

第九章 集合论悖论

9.1 集合论悖论

将集合定义为任何一堆东西的总体，不但不精确(所以严格地说根本不是定义)，而且还会产生矛盾，这就是形形色色的集合论悖论。最主要的有序数悖论、基数悖论和 Russell 悖论。

序数悖论 令 Ord 是全体序数的集合，由定理 5.3.12 得

存在序数 α ，使得任给 $\beta \in \text{Ord}$ ，都有 $\alpha > \beta$ ，

所以

$$\alpha \notin \text{Ord},$$

但由 α 是序数得

$$\alpha \in \text{Ord},$$

矛盾。

基数悖论 令 \mathbf{V} 是全体集合的集合，令 $A = \bigcup \mathbf{V}$ ，则

任给集合 $X \in \mathbf{V}$ ，都有 $X \subseteq A$ ，

所以对于集合 $P(A) \in \mathbf{V}$ ，也有

$$P(A) \subseteq A,$$

所以

$$|P(A)| \leq |A|,$$

但由 Cantor 定理(定理 4.4.1)得

$$|P(A)| > |A|$$

矛盾。

Russell 悖论 Russell 将集合分成两类，自身是自身的元素的集合(即满足 $X \in X$ 的集合 X)称为第一类集合，自身不是自身的元

素的集合(即满足 $X \notin X$ 的集合 X)称为第二类集合。全体第二类集合的集合是哪一类呢？

如果它是第一类的，则由第一类集合的定义，它就是它自身的元素，而它的元素都是第二类的，所以它是第二类的。如果它是第二类的，则因为第二类的集合都是它的元素，所以它就是它自身的元素，由第一类集合的定义，它是第一类的。

用形式的方法可以更简单地叙述 Russell 悖论，令

$$\mathbf{Rus} = \{X \mid X \text{ 是集合且 } X \notin X\},$$

则任给集合 X ，都有

$$X \in \mathbf{Rus} \text{ 当且仅当 } X \notin X,$$

所以对于集合 \mathbf{Rus} 也有

$$\mathbf{Rus} \in \mathbf{Rus} \text{ 当且仅当 } \mathbf{Rus} \notin \mathbf{Rus},$$

这就是矛盾。

Russell 悖论是集合论中最著名的悖论。虽然序数悖论和基数悖论发现较早，但因为它们涉及到序数、基数等概念，人们往往倾向于认为问题出在那些概念上，而不是集合概念本身。Russell 悖论只涉及到集合和属于关系，它的发现使人们认识到问题确实出在集合概念本身。

因为当时 Peano 和 Frege 已经将数学建立在集合的基础上，所以集合论出现的问题对整个数学产生了巨大的影响。Frege 的话可以代表这种巨大影响的力量，Frege 在接到 Russell 告诉他 Russell 悖论的信后曾说：“在工作结束之后而发现那大厦的基础已经动摇，对于一个科学工作者来说，没有比这更为不幸的了。”

集合论悖论产生的根源在哪里呢？如何解决呢？

以 Brouwer 为代表的直觉主义认为问题出在无限集合，他们从直觉主义哲学观出发，认为数学是一个创造过程，只能接受越来越大的有限集合，而不能接受无限集合。以自然数为例，只能承认有越来越大的自然数，因此任何时候只能有自然数的有限集合，而不能承认有全体自然数这样一个无限集合。

按直觉主义的数学观，有相当一部分古典数学不能被承认，能够承认的部分也弄得非常复杂，所以他们的主张很难被数学界所接受。但他们的主张和观点对现代逻辑的发展起了重要作用。

Russell 和其他一些人认为集合论悖论产生的原因在于所谓的“恶性循环”，“恶性循环”是指一个集合中某些元素的定义中用到了这个集合本身，每个集合论悖论中都有这样的定义存在。为此 Russell 根据排除“恶性循环”的原则，提出了类型论。

类型论的主要思想是将集合论讨论的对象分成不同的类型，只允许相同的类型的元素组成集合。作为解决悖论，类型论是漂亮的。但由于它过于复杂，作为数学基础并不合适，而且为了推出全部数学，还必须引进很有争议的可化归公理。不过它在现在逻辑中仍有重要的地位。

