第五章　序数和超穷归纳法

5.1　良 序 集

大小关系必须是偏序关系，但一般人们还要求大小关系是全序关系。我们已经证明了基数的大小关系是偏序，但它是否是全序呢？要证明任何两个基数都是可比较的是困难的。困难在于，对于任意两个集合，没有一种一般的方法告诉我们如何去建立从一个集合到另一个集合的单射。

仔细分析两个有限集的比较过程，就会发现实际上是在两个有限集上分别建立一个全序关系，然后依次将元素作对应。某些无限集的比较也采用这样的方法，如在例 4.1.3 中建立 **Z** 到 **N** 的双射时，就是首先将 **Z** 排成一种不同于小于等于关系的次序，然后依次和 **N** 的元素作对应。

这种方法启示我们，在两个建立了次序的无限集之间，如果它们的次序满足一定条件，则可以将它们的元素依次作对应，从而可以比较这两个集合元素个数的多少了。

这种次序需要满足什么条件呢？首先，它必须是全序。其次，在任何对应后，剩下的元素中必有最小元，否则无法依次对应。这样的次序叫做良序关系，带有良序关系的集合叫做良序集。以下是它们的严格定义。

5.1.1 定义　良序集　A 是全序集，如果任给 A 的非空子集 X，X 都有最小元，则称 A 是良序集。这时，A 上全序关系称为 A 上良序关系，简称 A 上良序。

有时为了指明某种特定的良序，就用 $<A, R>$ 表示带有良序关系 R 的良序集 A。

任何非空良序集 A 都有最小元，因为这种情况下，A 就是 A 的一个非空子集。

空关系是空集上的全序关系，又因为空集没有非空子集，所以空集是良序集。

由例 4.3.5，有限全序集都是良序集，特别地，$\mathbf{N}_n$ 是良序集。

由自然数的最小数原理，自然数 **N** 是良序集。

有些全序集不是良序集，如 **Z**, **Q** 和 **R** 都不是良序集，因为它们自身就没有最小元。

再来看良序集的一些例子，这些例子以后经常要用到。

5.1.2 例　除小于等于关系外，**N** 上还可以有其它的良序关系，从而构成另外的良序集。如任给 n≥1，例 3.3.4 中 R_n 也是 **N** 上良序关系，以后用 $<\mathbf{N}, R_n>$ 表示这些良序集。

5.1.3 例　**Z** 上小于等于关系不是良序关系，但例 3.3.5 中 R 是 **Z** 上良序关系，以后用 $<\mathbf{Z}, R>$ 表示这个良序集。

5.1.4 例　$S = \{<<x, y>, <u, v>> \mid x<u$ 或$(x = u$ 且 $y\leq v)\}$是 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上的二元关系，它的直观形象如下：

$$
\begin{array}{l}
<0, 0>, <0, 1>, \cdots, <0, n>, \cdots\cdots \\
<1, 0>, <1, 1>, \cdots, <1, n>, \cdots\cdots \\
\qquad\qquad\vdots \\
<m, 0>, <m, 1>, \cdots, <m, n>, \cdots\cdots \\
\qquad\qquad\vdots
\end{array}
$$

可以证明 S 是 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上良序关系。

任给 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的非空子集 X，令

$A = \{x \mid$ 存在 $y\in\mathbf{N}$，使得$<x, y>\in X\}$，

则 A 是 **N** 的非空子集，取它的最小元 n，再令

$B = \{y \mid <n, y>\in X\}$，

则 B 也是 $\mathbf{N}$ 的非空子集，取它的最小元 m。显然$\langle$n, m$\rangle \in X$，以下证明$\langle$n, m$\rangle$是 X 的最小元(用$\leq_1$表示 S)：

任给$\langle x, y\rangle \in X$，由 A 的定义得

$$\text{n} \leq x,$$

如果 n$<x$ 则$\langle$n, m$\rangle \leq_1 \langle x, y\rangle$，如果 n $= x$，则由 B 的定义得

$$\text{m} \leq y,$$

也有$\langle$n, m$\rangle \leq_1 \langle x, y\rangle$。

以后用$\langle \mathbf{N}\times\mathbf{N}, S\rangle$表示这个良序集。

现在开始讨论良序集的性质。和一般的偏序集类似，不加说明时，总是用$\leq$表示良序关系，用$\leq_A$表示 A 上良序关系。也经常使用$<, \geq$和$>$，它们的含义在讨论偏序集时已有说明。

第三章里证明了，如果 $X \subseteq B \subseteq A$，则 X 在 B 中的最小元和 X 在 A 中的最小元是一样的。因此有以下定理。

5.1.5 定理 良序集的子集是良序集。

证 设 A 是良序集，$B \subseteq A$。任给 B 的非空子集 X，X 也是 A 的非空子集，所以 X 在 A 中有最小元 a，a 也是 X 在 B 中的最小元。因此 B 是良序集。■

由定理 5.1.5 和前面关于偏序集的讨论，当 $B \subseteq A$ 时，B 上良序和 A 上良序可以用同样的符号，特别地，当 A 上良序用$\leq$表示时，B 上良序也用$\leq$表示。

对于良序集非常重要的一个概念是前段。

5.1.6 定义 前段 A 是良序集，$B \subseteq A$。如果

任给 $x\in B$，任给 $y\in A$，只要 $y\leq x$ 就有 $y\in B$，

则称 B 是 A 的前段。

显然$\varnothing$和 A 都是 A 的前段。如果 B 是 A 的前段且 $B \neq A$，则称 B 是 A 的真前段。

设 B 是 A 的前段，由前段的定义可知，任给 $x\in B$，比 x 小的元素都在 B 中，所以任给 $y\in A\setminus B$，y 一定比 B 中每个元素都大，因此任给 $x\in B$，任给 $y\in A\setminus B$，都有 $x<y$。

反之，如果任给 $x\in B$，任给 $y\in A\setminus B$，都有 $x<y$，则任给 $x\in B$，比 x 小的元素都不会在 $A\setminus B$ 中，只能在 B 中，因此任给 $x\in B$，任给 $y\in A$，只要 $y\leq x$ 就有 $y\in B$，即 B 是 A 的前段。

这说明了 B 是 A 的前段的另一个条件是：

任给 $x\in B$，任给 $y\in A\setminus B$，都有 $x<y$

A 的前段的直观意义是：它是 A 的最小元开始的一系列依次的元素，中间一个也没有漏掉。如果将 A 的元素排成一条直线，则前段的元素就充满了这条直线的前段(图 5.1.1)。

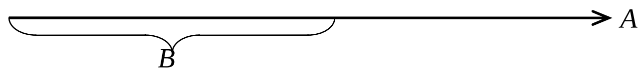

图 5.1.1

为了熟悉前段的概念，我们来看前段的几个例子。

5.1.7 例 A 是良序集，任给 $a\in A$，

$$A(a) = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x<a\}$$

都是 A 的真前段。任给 A 的真前段 B，令

$$C = \{x \mid x\in A\setminus B\}$$

则 C 非空，取它的最小元 a，就有 $B = A(a)$。因此

A 的任给真前段都能表示为 $A(a)$形式。

显然有

$$A(a) = A(b)\text{当且仅当 } a = b\text{。}$$

5.1.8 例 A 是良序集，任给 $a\in A$，

$$A[a] = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x\leq a\}$$

是 A 的前段。$A[a]$不一定是真前段，实际上有

$A[a]$是 A 的真前段当且仅当 a 不是 A 的最大元。

显然 $A[a] = A(a)\cup\{a\}$，所以和 $A(a)$类似，也有

$$A[a] = A[b]\text{当且仅当 } a = b\text{。}$$

5.1.9 例 任给 n$\in\mathbf{N}$，都有 $\mathbf{N}(\text{n}) = \mathbf{N}_\text{n}$，所以 $\mathbf{N}$ 的任何真前段

都是某个 $\mathbf{N}_n$。这也说明了 $\mathbf{N}$ 的任何真前段都是有限集。

5.1.10 例　任给 $n\geq 1$，都有

$$\langle \mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_n, \leq\rangle = \langle \mathbf{N}, R_n\rangle(0),$$

所以 $\langle \mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_n, \leq\rangle$ 是 $\langle \mathbf{N}, R_n\rangle$ 的真前段。直观形象如下：

$\langle \mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_n, \leq\rangle$： $n, n+1,\cdots\cdots$

$\langle \mathbf{N}, R_n\rangle$： $n, n+1,\cdots\cdots, 0,\cdots, n-1$

5.1.11 例　$\langle \mathbf{N}, \leq\rangle = \langle \mathbf{Z}, R\rangle(-1)$，所以 $\langle \mathbf{N}, \leq\rangle$ 是 $\langle \mathbf{Z}, R\rangle$ 的真前段。直观形象如下：

$\langle \mathbf{N}, \leq\rangle$：$0, 1,\cdots, n,\cdots\cdots$

$\langle \mathbf{Z}, R\rangle$： $0, 1,\cdots, n,\cdots\cdots, -1,\cdots, -n,\cdots\cdots$

现在讨论良序集前段的性质。

5.1.12 定理　良序集前段的基本性质

(1) 传递性　如果 B 是 A 的前段且 C 是 B 的前段，则 C 是 A 的前段。

(2) 可比较性　如果 B 和 C 都是 A 的前段，则 B 是 C 的前段或 C 是 B 的前段。

(3) 前段对并的封闭性　如果任给 $i\in I$，A_i 都是 A 的前段，则 $\bigcup_{i\in I}A_i$ 是 A 的前段。

证　(1) 显然 $C\subseteq A$。

任给 $x\in C$，任给 $y\in A$，如果 $y\leq x$，则由 $x\in C$, $y\in A$ 和 B 是 A 的前段得

$$y\in B,$$

再由 $x\in C, y\in B$ 和 C 是 B 的前段得 $y\in C$。

因此 C 是 A 的前段(图 5.1.2)。

(2) $B = C$ 时显然。

现设 $B \neq C$，则

$$\text{存在 } a\text{，使得}(a\in B \text{ 且 } a\notin C)\text{或}(a\in C \text{ 且 } a\notin B),$$

不妨假设存在 a，使得 $a\in B$ 且 $a\notin C$。

任给 $x\in C$，由 $a\notin C$ 和 C 是 A 的前段得

$$x<a,$$

再由 $x<a, a\in B$ 和 B 是 A 的前段得

$$x\in B。$$

因此 $C\subseteq B$。

任给 $x\in C$，任给 $y\in B$，如果 $y\leq x$，则由 $y\in B$ 和 $B\subseteq A$ 得

$$y\in A,$$

再由 $x\in C, y\in A$ 和 C 是 A 的前段得 $y\in C$。

因此 C 是 B 的前段(图 5.1.3)。

(3) 显然 $\bigcup_{i\in I}A_i\subseteq A$。

任给 $x\in\bigcup_{i\in I}A_i$，任给 $y\in A$，如果 $y\leq x$，则

$$\text{存在 } i\in I\text{，使得 } x\in A_i,$$

由 $x\in A_i, y\in A$ 和 A_i 是 A 的前段得

$$y\in A_i,$$

所以 $y\in\bigcup_{i\in I}A_i$。

因此 $\bigcup_{i\in I}A_i$ 是 A 的前段。■

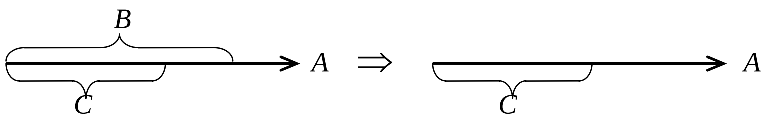

图 5.1.2

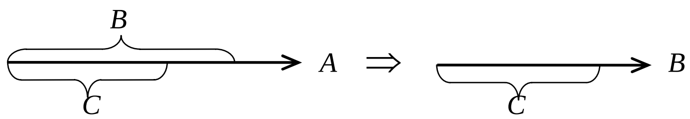

图 5.1.3

相似、相似映射对于良序集极为重要。由习题 3.4.5 可知最小元在相似映射下是不变的，由习题 3.4.8 可知可比较性在相似映射

下是不变的，所以良序关系在相似映射下也是不变的。

5.1.13 定理　A, B 是两个相似的偏序集，则 A 是良序集当且仅当 B 是良序集。

证　设 f 是 A 到 B 的相似映射。

如果 B 是良序集，则 B 是全序集，由习题 3.4.8 得 A 也是全序集。又任给 A 的非空子集 X，$f\,[X]$是 B 的非空子集，由 B 是良序集得 $f\,[X]$有最小元 $f(a)$，由习题 3.4.5 得 a 是 X 的最小元，因此 A 是良序集。

