第三章　关　　系

3.1　关系　二元关系

A 到 B 的映射可以看做 A 的元素和 B 的元素间的一种联系，除由映射确定的元素间的联系以外，元素之间还可以有其它的联系。

有的联系是同一个集合中的元素间的联系。如事物的因果联系，事物发生的先后，都是事物间的联系。a 和 b 是兄弟，a 和 b 是父子，都是人和人间的联系。又如在自然数中，n 加 m 等于 k 是三个自然数的联系，n 乘 m 等于 s 乘 t 是四个自然数的联系。

有的联系是不同集合中的元素间的联系。如 a 毕业于学校 b 是人类的元素和学校的元素间的联系，又如 a 住在 b 国是人类的元素和国家的元素间的联系。

以上联系有三个特征。首先，每个联系都有一个自然数 n，这个联系是指 n 个元素间的联系。其次，这样的联系有确定性，即任给 n 个元素，都能确定它们是否有联系。最后，这样的联系一般地和次序有关，n 个元素在一种次序下有某种联系，换一种次序可能没有这种联系，如 a 和 b 是父子，b 和 a 不是父子。

从以上这些例子可以抽象出 n 元关系的概念。所谓 n 元关系就是有确定性的 n 个元素有次序的一种联系。

没有确定的 n 的联系不能看做一种关系。如同学这种联系，平时人们常对两个、三个或更多的人谈论他们是否是同学，在这个意义上理解同学，就不能将它看做一种关系，要将同学看做关系，只能是两个人之间的联系，而将三个人是同学理解为这三个

人中每两个都是同学，更多的人是同学也要作类似的理解。

有确定的 n 的联系也不一定能简单看做一种关系，如两个苹果质量的好坏，两件工艺品的优劣等。这和集合的情况是类似的，要把这类联系看做关系，必须给出一个确定的标准。

要确定一个 n 元关系，只要确定哪 n 个元素依次序有这种关系就行了。依次序考虑 n 个元素，等于考虑一个 n 元有序组，以后用说一个 n 元有序组有关系代替说 n 个元素依次序有关系。将有关系的 n 元有序组放在一起，就构成了一个 n 元有序组的集合，这个集合完全确定了这个关系。因此在集合论中用 n 元有序组的集合定义 n 元关系

3.1.1 定义　关系　$n\geq 2$，n 元有序组的集合称为 n 元关系。

以后说 n 元关系总是指 $n\geq 2$。n 元关系一般用英文大写字母 R, Q, S 等表示。

3.1.2 定义　A 上 n 元关系　R 是 n 元关系，R 中每个 n 元有序组中的每个元素都是 A 的元素，即 $R\subseteq A^n$，则称 R 是 A 上 n 元关系。它刻画了 A 中 n 个元素的一种联系。

n 元关系中最重要的是二元关系，特别是 A 上二元关系。以下是二元关系和 A 上二元关系的几个例子。

3.1.3 例　**R** 和 **N** 上的小于等于关系分别是

$$R=\{<x, y> \mid x, y\in\mathbf{R} \text{ 且 } x\leq y\}$$

和

$$Q=\{<x, y> \mid x, y\in\mathbf{N} \text{ 且 } x\leq y\}。$$

3.1.4 例　令 A = 人类。有相同父母和父子关系都是 A 上的二元关系，它们可以分别表示为：

$$R=\{<x, y> \mid x, y\in A \text{ 且 } x, y \text{ 有相同父母}\}$$

和

$$Q=\{<x, y> \mid x, y\in A \text{ 且 } x \text{ 是 } y \text{ 的父亲}\}。$$

3.1.5 例　集合族Γ上的包含关系是

$$R=\{<A, B> \mid A, B\in\Gamma\text{且 } A\subseteq B\},$$

相交关系是

$$Q = \{<A, B> \mid A, B\in\Gamma\text{且 } A\cap B \neq \varnothing\}。$$

3.1.6 例 f 是映射，$G(f) = \{<x, y> \mid x\in\mathrm{dom}(f)\text{且 } y = f(x)\}$是二元关系，这个关系称为 f 的图象。由 $G(f)$的定义可知：

$$<x, y>\in G(f)\text{当且仅当 } y = f(x)。$$

所以 $G(f)$的性质和 f 的性质密切相关。

3.1.7 例 $I_A = \{<x, x> \mid x\in A\}$称为 A 上恒等关系。它的意义就是元素的相等，也就是 A 中每个元素恰好和自己有这种联系。

3.1.8 例 A^2 称为 A 上全关系。它的意义是：A 中任意两个元素，不管次序如何，都有这种联系。

现在讨论 n 元关系的性质。

3.1.9 定义 关系的限制 $B \subseteq A$，R 是 A 上 n 元关系。因为 $R\cap B^n \subseteq B^n$，所以 $R\cap B^n$ 是 B 上 n 元关系，这个关系称为 R 在 B 上的限制，记为 $R\mid_B$，即 $R\mid_B = R\cap B^n$。

3.1.10 例 在例 3.1.3 中 $R\mid_{\mathbf{N}} = Q$。对于恒等关系和全关系来说，如果 $B\subseteq A$，则 $I_A\mid_B = I_B$，$A^2\mid_B = B^2$。

A 上 n 元关系是 A 中 n 个元素依次序的一种联系，对于 B 中 n 个元素考虑同样的联系，就得到了 B 上一个 n 元关系，这个关系就是记为 $R\mid_B$。用属于关系可以将这点表示如下：

任给 $x_1,\cdots, x_n\in B$，$<x_1,\cdots, x_n>\in R\mid_B$ 当且仅当$<x_1,\cdots, x_n>\in R$。

反之，如果 B 上 n 元关系 S 满足

任给 $x_1,\cdots, x_n\in B$，$<x_1,\cdots, x_n>\in S$ 当且仅当$<x_1,\cdots, x_n>\in R$，

则 $S = R\mid_B$。

关系的限制与关系的交和并有以下性质。

3.1.11 定理 R 和 Q 是 A 上 n 元关系，$B\subseteq A$，则

(1) 如果 $Q\subseteq R$，则 $Q\mid_B\subseteq R\mid_B$。

(2) $R\mid_B\cap Q\mid_B = (R\cap Q)\mid_B$。

(3) $R\mid_B\cup Q\mid_B = (R\cup Q)\mid_B$。

证 (1) 任给$<x_1,\cdots, x_n>\in Q\mid_B$，都有

$$<x_1,\cdots, x_n>\in Q\text{ 且 } x_1,\cdots, x_n\in B,$$

由$<x_1,\cdots, x_n>\in Q$ 和 $Q\subseteq R$ 得

$$<x_1,\cdots, x_n>\in R,$$

由$<x_1,\cdots, x_n>\in R$ 和 $x_1,\cdots, x_n\in B$ 得$<x_1,\cdots, x_n>\in R\mid_B$。

(2) 任给$<x_1,\cdots, x_n>\in R\mid_B\cap Q\mid_B$，都有

$$<x_1,\cdots, x_n>\in R\mid_B\text{ 且}<x_1,\cdots, x_n>\in Q\mid_B,$$

由$<x_1,\cdots, x_n>\in R\mid_B$ 得

$$<x_1,\cdots, x_n>\in R\text{ 且 } x_1,\cdots, x_n\in B,$$

由$<x_1,\cdots, x_n>\in Q\mid_B$ 得

$$<x_1,\cdots, x_n>\in Q\text{ 且 } x_1,\cdots, x_n\in B,$$

由$<x_1,\cdots, x_n>\in R$ 和$<x_1,\cdots, x_n>\in Q$ 得

$$<x_1,\cdots, x_n>\in R\cap Q,$$

由$<x_1,\cdots, x_n>\in R\cap Q$ 和 $x_1,\cdots, x_n\in B$ 得

$$<x_1,\cdots, x_n>\in (R\cap Q)\mid_B。$$

因此 $R\mid_B\cap Q\mid_B\subseteq (R\cap Q)\mid_B$。

由 $R\cap Q\subseteq R$ 和(1)得

$$(R\cap Q)\mid_B\subseteq R\mid_B,$$

由 $R\cap Q\subseteq Q$ 和(1)得

$$(R\cap Q)\mid_B\subseteq Q\mid_B,$$

因此$(R\cap Q)\mid_B\subseteq R\mid_B\cap Q\mid_B$。

(3) 类似(2)，详细证明留给读者。■

二元关系是有序对的集合，所以可以有交、并和差三种集合的运算。二元关系的交、并和差仍是二元关系，A 上二元关系的交、并和差仍是 A 上二元关系。

二元关系还有两个重要的运算。

3.1.12 定义 逆关系 R 是二元关系，二元关系

$$\{<x, y> \mid <y, x>\in R\}$$

称为 R 的逆关系，记为 R^{-1}。用属于关系表示就是：

$$<x, y>\in R^{-1}\text{ 当且仅当}<y, x>\in R。$$

3.1.13 例 **R** 和 **N** 上的小于等于关系的逆分别是 **R** 和 **N** 上的大于等于关系。

3.1.14 定义 关系的复合 R 和 Q 是二元关系，二元关系

$\{\langle x, y\rangle \mid$ 存在 z，使得$\langle x, z\rangle\in R$ 且$\langle z, y\rangle\in Q\}$