排除“恶性循环”的主张过于激烈，因为大多数这样的定义并不产生矛盾。在 Cantor 定理的证明中，在数学一些基本概念的定义中，都有“恶性循环”，要把这些证明和定义全部改成没有“恶性循环”的证明和定义，不但相当复杂而且有些是做不到的。实际上，类型论也没有排除所有的“恶性循环”。

另一解决集合论悖论的方案是公理集合论。它的最早的倡导者 Zermelo 认为，由于集合论悖论，直观的集合概念必须加以限制，但没有一种有效的限制方法，所以应该采取相反的方法。公理集合论是采用不加定义的集合的概念，用公理来确定哪些东西是集合，也用公理来确定集合有哪些性质。要求这些公理的范围足够窄，以保证不产生悖论，又要求这些公理的范围足够宽，能容纳全部数学。

现在用得最多的是由 Zermelo 提出的，经过 Fraenkel 和 Skolom 修改的 ZFC 系统(或没有选择公理的 ZF 系统)。ZFC 中只有一个初始概念——集合。

另一个常用的是由 Von Neumann 提出的，经过 Gödel 和 Bernays 修改的 NGB 系统。在 NGB 中作了类和集合的区分，允

许多不是集合的类的存在，如全体集合的类 V ，全体基数的类 $Card$ 和全体序数的类 Ord ，等等。Von Neumann 指出，悖论产生的原因并不在于承认这些类，而在于将这些类当作集合。只要不将这些类当作集合，就不会产生悖论。如果不允许这些类的存在，就会丢掉很多有用的数学手段。

这两个系统本质上是一样的，它们关于集合的限制也是相同的，从而有相同的关于集合的定理。

将直观的集合概念作类和集合的区别，仍然可以在直观的背景上进行，用直观和素朴的观点对待类和集合，可以在素朴集合论中避免已经发现的那些悖论。

用直观和素朴的观点，通过类和集合的区别来讨论集合论悖论，肯定是不深刻的，也不是集合论悖论的解决方案。通过类和集合的差异来说明集合论悖论，是作者的一种尝试，在这里仅仅是简单的介绍，没有详细和严格的论证。这样一种思路，目的是抛砖引玉，以求促进人们进一步地思考和探讨集合论和集合论悖论。

习题 9.1

9.1.1 证明：从全体基数的集合 $Card$ 能够推出矛盾。

9.1.2 A 是集合，如果任给 $n \in \mathbb{N}$ ，存在集合 A_n ，使得

$$A_0 = A \text{ 且任给 } n \in \mathbb{N}, \text{ 都有 } A_{n+1} \in A_n,$$

则称 A 是奇异集合，不是奇异集合的集合称为正则集合。证明：

(1) 如果 $A \in A$ ，则 A 是奇异集合。

(2) 如果 A 是奇异集合，则存在集合 $B \in A$ ，使得 B 是奇异集合。

(3) 从全体正则集合的集合 Reg 能够推出矛盾。

9.2 类和集合

原来说一堆东西的总体是一个集合。在应用集合的概念时，我们实际上总是假定有一堆东西，就有一堆东西的总体。正是由于这个没有指出的假定，我们才得到了全体集合的集合 **V**，全体基数的集合 **Card** 和全体序数的集合 **Ord** 等产生悖论的集合。这些悖论的发现使我们认识到上述假定是不对的，我们必须将一堆东西和一堆东西的总体加以区别。

类 任何一堆东西称为一个类，类没有任何限制。

集合 如果一堆东西的总体存在，则称这堆东西是一个集合。在这种情况下，可以将这堆东西和这堆东西的总体看作等同的。

真类 不是集合的类称为真类。

集合论悖论说明了真类是存在的。实际上，从区分类和集合的角度，每个集合论悖论都可以看作是用反证法证明了所构造的类不是集合。

例如，在 Russell 悖论证明中， $\mathbf{Rus} = \{X \mid X \text{ 是集合且 } X \notin X\}$ 是一个类，既然从 **Rus** 是集合推出矛盾，就说明了 **Rus** 不是集合。类似地，从习题 9.1.2 可以证明全体正则集合的类 **Reg** 不是集合。

如果一堆东西的总体存在，则它就是一个东西，就可以和其它东西一起构成类，从而可以成为其它类的一个元素。如果一堆东西的总体不存在，则它只能是一堆东西而不能是一个东西，从而不能成为其它类的一个元素。