注意 f 的逆映射 f^{-1} 是 B 到 A 的相似映射，同理可证如果 A 是良序集则 B 是良序集。■

因为良序集是全序集，所以由习题 3.4.9 可知，如果 A, B 是良序集，f 是 A 到 B 的双射，则 f 是相似映射的条件可以减弱为：

任给 $x, y\in A$，如果 $x\le y$ 则 $f(x)\le f(y)$

下面来看良序集相似的一些例子。

5.1.14 例　A, B 是良序集，如果$|A| = |B| = \mathrm{n}$，则 $A\cong B$。这说明了在相似的意义下，n 个元素的良序集只有一个。

5.1.15 例　A, B 是良序集，$a\in A$，$b\in B$。如果 $A(a)\cong B(b)$，则 $A[a]\cong B[b]$，证明如下：

取 $A(a)$到 $B(b)$的相似映射 f，构造 $A[a]$到 $B[b]$的映射

$$g: A[a]\to B[b]\quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } x\in A_1 \\ b & \text{如果 } x\in A_2, \end{cases}$$

则 g 是 $A[a]$到 $B[b]$的相似映射。

当用$\langle A, R\rangle$表示带良序关系 R 的良序集 A，用$\langle B, S\rangle$表示带良序关系 S 的良序集 B 时，A 和 B 相似就表示为$\langle A, R\rangle\cong\langle B, S\rangle$了。

5.1.16 例　任给 $\mathrm{n}\ge 1$，$\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_\mathrm{n}$ 是 $\mathbf{N}$ 的真子集，

$f: \mathbf{N}\to\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_\mathrm{n}\quad f(x) = x+\mathrm{n}$

是 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_\mathrm{n}$ 的相似映射，所以$\langle\mathbf{N}, \le\rangle\cong\langle\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_\mathrm{n}, \le\rangle$。直观形象如下：

$\langle\mathbf{N}, \le\rangle$：　0, 1,　⋯, m,　⋯⋯

$\langle\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_\mathrm{n}, \le\rangle$：　n, n+1,⋯, n+m,　⋯⋯

这也说明了良序集可以相似于它的真子集。

5.1.17 例　$\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}$ 是 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的子集，$\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的良序 S (见例 5.1.4) 限制在 $\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}$ 上仍记为 S，取 $\mathbf{Z}$ 上良序 R (见例 3.1.3)，则

$$f: \mathbf{N}_2\times\mathbf{N}\to\mathbf{Z}\quad f(x, y) = \begin{cases} y & \text{如果 } x = 0 \\ -(y+1) & \text{如果 } x = 1, \end{cases}$$

是 $\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的相似映射，所以$\langle\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}, S\rangle\cong\langle\mathbf{Z}, R\rangle$。直观形象如下：

$\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}$：$\langle 0, 0\rangle$,⋯, $\langle 0, \mathrm{n}\rangle$,⋯⋯, $\langle 1, 0\rangle$,⋯, $\langle 1, \mathrm{n}\rangle$,　⋯⋯

$\mathbf{Z}$：　0,　⋯, n,　⋯⋯, –1,　,⋯, –(n+1),　⋯⋯

5.1.18 例　f 是 A 到 B 的相似映射，则任给 $a\in A$，都有 $A(a)\cong B(f(a))$。注意到 $f\,[A(a)] = B(f(a))$，只要取

$g: A(a)\to B(f(a))\quad g(x) = f(x)$

就行了。因为 A 的真前段都能表示为 $A(a)$形式，所以这就说明了如果 $A\cong B$，则任给 A 的真前段 X，都存在 B 的真前段 Y，使得 $X\cong Y$。

以下是一个良序集相似于另一个良序集的真前段的几个例子。

5.1.19 例　任给 $\mathrm{n}\ge 1$，因为$\langle\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_\mathrm{n}, \le\rangle$是$\langle\mathbf{N}, R_\mathrm{n}\rangle$真前段，而$\langle\mathbf{N}, \le\rangle$相似于$\langle\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_\mathrm{n}, \le\rangle$，所以$\langle\mathbf{N}, \le\rangle$相似于$\langle\mathbf{N}, R_\mathrm{n}\rangle$的真前段。直观形象如下：

$\langle\mathbf{N}, \le\rangle$：　0,⋯, m,　⋯⋯

$\langle\mathbf{N}, R_\mathrm{n}\rangle$：　n,⋯, n+m,⋯⋯, 0,⋯, n–1

5.1.20 例　如果 $\mathrm{m}<\mathrm{n}$，则

$\langle\mathbf{N}, R_\mathrm{m}\rangle\cong\langle\mathbf{N}, R_\mathrm{n}\rangle(\mathrm{m})$且$\langle\mathbf{N}, R_\mathrm{n}\rangle\cong\langle\mathbf{Z}, R\rangle(-(\mathrm{n}+1))$。

它们的直观形象如下：

$\langle \mathbf{N}, R_{\mathrm{m}}\rangle$：m,⋯,m+i,⋯⋯, 0, ⋯, m–1

$\langle \mathbf{N}, R_{\mathrm{n}}\rangle$：n ,⋯, n+i, ⋯⋯, 0, ⋯, m–1, m, ⋯, n–1

$\langle \mathbf{Z}, R \rangle$：0 ,⋯, i, ⋯⋯, –1,⋯, –m, –(m+1),⋯, –n, –(n+1),⋯⋯

习题 5.1

5.1.1 A, B 是良序集，良序关系分别为$\leq_A$和$\leq_B$，构造 $B\times A$ 上二元关系

$$\leq\ = \{\langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle \mid x <_B u \text{ 或}(x = u \text{ 且 } y \leq_A v)\}。$$

证明：$\leq$是 $B\times A$ 上的良序关系。

5.1.2 A 是良序集，$B \subseteq A$。证明：B 是 A 的前段当且仅当任给 $x\in B$，任给 $y\in A\setminus B$，都有 $x<y$。

5.1.3 B 是任意良序集。证明：如果 B 没有最大元，则 $\bigcup_{b\in B}B(b) = B$。

5.1.4 A, B 是任意良序集，f 是 A 到 B 的相似映射，$X \subseteq A$。证明：

(1) X 是 A 的前段当且仅当 $f[X]$是 B 的前段。

(2) $g：X\to f[X]$ $\quad g(x) = f(x)$是 X 到 $f[X]$的相似映射。

5.1.5 A, B 是良序集，良序关系分别为$\leq_A$和$\leq_B$，$A\cap B = \varnothing$。令$\leq\ = \ \leq_A\cup\leq_B\cup(A\times B)$。证明：

(1) $A\times A$，$B\times B$ 和 $A\times B$ 两两不交。

(2) $\leq|_A = \leq_A$且$\leq|_B = \leq_B$。

(3) $\leq$是 $A\cup B$ 上良序关系。

(4) 如果 $B \neq \varnothing$，b 是 B 的最小元，则 $A\cong(A\cup B)(b)$。

5.2 良序集基本定理

将两个良序集的元素按大小次序逐个对应，最终必有一个良序集的元素全部对应完，这个对应就构成了它到另一个良序集的前段的相似映射。

换句话说，两个良序集中总有一个相似于另一个的前段，这就是良序集基本定理。

如何将以上的直观想法严格化呢？我们采用以下的方法。设 A, B 是良序集。

(1) 将 A 中与 B 中彼此相似的前段一一对应，并构造它们之间的相似映射；

(2) 将这些映射组合起来，构造 A 的某个前段 A_1(它是(1)中 A 的所有前段的并)到 B 的某个前段 B_1 (它是(1)中 B 的所有前段的并)的相似映射；

(3) 证明 $A = A_1$ 或 $B = B_1$，从而证明了 A 和 B 中必有一个相似于另一个的前段。

要做到这三点需要哪些条件呢？

首先，和 A 中某个前段相似的 B 中的前段必须是惟一的，这样才能建立起前段间的一一对应。

其次，如果 A 中某个前段与 B 中某个前段相似，则它们之间的相似映射也必须是惟一的，这样才能将这些相似映射组合起来，得到 A_1 到 B_1 的相似映射。

这两个条件的成立，是依赖于良序集相似映射的一个重要性质。

这个性质是说，如果 A 的元素依次和它的一个前段作对应，则这个对应只能将每个元素对应到自己，从而这个前段就是 A 本身。用相似映射的话来说就是；如果 B 是 A 的前段，f 是 A 到 B 的相似映射，则任给 $x\in A$，都有 $f(x) = x$，从而 $A = B$。

这个性质的直观意义是清楚的。如果比 a 小的元素都对应到了自己，即任给 $x<a$，都有 $f(x) = x$，则 a 也只能对应到自己，即 $f(a) = a$。否则因为比 a 小的元素已经对应完了，所以 $f(a)$一定大于 a，因此对应到 a 的 $f^{-1}(a)$就一定小于 a，但小于 a 的元素都对应到自己，所以 $f^{-1}(a)$对应到 $f^{-1}(a)$，这样 $f^{-1}(a)$就对应到两个不同的元素 a 和 $f^{-1}(a)$，矛盾(图 5.2.1)。

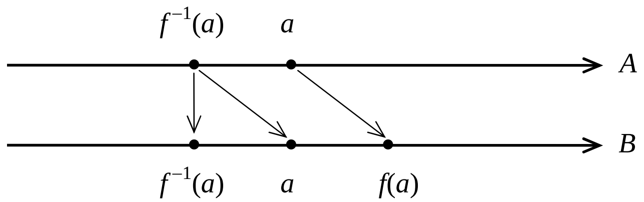

图 5.2.1

下面是这个性质的严格证明及其推论。

5.2.1 定理 良序集相似的基本性质

(1) 如果 B 是 A 的前段，f 是 A 到 B 的相似映射，则

$$任给\ x\in A，都有\ f(x) = x，$$

因此 $B = A$ 且 f 是恒等映射。

(2) 如果 B 和 C 都是 A 的前段，f 是 B 到 C 的相似映射，则 $C = B$ 且 f 是恒等映射。

(3) 如果 B_1 和 B_2 都是 B 的前段，f 是 A 到 B_1 的相似映射，g 是 A 到 B_2 的相似映射，则 $B_1 = B_2$ 且 $f = g$。

证 (1) 用反证法。设存在 $x\in A$，使得 $f(x) \neq x$，则

$$X = \{x \mid x\in A\ 且\ f(x) \neq x\}$$

非空，取它的最小元 a。由 a 是 X 的极小元可知：

$$f(a) \neq a，$$

且

$$任给\ x<a，都有\ f(x) = x。$$

如果 $f(a)<a$，则由 $f(a)<a$ 和定理 3.4.19 得

$$f(f(a))<f(a)，$$

由 $f(a)<a$ 和 a 是 X 的极小元得

$$f(f(a)) = f(a)，$$

矛盾。

如果 $a<f(a)$，则

$$f(f^{-1}(a)) = a<f(a)，$$

由 $f(f^{-1}(a))<f(a)$和定理 3.4.19 得

$$f^{-1}(a)<a，$$

由 $f^{-1}(a)<a$ 和 a 是 X 的极小元得

$$f(f^{-1}(a)) = f^{-1}(a)，$$

所以

$$f^{-1}(a) = f(f^{-1}(a)) = a，$$

和 $f^{-1}(a)<a$ 矛盾。

(2) 由前段的可比较性(定理 5.1.12(2))得

$$B\ 是\ C\ 的前段或\ C\ 是\ B\ 的前段。$$

当 C 是 B 的前段时，由(1)得

$$C = B\ 且\ f\ 是恒等映射；$$

当 B 是 C 的前段时，f^{-1} 是 C 到 B 相似映射，由(1)得

$$B = C\ 且\ f^{-1}\ 是恒等映射，$$

所以 $C = B$ 且 f 是恒等映射。

(3) f^{-1} 是 B_1 到 A 的相似映射，f^{-1} 和 g 的复合 $g\circ f^{-1}$ 是 B_1 到 B_2 的相似映射，由(2)得

$$B_1 = B_2\ 且\ g\circ f^{-1}\ 是恒等映射，$$

所以 $B_1 = B_2$ 且 $f = g$。■

定理 5.2.1(1)说明了良序集不能相似于自己的真前段(注意一个良序集可以相似于它的真子集，见例 5.1.16)，所以如果 B 相似于 A 的真前段，则 B 不能相似于 A。