称为 R 和 Q 的复合，记为 $Q\circ R$。用属于关系表示就是：

$\langle x, y\rangle\in Q\circ R$ 当且仅当(存在 z，使得$\langle x, z\rangle\in R$ 且$\langle z, y\rangle\in Q$)。

$Q\circ R$ 代表这样一种联系：两个元素能通过一个中间元素而联系，前一个元素和中间元素的联系是 R，中间元素和后一个元素的联系是 Q。

3.1.15 例 对于例 3.1.4 中的父子关系 Q，有

$Q\circ Q = \{\langle x, y\rangle \mid x, y\in A$ 且 x 是 y 的祖父$\}$。

二元关系的这两种运算有以下性质。

3.1.16 定理 R, Q 和 S 是二元关系。

(1) 如果 R 和 Q 是 A 上二元关系，则 R^{-1} 和 $Q\circ R$ 也是 A 上二元关系。

(2) $(R^{-1})^{-1} = R$。

(3) $S\circ(Q\circ R) = (S\circ Q)\circ R$。

证 (1) 略。

(2) $\langle x, y\rangle\in(R^{-1})^{-1}$ 当且仅当$\langle y, x\rangle\in R^{-1}$

当且仅当$\langle x, y\rangle\in R$，

因此$(R^{-1})^{-1} = R$。

(3) $\langle x, y\rangle\in S\circ(Q\circ R)$

当且仅当

(存在 v，使得$\langle x, v\rangle\in Q\circ R$ 且$\langle v, y\rangle\in S$)。

而

$\langle x, v\rangle\in Q\circ R$

当且仅当

(存在 u，使得$\langle x, u\rangle\in R$ 且$\langle u, v\rangle\in Q$)。

所以

$\langle x, y\rangle\in S\circ(Q\circ R)$

当且仅当

(存在 u, v，使得$\langle x, u\rangle\in R$ 且$\langle u, v\rangle\in Q$ 且$\langle v, y\rangle\in S$)。

又

$\langle x, y\rangle\in(S\circ Q)\circ R$

当且仅当

(存在 u，使得$\langle x, u\rangle\in R$ 且$\langle u, y\rangle\in S\circ Q$)。

而

$\langle u, y\rangle\in S\circ Q$

当且仅当

(存在 v，使得$\langle u, v\rangle\in Q$ 且$\langle v, y\rangle\in S$)。

所以

$\langle x, y\rangle\in(S\circ Q)\circ R$

当且仅当

(存在 u, v，使得$\langle x, u\rangle\in R$ 且$\langle u, v\rangle\in Q$ 且$\langle v, y\rangle\in S$)。

由以上综合而得

$\langle x, y\rangle\in S\circ(Q\circ R)$ 当且仅当 $\langle x, y\rangle\in(S\circ Q)\circ R$，

因此 $S\circ(Q\circ R) = (S\circ Q)\circ R$。■

定理 3.1.16(3)说明了 $S\circ(Q\circ R)$和$(S\circ Q)\circ R$ 都表示了这样一种联系：两个元素通过两个中间元素而联系，其中前一个元素和第一个中间元素的联系是 R，两个中间元素的联系是 Q，第二个中间元素和后一个元素的联系是 S。

二元关系的这两种运算和二元关系的限制有以下性质。

3.1.17 定理 R, Q 是 A 上二元关系，$B\subseteq A$。

(1) $(R|_B)^{-1} = R^{-1}|_B$。

(2) $Q|_B\circ R|_B\subseteq(Q\circ R)|_B$。

证 (1) 任给 $x, y\in B$，都有

$\langle x, y\rangle\in(R|_B)^{-1}$ 当且仅当 $\langle y, x\rangle\in R|_B$

当且仅当 $\langle y, x\rangle\in R$

当且仅当 $<x, y>\in R^{-1}$，

因此$(R|_B)^{-1} = R^{-1}|_B$。

(2) 任给$<x, y>\in Q|_B\circ R|_B$，都有

存在 z，使得$<x, z>\in R|_B$且$<z, y>\in Q|_B$，

因为 $x, y, z\in B$，所以

$<x, z>\in R$ 且$<z, y>\in Q$，

因此

$<x, y>\in Q\circ R$，

又因为 $x, y\in B$，所以

$<x, y>\in (Q\circ R)|_B$。

这就证明了 $Q|_B\circ R|_B \subseteq (Q\circ R)|_B$。■

关系的逆与关系的交和并有以下性质。

3.1.18 定理 R 和 Q 是 A 上二元关系，则

(1) 如果 $Q\subseteq R$，则 $Q^{-1}\subseteq R^{-1}$。

(2) $R^{-1}\cap Q^{-1} = (R\cap Q)^{-1}$。

(3) $R^{-1}\cup Q^{-1} = (R\cup Q)^{-1}$。

证 (1) 任给$<x, y>\in Q^{-1}$，都有

$<y, x>\in Q$，

由$<y, x>\in Q$ 和 $Q\subseteq R$ 得

$<y, x>\in R$，

所以$<x, y>\in Q^{-1}$。

(2) 任给$<x, y>\in R^{-1}\cap Q^{-1}$，都有$<x, y>\in R^{-1}$且$<x, y>\in Q^{-1}$，由$<x, y>\in R^{-1}$得

$<y, x>\in R$，

由$<x, y>\in Q^{-1}$得

$<y, x>\in Q$，

由$<y, x>\in R$ 和$<y, x>\in Q$ 得

$<y, x>\in R\cap Q$，

由$<y, x>\in R\cap Q$ 得

$<x, y>\in (R\cap Q)^{-1}$。

因此 $R^{-1}\cap Q^{-1}\subseteq (R\cap Q)^{-1}$。

由 $R\cap Q\subseteq R$ 和(1)得

$(R\cap Q)^{-1}\subseteq R^{-1}$，

由 $R\cap Q\subseteq Q$ 和(1)得

$(R\cap Q)^{-1}\subseteq Q^{-1}$，

因此$(R\cap Q)^{-1}\subseteq R^{-1}\cap Q^{-1}$。

(3) 类似(2)，详细证明留给读者。■

习题 3.1

3.1.1 R 是 n 元关系，令 $A = \bigcup_{i<n}D_i$，其中，任给 $0\le i\le n-1$，

$D_i = \{y\mid$ 存在$<x_0,\cdots, x_{n-1}>\in R$，使得 $y = x_i\}$，

证明：

(1) $R\subseteq D_0\times\cdots\times D_{n-1}$。

(2) R 是 A 上 n 元关系。

3.1.2 R, Q 是 A 上 n 元关系，$B\subseteq A$。证明：$(R|_B)\cup(Q|_B) = (R\cup Q)|_B$。

3.1.3 证明二元关系的以下性质：

(1) 如果 $R_1\subseteq R_2$，$Q_1\subseteq Q_2$，则 $Q_1\circ R_1\subseteq Q_2\circ R_2$。