所以，集合就是可以作为其它类的元素的类，真类就是不可以作为其它类的元素的类，可以用属于关系将它们严格定义如下：

9.2.1 定义 集合和真类 A 是一个类，如果

存在类 B ，使得 $A \in B$ ，

则称 A 是一个集合。如果

不存在类 B ，使得 $A \in B$ ，

则称 A 是一个真类。

一堆东西的总体存在，也就是说可以从整体把握这堆东西。真类的存在告诉我们，有的一堆东西，虽然其中每一个我们都能认识，但我们无法从总体上把握这堆东西。

前面对于集合的讨论中，极大部分只用到集合作为一堆东西的性质，而不需要假定这堆东西的总体存在，这样的讨论在类上也是成立的。

9.2.2 定义 子类 A 和 B 都是类，如果

任给 x ，从 $x \in B$ 得到 $x \in A$ ，

则称 B 是 A 的子类，也称 B 包含于 A ，记为 $B \subseteq A$ 。

9.2.3 定义 类的运算 A 和 B 都是类，

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ ，

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ ，

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ ，

分别称为 A 和 B 的交、 A 和 B 并、 A 和 B 差。

前面讨论的关于集合运算的大多数性质对于类的运算也是成立的，如交换律、结合律、吸收律、幂等律、分配律、De-Morgan 律(参见定理 1.3.9 和 1.4.5)，类运算和子类的关系(参见定理 1.3.7 和 1.4.4)等。

每个元素都是集合的非空类称为集合族，这个集合族的定义和以前稍有差别。

9.2.4 定义 集合族的交和并 Γ 是集合族，

$\bigcap \Gamma = \{x \mid \text{任给 } X \in \Gamma, \text{ 都有 } x \in X\}$ ，

$\bigcup \Gamma = \{x \mid \text{存在 } X \in \Gamma, \text{ 使得 } x \in X\}$ ，

分别称为 Γ 的交和 Γ 的并。

前面讨论的关于集合族的交和并的大多数性质现在仍然成立，如结合律、分配律、De-Morgan 律(参见定理 1.5.11)，集合族的交和并和子类的关系(参见定理 1.5.10)等。

下面定义卡氏积和关系，为了简单起见，我们使用有序对的

集合表示法。

有序对 $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, 所以必须认为两个元素的类(无序对)是集合, 才能定义卡氏积和关系。两个元素的类是集合应该没有问题。

9.2.5 定义 卡氏积 A 和 B 是两个类, 类

$$\{\langle x, y \rangle \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\}$$

称为 A 和 B 的卡氏积, 记为 $A \times B$ 。

前面讨论的关于集合卡氏积的大多数性质对于类的卡氏积也是成立的, 如卡氏积的对于交、并、差的分配律(参见定理 1.6.4), 类的卡氏积和子类的关系(参见定理 1.6.3)等。

9.2.6 定义 关系 有序对的类称为关系。

R 是关系, 可以定义 R 的定义域

$$\text{dom}(R) = \{x \mid \text{存在 } y, \text{ 使得 } \langle x, y \rangle \in R\},$$

和 R 的值域

$$\text{ran}(R) = \{y \mid \text{存在 } x, \text{ 使得 } \langle x, y \rangle \in R\}。$$

同样有 $R \subseteq \text{dom}(R) \times \text{ran}(R)$ 。

R 和 Q 是关系, 可以定义 R 的逆

$$R^{-1} = \{\langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R\},$$

和 R 与 Q 的复合

$$Q \circ R = \{\langle x, y \rangle \mid \text{存在 } z, \text{ 使得 } \langle x, z \rangle \in R \text{ 且 } \langle z, y \rangle \in Q\}。$$

同样有 $(R^{-1})^{-1} = R$ 和 $S \circ (Q \circ R) = (S \circ Q) \circ R$ 。

其它性质也和前面定义的集合的相应概念的性质类似(参见定理 8.1.8 和 3.1.6、习题 3.1.3 等)。

A 是类, 如果关系 $R \subseteq A \times A$, 则称 R 是 A 上的关系。

可以进一步定义 A 上的等价关系(参见定义 3.2.1)、 A 上的偏序关系(参见定义 3.3.1)、 A 上的良序关系(参见定义 5.1.1), 等等。它们的性质对于类也是成立的。

