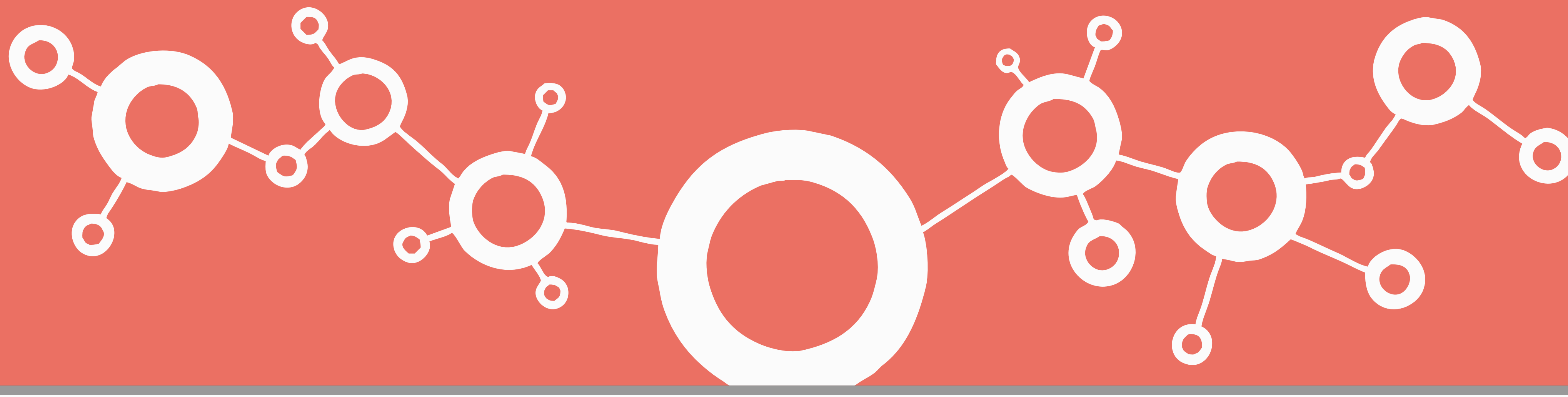


Cours 6 : Introduction à la Théorie des Graphes

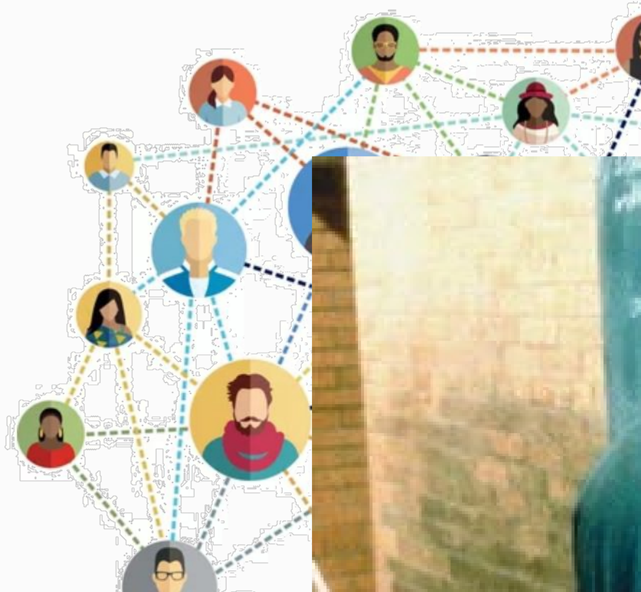
Qu'est-ce qu'un graphe ?

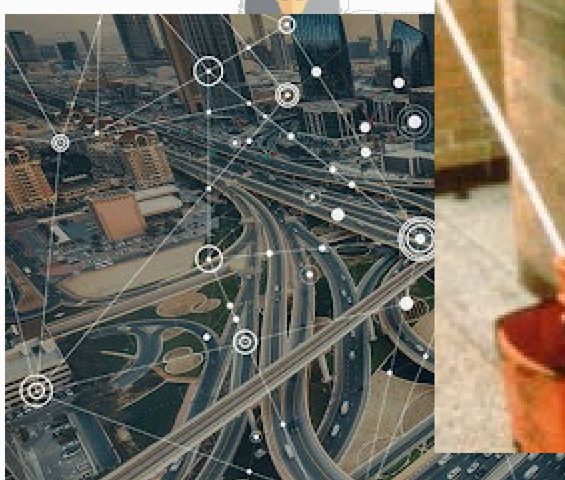
Capture la notion de *relation* entre des *éléments*

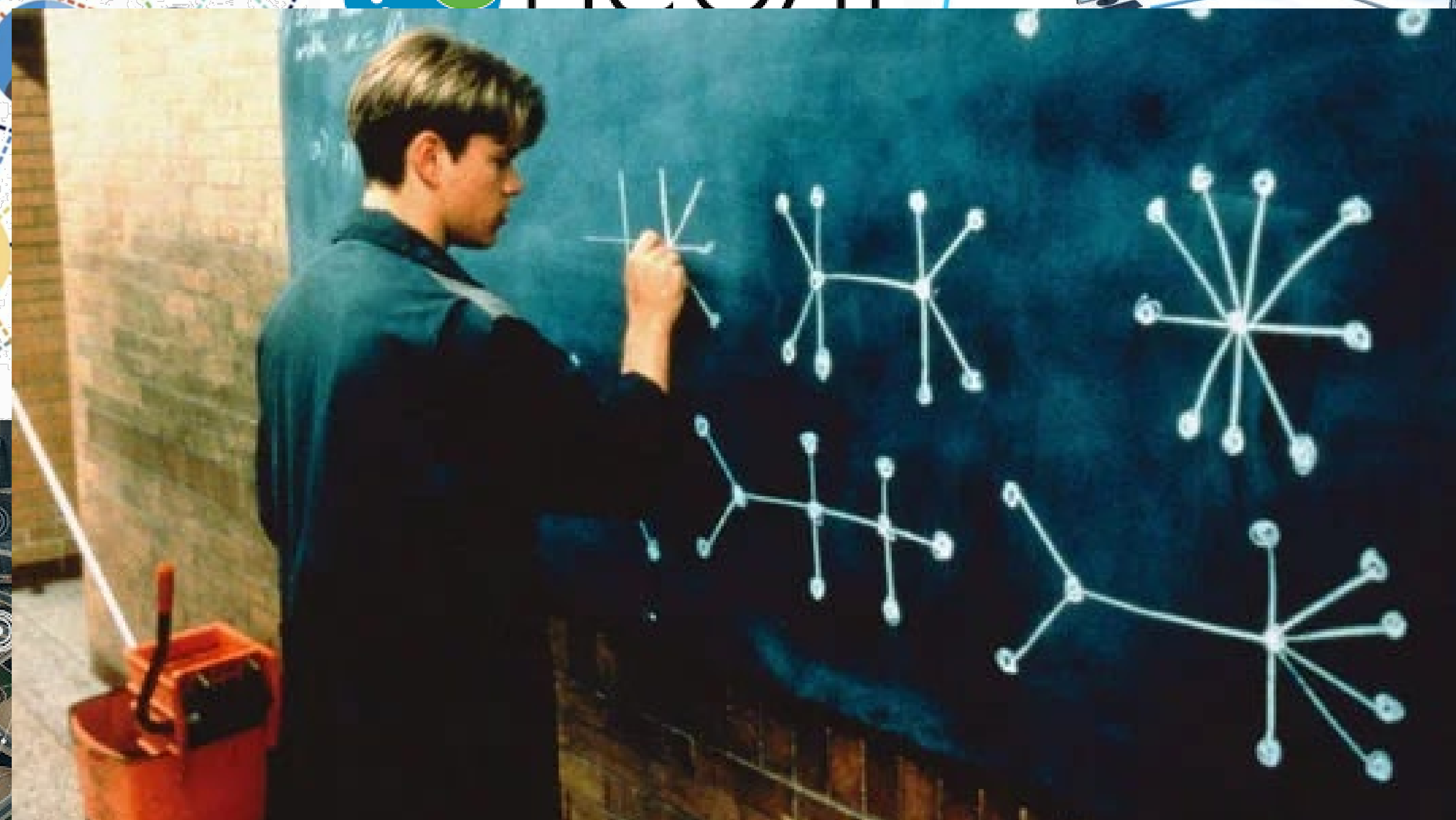
Par exemple :

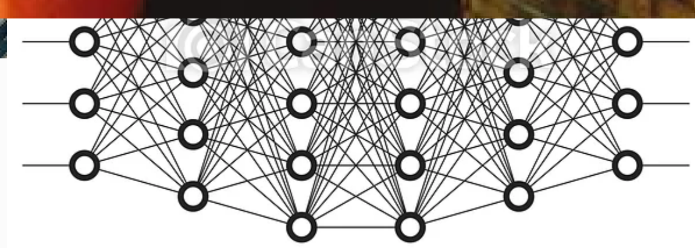
- pour des personnes : *être amis, être de la même famille, avoir joué dans un même film…*
- pour des étudiants : *ne pas avoir de cours en commun*
- pour des pays : *avoir une frontière commune*
- pour des ordinateurs : *appartenir au même sous-réseau*
- pour des nombres : *avoir un diviseur commun*
- pour des stations de métro : *être sur une ligne commune*
- pour deux configurations aux échecs : *pouvoir passer de l'une à l'autre par un mouvement valide*
- etc.
- etc.
- etc.

Les graphes sont partout !