这样由例 5.1.19 和例 5.1.20 可知：如果 $1\leq n<m$，则

$$\langle \mathbf{N}, \leq\rangle，\langle \mathbf{N}, R_n\rangle，\langle \mathbf{N}, R_m\rangle 和 \langle \mathbf{Z}, R\rangle$$

两两不相似。这也说明了基数相同的无限良序集可以不相似，注意基数相同的有限良序集都相似(见例 5.1.14)。

在定理 5.2.1(3)中，如果 $B_1 = B_2 = B$，则 f 和 g 都是 A 到 B 的相似映射，所以定理 5.2.1(3)也说明了两个相似的良序集之间只有惟一的相似映射。

为了得到良序集基本定理，还需要良序集前段的以下性质。

5.2.2 引理 如果任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，A_i 是 A 的前段，B_i 是 B 的前段，并且 $A_\mathrm{i}\cong B_\mathrm{i}$，则 $\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}\cong\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i}$。

证 任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，由定理 5.2.1(2)可得，存在惟一的 A_i 到 B_i 的相似映射 f_i，令

$$\Gamma = \{f_\mathrm{i} \mid \mathrm{i}\in\mathrm{I}\}，$$

则 Γ 的并映射 f_Γ 是 $\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$ 到 $\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i}$ 的映射。我们依次证明 f_Γ 存在，f_Γ 是双射和 f_Γ 是相似映射。

令 $\Sigma = \{A_\mathrm{i} \mid \mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$，由前段的可比较性(定理 5.1.12(2))得 Σ 是单调的，由定理 2.5.11(2)，要证明并映射 f_Γ 存在，只需证任给 $\mathrm{i}, \mathrm{j}\in\mathrm{I}$，如果 $A_\mathrm{i}\subseteq A_\mathrm{j}$，则任给 $x\in A_\mathrm{i}$，都有 $f_\mathrm{i}(x) = f_\mathrm{j}(x)$。

任给 $\mathrm{i}, \mathrm{j}\in\mathrm{I}$，如果 $A_\mathrm{i}\subseteq A_\mathrm{j}$，则

$$A_\mathrm{i} 是 A_\mathrm{j} 的前段，$$

由 f_j 是 A_j 到 B_j 的相似映射，A_i 是 A_j 的前段和习题 5.1.4 得

$$f_\mathrm{j}[A_\mathrm{i}] 是 B_\mathrm{j} 的前段，$$

并且

$$g：A_\mathrm{i}\to f_\mathrm{j}[A_\mathrm{i}] \quad g(x) = f_\mathrm{j}(x)$$

是 A_i 到 $f_\mathrm{j}[A_\mathrm{i}]$ 的相似映射，由 g 是 A_i 到 $f_\mathrm{j}[A_\mathrm{i}]$ 的相似映射，f_i 是 A_i 到 B_i 的相似映射，$f_\mathrm{j}[A_\mathrm{i}]$ 和 B_i 都是 A 的前段和定理 5.2.1(3)得

$$f_\mathrm{i} = g，$$

所以任给 $x\in A_\mathrm{i}$，都有 $f_\mathrm{i}(x) = g(x) = f_\mathrm{j}(x)$。

因为任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，f_i 都是双射，所以由定理 2.5.11(1)(2)得 f_Γ 是双射。

任给 $x, y\in\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$，存在 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，使得 $x, y\in A_\mathrm{i}$，所以

$$x\leq y 当且仅当 f_\mathrm{i}(x)\leq f_\mathrm{i}(y) 当且仅当 f_\Gamma(x)\leq f_\Gamma(y)。$$

因此 f_Γ 是相似映射。■

有了这些准备，就可以证明良序集基本定理了。

5.2.3 定理 良序集基本定理 任给两个良序集 A, B，都有 A 相似于 B 的前段或 B 相似于 A 的前段。

证 令 $\mathrm{I} = \{X \mid X 是 A 的前段，存在 B 的前段 Y，使得 X\cong Y\}$，由定理 5.2.1(3)，任给 $X\in\mathrm{I}$，存在惟一的 B 的前段 Y，使得 $X\cong Y$。

任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，令

$$A_\mathrm{i} = \mathrm{i}，$$

$$B_\mathrm{i} = 和 A_\mathrm{i} 相似的惟一的 B 的前段，$$

则任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，都有 $A_\mathrm{i}\cong B_\mathrm{i}$，由引理 5.2.2 得

$$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}\cong\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i}，$$

由前段对并的封闭性(定理 5.1.12(3))得

$$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i} 是 A 的前段，$$

和

$$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i} 是 B 的前段。$$

如果 $\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i} \neq A$ 且 $\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i} \neq B$，则存在 $a\in A$，存在 $b\in B$，使得

$$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i} = A(a) 且 \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i} \neq B(b)，$$

由 $A(a)\cong B(b)$ 和例 5.1.15 得

$$A[a]\cong B[b]，$$

由 I 的定义得 $A[a]\in\mathrm{I}$，所以

$$A[a]\subseteq\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i} = A(a)，$$

矛盾。因此 $\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i} = A$ 或 $\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i} = B$。

当 $\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i} = A$ 时，有 A 相似于 B 的前段 $\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i}$，当 $\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i} = B$ 时，有 B 相似于 A 的前段 $\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$。■

A 相似于 B 的前段，这个相似映射也是 A 到 B 的单射，所以

$$|A|\leq|B|。$$

因此良序集基本定理也告诉我们，对于两个良序集来说，它们的元素的个数的可以比较大小的。这正是我们引进良序集的重要目的之一。

从良序集基本定理还可以得到，如果 A 不能相似于 B 的真前段，则 B 一定相似于 A 的前段。结合良序集不能相似于自己的真前段的结果，良序集基本定理的另一种表述是：

任给两个良序集 A, B，以下情况恰好有一种成立：

(1) A 相似于 B 的真前段；(2) B 相似于 A 的真前段；(3) A 相似于 B。

习题 5.2

5.2.1 证明良序集相似的以下性质：

(1) A 相似于 A 的前段。

(2) 如果 B 相似于 A 的前段，A 相似于 B 的前段，则 B 相似于 A。

(3) 如果 B 相似于 A 的前段，C 相似于 B 的前段，则 C 相似于 A 的前段。

5.2.2 A 是良序集，$a, b\in A$，证明：

(1) $A(a)$相似于 $A(b)$当且仅当 $a = b$。

(2) $A(a)$相似于 $A(b)$的前段当且仅当 $a\leq b$。

5.2.3 A 是良序集，$B\subseteq A$，证明：

(1) 任给 $X\subseteq B$，如果 f 是 A 到 X 的相似映射，则任给 $x\in A$，都有 $x\leq f(x)$。

(2) A 不能相似于 B 的真前段，从而 B 相似于 A 的前段。

5.3 序数和超穷归纳法

从两个集合等势可以引进刻画元素个数的数——基数，原因在于等势的自返性、对称性和传递性，因为相似也有自返性、对称性和传递性，所以彼此相似的良序集可以确定一个刻画良序关系的数。

5.3.1 定义 序数 所有彼此相似的良序集确定的数称为序数。和良序集 A 彼此相似的所有良序集(从而它们彼此相似)确定的序数称为 A 的序数，记为 $\overline{A}$。这样就有：

$$\overline{A} = \overline{B} \text{ 当且仅当 } A\cong B。$$

基数相同的有限良序集都相似(见例 5.1.14)，所以将 $\overline{\mathbf{N}_n}$ 和 n 等同是合理的。

自然数既可以作为基数也可以作为序数，不是自然数的序数称为无限序数。特别地，$\overline{\mathbf{N}}$ 是无限序数，这个序数记为ω。

无限序数和自然数有本质的区别，有相同无限基数的良序集可以有不同的无限序数，如当 $1\leq n<m$ 时，

$$<\mathbf{N}, \leq>，<\mathbf{N}, R_n>，<\mathbf{N}, R_m>和<\mathbf{Z}, R>$$

两两不相似，所以它们的序数两两不同，但它们的基数都是$\aleph_0$。

以后一般用$\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau, \delta$等表示序数。

序数也是自然数的一种推广，也应该考虑它们的大小。

5.3.2 定义 序数的大小 α, β是任意两个序数，取良序集 A 和 B 满足 $\overline{A} = \alpha$且 $\overline{B} = \beta$。如果 A 相似于 B 的前段，则称α小于等于β，记为$\alpha\leq\beta$。

α小于等于β有时也称β大于等于α，记为$\beta\geq\alpha$。

这定义是合理的，因为如果 $\overline{A} = \overline{A_0}$ 且 $\overline{B} = \overline{B_0}$，则 A_0 也一定相似 B_0 的前段。

$\alpha\leq\beta$，取良序集 C, B，使得如果 $\overline{C} = \alpha$且 $\overline{B} = \beta$，则 C 相似于 B 的前段 A，所以 $\overline{A} = \overline{C} = \alpha$。因此对于$\alpha\leq\beta$，总是可以取良序集

A, B，使得 $\overline{A} = \alpha$，$\overline{B} = \beta$且 A 是 B 的前段。

将$\alpha \le \beta$且$\alpha \ne \beta$记为$\alpha < \beta$，称为α小于β，类似地还有$\beta > \alpha$(称为β大于α)。

由相似映射的性质可知，如果 A 相似于 B 的真前段，则 A 不能相似于 B。所以如果 $\overline{A} = \alpha$，$\overline{B} = \beta$，则

$\alpha < \beta$当且仅当 A 相似于 B 的真前段。

当$\alpha < \beta = \overline{B}$时，首先取 B 的前段 A，使得 $\overline{A} = \alpha$，因为$\alpha < \beta$，所以 A 是 B 的真前段，因此存在 $b \in B$，使得 $A = B(b)$。

这样，当$\alpha < \beta = \overline{B}$时，可以取 $b \in B$，使得 $\overline{B(b)} = \alpha$。

另外，任给 $b \in B$，都有 $\overline{B(b)} < \overline{B}$。

序数的大小确实的一种大小关系，并且还具有可比较性。

5.3.3 定理 序数大小的性质。

(1) 自返性 任给序数α，都有$\alpha \le \alpha$。

(2) 反对称性 任给序数α, β，如果$\alpha \le \beta$且$\beta \le \alpha$，则$\alpha = \beta$。

(3) 传递性 任给序数α, β, γ，如果$\alpha \le \beta$且$\beta \le \gamma$，则$\alpha \le \gamma$。

(4) 可比较性 任给序数α, β，都有$\alpha \le \beta$或$\beta \le \alpha$。

证 (1)(2)(3)见习题 5.2.1。

(4)见良序集基本定理。■

下面是序数大小的几个例子。

5.3.4 例 如果 n<m，则 $\mathbf{N}_{\mathrm{n}}$ 是 $\mathbf{N}_{\mathrm{m}}$ 的前段，所以 $\overline{\mathbf{N}_{\mathrm{n}}} \le \overline{\mathbf{N}_{\mathrm{m}}}$。这更说明了将 $\overline{\mathbf{N}_{\mathrm{n}}}$ 等同于 n 是合理的。

5.3.5 例 $\mathbf{N}$ 的任何真前段都是某个 $\mathbf{N}_{\mathrm{n}}$，所以比ω小的序数都是自然数，因此ω是最小的无限序数。

例 5.3.5 也说明了，任给无限良序集 A，$\mathbf{N}$ 一定相似于 A 的前段，这个前段就是 A 的一个无限子集。

定理 4.3.8 证明每个无限集都有可数子集是不严格的，由例 5.3.5 可以严格证明每个无限良序集都有可数子集。

5.3.6 例 任给 1≤n<m，都有

$$\overline{\langle \mathbf{N}, \le \rangle} < \overline{\langle \mathbf{N}, R_{\mathrm{n}} \rangle} < \overline{\langle \mathbf{N}, R_{\mathrm{m}} \rangle} < \overline{\langle \mathbf{Z}, R \rangle}。$$

5.3.7 例 A 是良序集，$a, b \in A$，则

$\overline{A(a)} = \overline{A(b)}$当且仅当 $a = b$，

$\overline{A(a)} \le \overline{A(b)}$当且仅当 $a \le b$ (见习题 5.2.2)。

现在讨论序数在小于等于关系下的性质，需要用到一个重要的序数集合。任给序数α，所有比α小的序数组成集合

$\mathbf{O}(\alpha) = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$。

5.3.8 定理 任给序数α，$\mathbf{O}(\alpha)$在序数的小于等于关系下是良序集，并且有 $\overline{\mathbf{O}(\alpha)} = \alpha$。