利用类上的关系可以简化一些问题的叙述和讨论。如我们有:

(1) 包含关系 \subseteq 是全体集合的类 V 上的偏序关系(参见定理

1.2.7)。

(2) 等势是全体集合的类 V 上的等价关系(参见定理 4.1.2), 所有和集合 A 等势的集合组成的类就是 A 的等价类。

(3) 相似是全体偏序集的类上的等价关系(参见定理 3.4.16), 它限制在全体良序集的类上就是良序集的相似(参见定理 5.1.13), 所有和良序集 A 相似的良序集组成的类就是 A 的等价类。

(4) 序数的小于等于关系是全体序数的类 Ord 上的良序关系(参见定理 5.3.3 和 5.3.9)。

(5) (在选择公理下)基数的小于等于关系是全体基数的类 Card 上的良序关系(参见定理 4.2.7、6.2.3 和 6.2.4)。

我们用关系定义映射。

9.2.7 定义 映射 F 是一个关系, 如果

$$\text{任给 } \langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle \in F, \text{ 都有 } y = z,$$

则称 F 是一个映射。

9.2.8 定义 A 到 B 的映射 A 和 B 是类, F 是映射, 如果 F 满足: $\text{dom}(F) = A$ 且 $\text{ran}(F) \subseteq B$, 则称 F 是 A 到 B 的映射, 记为 $F: A \rightarrow B$ 。

类似地, 我们还可以定义单射、满射、双射(参见定义 8.1.10、8.1.12 和 8.1.13), 映射的限制和复合(参见定义 8.1.7), 子类的像和逆像(参见定义 2.4.1 和 2.4.7)。它们和前面定义的相应概念有类似的性质(参见定理 8.1.16、8.1.17、8.1.18、2.2.13、2.3.4、2.3.5、2.3.6、2.4.3、2.4.4 和 2.4.9 等)。

有些关于集合的概念不能推广到类上, 最重要的有幂集 $P(A)$ 和卡氏幂 B^A 。

对于一个类来说, 我们无法保证它的子类是集合, 所以不能形成以这些子类为元素的类。类似地, 我们无法保证从一个类到一个类的映射是集合, 所以不能形成以这些映射为元素的类。

最后, 我们用映射来严格表述和证明超穷归纳定义。

如果我们对每个序数 α 定义了 K_α , 则

$$F = \{ \langle \alpha, K_\alpha \rangle \mid \alpha \in \mathbf{Ord} \}$$

是一个关系。按“定义”的含义，一个序数 α 只能定义一个 K_α ，所以 F 还是一个映射。我们对每个序数 α 都定义了 K_α ，所以 F 的定义域 $\text{dom}(F) = \mathbf{Ord}$ 。如果我们取类 A ，使得 $\{K_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{Ord}\} \subseteq A$ ，则 F 就是 \mathbf{Ord} 到 A 的映射

因此，可以用 \mathbf{Ord} 到 A 的映射 F 来严格表述“对每个序数 α 定义 K_α ”。在这种表述下， K_α 就是 $F(\alpha)$ 。

超穷归纳定义的关键是“由所有 $\beta < \alpha$ 的 K_β 来定义 K_α ”，“所有 $\beta < \alpha$ 的 K_β ”就是集合 $\{K_\beta \mid \beta < \alpha\}$ ，用 F 来表示就是 $\{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ ，也就是 $F[\mathbf{O}(\alpha)]$ 。

所以“由所有 $\beta < \alpha$ 的 K_β 来定义 K_α ”就是用 $F[\mathbf{O}(\alpha)]$ 来定义 $F(\alpha)$ 。如果定义的方法用 \mathbf{V} 到 A 的映射 G 来表示，则“由所有 $\beta < \alpha$ 的 K_β 来定义 K_α ”就是说映射 F 满足 $F(\alpha) = G(F[\mathbf{O}(\alpha)])$ 。

另外，当给定一种方法 G 后，得到的定义 F 应该是惟一的。

综合以上讨论，超穷归纳定义的严格表述就是：

任给 \mathbf{V} 到 A 的映射 G ，存在惟一的 \mathbf{Ord} 到 A 的映射 F ，使得任给序数 α ，都有 $F(\alpha) = G(F[\mathbf{O}(\alpha)])$ 。

