4.3 Odkształcenie sprężyste

Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

$$-\left(E(x)u'(x)\right)' = 0$$

$$u(2) = 3$$

$$u'(0) + u(0) = 10$$

$$E(x) = \{2\ dla\ x \in [0,1],\ 6\ dla\ x \in (1,2]\}$$

$$\Omega = (0,\ 2)$$

Gdzie u to poszukiwana funkcja

$$[0,\ 2] \ni x \to u(x) \in \mathbb{R}$$

Całkujemy mnożymy obie strony przez funkcję testową v i całkujemy obustronnie po dziedzinie

$$v \in V\colon \{f \in H^1\colon f(2) = 0\}$$

$$-\int_0^2 (Eu')'\, v dx = 0$$

Całkując przez części otrzymujemy

$$-v(2)E(2)u'(2) + v(0)E(0)u'(0) + \int_0^2 E(x)u'(x)v'(x)dx = 0$$

Przekształcamy równanie wiedząc, że $v(2) = 0,\ u'(0) = 10 - u(0)\ i\ E(0) = 2$

$$-2v(0)u(0) + \int_0^2 E(x)u'(x)v'(x)dx = -20v(0)$$

$$B(u,v) = -2v(0)u(0) + \int_0^2 E(x)u'(x)v'(x)dx$$

$$L(v) = -20v(0)$$

Wprowadzamy

$$\overline{u} \in H^1, \overline{u}(2) = 3$$

Przyjmujemy

$$\overline{u}(x) = 3$$

$$u = \overline{u} + w,\ w \in V$$

$$B(\overline{u} + w, v) = L(v)$$

$$B(w,v) = L(v) - B(\overline{u},\ v)$$

$$\overline{L}(v) = L(v) = B(\overline{u},\ v)$$

Szukamy takiego $w \in V$, że

$$B(w, v) = \overline{L}(v) \, \forall v \in V$$