(2) $(Q\circ R)^{-1}\subseteq R^{-1}\circ Q^{-1}$。

(3) $R^{-1}\cup Q^{-1} = (R\cup Q)^{-1}$。

3.1.4 举例说明不一定有$(Q|_B)\circ(R|_B) = (Q\circ R)|_B$。

3.1.5 f 和 g 是映射，$G(f)$和 $G(g)$分别是 f 和 g 的图像。证明：

(1) $f = g$ 当且仅当 $G(f) = G(g)$。

(2) 如果 f 是双射，则 $G(f^{-1}) = G(f)^{-1}$。

(3) $G(g\circ f) = G(g)\circ G(f)$。

3.2　等 价 关 系

元素的相等有以下三条性质：

(1) 任给 x，都有 $x = x$；

(2) 任给 x, y，如果 $x = y$，则 $y = x$；

(3) 任给 x, y, z，如果 $x = y$ 且 $y = z$，则 $x = z$。

除相等外，还有一些二元关系有这三条性质。有这三条性质的二元关系是一种重要的二元关系。

3.2.1 定义　等价关系　A 上二元关系 R 称为 A 上等价关系，如果 R 满足以下性质：

(1) 自返性　任给 $x\in A$，都有 $<x, x>\in R$；

(2) 对称性　任给 $x, y\in A$，如果 $<x, y>\in R$，则 $<y, x>\in R$；

(3) 传递性　任给 $x, y, z\in A$，如果 $<x, y>\in R$ 且 $<y, z>\in R$，则 $<x, z>\in R$。

R 有自返性是说 A 中每个元素自己与自己有 R 关系，所以 R 包含了 I_A，即 $\mathrm{I}_A \subseteq R$。因此 R 有自返性也可以用 $\mathrm{I}_A \subseteq R$ 来表示。

R 有对称性是说 R 关系和次序无关，也就是考虑 A 中两个元素是否有 R 关系时，不需要考虑它们的次序。

如果 R 有对称性，则任给 $<x, y>\in R^{-1}$，都有 $<y, x>\in R$，由 R 的对称性得 $<x, y>\in R$，所以 $R^{-1} \subseteq R$。

反之，如果 $R^{-1} \subseteq R$，则任给 $<x, y>\in R$，都有 $<y, x>\in R^{-1}$，由 $R^{-1} \subseteq R$ 得 $<y, x>\in R$，所以 R 有对称性。

因此 R 有对称性也可以用 $R^{-1} \subseteq R$ 来表示。

R 有传递性是说，如果 A 中两个元素可以通过一个中间元素有间接联系的话，则它们就有直接联系。

如果 R 有传递性，则任给 $<x, z>\in R\circ R$，存在 y，使得 $<x, y>\in R$ 且 $<y, z>\in R$，由 R 的传递性得 $<x, z>\in R$，所以 $R\circ R \subseteq R$。

反之，如果 $R\circ R \subseteq R$，则任给 $<x, y>\in R$ 和 $<y, z>\in R$，都有 $<x, z>\in R\circ R$，由 $R\circ R \subseteq R$ 得 $<x, z>\in R$，所以 R 有传递性。

因此 R 有传递性也可以用 $R\circ R \subseteq R$ 来表示。

下面是等价关系的几个简单的例子。

3.2.2 例　A 上恒等关系 I_A 和 A 上全关系 A^2 都是 A 上的等价关系。

3.2.3 例　令 A = 人类。有相同父母(见例 3.1.4)是 A 上的等价关系。

3.2.4 例　$Q = \{<x, y> \mid x, y\in \mathbf{R}$ 且 $x-y\in \mathbf{Z}\}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的等价关系。理由如下：

自返性。任给 $x\in \mathbf{R}$，都有 $x-x\in \mathbf{Z}$，所以 $<x, x>\in Q$。

对称性。任给 $x, y\in \mathbf{R}$，如果 $<x, y>\in Q$，则 $x-y\in \mathbf{Z}$，所以

$$y-x = -(x-y)\in \mathbf{Z},$$

因此 $<y, x>\in Q$。

传递性。任给 $x, y, z\in \mathbf{R}$，如果 $<x, y>\in Q$ 且 $<y, z>\in Q$，则

$$x-y\in \mathbf{Z} \text{ 且 } y-z\in \mathbf{Z},$$

所以

$$x-z = (x-y)+(y-z)\in \mathbf{Z},$$

因此 $<x, z>\in Q$。

再来看一个较为复杂的例子。

3.2.5 例　令 $A = \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^+$，则

$$R = \{<<x, y>, <u, v>> \mid <x, y>, <u, v>>\in A \text{ 且 } xv = uy\}$$

是 A 上的等价关系。理由如下：

自返性。任给 $<x, y>\in A$，都有 $xy = xy$，所以 $<<x, y>, <x, y>>\in R$。

对称性。任给 $<x, y>, <u, v>\in A$，如果 $<<x, y>, <u, v>>\in R$，则 $xv = uy$，所以

$$uy = xv,$$

因此 $<<u, v>, <x, y>>\in R$。

传递性。任给$\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle, \langle w, z\rangle \in A$，如果$\langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle \in R$且$\langle\langle u, v\rangle, \langle w, z\rangle\rangle \in R$，则

$$xv = uy \text{ 且 } uz = wv，$$

所以

$$xvuz = uywv，$$

由 $v\in\mathbf{Z}^+$得

$$v \neq 0，$$

如果 $u \neq 0$，则由 $xvuz = uywv$ 和乘法消去律得

$$xz = wy，$$

如果 $u = 0$，则由 $xv = uy$ 和 $uz = wv$ 得

$$x = 0 \text{ 且 } w = 0，$$

也有

$$xz = wy，$$

因此$\langle\langle x, y\rangle, \langle w, z\rangle\rangle \in R$。

在一般讨论等价关系时，将等价关系记为～，将$\langle x, y\rangle \in$～记为 x～y，称 x 和 y 等价，也称 x 等价于 y。

任给集合中的一个元素，所有和这个元素等价的元素组成一个子集。

3.2.6 定义 等价类 ～是 A 上等价关系，$a\in A$。所有和 a 等价的元素组成的 A 的子集称为 a 的等价类，记为 $\tilde{a}$，即

$$\tilde{a} = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x\sim a\}。$$

所以：

$$x\in \tilde{a} \text{ 当且仅当 } x\sim a$$

A 的所有等价类组成 A 的一个子集族。

3.2.7 定义 商集 ～是 A 上等价关系，A 的所有等价类组成的 A 的子集族称为 A 的商集，记为 $A/\sim$，即 $A/\sim = \{\tilde{x} \mid x\in A\}$。

为熟悉等价类和商集的概念，先来看几个例子。

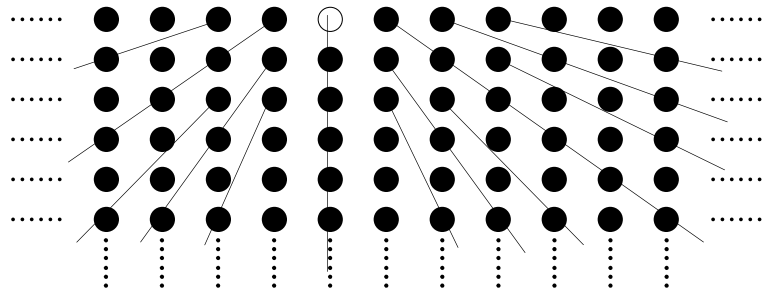
3.2.8 例 ～是 A 上恒等关系 I_A，则任给 $x\in A$，都有 $\tilde{x} = \{x\}$，所以 $A/\sim = \{\{x\} \mid x\in A\}$。