证 设 $\overline{A} = \alpha$，A 上的良序记为$\le_A$。如果$\beta < \alpha$，存在惟一的 A 的真前段 $A(a)$，使得

$\overline{A(a)} = \beta$，

所以可以构造 $\mathbf{O}(\alpha)$到 A 的映射

$f：\mathbf{O}(\alpha) \to A \quad f(\beta) = a$ (如果 $\overline{A(a)} = \beta$)，

由 f 的定义得$\beta = \overline{A(f(\beta))}$。

任给$\beta, \gamma \in \mathbf{O}(\alpha)$，如果 $f(\beta) = f(\gamma)$，则

$\beta = \overline{A(f(\beta))} = \overline{A(f(\gamma))} = \gamma$。

所以 f 是单射。

任给 $a \in A$，令$\beta = \overline{A(a)}$，则

$\beta \in \mathbf{O}(\alpha)$且 $f(\beta) = a$，

所以 f 是满射。

任给$\beta, \gamma \in \mathbf{O}(\alpha)$，

$\beta \le \gamma$ 当且仅当 $\overline{A(f(\beta))} \le \overline{A(f(\gamma))}$

当且仅当 $A(f(\beta))$是 $A(f(\gamma))$的前段

当且仅当 $f(\beta) \le f(\gamma)$，

所以 f 是相似映射。

由定理 5.1.13 得 $\mathbf{O}(\alpha)$是良序集且 $\mathbf{O}(\alpha)$和 A 相似，所以 $\overline{\mathbf{O}(\alpha)} = \overline{A} = \alpha$。■

定理 5.3.8 告诉我们，所有比序数α小的序数构成一个良序集，它的序数恰好是α。所以如果在讨论中需用到序数为α的良序集，

则可取 $A = \mathbf{O}(\alpha)$。

5.3.9 定理 任何序数的非空集合都有最小数，从而任何序数的集合在小于等于关系下都是良序集。

证 设 A 是序数的非空集合，取$\alpha\in A$。

如果 $A\cap\mathbf{O}(\alpha) = \varnothing$，则$\alpha$是 A 的最小数。

如果 $A\cap\mathbf{O}(\alpha) \neq \varnothing$，则 $A\cap\mathbf{O}(\alpha)$是 $\mathbf{O}(\alpha)$的非空子集，因为 $\mathbf{O}(\alpha)$是良序集，所以 $A\cap\mathbf{O}(\alpha)$有最小数β，β也是 A 的最小数。■

以下的讨论还需要一个重要的概念。

5.3.10 定义 序数的前段 A 是序数的集合。如果任给$\alpha\in A$，任给$\beta\leq\alpha$，都有$\beta\in A$，则称 A 是序数的前段。

由 $\mathbf{O}(\alpha)$的定义可知 $\mathbf{O}(\alpha)$是序数的前段，特别地，因为

$$\mathbf{O}(\omega) = \mathbf{N}，\mathbf{O}(\mathrm{n}) = \mathbf{N}_{\mathrm{n}}，$$

所以 $\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{N}_{\mathrm{n}}$ 都是序数的前段。

$\mathbf{O}[\alpha] = \{\beta \mid \beta\leq\alpha\}$也是序数的前段。

显然 $\mathbf{O}[\alpha] = \mathbf{O}(\alpha)\cup\{\alpha\}$。

设 A 是序数的前段，$\beta\in A$，由序数前段的定义，所有比β小的序数和 A 中所有比β小的序数是一样的，所以

$$\mathbf{O}(\beta) = \{\gamma \mid \gamma<\beta\} = \{\gamma \mid \gamma\in A \text{ 且} \gamma<\beta\} = A(\beta)。$$

这说明了序数的前段 A 的任何真前段都是某个 $\mathbf{O}(\beta)$。以下证明序数的前段 A 也是某个 $\mathbf{O}(\alpha)$。

5.3.11 定理 A 是序数的前段，则存在序数α，使得 $A = \mathbf{O}(\alpha)$。

证 由定理 5.3.9，A 是良序集，可令 $\overline{A} = \alpha$。

任给$\beta\in A$，都有，所以

$$\beta = \overline{\mathbf{O}(\beta)} = \overline{A(\beta)}<\overline{A} = \alpha，$$

由 $\mathbf{O}(\alpha)$的定义得

$$\beta\in\mathbf{O}(\alpha)，$$

因此 $A \subseteq \mathbf{O}(\alpha)$。

任给$\beta\in\mathbf{O}(\alpha)$，都有$\beta<\alpha = \overline{A}$，所以

$$\text{存在}\gamma\in A\text{，使得 }\overline{A(\gamma)} = \beta，$$

又

$$\overline{A(\beta)} = \overline{\mathbf{O}(\beta)} = \beta，$$

所以 $A(\gamma)$相似于 $A(\beta)$，由习题 5.2.2 得

$$\gamma = \beta，$$

所以

$$\beta\in A，$$

因此 $\mathbf{O}(\alpha) \subseteq A$。■

5.3.12 定理 A 是序数的集合，则存在序数α，使得任给$\beta\in A$，都有$\beta<\alpha$。

证 因为 $\mathbf{O}(\alpha)$中的序数都比α小，所以只要找到序数α，使得 $A \subseteq \mathbf{O}(\alpha)$就行了。

取 $B = \{\gamma \mid \text{ 存在}\beta\in A\text{，使得}\gamma\leq\beta\}$，则 $A \subseteq B$ 且 B 是序数的前段，由定理 5.3.11 得

$$\text{存在序数}\alpha\text{，使得 } B = \mathbf{O}(\alpha)，$$

所以 $A \subseteq \mathbf{O}(\alpha)$。■

定理 5.3.12 中的α实际上是满足条件的最小序数。任给$\gamma<\alpha$，都有$\gamma\in B$，由 B 的定义，存在$\beta\in A$，使得$\gamma\leq\beta$，所以γ不满足条件。

A 是序数的集合，定理 5.3.12 说明了 A 有上界，所以

$$B = \{\beta \mid \beta\text{是 } A \text{ 的上界}\}$$

是序数的非空集合，由定理 5.3.9，B 有最小数α，α就是 A 的上确界。这说明了任何序数的集合 A 都有上确界，以后将 A 的上确界记为 $\sup A$。

无限序数中有些和自然数类似，有些和自然数大不一样。

5.3.13 定义 序数的后继 α是序数，则 $A = \{\beta \mid \beta>\alpha\}$是序数的非空集合，$A$ 的最小数称为α的后继，记为α^+，即

$$\alpha^+ = \{\beta \mid \beta>\alpha\}\text{的最小数。}$$

α的后继α^+就是比α大的最小序数。

5.3.14 定义 后继序数和极限序数 α是序数。如果存在β，使得$\alpha = \beta^+$，则称α是后继序数。如果$\alpha \neq 0$ 且α不是后继序数，则

称α是极限序数。

这样，序数就可以分为不相交的三类，{0}、后继序数和极限序数。

先来看后继序数和极限序数的几个例子。

5.3.15 例 任何不为零的自然数都是后继序数，因为任何不为零的自然数都可以表示为 n+1，而 n+1 就是 n^+。

5.3.16 例 任给 m≥1，无限序数$\overline{<\mathbf{N}, R_m>}$都是后继序数。如果 m = 1，则$\overline{<\mathbf{N}, R_m>} = \overline{<\mathbf{N}, \le>}^{\,+}$，如果 m>1，令 m = n+1，则$\overline{<\mathbf{N}, R_m>} = \overline{<\mathbf{N}, R_n>}^{\,+}$。

5.3.17 例 无限序数ω，$\overline{<\mathbf{Z}, R>}$和$\overline{<\mathbf{N}\times\mathbf{N}, S>}$都是极限序数。

后继序数的性质和自然数是类似的。

5.3.18 定理 后继序数的性质

(1) $\alpha<\alpha^+$。

(2) 如果$\beta<\alpha$，则$\beta^+\le\alpha$。因此如果$\alpha<\beta^+$，则$\alpha\le\beta$。

(3) 如果$\alpha^+ = \beta^+$，则$\alpha = \beta$。

(4) $\overline{\mathbf{O}[\alpha]} = \alpha^+$，$\overline{A[a]} = \overline{A(a)}^{\,+}$。

(5) 如果$\alpha = \overline{A}$，则α是后继序数当且仅当 A 有最大元。

证 (1) 由α^+的定义直接可得。

(2) 如果$\beta<\alpha$，则$\alpha\in\{\gamma \mid \gamma>\beta\}$，由$\beta^+$的定义得$\beta^+\le\alpha$。

(3) 用反证法。假设$\alpha \ne \beta$，不妨再设$\beta<\alpha$，由(2)得

$$\beta^+\le\alpha,$$

由$\beta^+\le\alpha$和$\alpha<\alpha^+$得

$$\beta^+<\alpha^+,$$

和$\alpha^+ = \beta^+$矛盾。

(4) 由(2)得$\{\beta \mid \beta\le\alpha\} = \{\beta \mid \beta<\alpha^+\}$，这就是

$$\mathbf{O}[\alpha] = \mathbf{O}(\alpha^+),$$

所以$\overline{\mathbf{O}[\alpha]} = \overline{\mathbf{O}(\alpha^+)} = \alpha^+$。

设$\overline{A(a)} = \alpha$，则 $A(a)$相似于 $\mathbf{O}(\alpha)$，所以 $A[a]$相似于 $\mathbf{O}[\alpha]$，因此$\overline{A[a]} = \overline{\mathbf{O}[\alpha]} = \alpha^+ = \overline{A(a)}^{\,+}$。

(5) 如果α是后继序数，则存在序数β，使得$\alpha = \beta^+$，所以

$$\mathbf{O}(\alpha) = \mathbf{O}(\beta^+) = \mathbf{O}[\beta],$$

因此 A 相似于 $\mathbf{O}[\beta]$，取 $\mathbf{O}[\beta]$到 A 的相似映射 f，则 $f(\beta)$就是 A 的最大元。

如果 A 有最大元 a，则 $A = A[a]$，所以

$$\alpha = \overline{A} = \overline{A[a]} = \overline{A(a)}^{\,+},$$

因此α是后继序数。■

自然数的最小数原理和数学归纳法是等价的，因为序数也有最小数原理(定理 5.3.9)，所以数学归纳法也可以推广到序数上。

5.3.19 定理 超穷归纳法第一形式 设$\phi(\alpha)$是序数α的一个命题，并且满足：

如果任给$\beta<\alpha$，$\phi(\beta)$都成立，则$\phi(\alpha)$成立。

那么，任给序数α，$\phi(\alpha)$都成立。

证 用反证法。

假设存在β，使得$\phi(\beta)$不成立，则

$$\{\beta \mid \phi(\beta)\text{不成立}\}$$

非空，设它的最小数为α。由α的定义得

$$\phi(\alpha)\text{不成立且任给}\beta<\alpha，\phi(\beta)\text{成立},$$

由定理条件得$\phi(\alpha)$成立，矛盾。■

因为没有序数比 0 小，所以

任给$\beta<\alpha$，$\phi(\beta)$都成立

总是真的，因此定理 5.3.19 的条件中蕴涵着任给$\phi(0)$成立。应用时，有时需要特别证明$\phi(0)$成立。

后继序数和极限序数的性质很不一样，经常需要分别讨论，所以超穷归纳法的另一形式更常用。

5.3.20 定理 超穷归纳法第二形式 设$\phi(\alpha)$是序数α的一个命题，并且满足：

(1) $\phi(0)$成立；

(2) 如果$\phi(\alpha)$成立，则$\phi(\alpha^+)$成立；

(3) σ是极限序数，如果任给$\alpha<\sigma$，$\phi(\alpha)$都成立，则 $\phi(\sigma)$成立。

那么，任给序数α，$\phi(\alpha)$都成立。

证 类似于定理 5.3.19。对

$\{\beta \mid \phi(\beta)$不成立$\}$

的最小数分 0、后继序数、极限序数三种情况分别讨论。详细证明留给读者。■

有时讨论的是大于等于某个序数α_0的所有序数的性质，这时超穷归纳法需要稍加改动。第一形式的条件改为：

如果任给$\alpha_0\le\beta<\alpha$，$\phi(\beta)$都成立，则$\phi(\alpha)$成立。

第二形式的条件改为：

(1) $\phi(\alpha_0)$成立；

(2) 任给$\alpha>\alpha_0$，如果$\phi(\alpha)$成立，则$\phi(\alpha^+)$成立；

(3) σ是极限序数且$\sigma>\alpha_0$，如果任给$\alpha_0\le\alpha<\sigma$，$\phi(\alpha)$都成立，则$\phi(\sigma)$成立；