© CanStockPhoto.com - csp40152242

Définitions

Un graphe, c'est :

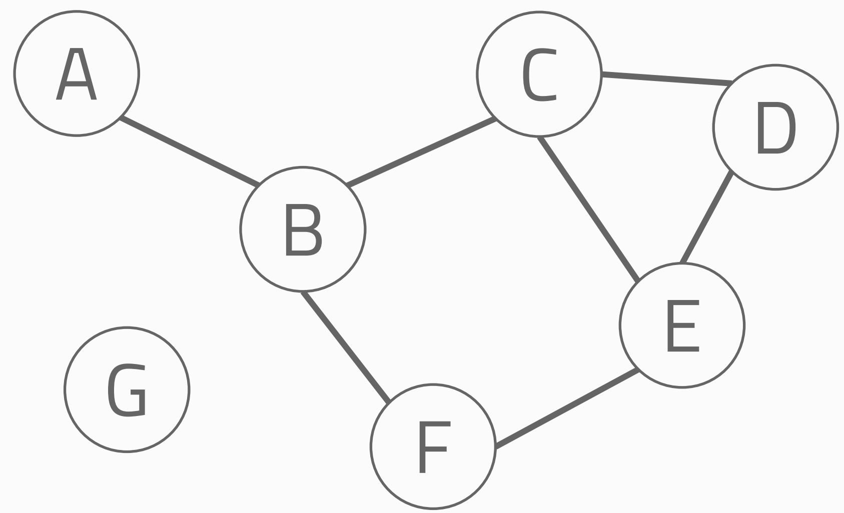
- un ensemble V de *sommets (Vertices)*
- un ensemble E d'*arêtes (Edges)*, qui sont des *paires de sommets*

Notation : G = (V, E)

Généralement, on note :

- $|V|$ ou n le nombre de sommets (ou *ordre* du graphe)
- $|E|$ ou m le nombre d'arêtes (ou *taille* du graphe)

Représentation visuelle



$V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ $|V| = n = 7$

$E = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{F, B\}, \{F, E\}, \{D, E\}, \{C, E\}\}$ $|E| = m = 7$

Rem. : les arêtes n'ont pas besoin d'être des *segments* ; ce peuvent être des courbes, des serpentins, etc.

Définitions

Voisins ou *sommets adjacents* : deux sommets reliés par une arête

ex : A et B sont voisins, mais G et D ne sont pas voisins

Voisinage d'un sommet : ensemble de ses voisins

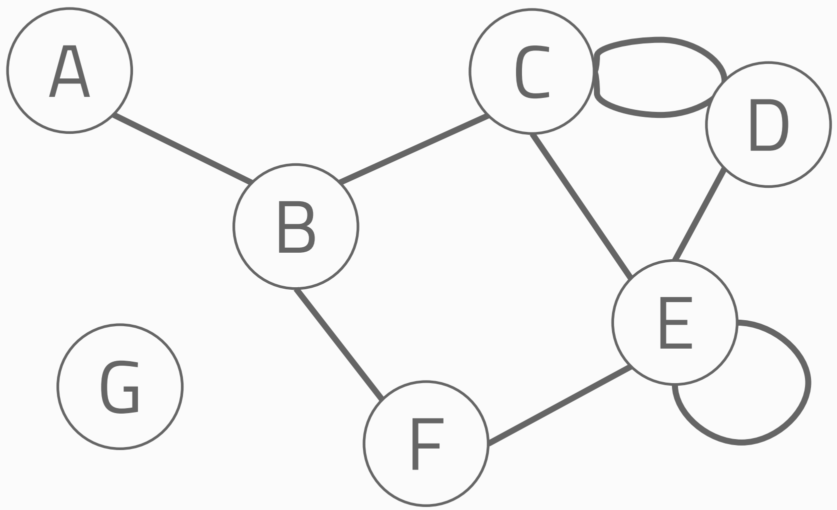
ex : N(B) = {A, C, F}

Degré d'un sommet : nombre de voisins

ex : d(B) = 3

Sommet (im)pair : sommet de degré (im)pair

ex : B est impair, et C est pair



Définitions

Sommet *isolé* : sommet sans voisin / de degré 0

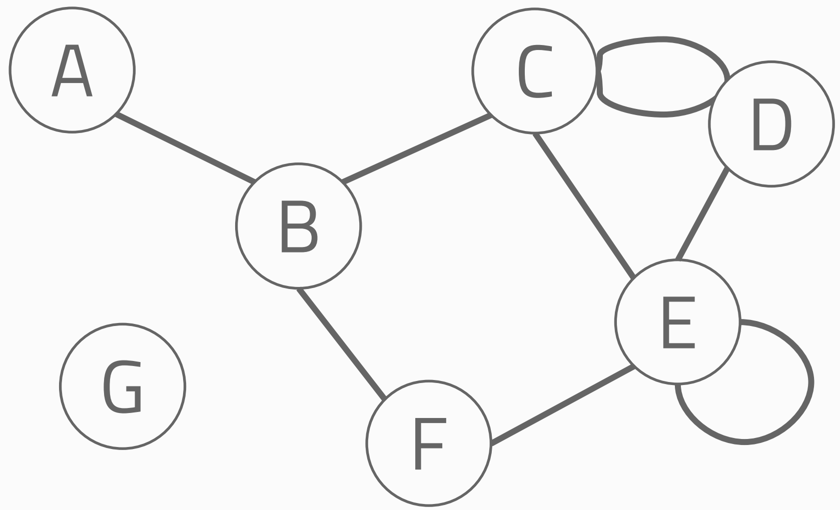
ex : G est un sommet isolé

Boucle : arête d'un sommet vers lui-même

ex : l'arête {E, E} est une boucle

Arêtes *multiples* ou *parallèles* : arête qui joignent les mêmes sommets

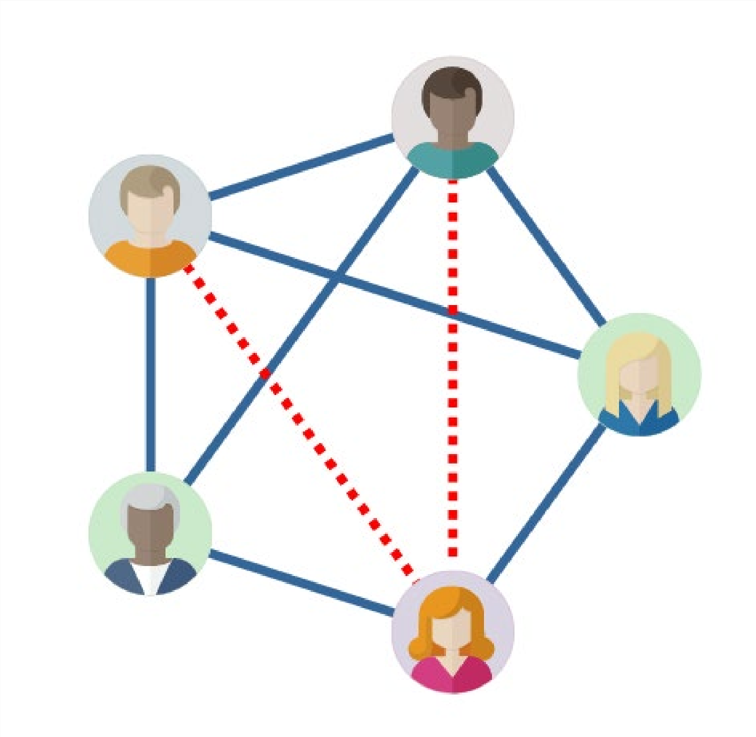
ex : arêtes {C, D}



Enigme n°1

Dans un groupe de 5 personnes, chacune est amie avec 3 autres de ce groupe sur Facebook.

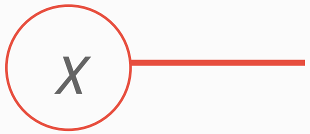
Dessiner le « graphe d'amitié » correspondant.



Impossible ?

Lemme des poignées de mains

Combien y a-t-il de « demi-arêtes » dans un graphe ?



- il y en a 2 x le nb d'arêtes : 2 x |E|
- mais aussi autant que le total des degrés du graphe

Donc

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

la somme des degrés est égale à deux fois le nombre d'arêtes

Or,

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \text{ pair}} d(v) + \sum_{v \text{ impair}} d(v)$$

Nombre pair

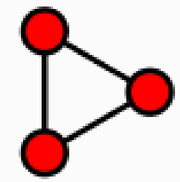
Nombre pair

Conséquence (*lemme des poignées de mains*) :

Dans tout graphe, il y a un nombre *pair* de sommets impairs

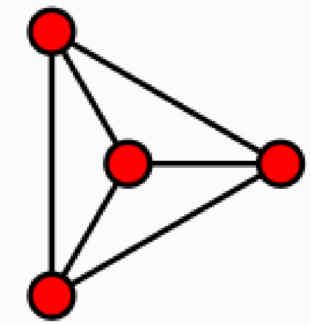
Quelques graphes particuliers

Graphe *k-régulier* : tous les sommets sont de degré k



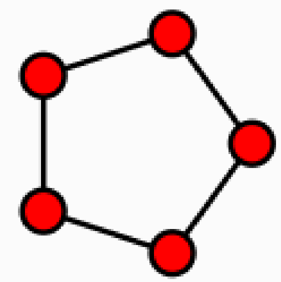
Graphe *complet* K_n : chacun des n sommets est adjacent à tous les autres

Rem. : K_n est (n-1)-régulier



Graphe *Chaîne* P_n :

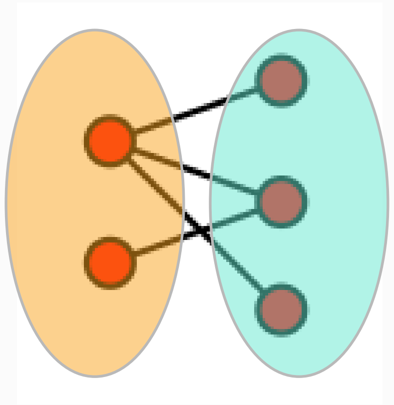
Graphe *Cycle* C_n :



Cycle (im)pair : contient un nombre (im)pair de sommets / d'arêtes

Quelques graphes particuliers

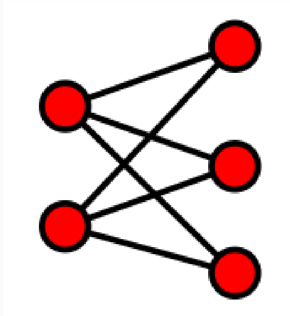
Graphe *biparti* : on peut séparer V en V_1 et V_2 t.q. toute arête joint un sommet de V_1 à un sommet de V_2



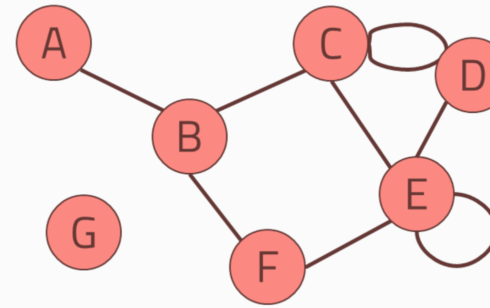
Prop. : un graphe est biparti ssi il ne contient pas de cycle impair

Graphe *biparti complet* $K_{m,n}$: les m sommets de V_1 sont adjacents aux n sommets de V_2

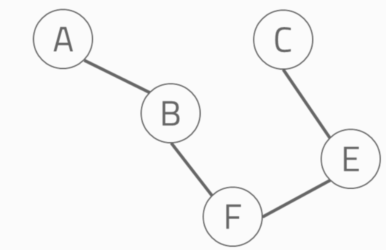
⚠ m *et* n ne désignent pas ici la taille / l'ordre du graphe !