～是 A 上全关系 A^2，则任给 $x\in A$，都有 $\tilde{x} = A$，所以 $A/\sim = \{A\}$。

3.2.9 例 将 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^+$的元素排列如下：

……	$\langle -3, 1\rangle$	$\langle -2, 1\rangle$	$\langle -1, 1\rangle$	$\langle 0, 1\rangle$	$\langle 1, 1\rangle$	$\langle 2, 1\rangle$	$\langle 3, 1\rangle$	……
……	$\langle -3, 2\rangle$	$\langle -2, 2\rangle$	$\langle -1, 2\rangle$	$\langle 0, 2\rangle$	$\langle 1, 2\rangle$	$\langle 2, 2\rangle$	$\langle 3, 2\rangle$	……
……	$\langle -3, 3\rangle$	$\langle -2, 3\rangle$	$\langle -1, 3\rangle$	$\langle 0, 3\rangle$	$\langle 1, 3\rangle$	$\langle 2, 3\rangle$	$\langle 3, 3\rangle$	……
……	$\langle -3, 4\rangle$	$\langle -2, 4\rangle$	$\langle -1, 4\rangle$	$\langle 0, 4\rangle$	$\langle 1, 4\rangle$	$\langle 2, 4\rangle$	$\langle 3, 4\rangle$	……
……	$\langle -3, 5\rangle$	$\langle -2, 5\rangle$	$\langle -1, 5\rangle$	$\langle 0, 5\rangle$	$\langle 1, 5\rangle$	$\langle 2, 5\rangle$	$\langle 3, 5\rangle$	……
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

取～是例 3.2.5 中的 Q，则以下示意图中的每条直线代表一个等价类(○为$\langle 0, 1\rangle$)：



3.2.10 例 取～是例 3.2.4 中的实数 $\mathbf{R}$ 上的等价关系 Q。

如果 $x\sim a$，则 $x-a\in\mathbf{Z}$，所以存在 $y\in\mathbf{Z}$，使得 $x = a+y$。

如果存在 $y\in\mathbf{Z}$，使得 $x = a+y$，则 $x-a = (a+y)-a = y\in\mathbf{Z}$，所以 $x\sim a$。因此

$$x\sim a \text{ 当且仅当存在 } y\in\mathbf{Z}，\text{使得 } x = a+y。$$

这就是说：任给 $a\in\mathbf{R}$，都有 $\tilde{a} = \{a+y \mid y\in\mathbf{Z}\}$。

任给 $a, b\in(0, 1]$，如果 $a \neq b$，则 $a-b\notin\mathbf{Z}$，所以 $\tilde{a} \neq \tilde{b}$。

又任给 $x\in\mathbf{R}$，取 y 为小于 x 的最大整数，则存在 $a\in(0, 1]$，使得 $x = a+y$，由 $x = a+y$ 得 $x\in \tilde{a}$。

因此，实数 $\mathbf{R}$ 在等价关系～下的商集 $\mathbf{R}/\sim = \{\tilde{x} \mid x\in(0, 1]\}$。

在例 3.2.10 中，子集(0, 1]有这样的的性质：

(1) 任给 $a, b\in(0, 1]$，都有 $\tilde{a} \neq \tilde{b}$ ；

(2) 任给 $x\in\mathbf{R}$，存在 $a\in(0, 1]$，使得 $\tilde{x} = \tilde{a}$ 。

这种方法具有一般性，为了更清楚地表达商集 $A/\sim$，总是想法将 $A/\sim$表示为 $A/\sim = \{\tilde{x} \mid x\in B\}$，$B$ 是 A 的子集，满足：

(1) 任给任给 $x, y\in B$，都有 $\tilde{x} \neq \tilde{y}$ ；

(2) 任给 $x\in A$，存在 $y\in B$，使得 $\tilde{x} = \tilde{y}$ 。

这样的子集 B 称为等价关系$\sim$的特征集。

以下讨论等价类和商集的性质。

由自返性，每个元素属于它的等价类。由对称性和传递性，每个等价类中的元素互相等价，且和等价类外的元素不等价。

3.2.11 定理 $\sim$是 A 上等价关系。

(1) 任给 $x\in A$，都有 $x\in \tilde{x}$ 。

(2) 任给 $x, y\in A$，$\tilde{x} = \tilde{y}$ 当且仅当 $x\sim y$。

证 (1) 任给 $x\in A$，由$\sim$的自返性得 $x\sim x$，所以 $x\in \tilde{x}$ 。

(2) 任给 $x, y\in A$，如果 $\tilde{x} = \tilde{y}$ ，则由(1)得 $x\in \tilde{x}$ ，所以 $x\in \tilde{y}$ ，因此 $x\sim y$。

任给 $x, y\in A$，如果 $x\sim y$，则任给 $z\in \tilde{x}$ ，都有 $z\sim x$，由$\sim$的传递性得 $z\sim y$，所以 $z\in \tilde{y}$ ，因此 $\tilde{x} \subseteq \tilde{y}$ 。

由$\sim$的对称性得 $y\sim x$，同理可证 $\tilde{y} \subseteq \tilde{x}$ 。■

由定理 3.2.11，可得商集的以下性质。

3.2.12 定理 $\sim$是 A 上等价关系。

(1) 任给 $\tilde{x} \in A/\sim$，$\tilde{x} \neq \varnothing$。

(2) $\bigcup(A/\sim) = A$。

(3) 任给 $\tilde{x}, \tilde{y} \in A/\sim$，如果 $\tilde{x} \neq \tilde{y}$ ，则 $\tilde{x} \cap \tilde{y} = \varnothing$。

证 (1)(2)由定理 3.2.11(1)直接可得

(3) 证明如果 $\tilde{x} \cap \tilde{y} \neq \varnothing$，则 $\tilde{x} = \tilde{y}$ 。

任给 $\tilde{x}$， $\tilde{y} \in A/\sim$，如果 $\tilde{x} \cap \tilde{y} \neq \varnothing$，则

存在 z，使得 $z\in \tilde{x}$ 且 $z\in \tilde{y}$ ，

所以

$z\sim x$ 且 $z\sim y$，

由定理 3.2.10(2)得 $\tilde{x} = \tilde{z} = \tilde{y}$ 。■

定理 3.2.12 的直观意义是说：商集 $A/\sim$将集合 A 分成互不相交的非空子集。这种将集合分成互不相交的非空子集的子集族是一种重要的子集族。

3.2.13 定义 划分 $A \neq \varnothing$，Γ是 A 的子集族。Γ称为 A 的一个划分，如果Γ满足以下条件：

(1) $\varnothing\notin\Gamma$；

(2) $\bigcup\Gamma = A$；

(3) Γ是不交的，即任给 $X, Y\in\Gamma$，如果 $X \neq Y$，则 $X\cap Y = \varnothing$。

定理 3.2.12 是说商集 $A/\sim$是 A 的一个划分，更进一步，A 的任何一个划分都是 A 在某个等价关系下的商集。具体地说，如果Γ是 A 的一个划分，则存在 A 上等价关系$\sim$，使得 $A/\sim = \Gamma$。

3.2.14 定理 Γ是 A 的一个划分，定义

$\sim = \{\langle x, y\rangle \mid$ 存在 $X\in\Gamma$，使得 $x, y\in X\}$，

则：

(1) $\sim$是 A 上等价关系。

(2) 任给 $X\in\Gamma$，任给 $x\in X$，都有 $\tilde{x} = X$。

(3) $A/\sim = \Gamma$。

证 (1) 证明$\sim$有自返性、对称性和传递性。

自返性。任给 $x\in A$，由$\bigcup\Gamma = A$ 得

存在 $X\in\Gamma$，使得 $x\in X$，

因此 $x\sim x$。

对称性。任给 $x, y\in A$，如果 $x\sim y$，则

存在 $X\in\Gamma$，使得 $x, y\in X$，

这也就是

存在 $X\in\Gamma$，使得 $y, x\in X$，

因此 $y\sim x$。

传递性。任给 $x, y, z\in A$，如果 $x\sim y$ 且 $y\sim z$，则

存在 $X, Y\in\Gamma$，使得 $x, y\in X$ 且 $y, z\in Y$。

由 $y\in X\cap Y$ 得

$X\cap Y \neq \varnothing$，

再由Γ是不交的得 $X = Y$，所以

存在 $X\in\Gamma$，使得 $x, z\in X$，

因此 $x\sim z$。

(2) 设 $X\in\Gamma$，$x\in X$，证明 $\tilde{x} = X$。

任给 $y\in X$，由∼的定义得 $y\sim x$，所以

$y\in \tilde{x}$ 。

因此 $X \subseteq \tilde{x}$ 。

任给 $y\in \tilde{x}$ ，由∼是等价关系得

$y\sim x$，

由∼的定义得

存在 $Y\in\Gamma$，使得 $x, y\in Y$，

再由 $x\in X\cap Y$ 和Γ是不交的得 $X = Y$，所以

$y\in X$。

因此 $\tilde{x} \subseteq X$。

(3) 任给 $\tilde{x} \in A/\sim$，都有 $x\in A$，由 $\bigcup\Gamma = A$ 得

存在 $X\in\Gamma$，使得 $x\in X$，

再由(2)得 $\tilde{x} = X$，所以

$\tilde{x} \in\Gamma$。

因此 $A/\sim \subseteq \Gamma$。

任给 $X\in\Gamma$，由 $X \neq \varnothing$得

存在 $x\in X$，

再由(2)得 $X = \tilde{x}$ ，所以

$X\in A/\sim$。

因此$\Gamma \subseteq A/\sim$。■

习题 3.2

3.2.1 R 是 A 上有对称性和传递性的二元关系。

(1) 证明：如果任给 $x\in A$，存在 $y\in A$，使得$\langle x, y\rangle\in R$ (这种性质称为持续性)，则 A 有自返性。