结论相应减弱为：

任给序数α，如果$\alpha\ge\alpha_0$，则$\phi(\alpha)$成立。

自然数上的归纳定义也可以推广到序数上。

5.3.21 超穷归纳定义 通过以下方式可以对每个序数α定义 K_α (K_α可以是元素、集合、n 元有序组、映射、关系、基数、序数等)。第一形式：

由所有$\beta<\alpha$的 K_β来定义 K_α。

第二形式：

(1) 直接定义 K_0；

(2) 由 K_α来定义 K_{α^+}；

(3) σ是极限序数，由所有$\alpha<\sigma$的 K_α来定义 K_σ。

那么，任给序数α，都定义了 K_α。

和超穷归纳法类似，有时超穷归纳定义不是从 0 开始而是从某个序数α_0开始。

注意超穷归纳定义的叙述是不严格的，什么叫“由…来定义…”的含义是不清楚的。

然而，具体应用超穷归纳定义时，“由…来定义…”可能有一个较清楚的可操作的含义，如在下节中看到的那样。

在本书的最后一章中，将简单地讨论如何将超穷归纳定义的概念严格化。

习题 5.3

5.3.1 α和β是序数，$\beta<\alpha$，证明：如果任给$\gamma<\alpha$，都有$\gamma\le\beta$，则$\alpha=\beta^+$。

5.3.2 证明极限序数的以下性质：

(1) 如果$\sigma=\overline{A}$且$\sigma\ne 0$，则σ是极限序数当且仅当 A 没有最大元。

(2) σ是极限序数。如果$\alpha<\sigma$，则$\alpha^+<\sigma$。

(3) A 是序数的集合，$\sigma=\sup A$。如果$\sigma\notin A$，则σ是极限序数。

(4) 如果$\sigma\ne 0$，则σ是极限序数当且仅当$\sigma=\sup\mathbf{O}(\sigma)$。

5.3.3 证明超穷归纳法的第二形式。

5.3.4 A, B 是序数的集合，证明：如果任给$\beta\in B$，都存在$\alpha\in A$，使得$\beta\le\alpha$，则 $\sup B\le\sup A$。

5.3.5 $\sigma=\sup A$，证明：任给$\beta<\sigma$，都存在$\gamma\in A$，使得$\beta<\gamma$。

5.3.6 A 是良序集，任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，A_i都是 A 的前段，证明：

(1) 任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，都有 A_i都是$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$的前段。

(2) 如果$\overline{\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}}\le\sup\{\overline{A_\mathrm{i}}\mid \mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$，则存在 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，使得$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$是 A_i的真前段。

(3) $\overline{\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}}=\sup\{\overline{A_\mathrm{i}}\mid \mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$。

5.4 序数的运算

自然数的加法和乘法是非常熟悉的，但它们的严格定义需要用数学归纳法。加法的归纳定义如下：

(1) $n+0 = n$；

(2) $n+(m+1) = (n+m)+1$。

乘法的归纳定义如下：

(1) $n\cdot 0 = 0$；

(2) $n\cdot(m+1) = n\cdot m+n$。

注意 m+1 不能依赖于加法的定义，要定义加法需要先对 m+1 作定义，实际上 m+1 就是 m^+，所以先要在自然数中引进 m 后继 m^+(用自然数的最小数原理)，才能定义加法和乘法。这样上述加法和乘法定义中的(2)应分别改为

$$n+m^+ = (n+m)^+\text{和 } n\cdot m^+ = n\cdot m+n\text{。}$$

现在考虑用超穷归纳定义将自然数的加法和乘法推广到序数。0 和后继序数的定义可以比照自然数，关键是极限序数的定义。

极限序数σ恰好是所有小于σ的序数的上确界($\sigma = \sup\mathbf{O}(\sigma)$)，一个自然的想法是：将$\alpha+\sigma$定义为所有$\alpha+\gamma$的上确界，将$\alpha\cdot\sigma$定义为所有$\alpha\cdot\gamma$的上确界，其中$\gamma$取遍所有小于$\sigma$的序数。

5.4.1 定义 序数的加法和乘法 序数的加法$\alpha+\beta$归纳定义如下：

(1) $\alpha+0 = \alpha$；

(2) $\alpha+\beta^+ = (\alpha+\beta)^+$；

(3) σ是极限序数，$\alpha+\sigma = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\sigma\}$。

序数的乘法$\alpha\cdot\beta$归纳定义如下：

(1) $\alpha\cdot 0 = 0$；

(2) $\alpha\cdot\beta^+ = \alpha\cdot\beta+\alpha$；

(3) σ是极限序数，$\alpha\cdot\sigma = \sup\{\alpha\cdot\gamma \mid \gamma<\sigma\}$。

序数的加法和乘法都称为序数的运算。先讨论序数的运算和序数的大小的联系。

5.4.2 定理 序数的运算和序数的大小。

(1) 如果$\beta\leq\alpha$，则$\beta+\gamma\leq\alpha+\gamma$。

(2) 如果$\beta<\gamma$，则$\alpha+\beta<\alpha+\gamma$。

(3) 如果$\beta\leq\alpha$，则$\beta\cdot\gamma\leq\alpha\cdot\gamma$。

(4) 如果$\beta<\gamma$且$\alpha\neq 0$，则$\alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\gamma$。

证 (1) 对γ使用超穷归纳法。

① $\gamma = 0$，则$\beta+\gamma = \beta+0 = \beta\leq\alpha = \alpha+0 = \alpha+\gamma$。

② γ是后继序数，则存在序数δ，使得

$$\gamma = \delta^+,$$

由归纳假设得

$$\beta+\delta\leq\alpha+\delta,$$

所以$\beta+\gamma = \beta+\delta^+ = (\beta+\delta)^+\leq(\alpha+\delta)^+ = \alpha+\delta^+ = \alpha+\gamma$。

③ γ是极限序数，由归纳假设得

$$\text{任给}\delta<\gamma\text{，都有}\beta+\delta\leq\alpha+\delta,$$

所以$\beta+\gamma = \sup\{\beta+\delta \mid \delta<\gamma\}\leq\sup\{\alpha+\delta \mid \delta<\gamma\} = \alpha+\gamma$。

(2) 对γ使用超穷归纳法。

① $\gamma = 0$。因为没有比 0 小的序数，所以

$$\beta<\gamma$$

为假，因此如果$\beta<\gamma$，则$\alpha+\beta<\alpha+\gamma$。

② γ是后继序数，则

$$\text{存在序数}\delta\text{，使得}\gamma = \delta^+\text{。}$$

如果$\beta<\gamma$，则$\beta<\delta^+$，所以

$$\beta<\delta\text{或}\beta = \delta,$$

由归纳假设得

$$\alpha+\beta<\alpha+\delta\text{或}\alpha+\beta = \alpha+\delta,$$

所以$\alpha+\beta\leq\alpha+\delta<(\alpha+\delta)^+ = \alpha+\delta^+ = \alpha+\gamma$。

③ γ是极限序数。如果$\beta<\gamma$，则$\beta^+<\gamma$，所以

$$\alpha+\beta^+\in\{\alpha+\delta \mid \delta<\gamma\},$$

因此$\alpha+\beta<(\alpha+\beta)^+ = \alpha+\beta^+\le\sup\{\alpha+\delta \mid \delta<\gamma\} = \alpha+\gamma$。

(3) 对γ使用超穷归纳法。

① $\gamma = 0$，则$\beta\cdot\gamma = \beta\cdot 0 = 0\le 0 = \alpha\cdot 0 = \alpha\cdot\gamma$。

② γ是后继序数，则

存在序数δ，使得$\gamma = \delta^+$，

由归纳假设得

$$\beta\cdot\delta\le\alpha\cdot\delta,$$

所以$\beta\cdot\gamma = \beta\cdot\delta^+ = \beta\cdot\delta+\beta\le\alpha\cdot\delta+\beta\le\alpha\cdot\delta+\alpha = \alpha\cdot\delta^+ = \alpha\cdot\gamma$。

③ γ是极限序数，由归纳假设得

任给$\delta<\gamma$，都有$\beta\cdot\delta\le\alpha\cdot\delta$，

所以$\sigma = \sup\{\beta\cdot\delta \mid \delta<\gamma\}\le\sup\{\alpha\cdot\delta \mid \delta<\gamma\} = \alpha\cdot\gamma$。

(4) 对γ使用超穷归纳法。

① $\gamma = 0$。因为没有比 0 小的序数，所以$\beta<\gamma$为假，因此如果$\beta<\gamma$，则$\alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\gamma$。

② γ是后继序数，则

存在序数δ，使得$\gamma = \delta^+$。

如果$\beta<\gamma$，则 $\beta<\delta^+$，所以

$$\beta<\delta\text{或}\beta = \delta,$$

由归纳假设得

$$\alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\delta\text{或}\alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\delta,$$

所以

$$\alpha\cdot\beta\le\alpha\cdot\delta,$$

由 $0<\alpha$和(2)得

$$\alpha\cdot\beta+0<\alpha\cdot\beta+\alpha,$$

所以$\alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\beta+0<\alpha\cdot\beta+\alpha\le\alpha\cdot\delta+\alpha = \alpha\cdot\delta^+ = \alpha\cdot\gamma$。

③ γ是极限序数。如果$\beta<\gamma$，则$\beta^+<\gamma$，所以

$$\alpha\cdot\beta^+\in\{\alpha\cdot\delta \mid \delta<\gamma\},$$

由 $0<\alpha$和(2)得

$$\alpha\cdot\beta+0<\alpha\cdot\beta+\alpha,$$

所以$\alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\beta+0<\alpha\cdot\beta+\alpha = \alpha\cdot\beta^+ \le\sup\{\alpha\cdot\delta \mid \delta<\gamma\} = \alpha+\gamma$。■

注意和自然数不同的是：

从$\beta<\alpha$不能推出$\beta+\gamma<\alpha+\gamma$，

从$\beta<\alpha$和$\gamma \ne 0$ 也不能推出$\beta\cdot\gamma<\alpha\cdot\gamma$，

以下就是一个例子。

5.4.3 例 任给 $n>0$，都有

$$n+\omega = \sup\{n+m \mid m<\omega\} = \omega$$

和

$$n\cdot\omega = \sup\{n\cdot m \mid m<\omega\} = \omega,$$

所以任给 $0<n<m$，都有

$n+\omega = \omega = m+\omega$和 $n\cdot\omega = \omega = m\cdot\omega$。

如果σ是极限序数，则$\sigma = \sup\mathbf{O}(\sigma)$，所以

$$\alpha+\sup\mathbf{O}(\sigma) = \alpha+\sigma = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\sigma\}$$
$$= \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in\mathbf{O}(\sigma)\},$$
$$\alpha\cdot\sup\mathbf{O}(\sigma) = \alpha\cdot\sigma = \sup\{\alpha\cdot\gamma \mid \gamma<\sigma\}$$
$$= \sup\{\alpha\cdot\gamma \mid \gamma\in\mathbf{O}(\sigma)\}。$$

这个结果可以推广到一般的序数集合，任给序数的集合 A，都有

$$\alpha+\sup A = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\},$$
$$\alpha\cdot\sup A = \sup\{\alpha\cdot\gamma \mid \gamma\in A\}。$$

从形式上看，就是序数的加法和乘法对上确界有分配律。

5.4.4 引理 A 是序数的集合。

(1) $\alpha+\sup A = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}$。

(2) $\alpha\cdot\sup A = \sup\{\alpha\cdot\gamma \mid \gamma\in A\}$。

证 (1) 如果 A 有最大元β，则由定理 5.4.2(2)可得

$\alpha+\beta$是$\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}$的最大元，

所以

$\sup A = \beta$且 $\sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\} = \alpha+\beta$，

因此$\alpha+\sup A = \alpha+\beta = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}$。