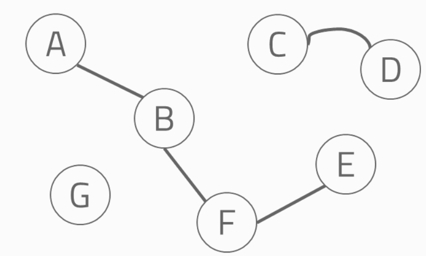
Sous-graphes



Sous-graphe (partiel) : graphe obtenu en supprimant des sommets et / ou des arêtes

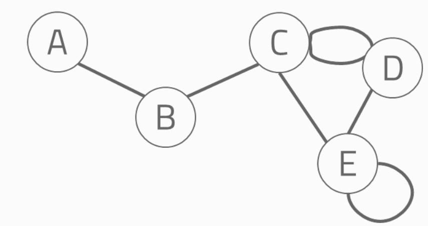


Sous-graphe couvrant : suppression d'arêtes uniquement



Sous-graphe induit (par un ensemble de sommets W) :

graphe obtenu en supprimant tous les sommets de $V \backslash W$ et toutes leurs arêtes



G [{A, B, C, D, E}]

Clique : sous-graphe complet : {C, D, E} est une clique de taille 3

On note $\omega(G)$: taille de la plus grande clique

Stable : sous-graphe sans arête : {A, G, C, F} est un stable de taille 4

On note $\alpha(G)$: taille du plus grand stable

Chaînes et cycles dans un graphe

Chaîne ou *chemin* ou *marche* ou *parcours* : succession d'arêtes adjacentes

ex : {A, B}, {B, C}, {C, B}, {B, F}, {F, E} ; on note : A - B - C - B - F - E

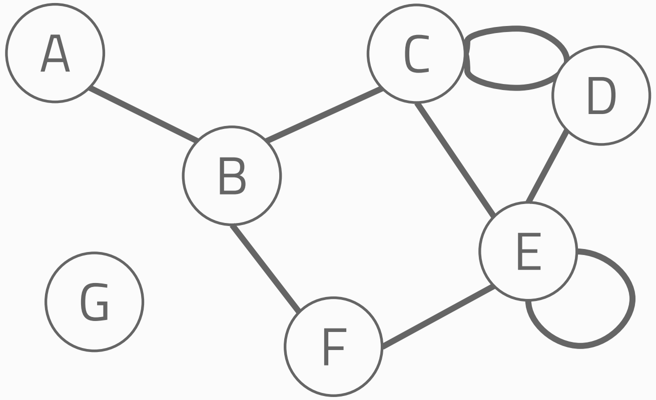
Chaîne simple : ne passe pas deux fois par une même arête

ex : A - B - C - E – D - C

Chaîne élémentaire : ne passe pas deux fois par un même sommet

ex : A - B - C - E – D

Une chaîne élémentaire est forcément simple



Cycle : chaîne dont les deux extrémités sont identiques

(on définit de la même façon un cycle simple ou élémentaire)

ex : B - F - E – C - B

Longueur d'une chaîne / cycle : nombre d'arêtes qu'il/elle contient

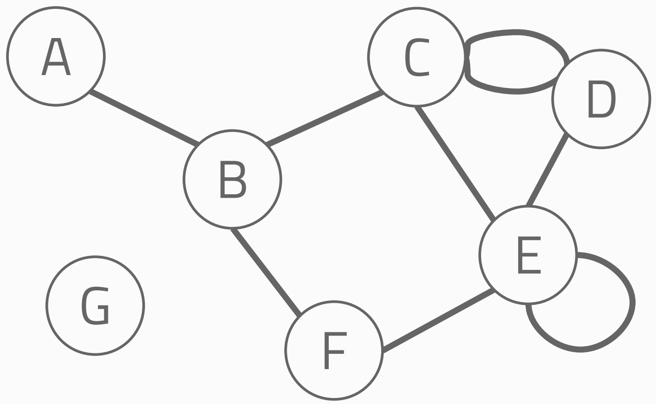
Connexité

Intuitivement, un graphe est *connexe* s'il est en « un seul morceau »

Plus formellement, un graphe est connexe si toute paire de sommets est liée par une chaîne (i.e. on peut atteindre n'importe quel sommet depuis n'importe quel autre)

Composante connexe : sous-graphe connexe maximal (i.e. n'est pas contenu dans un sous-graphe connexe)

Visuellement, les « morceaux » du graphe



Exemple : deux composantes connexes :

- {A, B, C, D, E, F}
- {G}

G est connexe ssi il a une seule composante connexe

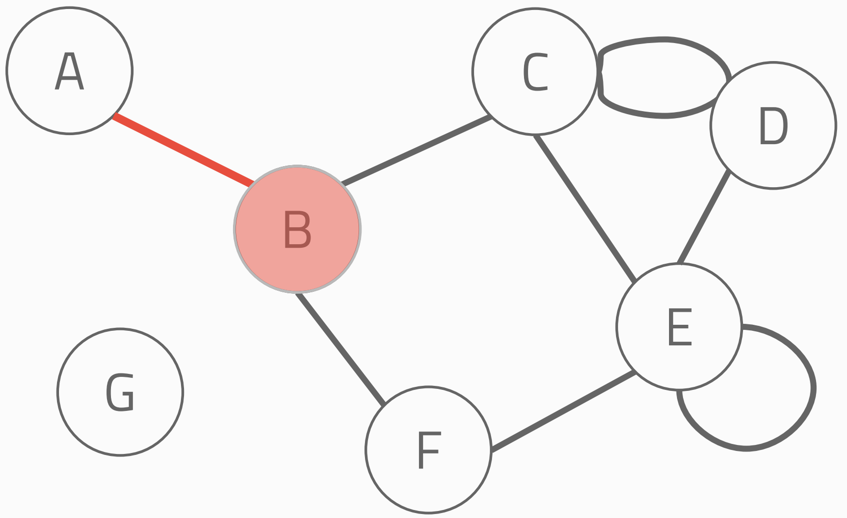
Connexité

Sommet d'articulation : *sommet* dont la suppression déconnecte le graphe (i.e. augmente le nombre de composantes connexes)

Isthme : *arête* dont la suppression déconnecte le graphe

Exemple : dans le graphe ci-contre :

- les sommets d'articulation sont : B
- les isthmes sont : {A,B}

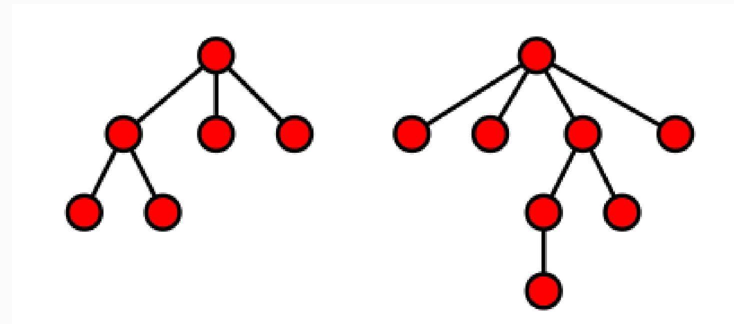


« Points faibles » du graphe

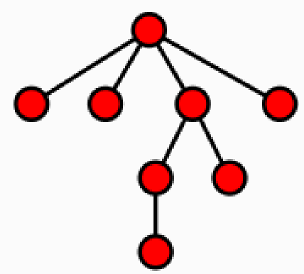
⇒ applications en réseau, en logistique, militaire…