(2) 举例说明 R 不一定有自返性。

3.2.2 S 是 A 上有自返性和传递性的二元关系。令

$R = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle\in S$ 且$\langle y, x\rangle\in S\}$

证明：R 是 A 上等价关系。

3.2.3 n 是自然数且 n>1，令

$\sim\ = \{\langle x, y\rangle \mid x, y\in\mathbf{Z}$，存在 $z\in\mathbf{Z}$，使得 $y-x = \mathrm{n}z\}$

证明：

(1) ∼是 **Z** 上等价关系。这个等价关系称为模 n 同余关系。

(2) 任给 $x\in A$，都有 $\tilde{x} = \{x+\mathrm{n}z \mid z\in\mathbf{Z}\}$。

(3) $\mathbf{N}_{\mathrm{n}}$是等价关系∼的特征集。

3.2.4 考虑 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上的二元关系

$R = \{\langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle \mid x+v = u+y\}$

(1) 证明：R 是 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上的等价关系。

(2) 仿照例 3.2.9，画出其等价类的示意图。

3.2.5 h 是 A 到 B 的映射，令

$\sim\ = \{\langle x, y\rangle \mid x, y\in A$ 且 $h(x) = h(y)\}$

证明：

(1) ∼是 A 上等价关系。所以可以构造 A 到 $A/\sim$的映射

$f：A\to A/\sim \quad f(x) = \tilde{x}$ 。

(2) 如果 $\tilde{x} = \tilde{y}$ ，则 $h(x) = h(y)$，所以可以构造 $A/\sim$到 B 映射

$g：A/\sim\to B \quad g(\tilde{x}) = h(x)$。

(3) f 是满射，g 是单射且 $h = g\circ f$。

(4) $\mathrm{ran}(h) = \mathrm{ran}(g)$。所以如果 h 是满射，则 g 是双射。

3.3 偏 序 关 系

N 上的小于等于≤有以下三条性质：

(1) 任给 $x\in\mathbf{N}$，都有 $x\le x$；

(2) 任给 $x, y\in\mathbf{N}$，如果 $x\le y$ 且 $y\le x$，则 $x = y$；

(3) 任给 $x, y, z\in\mathbf{N}$ ，如果 $x\le y$ 且 $y\le z$，则 $x\le z$。

(1)和(3)分别是自返性和传递性，(2)称为反对称性。有这三条性质的二元关系是一种重要的二元关系。

3.3.1 定义 偏序关系 A 上二元关系 R 称为 A 上偏序关系，如果 R 满足以下性质：

(1) 自返性 任给 $x\in A$，都有 $\langle x, x\rangle\in R$；

(2) 反对称性 任给 $x, y\in A$，如果 $\langle x, y\rangle\in R$ 且 $\langle y, x\rangle\in R$，则 $x = y$；

(3) 传递性 任给 $x, y, z\in A$，如果 $\langle x, y\rangle\in R$ 且 $\langle y, z\rangle\in R$，则 $\langle x, z\rangle\in R$。

自返性和传递性的意义前面已经讲过，它们可以分别表示为 $\mathrm{I}_A\subseteq R$ 和 $R\circ R\subseteq R$。

A 上关系 R 有反对称性是说，A 中两个不同的元素，至多只能有一种次序的联系。

如果 R 有反对称性，则任给 $\langle x, y\rangle\in R\cap R^{-1}$，都有 $\langle x, y\rangle\in R$ 且 $\langle y, x\rangle\in R$，由 R 的反对称性得 $x = y$，即

$$\langle x, y\rangle\in \mathrm{I}_A,$$

所以 $R\cap R^{-1}\subseteq \mathrm{I}_A$。

反之，如果 $R\cap R^{-1}\subseteq \mathrm{I}_A$，则任给 $\langle x, y\rangle\in R$ 和 $\langle y, x\rangle\in R$，都有 $\langle x, y\rangle\in R\cap R^{-1}$，由 $R\cap R^{-1}\subseteq \mathrm{I}_A$ 得 $\langle x, y\rangle\in \mathrm{I}_A$，即

$$x = y,$$

所以 R 有反对称性。

因此 R 有反对称性也可以用 $R\cap R^{-1}\subseteq \mathrm{I}_A$ 来表示。

下面是偏序关系的几个例子。

3.3.2 例 **N**, **Z**, **Q** 和 **R** 上的小于等于关系分别是 **N**, **Z**, **Q** 和 **R** 上的偏序关系。

3.3.3 例 集合族上的包含关系是偏序关系(见定理 1.2.7)。

偏序关系可以看成一种广义的大小关系，直观地可以将集合中的元素依偏序关系排成一个次序。这种次序有各种情况。

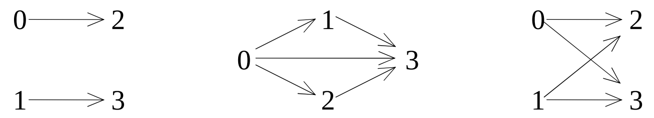
3.3.3 例 $A = \{0, 1, 2, 3\}$，令

$$R = \{\langle 0, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}\cup \mathrm{I}_A,$$

$$S = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}\cup \mathrm{I}_A,$$

$$Q = \{\langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}\cup \mathrm{I}_A,$$

则 R, S, Q 都是 A 上偏序关系，它们的直观形象如下：



例 3.3.3 也说明了一个集合上可以有不同的偏序关系。以下是 **N** 和 **Z** 上不同于小于等于关系的偏序关系。

3.3.4 例 n 是自然数且 n≥1，令

$$S_{\mathrm{n}} = \{\langle x, y\rangle \mid \mathrm{n}\le x\le y \text{ 或 } x\le y\le \mathrm{n}-1\}$$

和

$$Q_{\mathrm{n}} = \{\langle x, y\rangle \mid y\le \mathrm{n}-1 \text{ 且 } \mathrm{n}\le x\}$$