如果 A 没有最大元，则$\sigma = \sup A$ 就是极限序数。只需证明

$$\sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\sigma\} = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}$$

就行了，因为这样就有

$$\alpha+\sup A = \alpha+\sigma = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\sigma\} = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}。$$

任给$\alpha+\beta\in\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\sigma\}$，都有$\beta<\sigma$，由$\sigma = \sup A$ 和习题 5.3.6 得

存在$\delta\in A$，使得$\beta<\delta$，

由$\beta<\delta$和定理 5.4.2(2)得

$$\alpha+\beta<\alpha+\delta，$$

而$\alpha+\delta\in\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}$。

这就是说，任给$\alpha+\beta\in\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\sigma\}$，存在$\alpha+\delta\in\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}$，使得$\alpha+\beta<\alpha+\delta$，由习题 5.3.4 得

$$\sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\sigma\} \le \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}。$$

又因为 $A \subseteq \mathbf{O}(\sigma)$，所以

$$\sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}\le\sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in \mathbf{O}(\sigma)\} = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\sigma\}。$$

因此 $\sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\sigma\} = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}$。

(2) 类似于(1)，详细证明留给读者。■

有了这些准备，就可以证明序数运算的性质了。

5.4.5 定理 序数运算的性质

(1) 加法结合律 $\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$。

(2) 左分配律 $\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$。

(3) 乘法结合律 $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$。

(4) 加法左消去律 如果$\alpha+\beta = \alpha+\gamma$，则$\beta = \gamma$。

(5) 乘法左消去律 如果$\alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\gamma$且$\alpha \neq 0$，则$\beta = \gamma$。

证 (1) 对γ使用超穷归纳法。

① $\gamma = 0$，则$\alpha+(\beta+\gamma) = \alpha+(\beta+0) = \alpha+\beta$
$= (\alpha+\beta)+0 = (\alpha+\beta)+\gamma$。

② γ是后继序数，则存在序数δ，使得$\gamma = \delta^+$。由归纳假设得

$$\alpha+(\beta+\delta) = (\alpha+\beta)+\delta，$$

所以$\alpha+(\beta+\gamma) = \alpha+(\beta+\delta^+) = \alpha+(\beta+\delta)^+$
$= (\alpha+(\beta+\delta))^+ = ((\alpha+\beta)+\delta)^+$
$= (\alpha+\beta)+\delta^+ = (\alpha+\beta)+\gamma$。

③ γ是极限序数。由归纳假设可知，

任给$\delta<\gamma$，都有$\alpha+(\beta+\delta) = (\alpha+\beta)+\delta$，

所以

$$\{\alpha+(\beta+\delta) \mid \delta<\gamma\} = \{(\alpha+\beta)+\delta \mid \delta<\gamma\}，$$

令

$$A = \{\beta+\delta \mid \delta<\gamma\}，$$

则

$$\beta+\gamma = \sup\{\beta+\delta \mid \delta<\gamma\} = \sup A，$$

因此$\alpha+(\beta+\gamma) = \alpha+\sup A = \sup\{\alpha+\sigma \mid \sigma\in A\}$
$= \sup\{\alpha+(\beta+\delta) \mid \delta<\gamma\}$
$= \sup\{(\alpha+\beta)+\delta \mid \delta<\gamma\}$
$= (\alpha+\beta)+\gamma$。

(2) 对γ使用超穷归纳法。

① $\gamma = 0$，则$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot(\beta+0) = \alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\beta+0$
$= \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot 0 = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$。

② γ是后继序数，则

存在序数δ，使得$\gamma = \delta^+$。

由归纳假设得

$$\alpha\cdot(\beta+\delta) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\delta，$$

所以

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\beta+\gamma) &= \alpha\cdot(\beta+\delta^+) = \alpha\cdot(\beta+\delta)^+\\ &= \alpha\cdot(\beta+\delta)+\alpha = (\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\delta)+\alpha\\ &= \alpha\cdot\beta+(\alpha\cdot\delta+\alpha) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\delta^+\\ &= \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma。\end{aligned}$$

③ γ是极限序数。由归纳假设可知，

任给$\delta<\gamma$，都有$\alpha\cdot(\beta+\delta)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\delta$，

所以

$$\{\alpha\cdot(\beta+\delta)\mid\delta<\gamma\}=\{\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\delta\mid\delta<\gamma\},$$

令

$$A=\{\beta+\delta\mid\delta<\gamma\},\ B=\{\alpha\cdot\delta\mid\delta<\gamma\},$$

则

$$\beta+\gamma=\sup\{\beta+\delta\mid\delta<\gamma\}=\sup A,$$

$$\alpha\cdot\gamma=\sup\{\alpha\cdot\gamma\mid\delta<\gamma\}=\sup B,$$

因此$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\sup A=\sup\{\alpha\cdot\sigma\mid\sigma\in A\}=\sup\{\alpha\cdot(\beta+\delta)\mid\delta<\gamma\}$

$=\sup\{\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\delta\mid\delta<\gamma\}=\sup\{\alpha\cdot\beta+\sigma\mid\sigma\in B\}$

$=\alpha\cdot\beta+\sup B=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$。

(3) 对γ使用超穷归纳法。

① $\gamma=0$，则$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=\alpha\cdot(\beta\cdot 0)=\alpha\cdot 0=0$

$=(\alpha\cdot\beta)\cdot 0=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$。

② γ是后继序数，则

存在序数δ，使得$\gamma=\delta^+$。

由归纳假设得

$$\alpha\cdot(\beta\cdot\delta)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\delta,$$

所以$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=\alpha\cdot(\beta\cdot\delta^+)=\alpha\cdot(\beta\cdot\delta+\beta)$

$=\alpha\cdot(\beta\cdot\delta)+\alpha\cdot\beta=(\alpha\cdot\beta)\cdot\delta+\alpha\cdot\beta$

$=(\alpha\cdot\beta)\cdot\delta^+=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$。

③ γ是极限序数。由归纳假设可知，

任给$\delta<\gamma$，都有$\alpha\cdot(\beta\cdot\delta)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\delta$，

所以

$$\{\alpha\cdot(\beta\cdot\delta)\mid\delta<\gamma\}=\{(\alpha\cdot\beta)\cdot\delta\mid\delta<\gamma\},$$

令

$$A=\{\beta\cdot\delta\mid\delta<\gamma\},$$

则

$$\beta\cdot\gamma=\sup\{\beta\cdot\delta\mid\delta<\gamma\}=\sup A,$$

因此$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=\alpha\cdot\sup A=\sup\{\alpha\cdot\sigma\mid\sigma\in A\}$

$=\sup\{\alpha\cdot(\beta\cdot\delta)\mid\delta<\gamma\}$

$=\sup\{(\alpha\cdot\beta)\cdot\delta\mid\delta<\gamma\}$

$=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$。

(4)(5)留给读者。■

序数运算没有交换律。

5.4.6 例 任给 $n>1$，都有

$$\omega=\omega+0<\omega+n\text{ 和 }\omega=\omega\cdot 1<\omega\cdot n。$$

所以任给 $n>1$，都有

$$n+\omega=\omega\neq\omega+n\text{ 和 }n\cdot\omega=\omega\neq\omega\cdot n。$$

序数运算左边和右边的性质不对称，虽然有左分配律和左消去律，但没有右分配律和右消去律，请看下面的例子。

5.4.7 例 $(1+1)\cdot\omega=2\cdot\omega=\omega\neq\omega+\omega=1\cdot\omega+1\cdot\omega$。

$1+\omega=2+\omega$，$1\cdot\omega=2\cdot\omega$，但没有 $1=2$。

现在考虑序数的“减法”和“除法”，它们是自然数的“减法”和“除法”的推广。

自然数的“减法”是指：任给 $m,\ n\in\mathbf{N}$，如果 $m\leq n$，则存在惟一的 t，使得 $n=m+t$。

自然数的“除法”就是带余除法：任给 $m, n\in\mathbf{N}$，如果 $m\neq 0$，则存在惟一的 s 和 t，使得 $n=m\cdot s+t$ 且 $t<m$。

5.4.8 定理 序数的“减法”和“除法”。

(1) 任给序数α,β，如果$\beta\leq\alpha$，则存在惟一的δ，使得$\alpha=\beta+\delta$。

(2) 任给序数α,β，如果$\beta\neq 0$，则存在惟一的γ和δ，使得$\alpha=\beta\cdot\gamma+\delta$且$\delta<\beta$。

证 (1) 先证存在性，对α使用超穷归纳法。

① $\alpha=0$，则有$\beta\leq 0$ 得$\beta=0$，所以$\alpha=0=0+0=\beta+0$。

② α是后继序数，则

存在序数γ，使得$\alpha=\gamma^+$。

如果$\beta\leq\alpha$，则$\beta\leq\gamma^+$，所以

$\beta\leq\gamma$或$\beta=\gamma^+$。

当$\beta\leq\gamma$时，由归纳假设，

存在δ，使得$\alpha=\beta+\delta$，

所以

$$\alpha^+=(\beta+\delta)^+=\beta+\delta^+;$$

当$\beta=\alpha^+$时，有$\alpha^+=\beta+0$。

③ α是极限序数且$\beta\leq\alpha$。令

$$A=\{\beta+\gamma\mid\beta+\gamma<\alpha\},$$

$$B=\{\tau\mid\beta\leq\tau<\alpha\},$$

则

$$\sup A\leq\alpha\text{且}\sup B=\alpha。$$

任给$\tau\in B$，都有$\beta\leq\tau<\alpha$，由归纳假设，

存在γ，使得$\tau=\beta+\gamma$，

显然有$\beta+\gamma<\alpha$，所以

$$\tau\in A,$$

因此

$$B\subseteq A,$$

从而

$$\alpha=\sup B\leq\sup A。$$

最终得 $\sup A=\alpha$。

取$\delta=\sup\{\gamma\mid\beta+\gamma<\alpha\}$，则

$$\alpha=\sup A=\sup\{\beta+\gamma\mid\beta+\gamma<\alpha\}$$
$$=\beta+\sup\{\gamma\mid\beta+\gamma<\alpha\}=\beta+\delta。$$

再证惟一性。如果存在γ_1,γ_2，使得$\alpha=\beta+\gamma_1$且$\alpha=\beta+\gamma_2$，则

$$\beta+\gamma_1=\beta+\gamma_2,$$

由加法的左消去律(定理 5.4.5(4))得$\gamma_1=\gamma_2$。

(2) 证存在性。取$\gamma=\sup\{\tau\mid\beta\cdot\tau\leq\alpha\}$，则

$$\beta\cdot\gamma=\beta\cdot\sup\{\tau\mid\beta\cdot\tau\leq\alpha\}=\sup\{\beta\cdot\tau\mid\beta\cdot\tau\leq\alpha\}\leq\alpha,$$

由(1)得

存在δ，使得$\alpha=\beta\cdot\gamma+\delta$。

如果$\beta\leq\delta$，则$\beta\cdot\gamma^+=\beta\cdot\gamma+\beta\leq\beta\cdot\gamma+\delta=\alpha$，所以

$$\gamma^+\in\{\tau\mid\beta\cdot\tau\leq\alpha\},$$

矛盾，因此$\delta<\beta$。

证惟一性。如果存在$\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2$，使得

$$\alpha=\beta\cdot\gamma_1+\delta_1=\beta\cdot\gamma_2+\delta_2,\ \delta_1<\beta\text{且}\delta_2<\beta。$$

如果$\gamma_1\neq\gamma_2$，不妨设$\gamma_1<\gamma_2$，则$\gamma_1{}^+\leq\gamma_2$，所以

$$\beta\cdot\gamma_1+\delta_1<\beta\cdot\gamma_1+\beta=\beta\cdot\gamma_1{}^+\leq\beta\cdot\gamma_2\leq\beta\cdot\gamma_2+\delta_2,$$

矛盾，因此$\gamma_1=\gamma_2$。再由加法的左消去律(定理 5.4.5(4))得$\delta_1=\delta_2$。

■

这里我们再次遇到了序数运算的左右不对称性。对于序数的“减法”和“除法”只能从左边做，而不能从右边做，请读者自己举例说明。

习题 5.4

5.4.1 证明序数运算的以下性质。

(1) $0+\alpha=\alpha$，$0\cdot\alpha=0$。

(2) $\alpha^+=\alpha+1$。

(3) $\alpha\cdot1=\alpha$，$1\cdot\alpha=\alpha$。

5.4.2 证明引理 5.4.4(2)。即证明$\alpha\cdot\sup A=\sup\{\alpha\cdot\gamma\mid\gamma\in A\}$。