Arbres

Forêt : graphe sans cycle



Arbre : graphe connexe et sans cycle

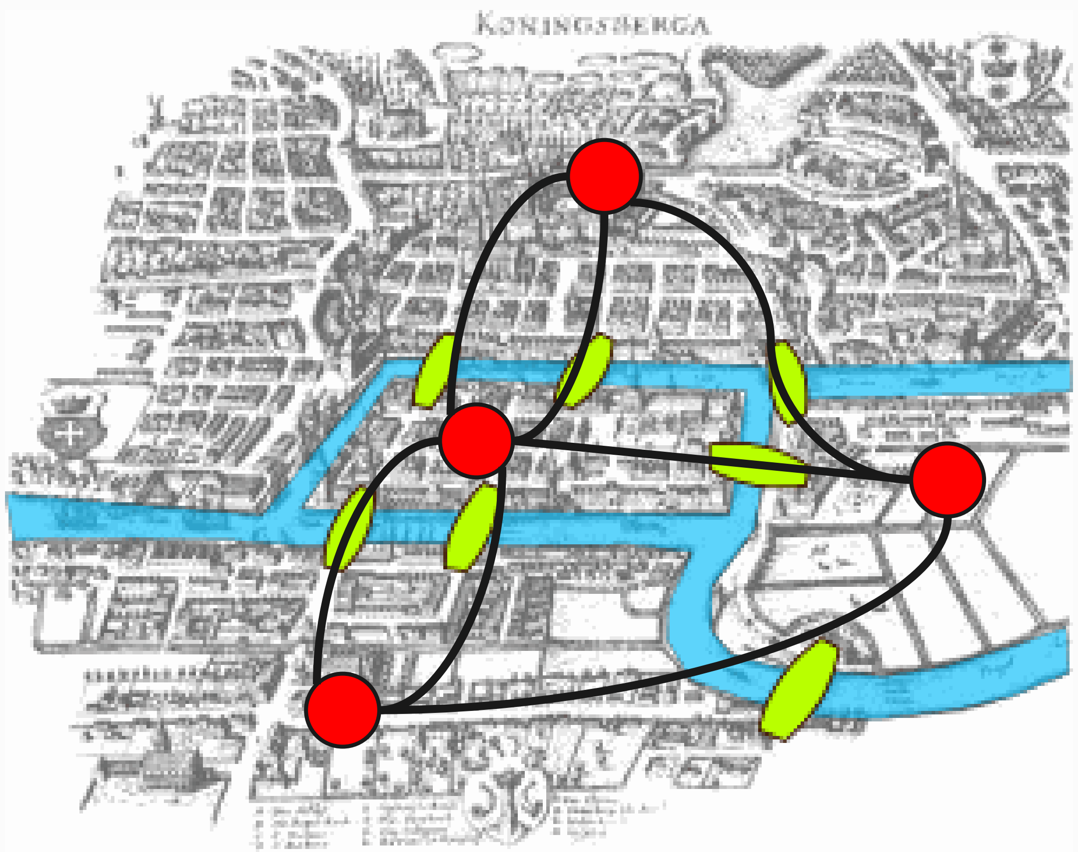


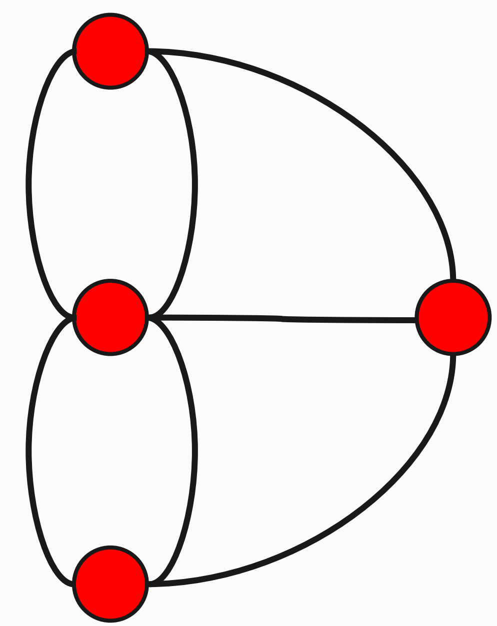
G est un arbre

- ssi il est connexe ou sans cycle et possède (n-1) arêtes
- ssi il est connexe ou sans cycle et l'ajout d'une arête crée un unique cycle
- ssi la suppression de toute arête déconnecte le graphe

Enigme n°2

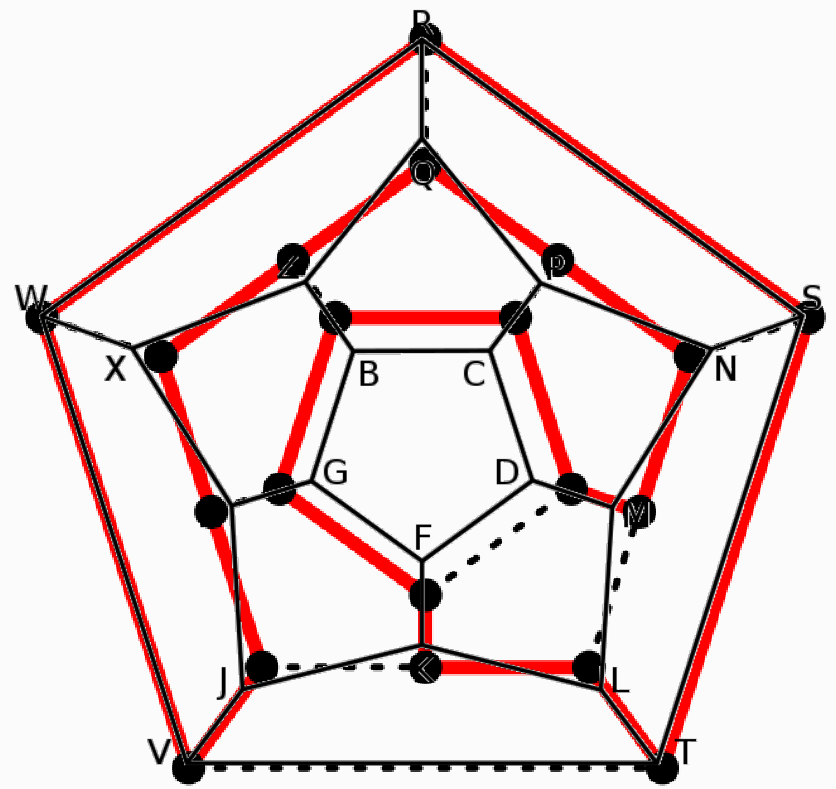
Problème des ponts de Königsberg (Euler, 1736) : est-il possible de traverser une seule fois chaque pont et revenir à son point de départ ?





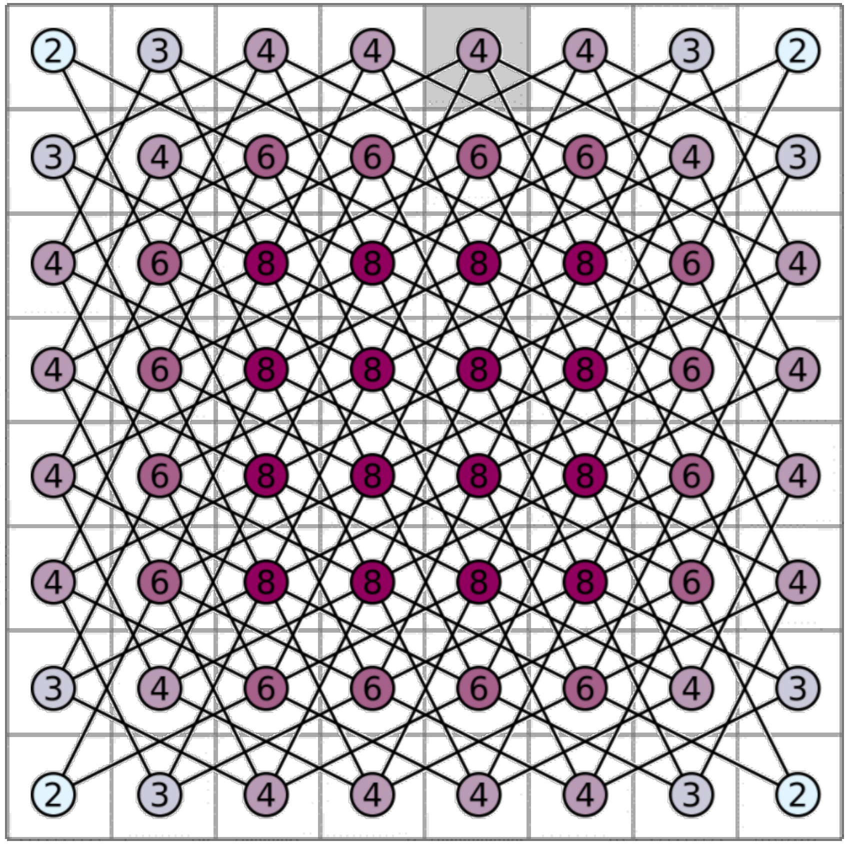
Enigme n°3

Problème du tour du monde de Hamilton : est-il possible de tracer un cycle passant une seule fois par chaque sommet ?



Enigme n°4

Problème du cavalier : est-il possible de passer une seule fois par toutes les cases d'un échiquier en suivant les mouvements d'un cavalier ?



Graphes eulériens et hamiltoniens

Un *chemin* (resp. cycle) *eulérien* est un chemin (resp. cycle) qui passe une seule fois par chaque arête

Un graphe est *eulérien* s'il contient un cycle eulérien

Propriété : un graphe est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont pairs

Un *chemin* (resp. cycle) *hamiltonien* est un chemin (resp. cycle) qui passe une seule fois par chaque sommet

Un graphe est *hamiltonien* s'il contient un cycle hamiltonien

Prouver qu'un graphe est hamiltonien peut être difficile (problème « NP-complet »);

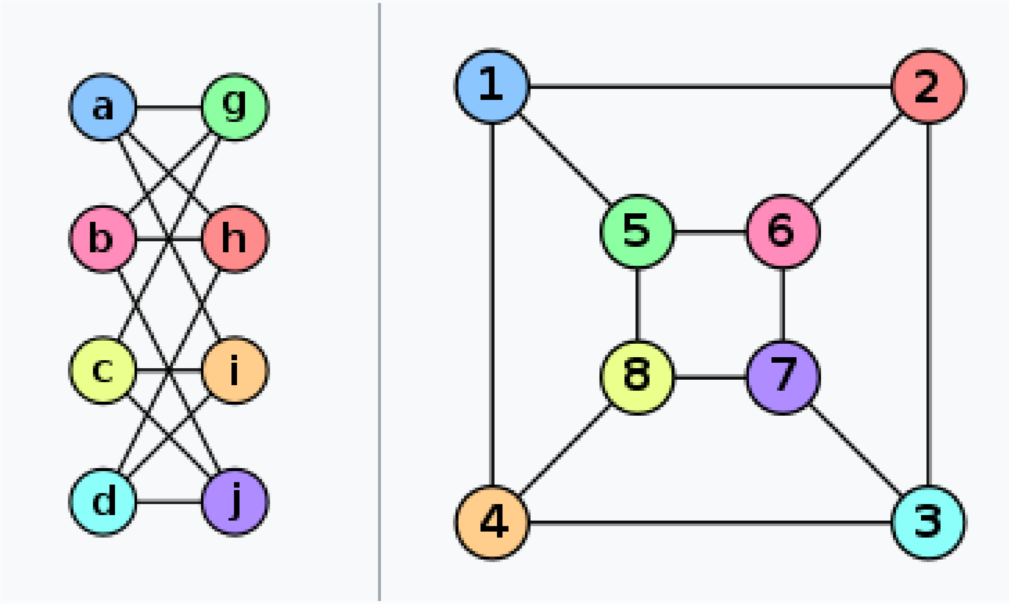
Applications : problème du postier chinois, problème du voyageur de commerce, reconstruction de séquences d'ADN…

Graphes isomorphes

Deux graphes sont *isomorphes* si on peut déplacer les sommets de l'un pour obtenir la copie conforme de l'autre

Plus formellement, G=(V, E) et H=(V', E') sont isomorphes s'il existe une bijection f entre V et V' telle que $\{u, v\} \in E$ ssi $\{f(u), f(v)\} \in E'$.