则 $R_{\mathrm{n}} = S_{\mathrm{n}}\cup Q_{\mathrm{n}}$ 是 **N** 上偏序关系，它的直观形象如下：

$$\mathrm{n}, \mathrm{n}+1,\cdots\cdots, 0,\cdots, \mathrm{n}-1$$

3.3.5 例 令

$$R_1 = \{\langle x, y\rangle \mid 0\le x\le y\},$$

$$R_2 = \{\langle x, y\rangle \mid y\le x\le -1\}$$

$$R_3 = \{\langle x, y\rangle \mid 0\le x \text{ 且 } y\le -1\},$$

则 $R = R_1\cup R_2\cup R_3$ 是 **Z** 上偏序关系，它的直观形象如下：

$0, 1, \cdots, n, \cdots\cdots, -1, -2, \cdots, -n, \cdots\cdots$

3.3.6 例 考虑 **N** 上二元关系

$$R = \{<x, y> \mid \text{存在 } n\in\mathbf{N}\text{，使得 } y = xn\}$$

$<x, y>\in R$ 的直观意义是 x 整除 y，所以 R 称为 **N** 上整除关系。R 是偏序关系的理由如下：

自返性。任给 $x\in\mathbf{N}$，都有 $x = x1$，所以$<x, x>\in R$；

反对称性。任给 $x, y\in\mathbf{N}$，如果$<x, y>\in R$ 且$<y, x>>\in R$，则

$$\text{存在 } n, m\in\mathbf{N}\text{，使得 } y = xn, x = ym\text{，}$$

所以

$$y = ymn。$$

当 $y = 0$ 时，有

$$x = ym = 0 = y\text{，}$$

当 $y \neq 0$ 时，由乘法消去律得 $mn = 1$，所以

$$m = 1\text{，}$$

也有 $x = ym = y1 = y$；

传递性。任给 $x, y, z\in\mathbf{N}$，如果$<x, y>\in R$ 且$<y, z>>\in R$，则

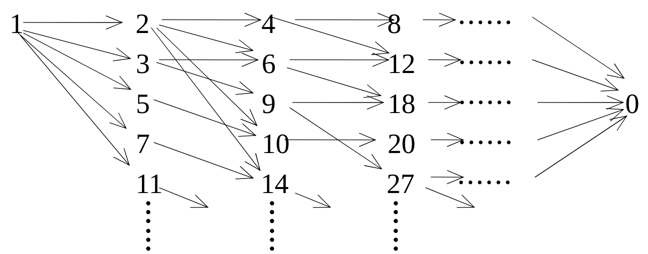
$$\text{存在 } n, m\in\mathbf{N}\text{，使得 } y = xn, z = ym\text{，}$$

所以

$$\text{存在 } nm\in\mathbf{N}\text{，使得 } z = ym = x(nm)\text{，}$$

因此$<x, z>\in R$。

整除关系的直观形象如下：



R 是 A 上偏序关系，如果$<x, y>\in R$ 或$<y, x>\in R$，则称 x, y 可比较，反之，如果$<x, y>\notin R$ 且$<y, x>\notin R$，则称 x, y 不可比较。如在例 3.3.3 中，对于偏序 S 来说，1 和 2 不可比较，又如在例 3.3.6 中，任何两个素数都不可比较。

如果偏序关系 R 使得 A 中任何两个两个元素都可比较，则称 R 有可比较性。和自返性、对称性、反对称性、传递性类似，A 上偏序 R 有可比较性可表示为 $A^2 \subseteq R\cup R^{-1}$。有可比较性的偏序关系是一种重要的偏序关系。

3.3.7 定义 全序关系 R 是 A 上全序关系，如果 R 有可比较性，即

$$\text{任给 } x, y\in A\text{，都有}<x, y>\in R \text{ 或}<y, x>>\in R\text{，}$$

则称 R 是 A 上全序关系，简称 R 是 A 上全序。

最常见的全序关系是 **N**, **Z**, **Q** 和 **R** 上的小于等于关系。Γ是集合族，由单调集合族的定义可知：Γ上的包含关系是全序关系当且仅当Γ是单调的。

对于 A 中两个不同的元素，可比较性是说它们至少按一种次序相联系，反对称性是说它们至多按一种次序相联系，所以 A 上一个全序保证了 A 中任两个元素恰好按一种次序相联系。

如果将 A 的元素依全序关系排成次序，则它的直观形象将是一条直线。因此，A 上全序也称为 A 上线形序。反之依偏序关系将 A 的元素排成次序，如果它的直观形象将是一条直线，则这个偏序关系就是全序关系。因此，例 3.1.4 中 R_n 和例 3.1.4 中 R 都是全序，而例 3.1.3 中 R, S, Q 和例 3.1.6 中 R 都不是全序。

一个次序倒过来仍是一个次序，一个次序限制在部分元素上还是一个次序。这就是说，偏序关系在关系的逆和限制下仍是偏序关系。进一步有，如果是全序，则在逆和限制下仍是全序。

3.3.8 定理 R 是 A 上偏序关系，$B\subseteq A$。

(1) R^{-1}是 A 上偏序关系。

(2) $R|_B$是 A 上偏序关系。

(3) 如果 R 是全序，则 R^{-1} 和 $R|_B$ 也是全序。

证 (1) 证明 R^{-1} 有自返性、对称性和传递性。

自返性。任给 $x\in A$，由 R 的自返性得

$$<x, x>\in R,$$

所以$<x, x>\in R^{-1}$；

反对称性。任给 $x, y\in A$，如果$<x, y>\in R^{-1}$ 且$<y, x>\in R^{-1}$，则

$$<y, x>\in R \text{ 且} <x, y>\in R,$$

由 R 的反对称性得 $x = y$；

传递性。任给 $x, y, z\in A$，如果$<x, y>\in R^{-1}$ 且$<y, z>\in R^{-1}$，则

$$<y, x>\in R \text{ 且} <z, y>\in R,$$

由 R 的传递性得

$$<z, x>\in R,$$

所以$<x, z>\in R^{-1}$。

(2) 证明 $R|_B$ 有自返性、对称性和传递性。

自返性。任给 $x\in B$，都有 $x\in A$，由 R 的自返性得

$$<x, x>\in R,$$

所以$<x, x>\in R|_B$。

反对称性。任给 $x, y\in B$，如果$<x, y>\in R|_B$ 且$<y, x>\in R|_B$，则

$$<x, y>\in R \text{ 且} <y, x>\in R,$$

由 R 的反对称性得 $x = y$。

传递性。任给 $x, y, z\in A$，如果$<x, y>\in R|_B$ 且$<y, z>\in R|_B$，则

$$<x, y>\in R \text{ 且} <y, z>\in R,$$

由 R 的传递性得

$$<x, z>\in R,$$

所以$<x, z>\in R|_B$ 。

(3) 由(1)和(2)，只需证 R^{-1} 和 $R|_B$ 的可比较性。

任给 $x, y\in A$，由 R 的可比较性得

$$<x, y>\in R \text{ 或} <y, x>\in R,$$

所以$<x, y>\in R^{-1}$ 或$<y, x>\in R^{-1}$。

任给 $x, y\in B$，都有 $x, y\in A$，由 R 的可比较性得

$$<x, y>\in R \text{ 或} <y, x>\in R,$$

所以$<x, y>\in R|_B$ 或$<y, x>\in R|_B$。■

利用自返性、反对称性和传递性的集合表示法，可以更简单地证明定理 3.3.8 的(1)和(2)。

(1) 证明从 $I_A\subseteq R$, $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$ 和 $R\circ R\subseteq R$ 得 $I_A\subseteq R^{-1}$, $R^{-1}\cap(R^{-1})^{-1}\subseteq I_A$ 和 $R^{-1}\circ R^{-1}\subseteq R^{-1}$。

从 $I_A\subseteq R$ 得

$$I_A = I_A^{-1}\subseteq R^{-1},$$

从 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$ 得

$$R^{-1}\cap(R^{-1})^{-1} = R^{-1}\cap R\subseteq I_A,$$

从 $R\circ R\subseteq R$ 得 $R^{-1}\circ R^{-1} = (R\circ R)^{-1}\subseteq R^{-1}$。

(2) 证明从 $I_A\subseteq R$, $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$ 和 $R\circ R\subseteq R$ 得 $I_B\subseteq R|_B$, $R|_B\cap(R|_B)^{-1}\subseteq I_B$ 和 $R|_B\circ R|_B\subseteq R|_B$ 。

从 $I_A\subseteq R$ 得

$$I_B = I_A|_B\subseteq R|_B,$$

从 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$ 得

$$R|_B\cap(R|_B)^{-1} = R|_B\cap R^{-1}|_B = (R\cap R^{-1})|_B\subseteq I_A|_B = I_A,$$

从 $R\circ R\subseteq R$ 得 $R|_B\circ R|_B\subseteq (R\circ R)|_B\subseteq R|_B$ 。

