

LPHYS1303: Exercice d'Examen: le Soliton

2020-2021

L'équation de Korteweg et Devries 1895 gouverne l'évolution de la hauteur (ici notée u) d'un fluide peu profond en fonction du temps, en tenant compte des effets d'avection, de gradient de pression (dérivée première dans l'espace) et de dissipation visqueuse (dérivée troisième). On peut montrer que lors que l'onde voyage dans la direction des x croissants, l'équation s'exprime sous la forme suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (1)$$

Une particularité de cette équation est qu'elle admet des solutions sous la forme de solitons. Plus précisément, la vitesse d'un paquet d'onde augmente avec sa hauteur, et deux solitons peuvent interagir sans se détruire, si bien qu'un paquet peut dépasser l'autre sans qu'aucun des deux ne perde son identité.

L'objet du travail est d'illustrer ce phénomène. Un problème est de trouver un schéma numérique qui ne présente pas trop de dissipation numérique.

Le terme soliton a été inventé par Zabusky et Kruskal [1], qui ont proposé le schéma suivant.

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} = & u_{i,j-1} - \frac{1}{3} \frac{k}{h} (u_{i+1,j} + u_{i,j} + u_{i-1,j})(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \\ & - \delta^2 \frac{k}{h^3} (u_{i+2,j} - 2u_{i+1,j} + 2u_{i-1,j} - u_{i-2,j}) \end{aligned} \quad (2)$$

Il s'agit d'un schéma leap-frog, d'ordre 2 dans le temps.

Shahrill et al. [2] compare ce schéma à plusieurs autres schémas numériques, dont le schéma upwind et le schéma Lax Wendroff.

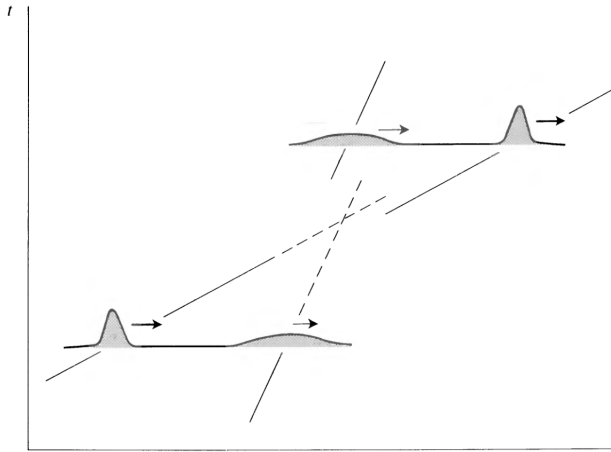


Figure 1: Elementary Fluid Dynamics, D. J. Acheson, Oxford University Press, 1990

- Démontrez la consistance du schéma upwind, tracez en le stencil, et déterminez en les conditions de stabilité (attention : l'équation 4.9 dans [2] comporte des erreurs de signe qui rendent la Figure 4.3 fausse. Vous pouvez faire mieux !)
- Démontrez la consistance du schéma proposé par Zabusky et Kruskal et chargez à en déterminer l'ordre de convergence
- Mettez en oeuvre un exercice visant à illustrer le dépassement d'une onde lente par une onde rapide (Figure 1). Choisissez vous même la discrétisation et les conditions initiales.
- discutez vos choix et vos résultats

References

- [1] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters*, 15(6):240–243, 1965.
- [2] M. Shahrill, M. S. F. Chong, and H. N. H. Mohd Nor. Applying explicit schemes to the korteweg-de vries equation. *Modern Applied Science*, 9(4), 2015.