0, 90) )
plt.grid()

plt.show()

dm = x3 #inverse de la distance au cube
force =avg


# Précision de mesure de la distance
Deltamd = 5000                          # Comment justifier?
Deltaforce = 0 #en N


# Cacul de la valeur mesurée par régression unique

pente_moy,ordonnee_moy = np.polyfit(dm,force,1)# calcul la pente de la courbe de la force en fonction
                                                #de l'inverse de la distance au cube (on conserver uniquement
                                                # le premier terme(pente)
# Estimation de l'incertitude par monte carlo

N = 10000

pente = []
ordonnee = []

for i in range(0,N): # On réalise la méthode de Monté Carlo en mettant en place une liste de pente,
                       # prenant en compte l'incertiude sur les mesures
    l = len(dm)
    mx= dm + Deltamd*np.random.uniform(-1,1,l)
    my= force + Deltaforce*np.random.uniform(-1,1,l)
    p=np.polyfit(mx,my,1)  # met en place une methode polynomiale (ici ax+b et nous renvoie le couple (a,b)
    pente.append(p[0])     # on prend uniquement le coefficient correspondant à la pente

u_pente = np.std(pente)    # Renvoie l'écart type, une mesure de la propagation d'une distribution,

print(u_pente)
print("incertitude pente")
```



ENERGIE CINÉTIQUE PAR EXPERIENCE ET PAR DISPOSITIF

ANNEXES

Calcul de la vitesse de la bille d'acier au premier impact:

$$\varepsilon_{k,imp} - \varepsilon_{k_o} = W\left(\overrightarrow{F_m}\right) = \int_{X_0}^{X_{imp}} \overrightarrow{F_m}(r) \cdot \overrightarrow{d_r}$$

$$\frac{1}{2} m v_{(x_i)}^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W\left(\overrightarrow{F_m}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v\left(X_{imp}\right) = \sqrt{\frac{2}{m} W\left(\overrightarrow{F_m}\right) + v_0^2}}$$

Théorème de l'énergie cinétique:

$$\boxed{\Delta E_k = W\left(\overrightarrow{F_{tot}}\right)}$$

ANNEXES

Calcul du Moment Magnétique:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 M}{2\Pi r^3}\overrightarrow{u_r} = A\frac{1}{r^3}\bar{u}_r$$

$$A = 80 \times 10^{-9}\, T \cdot m^3$$

$$U(A) = 6 \times 10^{-9}\, T \cdot m^3$$

$$\boxed{M_{in_f} = 0{,}37 A \cdot m^2 \leq M_0 \leq M_{\text{sup}} = 0{,}43 A \cdot m^2}$$

ANNEXES

Calcul du travail de la force magnétique sur la bille d'acier avant le premier impact:

$$W\left(\overrightarrow{F_m}\right) = \int_{X_0}^{X_{imp}} \overrightarrow{F_m}(r) \cdot \overrightarrow{d_r}$$

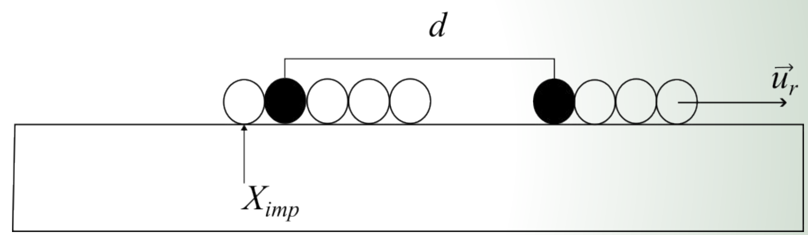
$$W\left(\overrightarrow{F_m}\right) = \int_{X_0}^{X_i} \frac{-E}{r^7} \mathrm{d}r = \frac{E}{6}\left(\frac{1}{X_{imp}^6} - \frac{1}{X_0^6}\right)$$

$$\boxed{W\left(\overrightarrow{F_m}\right) = 0{,}020J}$$

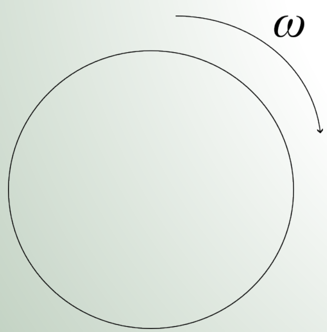
$$\begin{cases} F = \dfrac{6\mu_0 R^3 M_0^2}{\Pi r^7} = \dfrac{E}{r^7} \\ E = \dfrac{6\mu_0 R^3 M_0^2}{\Pi} \\ \text{Ximp= 1cm} \\ \text{Xo=10cm} \end{cases}$$

Prise en compte de la rotation de la bille sur elle-même

Phase d'accélération (moment d'impact):



$$\boxed{J = \frac{2}{5} m R^2}$$



$$\varepsilon_{k,bille} = \frac{1}{2} 1{,}4 m v^2 \Rightarrow$$

$$v_{theo}(X_{imp}) = \sqrt{\frac{2}{1{,}4m} W\left(\overrightarrow{F_m}\right) + v_0^2}$$

$$v_{theo}(X_{imp}) = 1{,}75\text{m/s}$$

ANNEXES

Calcul théorique de l'énergie cinétique de la bille

$$\varepsilon_{k,bille} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\varepsilon_{k,bille} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}mR^2\frac{v^2}{R^2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{k,bille} = \frac{1,4m}{2}v^2}$$

$$\begin{cases} v = R\omega \\ J = \frac{2}{5}mR^2 \end{cases}$$

Calcul de la vitesse de premier impact théorique avec rotation de la bille:

$$\frac{1,4m}{2}v^2 = w\left(\overrightarrow{F_m}\right) + \frac{1,4m}{2}v_0^2 \Rightarrow \boxed{v_{theo}\left(X_{imp}\right) = \sqrt{\frac{2}{1,4m}W\left(\overrightarrow{F_m}\right) + v_0^2}}$$