5.4.3 证明加法和乘法的左消去律。

(1) 如果$\alpha+\beta=\alpha+\gamma$，则$\beta=\gamma$。

(2) 如果$\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma$且$\alpha\neq0$，则$\beta=\gamma$。

5.4.4 证明：任给序数都可以表示为$\sigma+n$ 形式，其中σ是极限序数或 0，$n\in\mathbf{N}$。

5.4.4 举例说明没有右边的“减法”和“除法”。

5.5　有序和与有序积

基数运算的直观意义是集合的并和集合的卡氏积。序数运算是由超穷归纳定义所建立的，它们是否也有一个由良序集的构造所代表的意义呢？确实也有。

序数加法的直观意义是两个良序集的并，序数乘法的直观意义是两个良序集的卡氏积。两个良序集的并不仅仅是作为集合的并，而且还需要在集合的并上构造一种特殊的良序，类似地，两个良序集的卡氏积也需要在作为集合的卡氏积上构造一种特殊的良序。

我们已经在习题 5.1.1 和习题 5.1.5 中构造了这两种特殊的良序。在这里再给出明确的定义。

5.5.1 定义　A, B 是良序集，$A\cap B = \varnothing$，$\leq_A$ 和 $\leq_B$ 分别是 A 和 B 上的良序，由习题 5.1.5 可知，$\leq_A\cup\leq_B\cup(A\times B)$ 是 $A\cup B$ 上的良序，这个良序记为 $\leq_A\oplus\leq_B$。

$\leq_A\oplus\leq_B$ 的直观意义是：B 中所有元素排在 A 中所有元素之后，原来的次序保持不变(图 5.5.1)。

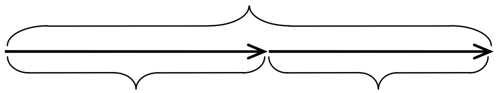

图 5.5.1

5.5.2 定义　A, B 是良序集，$\leq_A$ 和 $\leq_B$ 分别是 A 和 B 上的良序，由习题 5.1.1 可知

$$\{<<x, y>, <u, v>> \mid x<_B u \text{ 或}(x = u \text{ 且 } y\leq_A v)\}$$

是 $B\times A$ 上的良序，这个良序记为 $\leq_B\otimes\leq_A$。

$\leq_B\otimes\leq_A$ 的直观意义是：将 $B\times A$ 中的有序对 $<x, y>$ 按以下方法排成序，先按第一元素的大小排列，在第一元素相等的有序对中，按第二元素的大小排列，这就是所谓的字典排列法(图 5.5.2)。

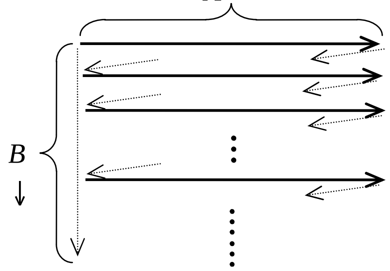

图 5.5.2

利用 $\leq_A\oplus\leq_B$ 和 $\leq_B\otimes\leq_A$ 可以构造两个良序集的并和两个良序集的卡氏积。

5.5.3 定义　有序和　A, B 是良序集，$A\cap B = \varnothing$，$\leq_A$ 和 $\leq_B$ 分别是 A 和 B 上的良序，以 $\leq_A\oplus\leq_B$ 为良序的良序集 $A\cup B$ 称为 A 和 B 的有序和，记为 $A\oplus B$。

以后使用 $A\oplus B$ 时，总是假定 $A\cap B = \varnothing$。当 $\leq_A$ 和 $\leq_B$ 分别是 A 和 B 上的良序时，使用 $\leq_A\oplus\leq_B$ 也总假定 $A\cap B = \varnothing$。

5.5.4 定义　有序积　A, B 是良序集，$\leq_A$ 和 $\leq_B$ 分别是 A 和 B 上的良序，以 $\leq_B\otimes\leq_A$ 为为良序的良序集 $B\times A$ 称为 A 和 B 的有序积，记为 $B\otimes A$。

以下是一些例子。

5.5.5 例　$<\mathbf{N}_n, \leq> \oplus <\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_n, \leq> = <\mathbf{N}, \leq>$，

$<\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_n, \leq> \oplus <\mathbf{N}_n, \leq> = <\mathbf{N}, R_n>$。

$<\mathbf{N}, \leq> \otimes <\mathbf{N}, \leq> = <\mathbf{N}\times\mathbf{N}, S>$。

有序和和有序积在相似映射下不变。

5.5.6 定理　如果 $A_1\cong A_2$，$B_1\cong B_2$，则 $A_1\oplus B_1\cong A_2\oplus B_2$，

$B_1\otimes A_1\cong B_2\otimes A_2$。

证 设 f 是 A_1 到 A_2 的相似映射，g 是 B_1 到 B_2 的相似映射。则

$$h：A_1\cup B_1\to A_2\cup B_2 \quad h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{如果 } x\in A_1 \\ g(x) & \text{如果 } x\in B_1 \end{cases}$$

和

$$h_2：B_1\times A_1\to B_2\times A_2 \quad h_1(x, y) = \langle g(x), f(y)\rangle$$

分别是 $A_1\oplus B_1$ 到 $A_2\oplus B_2$ 和 $B_1\otimes A_1$ 到 $B_2\otimes A_2$ 的相似映射。■

为了证明有序和确实表达了序数的加法，有序积确实表达了序数的乘法，先来证明有序和有序积的一些性质。

5.5.7 定理 A, B 是良序集，$C\subseteq B$，$\le_A$ 和 $\le_B$ 分别是 A 和 B 上的良序。

(1) $\le_A\oplus(\le_B|_C) = (\le_A\oplus\le_B)|_{A\cup C}$。

(2) $(\le_B|_C)\otimes\le_A = (\le_B\otimes\le_A)|_{C\times A}$。

(3) 如果 C 是 B 的前段，则 $(\le_B|_C)\oplus(\le_B|_{B\setminus C}) = \le_B$。

证 (1) $\langle x, y\rangle\in(\le_A\oplus\le_B)|_{A\cup C}$

当且仅当

$$\langle x, y\rangle\in\le_A\oplus\le_B \text{ 且 } x, y\in A\cup C，$$

因为 $x, y\in A\cup C$，所以

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle\in\le_A \text{ 当且仅当 } & \langle x, y\rangle\in\le_A，\langle x, y\rangle\in\le_B \\ \text{当且仅当 } & \langle x, y\rangle\in\le_B|_C，\langle x, y\rangle\in A\times B \\ \text{当且仅当 } & \langle x, y\rangle\in A\times C，\end{aligned}$$

因此 $\langle x, y\rangle\in(\le_A\oplus\le_B)|_{A\cup C}$ 当且仅当 $\langle x, y\rangle\in\le_A\oplus(\le_B|_C)$(图 5.5.3)。

(2) $\langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle\in(\le_B\otimes\le_A)|_{C\times A}$

当且仅当

$$\langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle\in(\le_B\otimes\le_A) \text{ 且 } x, u\in C，$$

因为 $x, u\in C$，所以

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle\in\le_B \text{ 当且仅当 } & \langle x, y\rangle\in\le_B|_C，\langle u, v\rangle\in\le_A \\ \text{当且仅当 } & \langle u, v\rangle\in\le_A，\end{aligned}$$

因此

$$\langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle\in(\le_B\otimes\le_A)|_{C\times A}$$

当且仅当

$$\langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle\in(\le_B|_C)\otimes\le_A \text{(图 5.5.4)。}$$

(3) 首先有 $B\cap(B\setminus C)=\varnothing$，所以 $(\le_B|_C)\oplus(\le_B|_{B\setminus C})$ 的定义是合理的。

任给 $\langle x, y\rangle\in\le_B$，如果 $y\in C$，则由 C 是 B 的前段得 $x\in C$，所以 $\langle x, y\rangle\in\le_B$；如果 $x\in B\setminus C$，则由 C 是 B 的前段得 $y\in B\setminus C$，所以 $\langle x, y\rangle\in\le_B|_{B\setminus C}$；如果 $x\in C$ 且 $y\in B\setminus C$，则 $\langle x, y\rangle\in C\times(B\setminus C)$，这证明了在所有情况下，都有

$$\langle x, y\rangle\in(\le_B|_C)\oplus(\le_B|_{B\setminus C})。$$

因此 $\le_B\subseteq(\le_B|_C)\oplus(\le_B|_{B\setminus C})$。

显然 $\le_B|_C\subseteq\le_B$ 且 $\le_B|_{B\setminus C}\subseteq\le_B$，又因为 C 是 B 的前段，所以 $C\times(B\setminus C)\subseteq\le_B$。因此 $(\le_B|_C)\oplus(\le_B|_{B\setminus C})\subseteq\le_B$(图 5.5.5)。■

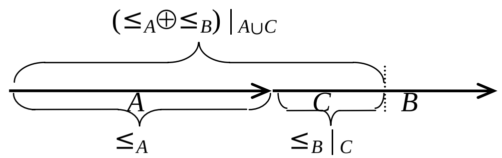

图 5.5.3

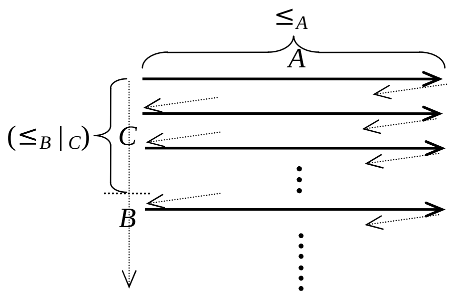

图 5.5.4

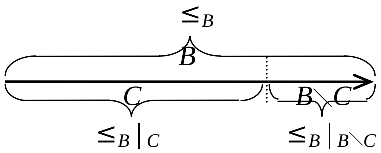

图 5.5.5

证明两个良序集相等，不但要证明它们作为集合是相等的，而且还要证明它们有同样的良序。当它们是另一个良序集的子集，特别是它们是另一个良序集的前段时，它们就有同样的良序。

如果 A, B 是良序集，则当我们说 B 是 A 的子集时，不但要求 $B \subseteq A$，而且要求 A 的良序限制在 B 上恰好是 B 上的良序，这时我们可以用同样的符号表示 A 上和 B 上的良序。

5.5.8 定理 A, B 是良序集。

(1) 如果 C 是 B 的前段，则 $A\oplus C$ 是 $A\oplus B$ 的前段。

(2) 如果 C 是 B 的前段，则 $C\otimes A$ 是 $B\otimes A$ 的前段。

(3) 如果 $a\in B$，则 $A\oplus B(a) = (A\oplus B)(a)$，$A\oplus B[a] = (A\oplus B)[a]$。

(4) 如果 $a\in B$，则 $B[a]\otimes A = (B(a)\otimes A)\oplus(\{a\}\otimes A)$。

(5) 如果任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，B_i 都是 B 的前段，则

$$A\oplus(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i}) =\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A\oplus B_\mathrm{i}，(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i})\otimes A = \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}(B_\mathrm{i}\otimes A)。$$

证 (1) 首先由定理 5.5.7(1)得 $A\oplus C$ 是 $A\oplus B$ 的子集，所以可以用≤同时表示 $A\oplus C$ 和 $A\oplus B$ 上的良序。又由习题 5.1.5 得 B 和 C 分别是 $A\oplus C$ 和 $A\oplus B$ 的子集，所以也用≤表示 C 和 B 上的良序。

任给 $x\in A\oplus C$，任给 $y\in A\oplus B$，如果 $y\le x$，则当 $y\in A$ 时，有 $y\in A\oplus C$，当 $y\in B$ 时，必有 $x\notin A$，由 $x\in A\oplus C$ 和 $x\notin A$ 得

$$x\in C，$$

由 $y\le x$ 和 C 是 B 的前段得

$$y\in C，$$

也有 $y\in A\oplus C$。

因此 $A\oplus C$ 是 $A\oplus B$ 的前段(图 5.5.6)。

(2) 首先由定理 5.5.7(2)得 $C\otimes A$ 是 $B\otimes A$ 的子集，所以可以用≤同时表示 $C\otimes A$ 和 $B\otimes A$ 上的良序。