以下是超穷归纳定义的严格证明。证明的思路是：先对每个序数 σ ，证明存在惟一的满足类似条件的 $\mathbf{O}(\sigma)$ 到 A 的映射，再用这些映射构造惟一的满足条件的 \mathbf{Ord} 到 A 的映射 F 。

9.2.9 引理 A 是类， G 是 \mathbf{V} 到 A 的映射， F_1 是 $\mathbf{O}(\sigma)$ 到 A 的映射， F_2 是 $\mathbf{O}(\delta)$ 到 A 的映射， $\sigma \leq \delta$ 。如果 F_1 和 F_2 满足：任给序数 $\alpha \in \mathbf{O}(\sigma)$ ，都有

$$F_1(\alpha) = G(F_1[\mathbf{O}(\alpha)]) \text{ 且 } F_2(\alpha) = G(F_2[\mathbf{O}(\alpha)])$$

则 $F_1 = F_2 \upharpoonright_{\mathbf{O}(\sigma)}$ 。

证 对 $\alpha \in \mathbf{O}(\sigma)$ 归纳证明 $F_1(\alpha) = F_2(\alpha)$ 。

如果任给 $\beta < \alpha$ ，都有 $F_1(\beta) = F_2(\beta)$ ，则 $F_1[\mathbf{O}(\alpha)] = F_2[\mathbf{O}(\alpha)]$ ，

所以 $F_1(\alpha) = G(F_1[\mathbf{O}(\alpha)]) = G(F_2[\mathbf{O}(\alpha)]) = F_2(\alpha)$ 。

9.2.10 引理 A 是类， G 是 \mathbf{V} 到 A 的映射，则任给序数 σ ，

都存在惟一的 $\mathbf{O}(\sigma)$ 到 A 的映射 F_σ ，使得

任给 $\alpha \in \mathbf{O}(\sigma)$ ，都有 $F_\sigma(\alpha) = G(F_\sigma[\mathbf{O}(\alpha)])$ 。

证 由引理 9.2.9 得 F_σ 的惟一性，以下对 σ 归纳证明存在满足条件的 F_σ 。

(1) $\sigma = 0$ ，取 $F_\sigma = \emptyset$ ，则 $\text{dom}(F_\sigma) = \text{dom}(\emptyset) = \emptyset = \mathbf{O}(\sigma)$ 。

(2) σ 是后继序数 β^+ ，由归纳假设，存在 F_β 满足条件。取

$$F_\sigma = \{ \langle \alpha, G(F_\beta[\mathbf{O}(\alpha)]) \rangle \mid \alpha \in \mathbf{O}(\sigma) \},$$

则任给 $\alpha \in \mathbf{O}(\beta)$ ，都有 $F_\sigma(\alpha) = G(F_\beta[\mathbf{O}(\alpha)]) = F_\beta(\alpha)$ ，所以，

任给 $\alpha \in \mathbf{O}(\sigma)$ ，都有 $F_\sigma[\mathbf{O}(\alpha)] = F_\beta[\mathbf{O}(\alpha)]$ ，

因此，任给 $\alpha \in \mathbf{O}(\sigma)$ ，都有 $F_\sigma(\alpha) = G(F_\beta[\mathbf{O}(\alpha)]) = G(F_\sigma[\mathbf{O}(\alpha)])$ 。

(3) σ 是极限序数，由归纳假设，任给 $\alpha \in \sigma$ ，都存在 F_α 满足条件。取

$$F_\sigma = \{ \langle \alpha, F_{\alpha^+}(\alpha) \rangle \mid \alpha \in \mathbf{O}(\sigma) \},$$

则任给 $\alpha \in \mathbf{O}(\sigma)$ ，任给 $\gamma \in \mathbf{O}(\alpha)$ ，由引理 9.2.9 得

$$F_{\gamma^+}(\gamma) = F_{\alpha^+}(\gamma),$$

所以

$$F_\sigma(\gamma) = F_{\gamma^+}(\gamma) = F_{\alpha^+}(\gamma),$$

所以，

任给 $\alpha \in \mathbf{O}(\sigma)$ ，都有 $F_\sigma[\mathbf{O}(\alpha)] = F_{\alpha^+}[\mathbf{O}(\alpha)]$ ，