Exemple :

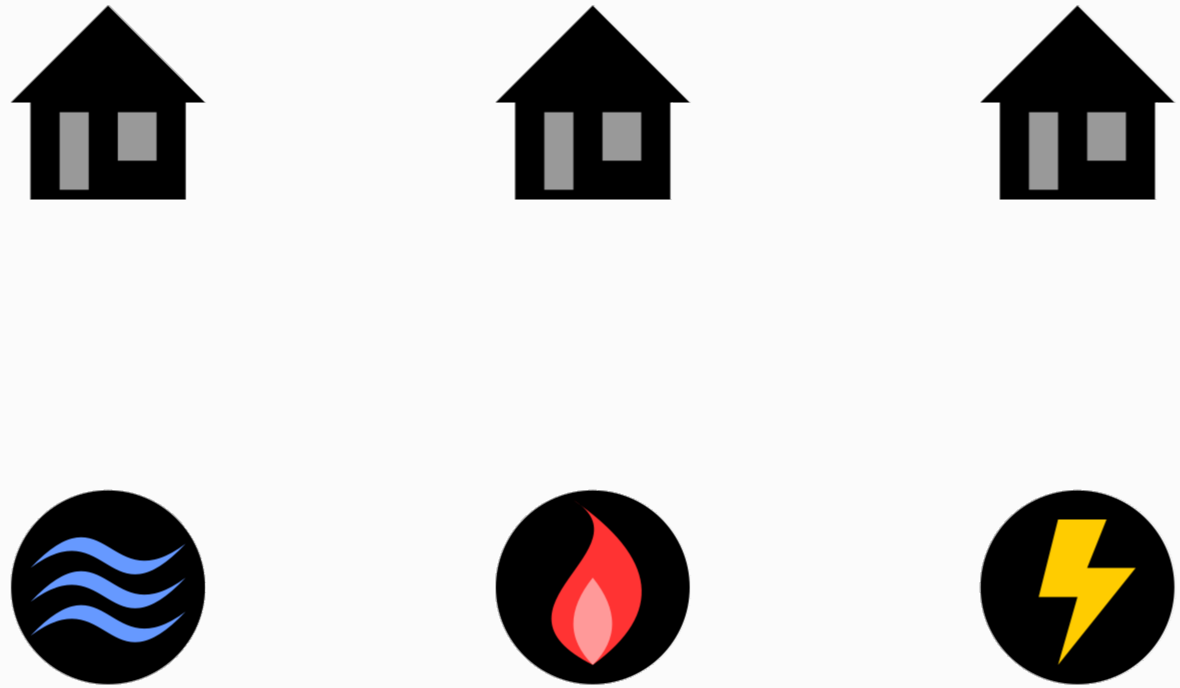


f(a) = 1
f(b) = 6
f(c) = 8
f(d) = 3

f(g) = 5
f(h) = 2
f(i) = 4
f(j) = 7

Enigme n°5

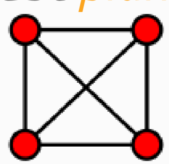
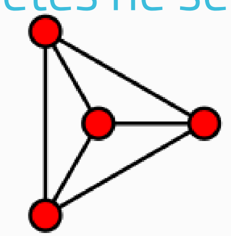
Enigme des trois maisons : peut-on relier trois maisons aux services d'eau, gaz et électricité sans que les canalisations ne se croisent ?

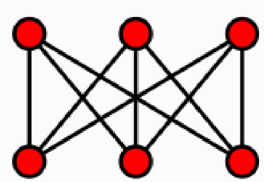
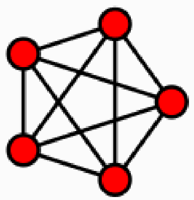


Graphes planaires

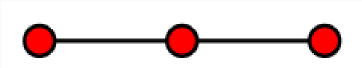
L'énigme des trois maisons consiste à déterminer si le graphe $K_{3,3}$ est *planaire*

Un graphe est *planaire* si on peut le dessiner dans le plan sans que deux arêtes ne se croisent

Ex.: K_4  est planaire : on peut le redessiner sans croisement : 

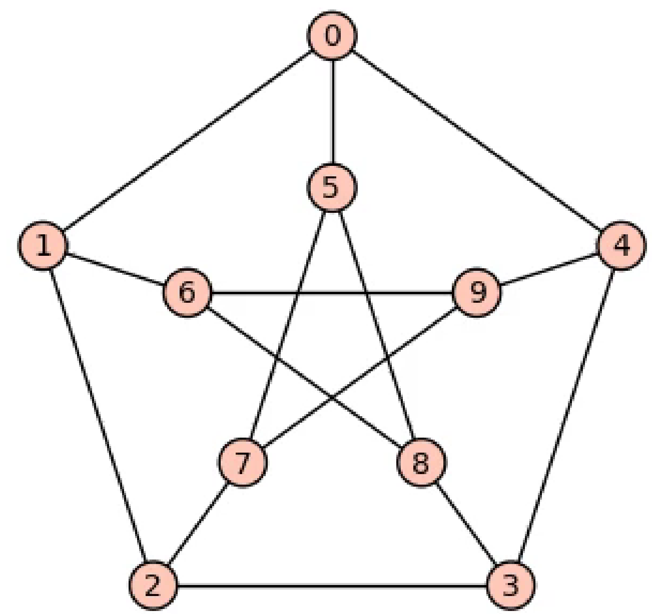
Théorème de Kuratowski : un graphe est planaire ssi il ne contient pas de sous-graphe qui est une *subdivision* des graphes $K_{3,3}$  ou K_5 

Une subdivision s'obtient en rajoutant des sommets sur des arêtes :

 $\Rightarrow$ 

Enigme n°6

Le graphe ci-dessous est-il planaire ?



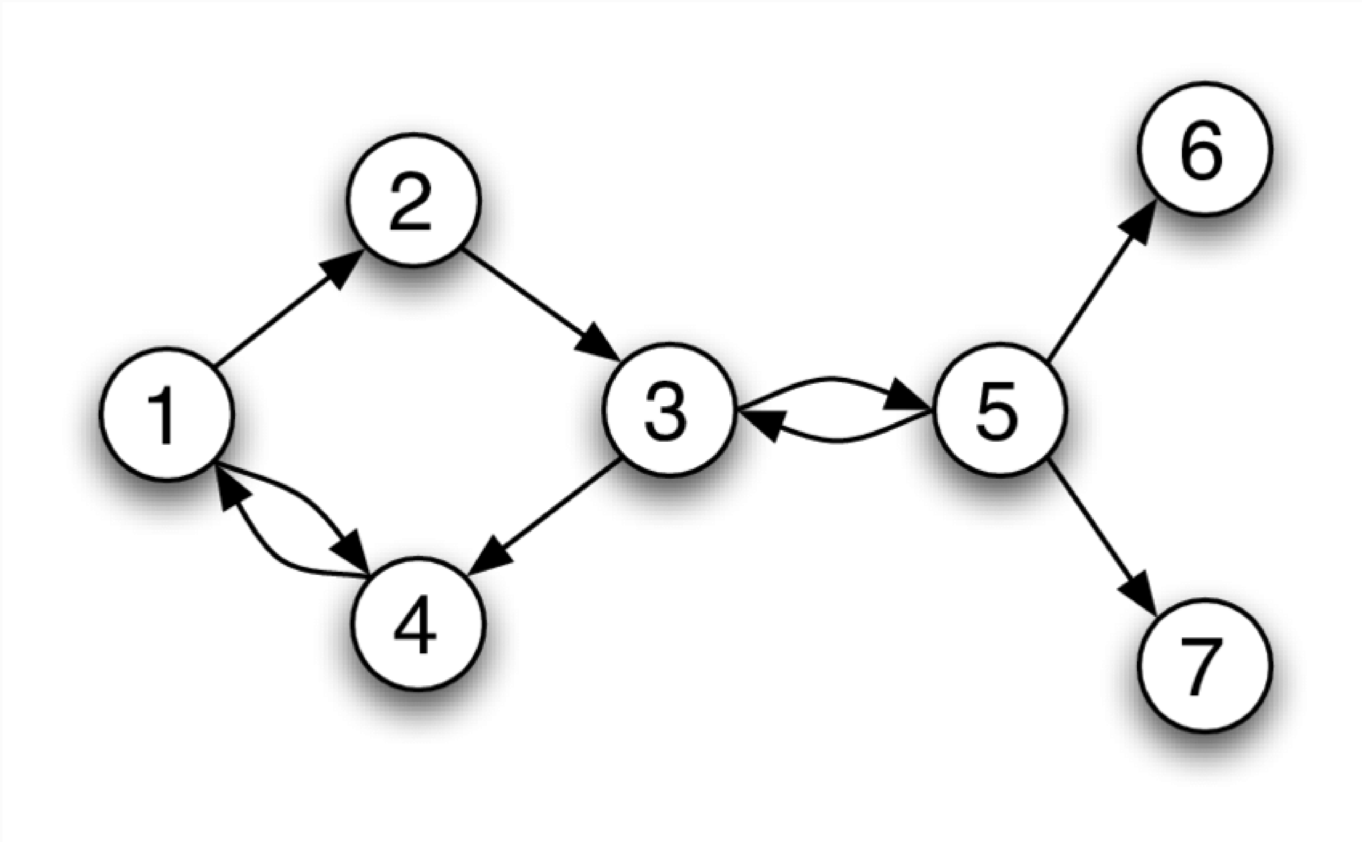
Applications des graphes planaires :