习题 3.3

3.3.1 f 是 A 到 B 的双射，R 是 A 上偏序关系，令

$$R(f) = \{<f(x), f(x)> \mid <x, y>\in R\}$$

证明：

(1) $R(f)$是 B 上偏序关系。

(2) 任给 $x, y\in A$，都有$<x, y>\in R$ 当且仅当$< f(x), f(y)>\in R(f)$。

3.3.2 考虑 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上的二元关系

$$S = \{<<x, y>, <u, v>> \mid x\le u \text{ 且 } y\le v\}。$$

证明：S 是 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上偏序关系，但不是全序关系。

3.3.3　S 是 A 上有自返性和传递性的二元关系，由习题 3.2.2 可知

$$\sim = \{<x, y> \mid <x, y>\in S \text{ 且} <y, x>\in S\}$$

是 A 上等价关系，所以可以定义商集 $A/\sim$上的二元关系

$$S^* = \{<\tilde{x}, \tilde{y}> \mid <x, y>\in S\}$$

证明：

(1) $x\sim u$ 且 $y\sim v$，则$<x, y>\in S$ 当且仅当$<u, v>\in S$。

(2) $<\tilde{x}, \tilde{y}>\in S^*$当且仅当$<x, y>\in S$。

(3) S^*是 $A/\sim$上偏序关系。

(4) 如果 S 有可比较性，则 S^*是全序。

3.3.4　R 是 A 上二元关系。

(1) 证明：R 有可比较性当且仅当 $A^2\subseteq R\cup R^{-1}$。

(2) 利用(1)证明定理 3.3.8 的(3)。

3.3.5　R 是 A 上偏序关系，令 $S = R\setminus \mathrm{I}_A$，即

$$S = \{<x, y> \mid <x, y>\in R \text{ 且 } x\neq y\}$$

证明：S 有反自返性(反自返性是指：任给 $x\in A$，都有$<x, y>\notin S$)和传递性。

具有反自返性和传递性的二元关系称为严格偏序关系。注意严格偏序关系不是偏序关系。在一些关于集合的著作中所定义的偏序关系和本书不一样，而是这里所说的严格偏序关系。

3.3.6　S 是 A 上严格偏序关系，令 $R = S\cup \mathrm{I}_A$，即

$$R = \{<x, y> \mid <x, y>\in S \text{ 或 } x = y\}$$

证明：R 是 A 上偏序关系。

3.3.7　A 上既是等价关系又是偏序关系的二元关系是什么关系？

3.4　偏　序　集

这一节继续讨论偏序关系。

3.4.1 定义　偏序集　带有偏序关系的集合称为偏序集。如果这个偏序是全序，则称这个偏序集为全序集。

一般情况下，**N**, **Z**, **Q** 和 **R** 作为偏序集，它们的偏序总是指小于等于关系，集合族作为偏序集，偏序总是指包含关系。

A 是偏序集，它的偏序是 R，B 是 A 的子集，B 作为偏序集，在不加说明的情况下，总是以 $R|_B$ 作为它的偏序。特别地，$\mathbf{N}_n$ 以小于等于关系作为它的偏序

在一般讨论偏序关系时，在不至于混淆时，总是将偏序关系记为≤。如果为了指出≤是 A 的偏序，则可以将≤表示为$\leq_A$。当有不同的偏序时，还可以在≤上加下标，如$\leq_1$, $\leq_2$ 等。

为了简便起见，将$<x, y>\in\leq$记为 $x\leq y$，称为 x 小于等于 y，将 $x\leq y$ 且 $x\neq y$ 记为 $x<y$,称为 x 小于 y。有时也将 $x\leq y$ 记为 $y\geq x$，称为 y 大于等于 x，将 $x<y$ 记为 $y>x$，称为 y 大于 x。

数在小于等于关系下的一些有关大小的概念可以推广到偏序集。

3.4.2 定义　上界和下界　A 是偏序集，$X\subseteq A$。A 中比 X 中每个元素都大或等的元素称为 X 的上界。A 中比 X 中每个元素都小或等的元素称为 X 的下界。对于 $a\in A$，a 是 X 的上界的条件是：

任给 $x\in X$，都有 $x\leq a$。

a 是 X 的下界的条件是：

任给 $x\in X$，都有 $x\geq a$。

如果 a 是 X 的上界(下界)且 $b\geq a$ ($b\leq a$)，则 b 也是 X 的上界(下界)，所以 X 的上界和下界可以有多个。如对于 **N** 的子集 $\mathbf{N}_n$ 来说，n, n+1,……都是它的上界。另一方面，X 不一定有上界和下界，如 **R** 的子集 **Z** 就没有上界和下界。

3.4.3 定义 上确界和下确界 A 是偏序集，$X \subseteq A$。X 的上界中最小的元素称为 X 的上确界。X 的下界中最大的元素称为 X 的下确界。对于 $a \in A$，a 是 X 的上确界的条件是：

a 是 X 的上界且(任给 X 的上界 x，都有 $x \geq a$)。

a 是 X 的下确界的条件是：

a 是 X 的下界且(任给 X 的下界 x，都有 $x \leq a$)。

如果 a 和 b 都是 X 的上确界，则 b 是 X 的上界，由 a 是 X 的上确界的条件得 $b \geq a$，同理可得 $a \geq b$，因此 $a = b$。这说明 X 的上确界如果存在则惟一。同样，X 的下确界如果存在也惟一。

X 的上确界(下确界)不一定存在。X 的上界(下界)不存在时，当然 X 的上确界(下确界)不存在，就是 X 的上界(下界)存在时，X 的上确界(下确界)也可能不存在。

如在例 3.3.3 中，对于偏序关系 Q 来说，子集$\{0, 1\}$有上界 2 和 3，但没有上确界，子集$\{2, 3\}$有下界 0 和 1，但没有下确界。

3.4.4 定义 最大元和最小元 A 是偏序集，$X \subseteq A$。X 中最大的元素称为 X 的最大元。X 中最小的元素称为 X 的最小元。对于 $a \in A$，a 是 X 的最大元的条件是：

$a \in X$ 且(任给 $x \in X$，都有 $x \leq a$)。

a 是 X 的最小元的条件是：

$a \in X$ 且(任给 $x \in X$，都有 $x \geq a$)。

与上界和下界的条件相比，可以看出最大元一定是上界，最小元一定是下界。

如果 a 是 X 的最大元，则 $a \in X$，所以任给 X 的上界 x，都有 $x \geq a$，因此 a 还是 X 的上确界。但 X 的上确界不一定是 X 的最大元。如在例 3.3.3 中，对于偏序关系 S 来说，3 是子集$\{0, 1, 2\}$的上确界，但不是子集$\{0, 1, 2\}$的最大元。

类似地，X 的最小元是 X 的下确界，但 X 的下确界不一定是 X 的最小元。

3.4.5 定义 极大元和极小元 A 是偏序集，$X \subseteq A$。$a \in X$，

如果 X 没有元素比 a 大，则称 a 是 X 的极大元，如果 X 没有元素比 a 小，则称 a 是 X 的极小元。对于 $a \in A$，a 是 X 的极大元的条件是：

$a \in X$ 且(不存在 $x \in X$，使得 $x > a$)，

等价地说也就是：

$a \in X$ 且(任给 $x \in X$，如果 $x \geq a$，则 $x = a$)。

a 是 X 的极小元的条件是：

$a \in X$ 且(不存在 $x \in X$，使得 $x < a$)，

等价地说也就是：

$a \in X$ 且(任给 $x \in X$，如果 $x \leq a$，则 $x = a$)。

将 A 上偏序关系看做一种广义的大小关系，并参照熟悉的数的小于等于关系，则上界，下界，上确界，下确界，最大元，最小元是容易理解的，不容易理解的是极大元和极小元。

极大元和最大元不同，X 的最大元是说它比 X 中其它元素都大，而 X 的极大元只是说 X 中没有比它大的元素。所以最大元一定是极大元，但 X 可以没有最大元而有极大元，并且极大元可以不至一个。如在例 3.3.3 中，对于偏序关系 R 来说，A 本身就有极大元 2 和 3，但 A 没有最大元。

极小元和最小元的关系是类似的。

为了熟悉这些概念，我们来看一些例子。

3.4.6 例 Γ是集合族，$\Sigma \subseteq \Gamma$，令

$X = \bigcup\Sigma$，$Y = \bigcap\Sigma$。

如果 $X \in \Gamma$，则 X 是Σ的上确界(见定理 1.5.10(1))，如果 $Y \in \Gamma$，则 Y 是Σ的上确界(见定理 1.5.10(2))。当$\Gamma = \mathsf{P}(A)$时，一定有 $X, Y \in \Gamma$，所以任给$\Sigma \subseteq \mathsf{P}(A)$，$\Sigma$在 $\mathsf{P}(A)$中都有上确界和下确界。