因此，任给 $\alpha \in \mathbf{O}(\sigma)$ ，都有

$$F_\sigma(\alpha) = F_{\alpha^+}(\alpha) = G(F_{\alpha^+}[\mathbf{O}(\alpha)]) = G(F_\sigma[\mathbf{O}(\alpha)]).$$

9.2.11 引理 A 是类， G 是 \mathbf{V} 到 A 的映射， F_1 和 F_2 都是 \mathbf{Ord} 到 A 的映射。如果 F_1 和 F_2 满足：任给序数 $\alpha \in \mathbf{Ord}$ ，都有

$$F_1(\alpha) = G(F_1[\mathbf{O}(\alpha)]) \text{ 且 } F_2(\alpha) = G(F_2[\mathbf{O}(\alpha)])$$

则 $F_1 = F_2$ 。

证 类似于引理 9.2.9，将 $\alpha \in \mathbf{O}(\sigma)$ 改为 $\alpha \in \mathbf{Ord}$ 。详细证明留给读者。

9.2.12 定理 超穷归纳定义 A 是类， G 是 \mathbf{V} 到 A 的映射，则存在惟一的 \mathbf{Ord} 到 A 的映射 F ，使得

任给 $\alpha \in \mathbf{Ord}$, 都有 $F(\alpha) = G(F[\mathbf{O}(\alpha)])$ 。

证 由引理 9.2.11 得 F 的惟一性。

由引理 9.2.10 得任给序数 α , 都存在惟一的 $\mathbf{O}(\alpha)$ 到 A 的映射 F_α , 满足

任给 $\gamma \in \mathbf{O}(\alpha)$, 都有 $F_\alpha(\gamma) = G(F_\alpha[\mathbf{O}(\gamma)])$ 。

取

$$F = \{ \langle \alpha, F_{\alpha^+}(\alpha) \rangle \mid \alpha \in \mathbf{Ord} \} ,$$

则任给 $\alpha \in \mathbf{Ord}$, 任给 $\gamma \in \mathbf{O}(\alpha)$, 由引理 9.2.9 得

$$F_{\gamma^+}(\gamma) = F_{\alpha^+}(\gamma) ,$$

所以

$$F(\gamma) = F_{\gamma^+}(\gamma) = F_{\alpha^+}(\gamma) ,$$

所以 ,

任给 $\alpha \in \mathbf{Ord}$, 都有 $F[\mathbf{O}(\alpha)] = F_{\alpha^+}[\mathbf{O}(\alpha)]$,

因此 , 任给 $\alpha \in \mathbf{Ord}$, 都有

$$F_\alpha(\alpha) = F_{\alpha^+}(\alpha) = G(F_{\alpha^+}[\mathbf{O}(\alpha)]) = G(F[\mathbf{O}(\alpha)])。$$

习题 9.2

9.2.1 证明引理 9.1.11。

9.2.2 超穷归纳定义第二形式 A 是类 , $a \in A$, H 是 A 到 A 的映射 , G 是 \mathbf{V} 到 A 的映射 , 则存在惟一的 \mathbf{Ord} 到 A 的映射 F , 满足 :

(1) $F(0) = a_0$ 。

(2) $F(\alpha^+) = H(F(\alpha))$ 。

(3) 如果 σ 是极限序数 , 则 $F(\sigma) = G(F[\mathbf{O}(\sigma)])$ 。

9.3 从素朴的观点看集合论悖论

作出类和集合的区别 , 就可以简单地说 , 集合论悖论产生的原因在于将真类当作集合来应用。但是这样说几乎等于什么都没说 , 仅仅是将集合论悖论转化为什么是集合的问题 , 实际上任何一种解决集合论悖论的方案 , 最关键的都是要确定什么的集合。所以 , 要用素朴的观点来分析和解决集合论悖论 , 就需要进一步讨论如何在类中区分出集合来 , 即用什么样的标准来判定哪些类是集合。

类和集合是非常一般的概念 , 什么是集合的问题是不能彻底回答的。只有随着数学实践来确定哪些类是集合 , 哪些类是真类 , 任何时间 , 总有一些类无法确定其到底是不是集合。不可能有一个一劳永逸的方法将它们完全确定 , 这和我们无法一劳永逸的确定整个宇宙一样。