- conception de circuits intégrés
- conception de plan de lignes de métro
- …

Graphes orientés

Dans certains cas, on *oriente* les arêtes, pour signifier une relation *unilatérale*

- *« ancêtre de »*
- *« supérieur à »*
- *« route à sens unique »*
- *…*



Graphes orientés

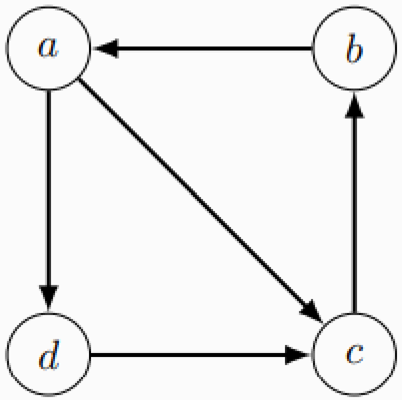
Le vocabulaire est un peu différent :

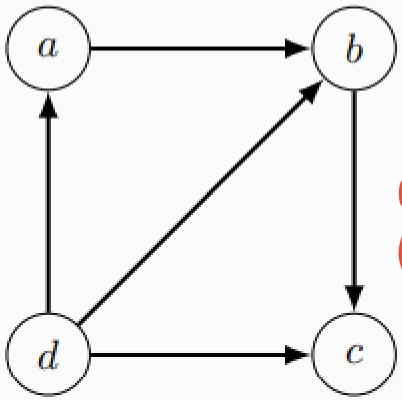
<table>
<tr><th>Graphe non orienté</th><th>Graphe orienté</th></tr>
<tr><td>Arête : paire {u,v} (= paire {v,u})</td><td>Arc : couple (u,v) (≠ couple (v,u) !!)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Voisins</td><td>Prédécesseurs</td></tr>
<tr><td>Successeurs</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Degré</td><td>Degré entrant</td></tr>
<tr><td>Degré sortant</td></tr>
<tr><td>Chaîne</td><td>Chemin (suite d’arcs orientés dans le même sens)</td></tr>
<tr><td>Cycle</td><td>Circuit (= chemin fermé)</td></tr>
</table>

Connexité (graphes orientés)

Un graphe est *fortement connexe* s'il existe un chemin entre toute paire de sommets

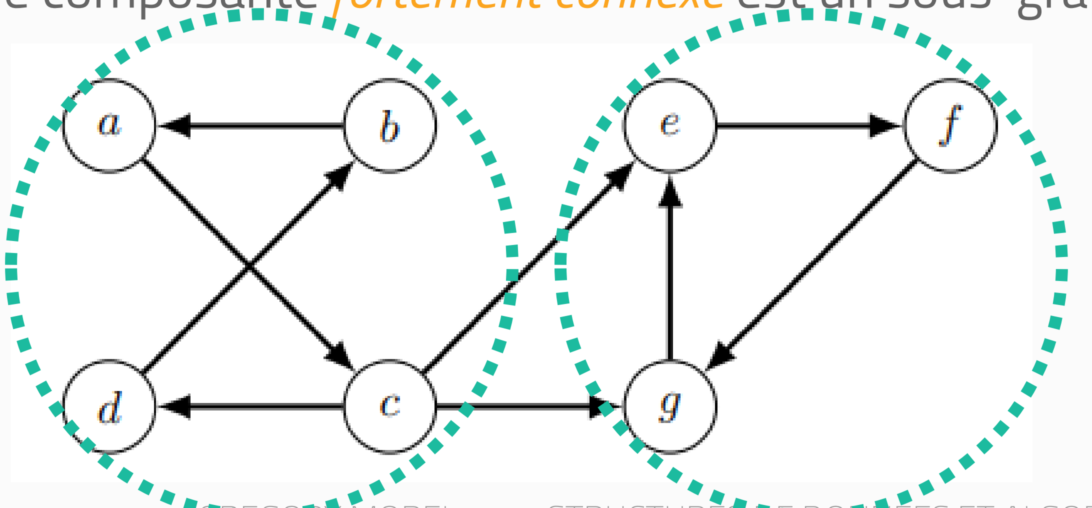
Graphe fortement connexe





Graphe non fortement connexe
(d n'est pas atteignable)

Une composante *fortement connexe* est un sous-graphe fortement connexe maximal



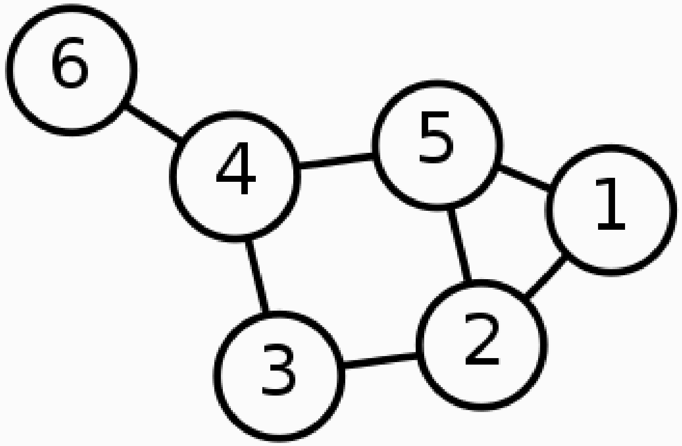
2 composantes fortement connexes
MAIS graphe non fortement connexe

Représentation de graphes en machine

Il existe plusieurs moyens de représenter un graphe en machine :

- Liste d'arêtes

  {{4,6}, {3,4}, {5,2}, {1,5}, {2,1}, {4,5}, {3,2}}



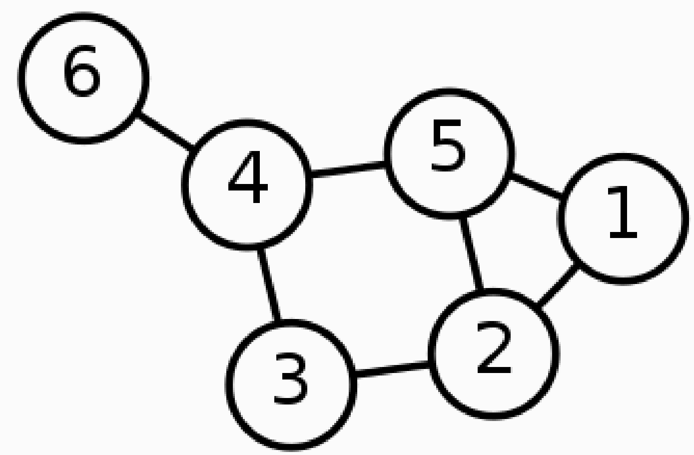
✓ Simple, compact

✕ Mais pas efficace pour tester si deux sommets sont adjacents, ou trouver les voisins d'un sommet

Représentation de graphes en machine

- Liste d'adjacences

1 →	2	5	
2 →	1	3	5
3 →	2	4	
4 →	3	5	6
5 →	1	2	4
6 →	4		



✓ Compact, efficace pour connaître tous les voisins d'un sommet

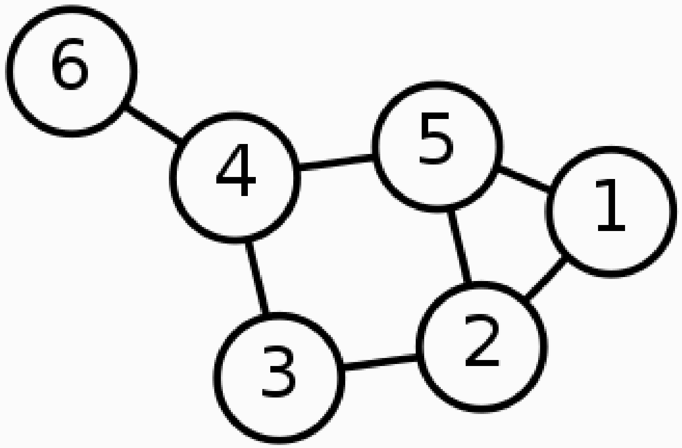
✗ Pas efficace pour tester si deux sommets sont adjacents

(il faut potentiellement parcourir toute une liste)

Représentation de graphes en machine

- Matrice d’adjacence (sommets / sommets)

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	1	0
2	1	0	1	0	1	0
3	0	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	1	1
5	1	1	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0	0



Rem. : la matrice d’adjacence d’un graphe non orienté est symétrique

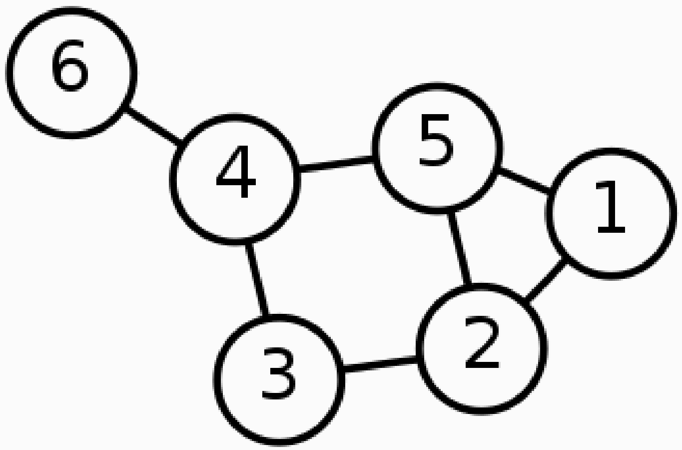
✓ Efficace pour savoir si deux sommets sont voisins, ou connaître tous les voisins d’un sommet

✗ Matrice souvent « creuse » ; très gourmand en espace mémoire !! ($O(n^2)$)