任给$<x, y>\in C\otimes A$，任给$<u, v>\in B\otimes A$，如果$<u, v>\le<x, y>$，则当 $u<_B x$ 时，由 $x\in C$ 和 C 是 B 的前段得 $u\in C$，所以

$$<u, v>\in C\otimes A，$$

当 $u = x$ 时，显然有$<u, v>\in C\otimes A$。

因此 $C\otimes A$ 是 $B\otimes A$ 的前段(图 5.5.7)。

(3) 和(1)类似，$A\oplus B, A$ 和 B 上的良序都用≤表示。

因为 $a\in B$，所以 $x\in A$ 当且仅当 $x\in A$ 且 $x<a$，因此

$$x\in A \text{ 或}(x\in B \text{ 且 } x<a)\text{当且仅当}(x\in A \text{ 且 } x<a)\text{或}(x\in B \text{ 且 } x<a)$$
$$\text{当且仅当}(x\in A \text{ 或 } x\in B)\text{且 } x<a，$$

最终得

$$\begin{aligned} x\in A\oplus B(a) &\text{ 当且仅当 } x\in A \text{ 或}(x\in B \text{ 且 } x<a)\\ &\text{ 当且仅当 } (x\in A \text{ 或 } x\in B)\text{且 } x<a\\ &\text{ 当且仅当 } x\in(A\oplus B)(a)。\end{aligned}$$

因此 $A\oplus B(a) = (A\oplus B)(a)$(图 5.5.8)。

类似地可证 $A\oplus B[a] = (A\oplus B)[a]$ (图 5.5.9)。

(4) 设 $B(a)$和 A 的良序分别为$\le_B\otimes\le_A$，由(2)得

$$(B(a)\otimes A)\text{是 } B[a]\otimes A \text{ 的前段，}$$

又$\{a\}\times A = (B[a]\times A)\setminus(B(a)\times A)$，所以由定理 5.5.7(3)得

$$\begin{aligned}\le_B\otimes\le_A &= (\le_B\otimes\le_A)|_{B(a)\times A}\oplus(\le_B\otimes\le_A)|_{\{a\}\times A}\\ &= (\le_B|_{B(a)}\otimes\le_A)\oplus(\le_B|_{\{a\}}\otimes\le_A)。\end{aligned}$$

因此 $B[a]\otimes A = (B(a)\otimes A)\oplus(\{a\}\otimes A)$ (图 5.5.10)。

(5) 因为 $A\oplus(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i})$和$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}(A\oplus B_\mathrm{i})$都是 $A\oplus B$ 的前段，又

$$A\cup(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i}) = \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}(A\cup B_\mathrm{i})，$$

所以 $A\oplus(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} B_\mathrm{i}) = \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} (A\oplus B_\mathrm{i})$。

因为$(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i})\otimes A$ 和$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}(B_\mathrm{i}\otimes A)$ 都是 $B\otimes A$ 的前段，又

$$(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i})\times A = \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}(B_\mathrm{i}\times A)，$$

所以$(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i})\otimes A = \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}(B_\mathrm{i}\otimes A)$。■

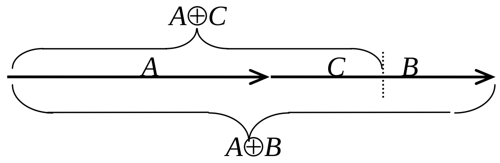

图 5.5.6

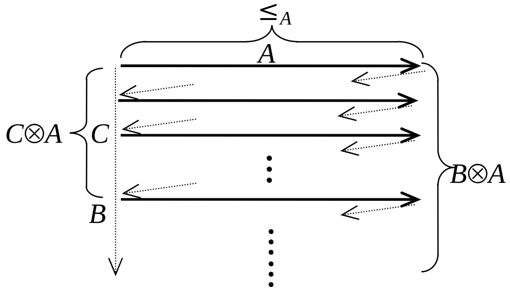

图 5.5.7

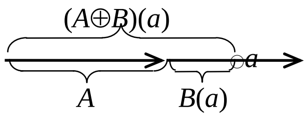

图 5.5.8

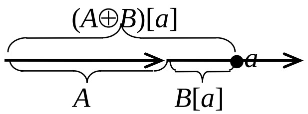

图 5.5.9

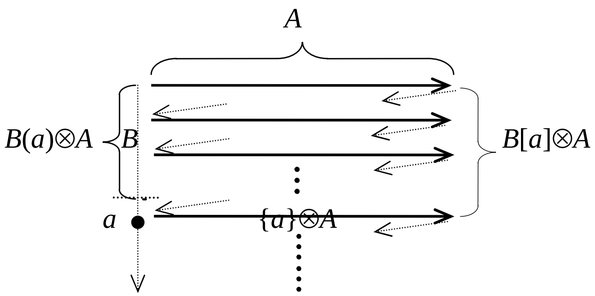

图 5.5.10

有了这些准备，我们来证明有序和就是序数加法的直观意义，有序积就是序数乘法的直观意义。

5.5.9 定理 A, B 是良序集。

(1) $\overline{A\oplus B}=\overline{A}+\overline{B}$。

(2) $\overline{B\otimes A}=\overline{A}\cdot\overline{B}$。

证 (1) 对 $\overline{B}$ 使用超穷归纳法。

① $\overline{B}=0$，则 $B=\varnothing$，所以

$$\overline{A\oplus B}=\overline{A\oplus\varnothing}=\overline{A}=\overline{A}+0=\overline{A}+\overline{B}。$$

② $\overline{B}$ 是后继序数，则 B 有最大元 a 且 $B[a]=B$，又

$$\overline{B[a]}=\overline{B(a)}^{+}，$$

由归纳假设得

$$\overline{A\oplus B(a)}=\overline{A}+\overline{B(a)}，$$

所以 $\overline{A\oplus B}=\overline{A\oplus B[a]}=\overline{(A\oplus B)[a]}$

$$=\overline{(A\oplus B)(a)}^{+}=\overline{A\oplus B(a)}^{+}$$

$$=(\overline{A}+\overline{B(a)})^{+}=\overline{A}+\overline{B(a)}^{+}$$

$$=\overline{A}+\overline{B[a]}=\overline{A}+\overline{B}。$$

③ $\overline{B}$ 是极限序数，则 B 没有最大元，由习题 5.1.3 得

$$B=\bigcup_{a\in B}B(a)，$$

由定理 5.5.8(5)得

$$A\oplus B=A\oplus\bigcup_{a\in B}B(a)=\bigcup_{a\in B}(A\oplus B(a))，$$

由习题 5.3.6 得

$$\overline{B}=\overline{\bigcup_{a\in B}B(a)}=\sup\{\overline{B(a)}\mid a\in B\}$$

和

$$\overline{A\oplus B}=\overline{\bigcup_{a\in B}(A\oplus B(a))}=\sup\{\overline{A\oplus B(a)}\mid a\in B\}。$$

任给 $a\in B$，都有 $\overline{B(a)}<\overline{B}$，由归纳假设得

$$\overline{A\oplus B(a)}=\overline{A}+\overline{B(a)}，$$

所以 $\overline{A\oplus B}=\sup\{\overline{A\oplus B(a)}\mid a\in B\}=\sup\{\overline{A}+\overline{B(a)}\mid a\in B\}$

$$=\overline{A}+\sup\{\overline{B(a)}\mid a\in B\}=\overline{A}+\overline{B}。$$

(2) 对 $\overline{B}$ 使用超穷归纳法。

① $\overline{B}=0$，则 $B=\varnothing$，所以

$$\overline{B\otimes A}=\overline{\varnothing\otimes A}=\overline{\varnothing}=0=\overline{A}\cdot 0=\overline{A}\cdot\overline{B}。$$

② $\overline{B}$ 是后继序数，则 B 有最大元 a 且 $B[a]=B$，由定理 5.5.8(4)得

$$B[a]\otimes A=(B(a)\otimes A)\oplus(\{a\}\otimes A)，$$

由(1)得

$$\overline{B[a]\otimes A}=\overline{B(a)\otimes A}+\overline{\{a\}\otimes A}，$$

由归纳假设得

$$\overline{B(a)\otimes A}=\overline{A}\cdot\overline{B(a)}，$$

所以 $\overline{B\otimes A}=\overline{B[a]\otimes A}=\overline{B(a)\otimes A}+\overline{\{a\}\otimes A}$，

$$=\overline{A}\cdot\overline{B(a)}+\overline{A}=\overline{A}\cdot\overline{B(a)}^{+}$$

$$=\overline{A}\cdot\overline{B[a]}=\overline{A}\cdot\overline{B}。$$

③ $\overline{B}$ 是极限序数，则 B 没有最大元，由习题 5.1.3 得

$$B=\bigcup\nolimits_{a\in B}B(a)，$$

由定理 5.5.8(5)得

$$B\otimes A=(\bigcup\nolimits_{a\in B}B(a))\otimes A=\bigcup\nolimits_{a\in B}(B(a)\otimes A)，$$

由习题 5.1.3 得

$$\overline{B}=\overline{\bigcup\nolimits_{a\in B}B(a)}=\sup\{\overline{B(a)}\mid a\in B\}$$

和

$$\overline{B\otimes A}=\overline{\bigcup\nolimits_{a\in B}(B(a)\otimes A)}=\sup\{\overline{B(a)\otimes A}\mid a\in B\}。$$

任给 $a\in B$，都有 $\overline{B(a)}<\overline{B}$，由归纳假设得

$$\overline{B(a)\otimes A}=\overline{A}\cdot\overline{B(a)}，$$

所以 $\overline{B\otimes A}=\sup\{\overline{B(a)\otimes A}\mid a\in B\}=\sup\{\overline{A}\cdot\overline{B(a)}\mid a\in B\}$

$$=\overline{A}\cdot\sup\{\overline{B(a)}\mid a\in B\}=\overline{A}\cdot\overline{B}。\blacksquare$$

由定理 5.5.9，从序数运算的性质可以得到有序和和有序积的性质。如从序数运算的结合律可以得到

$$A\oplus(B\oplus C)\cong(A\oplus B)\oplus C \text{ 和 } (C\otimes B)\otimes A\cong C\otimes(B\otimes A)，$$

从序数运算的分配律可以得到

$$(B\oplus C)\otimes A\cong(B\otimes A)\oplus(C\otimes A)。$$

实际上有

$$A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C \text{ 和 } (B\oplus C)\otimes A=(B\otimes A)\oplus(C\otimes A)。$$

在定义序数的运算时，考虑的是加法和乘法的一致性，如它们都有左消去律，而定义有序积时，考虑的是日常的习惯(字典排列法)，这样它们的次序正好相反。

习题 5.5

5.5.1　证明：

(1) $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$。

(2) $\{a\}\otimes A\cong A$。

5.5.2　证明：

(1) 如果 B 是 A 的前段，则 $B\oplus C$ 相似于 $A\oplus C$ 的前段。

(2) 如果 B 是 A 的前段，则 $C\otimes B$ 相似于 $C\otimes A$ 的前段。

5.5.3　R 是二元关系，A 是集合，定义

$$\mathrm{H}(A,R)=\{\langle\langle x,y\rangle,\langle x,v\rangle\rangle\mid x\in A,\ \langle y,v\rangle\in R\}$$

$$\mathrm{L}(R,A)=\{\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle\mid x\neq u,\ \langle x,u\rangle\in R \text{ 且 } y,v\in A\}$$

证明：

(1) $\mathrm{H}(A\cup B,R)=\mathrm{H}(A,R)\cup\mathrm{H}(B,R)$。

(2) $\mathrm{L}(R\cup S,A)=\mathrm{L}(R,A)\cup\mathrm{L}(S,A)$。

(3) 如果 $B\cap C=\varnothing$，则 $\mathrm{L}(B\times C,A)=(B\times A)\times(C\times A)$。

(4) 如果 $\leq_A$ 和 $\leq_B$ 分别是 A 和 B 上的良序，则

$$\leq_B\otimes\leq_A=\mathrm{H}(B,\leq_A)\cup\mathrm{L}(\leq_B,A)。$$

(5) 如果 $\leq_A$, $\leq_B$ 和 $\leq_C$ 分别是 A, B 和 C 上的良序且 $B\cap C=\varnothing$，则

$$(\leq_B\oplus\leq_C)\otimes\leq_A=(\leq_B\otimes\leq_A)\oplus(\leq_C\otimes\leq_A)。$$

(6) $(B\oplus C)\otimes A=(B\otimes A)\oplus(C\otimes A)$。