这样的看法并不是说我们对于悖论无所作为 , 恰恰相反 , 从这种观点出发 , 不但可以解决已出现的悖论 , 而且对于将来可能出现的新的悖论也能正确对待 , 只需再次排除某些集合就可以了。

详细地说 , 随着数学的实践 , 我们能够确定一些类作为集合 , 随着矛盾的出现 , 我们又可以确定一些类是真类。建立在集合论基础上的数学大厦既不会被已出现的悖论所动摇也不会被以后出现的悖论所动摇 , 至多只需调整其中的某些部分。这实际上也是大多数数学工作者对待集合论悖论的态度。

到目前为止 , 有什么类应该是集合呢 ? 当然 , 人们的看法有所不同 , 但大多数人还是有一些公共的看法。

(1) 有限类是集合 有限的一堆东西可以在整体把握应该是没有什么问题的。

(2) 集合的子类是集合 由类的意义 , 一个集合的任何一部分元素可以组成类 , 这个性质保证了这样的类是集合。

对于性质(2)是可以提出质疑的。一堆东西可以在整体上把握，并没有充分理由保证它的一部分也是可以在整体上把握的。以自然数为例，通过充分理解 $0, 1, 2, \dots$ 的序关系可以从整体上把握全体自然数的集合，但对于自然数的一个无规律的子类(如果每个规律都是由刻画自然数性质的语言所表示，则这样的子类一定存在)，就很难说出一个理由可以从整体上把握它。

不过，虽然性质(2)没有太充足的理由，但人们还是倾向于接受它。

在性质(2)下，我们称集合的子类为子集。如果 A 和 B 都是集合，则 $A \cap B$ 和 $A \setminus B$ 都是 A 的子集，所以交和差这两种运算对于集合是封闭的。注意，如果两个类的交(或差)是集合，则这两个类并不一定是集合。

因为集合的子类是集合，所以如果一个类的子类是真类，则这个类也是真类。因为 $\mathbf{Rus} \subseteq \mathbf{V}$ ，所以我们证明了 \mathbf{Rus} 是真类也就证明了 \mathbf{V} 是真类。

9.3.1 定理 全体集合的类 \mathbf{V} 是真类。

证 用反证法。设 \mathbf{V} 是集合，取 \mathbf{V} 的子类

$$\mathbf{Rus} = \{x \mid x \in \mathbf{V} \text{ 且 } x \notin x\}$$

则 \mathbf{Rus} 也是一个集合，所以 $\mathbf{Rus} \in \mathbf{V}$ 。

由 \mathbf{Rus} 的定义可知，任给 $x \in \mathbf{V}$ ，都有

$$x \in \mathbf{Rus} \text{ 当且仅当 } x \notin x,$$

所以对于 $\mathbf{Rus} \in \mathbf{V}$ 也有

$$\mathbf{Rus} \in \mathbf{Rus} \text{ 当且仅当 } \mathbf{Rus} \notin \mathbf{Rus},$$

矛盾。

因为集合 A 的每个子集都是集合，所以全体这样的子集可以组成了 A 的幂集

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}.$$

注意 $P(A)$ 只是一个类。仅有性质(2)，我们并不能证明 $P(A)$ 是一个集合。

(3) 集合的幂集是集合 直观地说，如果一堆东西可以从整体上把握，则也可以从整体上把握由它的全体子集组成的类。

性质(3)的问题更多。整体上把握这样的类几乎毫无道理。接受它有两个重要的原因，一是数学中没有它不行，二是还未发现它带来矛盾。

最好的作法应该是，在某种限制下的幂集才是集合。但目前还找不到合适的限制，只好接受“所有的幂集都是集合”。

因为 $|A| < |P(A)|$ ，所以性质(3)还说明了有越来越大的基数。

Γ 是集合族， Γ 的并 $\bigcup \Gamma$ 是一个类。当 Γ 是集合时， $\bigcup \Gamma$ 是否是集合呢？

(4) 是集合的集合族的并是集合 这是说如果集合族 Γ 是集合，则它的并 $\bigcup \Gamma$ 也是集合。

性质(4)的直观意义是，如果一堆东西分成若干部分，每一部分可以从整体上把握，也就是每个部分的总体都存在，而这些总体放在一起也能从整体上把握，则这堆东西就能从整体上把握。