Représentation de graphes en machine

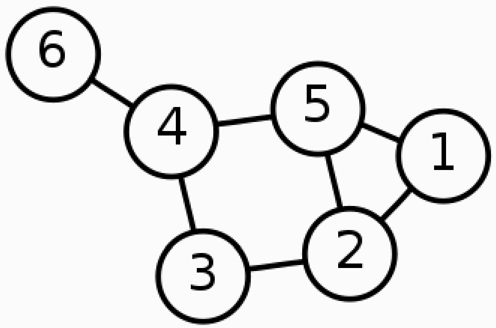
- Matrice d'incidence (sommets / arêtes)

	{1,2}	{1,5}	{2,3}	{2,5}	{3,4}	{4,5}	{4,6}
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0
3	0	0	1	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	1	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	1



Applications en mathématiques, en physique…

Propriétés de la matrice d'adjacence



0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0

A

0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0

A

✖ ✖

0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0

A

2	1	1	1	1	0
1	3	0	2	1	0
1	0	2	0	2	1
1	2	0	3	0	0
1	1	2	0	3	1
0	0	1	0	1	1

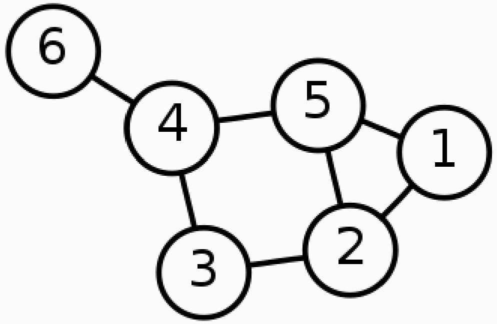
A^2

2	4	2	2	4	1
4	2	5	1	6	2
2	5	0	5	1	0
2	1	5	0	6	3
4	6	1	6	2	0
1	2	0	3	0	0

A^3

Propriétés de la matrice d'adjacence

Prop. : le coefficient $A^k_{i,j}$ de la matrice A^k est le nombre de chaînes / chemins de longueur k joignant i à j



2	4	2	2	4	1
4	2	5	1	6	2
2	5	0	5	1	0
2	1	5	0	6	3
4	6	1	6	2	0
1	2	0	3	0	0

A^3

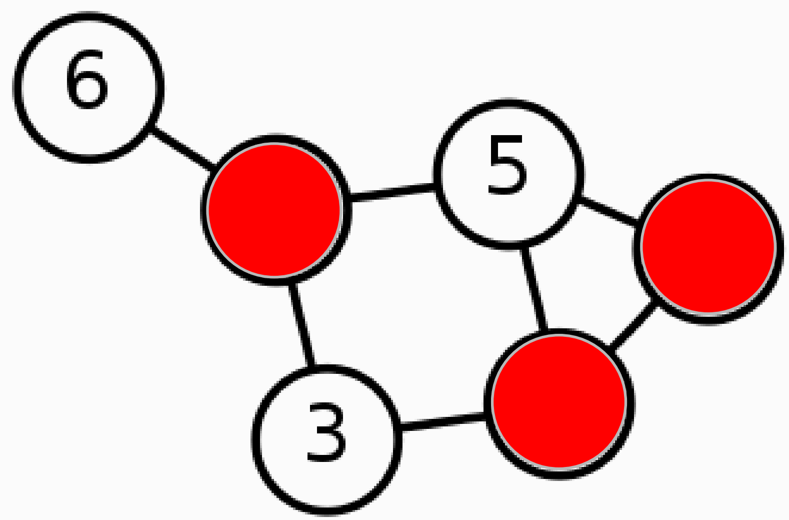
Ex. : $A^3_{1,5} = 4$: il y a 4 chaînes de longueur 3 joignant les sommets 1 et 5 :

- 1 – 5 – 1 – 5
- 1 – 2 – 1 – 5
- 1 – 5 – 4 – 5
- 1 – 5 – 2 – 5

Autres applications importantes en mathématiques, en informatique (algorithme PageRank de Google…), en gestion de vols aériens…

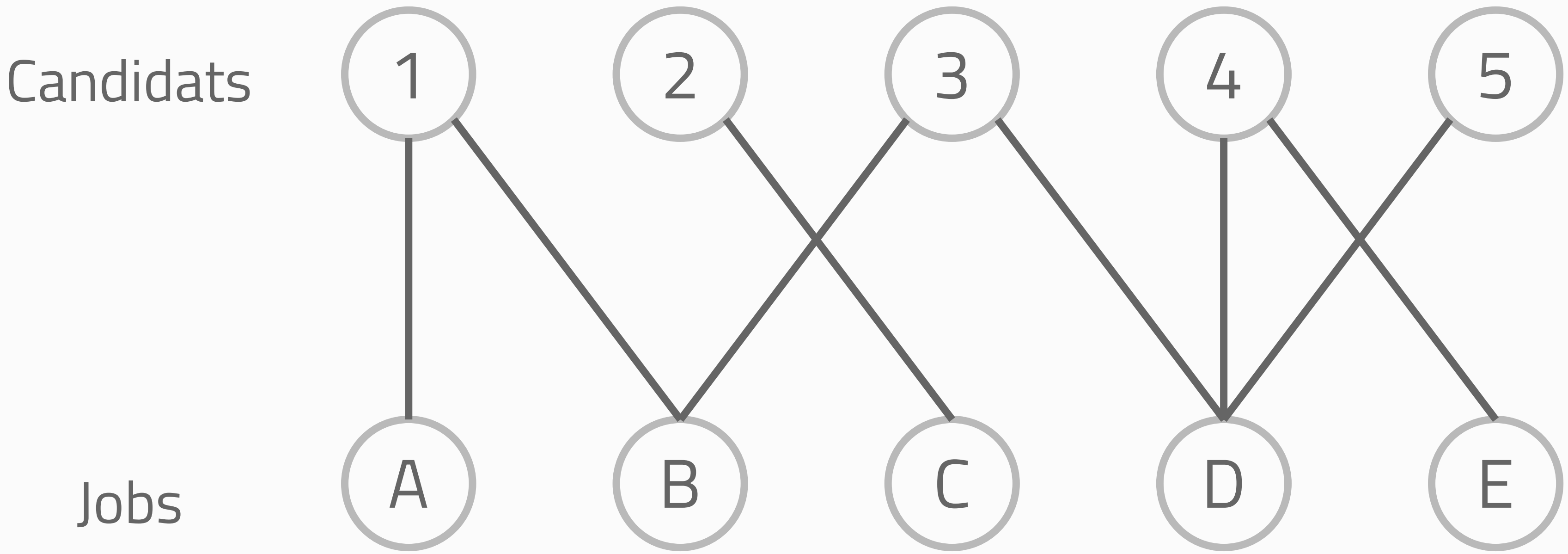
Enigme n°7

Le graphe ci-dessous représente le plan d’un musée ; les arêtes sont les couloirs et les sommets sont les intersections. Combien et où faut-il placer au minimum (afin de minimiser les coûts !) de caméras 360° pour surveiller tous les couloirs ?



Enigme n°8

5 candidats ont passé avec succès des tests pour accéder à 5 jobs. Comment affecter les jobs aux candidats de manière à ce que le maximum de candidats soient satisfaits ?



Couvertures et empaquetages

De nombreux problèmes d'optimisation se modélisent sous la forme de problèmes de *couvertures* *(covering problems)* ou d'*empaquetages* *(packing problems)* de graphes

- Problème de couvertures :

On cherche à couvrir tous les sommets ou arêtes du graphe avec le minimum d'éléments (des sommets, des arêtes…)

- Problèmes d'empaquetages :

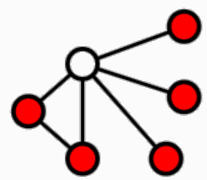
On cherche le plus grand nombre d'éléments vérifiant une propriété commune (par exemple : des sommets adjacents, des sommets non adjacents…)

Couvertures et empaquetages

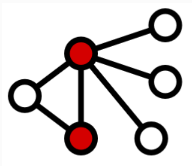
Transversal : couverture des arêtes du graphe par des sommets (exemple : énigme du musée)

un transversal est *minimal* si, lorsqu'on lui enlève n'importe quel sommet, ce n'est plus un transversal

un transversal est *minimum* si c'est un plus petit transversal possible



Transversal minimal

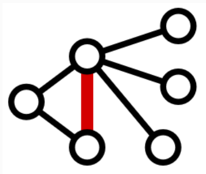


Transversal minimum

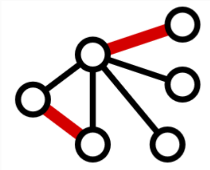
Couplage : ensemble d'arêtes sans sommet commun (exemple : énigme des jobs)

un couplage est *maximal* si, lorsqu'on lui ajoute n'importe quelle arête, ce n'est plus un couplage

un couplage est *maximum* si c'est un plus grand couplage possible



Couplage maximal

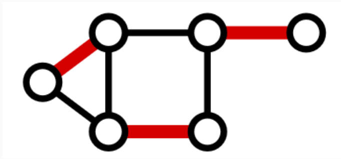


Couplage maximum

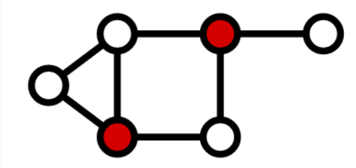
Couvertures et empaquetages

D'autres types de couvertures / empaquetages :

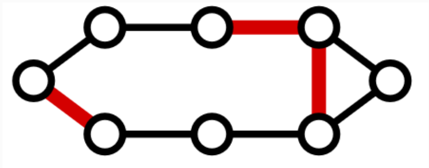
Couverture par arêtes : couverture des sommets du graphe par des arêtes



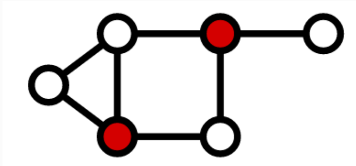
Dominant : couverture des sommets du graphe par des sommets



Arête-dominant : couverture des arêtes du graphe par des arêtes

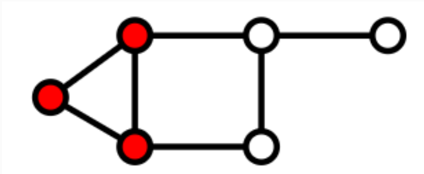


Stable : ensemble de sommets deux-à-deux non adjacents



= complémentaire d'un transversal !