A 和 B 是集合， A 和 B 组成的类 $\{A, B\}$ 是集合，所以

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\}$$

也是集合，因此集合对于并运算是封闭的。

因为两个集合的并是集合，所以，如果一个真类分成两个类的并，则其中必有一个是真类。

A 和 B 是集合，由定理 8.1.4 得

$$A \times B \subseteq P(P(A \cup B)),$$

所以 $A \times B$ 是集合，这说明了集合对于卡氏积也是封闭的。如果 A 是集合，则 A 上关系也是集合，因为 A 上关系是 $A \times A$ 的子集。特别的，如果 A 是集合，则 A 到 A 的映射(它也是 A 上关系)是集合。

如果没有无限集合，则性质(2)、(3)、(4)都是性质(1)的推论，因为有限集合的子集、幂集和并都是有有限集，而性质(1)是毫无疑问的。因此可以说，没有无限集合，也就不需要集合论了。

没有无限集合，也就没有全体自然数的集合。虽然我们可以从全体自然数的类构造出全体整数的类和全体有理数的类(需要适当修改第八章的构造方法，用等价类中的一个元素代替等价类)，但没有有理数的集合，是无法构造出全体实数的类来的。没有实数，数学剩下的大概不会太多了。因此数学是需要无限集合的。

(5) 存在无限集合。

有了无限集合，就有全体自然数的集合，再使用子集、幂集和集合的并三种集合的构造方法，就能得到数学中使用的极大多数集合。

通过 Russell 悖论(将它当作一种反证法)，我们得到了全体集合的类 V 是真类(定理 9.3.1)。用类似的方法可以证明更多的类是真类。

9.3.2 定理 V 是全体集合的类， F 是 V 到 A 的双射，则 A 是真类。

证 用反证法。设 A 是集合，取 A 的子类

$$B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin F^{-1}(x)\}$$

则 B 也是一个集合，所以 $B \in V$ ，因此 $F(B) \in A$ 。

由 B 的定义可知，任给 $x \in A$ ，都有

$$x \in B \text{ 当且仅当 } x \notin F^{-1}(x),$$

所以对于 $F(B) \in A$ 也有

$$F(B) \in B \text{ 当且仅当 } F(B) \notin F^{-1}(F(B)),$$

也就是，

$$F(B) \in B \text{ 当且仅当 } F(B) \notin B,$$

矛盾。

如果 F 是 V 到 A 的单射，则 F 就是 V 到 $F[A]$ 的双射，由定理 9.3.2 得 $F[A]$ 是真类，又因为 $F[A]$ 是 A 的子类，所以 A 也是真类。

这样，我们可以通过构造 V 到类 A 的单射来证明类 A 是真类。

如将集合 X 对应到有序对 $\langle X, X \rangle$ 就能证明全体有序对的类是真类，将集合 X 对应到 X 的恒等映射 i_X 就能证明全体集合到集合的映射组成的类是真类，等等。

定理 9.3.2 告诉我们，和真类 V 一一对应的类也是真类，一个自然的推广是：和真类一一对应的类也是真类。注意，这个推广并不能证明，所以我们需要关于集合的一条重要性质。

(6) 和集合一一对应的类是集合 详细地说就是：如果存在 A 到 B 的双射，则 A 是集合当且仅当 B 是集合。

这六条性质比较直观，它们所决定的集合基本上满足了数学的需要。

当然，由于哲学(对世界的某种看法)、方法(数学推理的简化)、美(理论的完满性)等方面的原因，可以增加和限制所肯定的集合，也可以实质性的改变这六条性质。标准是它能够避免已经发现的悖论和能够为数学提供足够多的集合。

习题 9.3

9.3.1 V 是全体集合的类， A 是类。不使用性质(6)证明：如果存在 V 到 A 的单射，则 A 是真类。

9.3.2 证明以下的类是真类。

(1) P 是全体有序对的类。

(2) F 是全体集合到集合的映射的类。

(3) κ 是不为 0 的基数， $C_\kappa = \{X \mid X \in V \text{ 且 } |X| = \kappa\}$ 。

(4) α 是不为 0 的序数， $O_\alpha = \{X \mid X \text{ 是良序集且 } \bar{X} = \alpha\}$ 。