Clique : ensemble de sommets deux-à-deux adjacents



Couvertures et empaquetages

Quelques propriétés importantes :

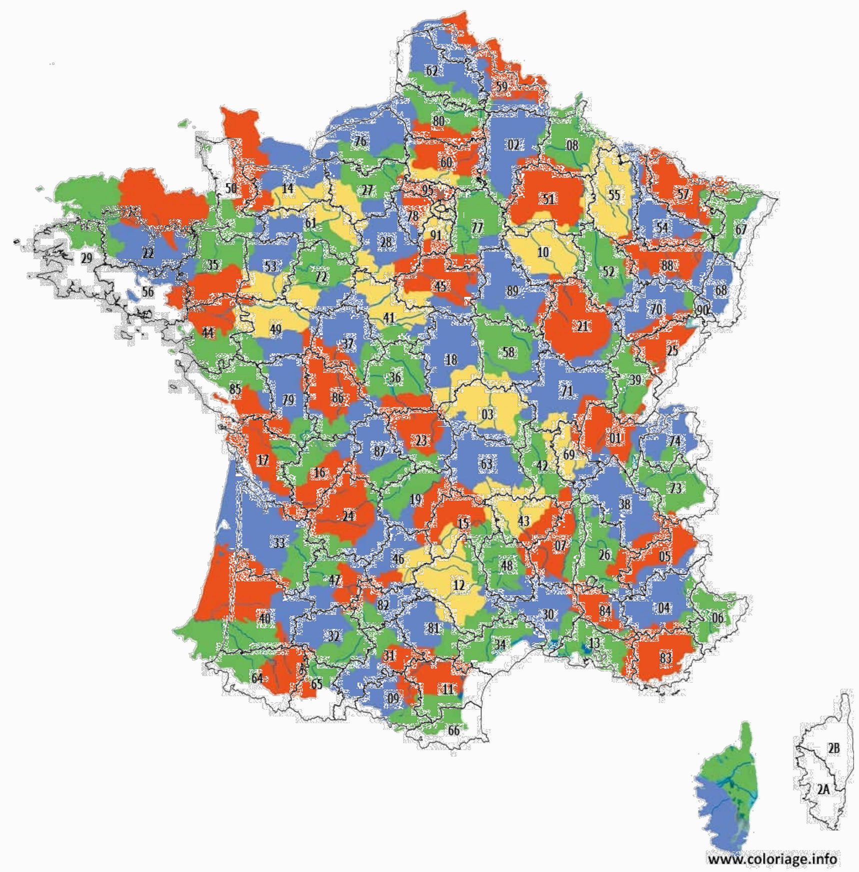
- Théorèmes de Gallai (1959) : dans tout graphe simple (= sans boucle ni arête multiple)
  - Taille d'un stable maximum + taille d'un transversal minimum = | V |
  - Taille d'un couplage maximum + taille d'une couverture par arête minimum = | V |

- Théorèmes de Kőnig (1931) : dans tout graphe *biparti*

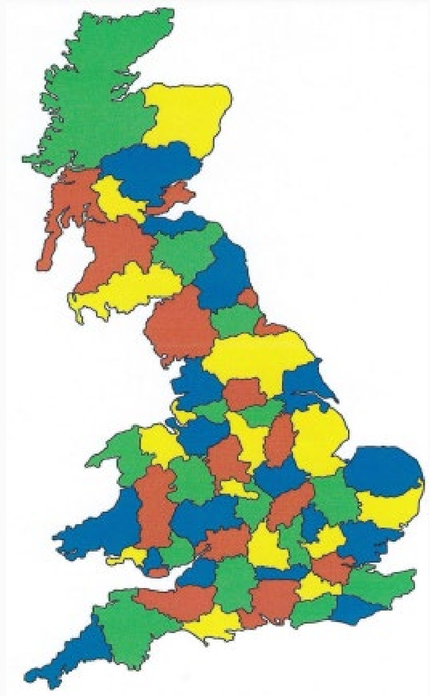
  Taille d'un couplage maximum = taille d'un transversal minimum

Enigme n°9

Combien de couleurs suffisent pour colorier la carte des départements français, de sorte que deux départements frontaliers soient de couleur différente ?



Colorations



1856 : Francis Guthrie remarque qu'il est possible de colorier la carte des régions d'Angleterre avec seulement 4 couleurs ⇒ est-ce vrai pour *toute* carte ?

1879 : Alfred Kempe prouve que c'est possible !

1880 : Peter Guthrie Tait prouve aussi que c'est possible !

...

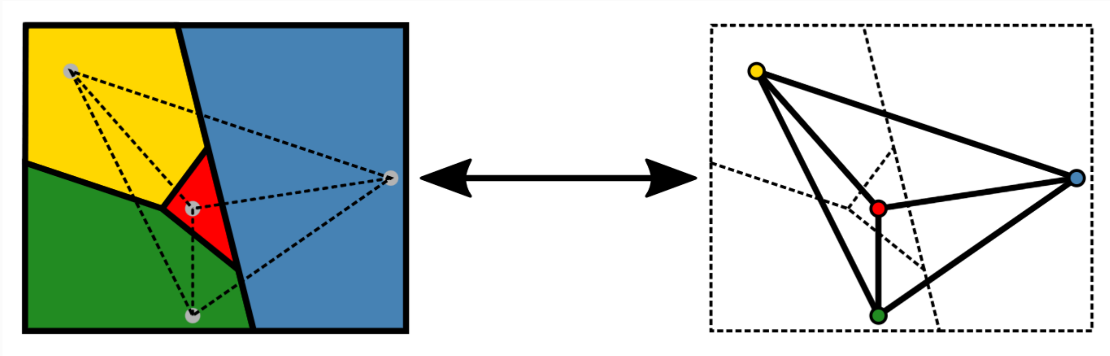
1890 : on découvre que la preuve de Kempe est incorrecte...

1891 : on découvre que la preuve de Tait est aussi incorrecte !

Alors... la « conjecture des quatre couleurs » est-elle vraie ou fausse ??

Colorations

- 4 couleurs sont nécessaires pour colorier une carte :



- Théorème des cinq couleurs (Heawood, 1891) : 5 couleurs suffisent pour colorier une carte

- *Théorème* des quatre couleurs (Appel & Haken, 1976) : 4 couleurs suffisent pour colorier une carte

Très controversé à l'époque, car première fois qu'une preuve mathématique utilisait un ordinateur !

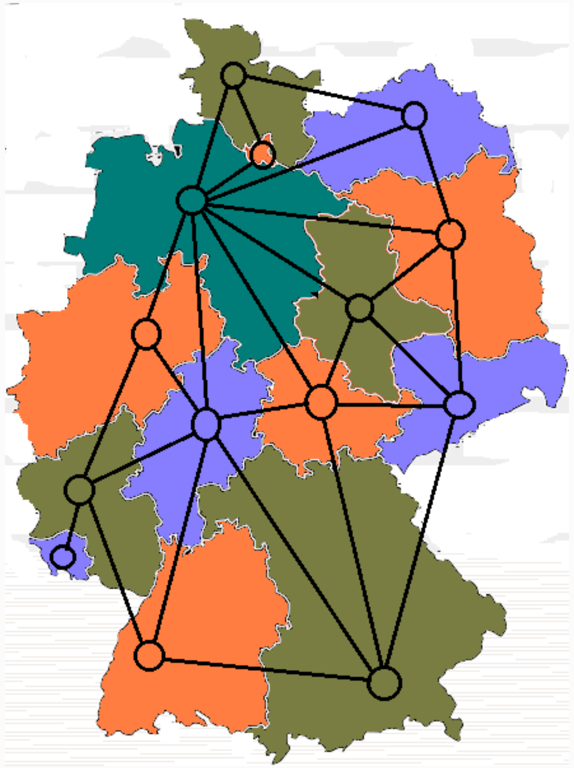
(reprouvé plusieurs fois depuis, mais toujours à l'aide d'un ordinateur)

Colorations

Reformulation à l'aide de graphes :

- un sommet par région
- une arête entre deux régions frontalières (pas de régions enclavées)

⇒ le graphe obtenu est *planaire et simple*



Une *coloration* est une fonction c qui attribue à chaque sommet une couleur de sorte que deux sommets adjacents ont des couleurs distinctes :

$$\{u, v\} \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$$

Nombre chromatique $\chi(G)$: plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier les sommet de G

Théorème des 4 couleurs : pour tout graphe planaire simple G, $\chi(G) \leq 4$

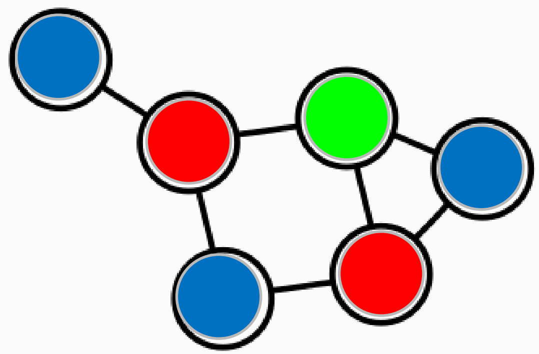
(on dit aussi que G est « 4-colorable »)

Colorations

Chaque couleur est un stable

Une coloration est donc une *partition* de V en stables

Rappel : une partition d'un ensemble E est un « découpage » en sous-ensemble non vides, deux-à-deux disjoints, et dont l'union est égale à E



Prop. (évidente) : pour tout graphe G, $\chi(G) \geq \omega(G)$ (rappel : $\omega(G)$: taille de la plus grande clique de G)

Théorème (Brooks) : pour tout graphe G, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ ($\Delta(G)$: degré maximum de G)

Et même : si G n'est ni un graphe complet ni un cycle impair, $\chi(G) \leq \Delta(G)$