3.4.7 例 A 是偏序集，$\varnothing \subseteq A$。因为$\varnothing$没有任何元素，所以 A 中所有元素都是$\varnothing$的上界，因此 A 的最小元就是$\varnothing$的上确界。类似地，A 中所有元素都是$\varnothing$的下界，因此 A 的最大元就是$\varnothing$的下确界。

3.4.8 例 考虑 **N** 上整除关系 R (见例 3.3.6)。任给 $x, y\in\mathbf{N}$，$\{x, y\}$的上确界就是 x, y 的最小公倍数，$\{x, y\}$的下确界就是 x, y 的最大公因数，它们一定存在。1 是 **N** 的最小元，0 是 **N** 的最大元。任给 $X\subseteq\mathbf{N}$，如果 $1\notin X$，则 X 中的任何素数都是极小元。

3.4.9 例 Γ是集合族，Γ的极大元也称为极大集。Γ中 A 是极大集的条件是：

任给 $X\in\Gamma$，如果 $A\subseteq X$，则 $A = X$。

又如果 A 是Γ的最大元，则Γ是 A 子集族。

A 是偏序集，偏序关系是$\leq_A$，$B\subseteq A$，$\leq_A$ 在 B 上的限制$\leq_A|B$ (是 B 上的偏序关系)记为$\leq_B$。

设 $X\subseteq B\subseteq A$。因为 $X\subseteq A$，所以对于$\leq_A$来说，X 有最大元、最小元、极大元和极小元的概念。又因为 $X\subseteq B$，所以对于$\leq_B$来说，X 也有最大元、最小元、极大元和极小元的概念。由 $X\subseteq B$ 可知，任给 $x, y\in X$，都有 $x\leq_A y$ 当且仅当 $x\leq_B y$，而以上四个概念的定义中只涉及到 X 中的元素，因此它们实际上是一样的。

然而，上界、下界、上确界和下确界就依赖于 A 和 B 了，因为这些概念的定义中，分别涉及到 A 和 B 的元素。

如对于集合 $X = \{x \mid x\in\mathbf{Q}$ 且 $x^2<2\}$来说，作为 **Q** 的子集它没有上确界和下确界，但作为 **R** 的子集它就有上确界$\sqrt{2}$ 和下确界$-\sqrt{2}$ 。

又如在例 3.3.3 中，对于偏序关系 S 来说，$\{0, 1, 2\}$作为它自身的子集没有上界，但作为 A 的子集就有上界 3。

全序集是偏序集的一种重要类型，在研究偏序集时，它的全序子集有重要的位置。

3.4.10 定义 线形链 A 是偏序集，$X\subseteq A$。如果任给 $x, y\in X$，都有 $x\leq y$ 或 $y\leq x$，即$\leq|_X$是全序，则称 X 是 A 的线形链。

最常见的全序关系是 **N**, **Z**, **Q** 和 **R** 上的小于等于关系。Γ是集合族，由单调集合族的定义可知：Γ上的包含关系是全序关系当且仅当Γ是单调的。

这里先看几个例子，关于线形链的应用以后再讨论。

3.4.11 例 考虑 **N** 上整除关系 R (见例 3.3.6)，则$\{2^n \mid n\in\mathbf{N}\}$是线形链。

3.4.12 例 考虑习题 3.3.2 中的 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上的偏序关系 S，则$\{<x, x> \mid x\in\mathbf{R}\}$是线形链。

3.4.13 例 X 是 A 的线形链。如果 a 是 X 的极大元，则 a 是 X 的最大元。理由如下：

任给 $x\in X$，由 X 是线形链得

$x\geq a$ 或 $x\leq a$，

当 $x\neq a$ 时，由 a 是极大元可知没有 $x>a$，所以

$x\leq a$，

当 $x = a$ 时当然有

$x\leq a$。

这就证明了

任给 $x\in X$，都有 $x\leq a$，

因此 a 是 X 的最大元。

类似地，如果 a 是 X 的极小元，则 a 是 X 的最小元。

这个例子说明了线形链不需要极大元和极小元的概念。特别地，全序集不需要极大元和极小元的概念。

A 是偏序集，偏序关系是$\leq_A$，f 是 A 到 B 的双射，$\leq_B = \leq_A(f)$，由习题 3.3.1，不但$\leq_B$是 B 上偏序关系，而且任给 $x, y\in A$，都有 $x\leq_A y$ 当且仅当 $f(x)\leq_B f(y)$。

这说明了抽象地看，A 上的次序$\leq_A$和 B 上的次序$\leq_B$没有什么不一样。为了说明两个偏序集上的次序是一样的，引进偏序集相似的概念。

3.4.14 定义 相似映射 A, B 是偏序集，偏序关系分别是$\leq_A$和$\leq_B$，f 是 A 到 B 的双射。如果 f 满足

任给 $x, y\in A$，都有 $x\leq_A y$ 当且仅当 $f(x)\leq_B f(y)$，

则称 f 是 A 到 B 的相似映射。

3.4.15 定义 相似 A, B 是偏序集，如果存在 A 到 B 的相似映射，则称 A 和 B 相似，记为 $A \cong B$。

偏序集的相似有以下基本性质。

3.4.16 定理 A, B, C 是偏序集，则：

(1) $A \cong A$。

(2) 如果 $A \cong B$，则 $B \cong A$。

(3) 如果 $A \cong B$ 且 $B \cong C$，则 $A \cong C$。

证 (1) 任给 $x, y \in A$，都有

$$x \leq_A y \text{ 当且仅当 } \mathrm{i}_A(x) \leq_A \mathrm{i}_A(y)，$$

所以 i_A 是 A 到 A 的相似映射，因此 $A \cong A$。

(2) 如果 $A \cong B$，则存在 A 到 B 的相似映射 f，考虑 f 的逆映射 f^{-1}。任给 $x, y \in B$，都有

$$\begin{aligned} x \leq_B y &\text{ 当且仅当 } f(f^{-1}(x)) \leq_B f(f^{-1}(y)) \\ &\text{ 当且仅当 } f^{-1}(x) \leq_A f^{-1}(y)， \end{aligned}$$

所以 f^{-1} 是 B 到 A 的相似映射，因此 $B \cong A$。

(3) 如果 $A \cong B$ 且 $B \cong C$，则存在 A 到 B 的相似映射 f 和 B 到 C 的相似映射 g，考虑 f 和 g 的复合映射 $g \circ f$。任给 $x, y \in A$，都有

$$\begin{aligned} x \leq_A y &\text{ 当且仅当 } f(x) \leq_B f(y) \\ &\text{ 当且仅当 } g(f(x)) \leq_C g(f(y)) \\ &\text{ 当且仅当 } (g \circ f)(x) \leq_C (g \circ f)(y)， \end{aligned}$$

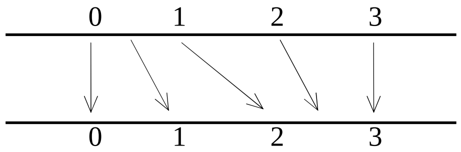
所以 $g \circ f$ 是 A 到 C 的相似映射，因此 $A \cong C$。■

习题 3.3.1 说明了如果 f 是 A 到 B 的双射，则 A (偏序关系是 $\leq_A$)和 B (偏序关系是 $\leq_B = \leq_A(f)$)相似，f 就是相似映射。再来看相似映射和相似的几个例子。

3.4.17 例 A 是偏序集，恒等映射 i_A 是 A 到自身的相似映射。但除恒等映射外，A 到自身还可能有其它的相似映射。如：

$$f：(0, 3] \to (0, 3] = \begin{cases} 2x & \text{如果 } x \in (0, 1] \\ \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} & \text{如果 } x \in (1, 3]， \end{cases}$$

也是(0, 3]到自身的相似映射。



3.4.18 例 $A = \{2, 3, 5\}$，$\mathrm{P}(A)$上偏序关系为包含关系。

$$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}，$$

B 上偏序关系为 $\mathbf{N}$ 上整除关系在 B 上的限制。定义 $\mathrm{P}(A)$到 B 的映射

$$f：\mathrm{P}(A) \to B = \begin{cases} 1 & \text{如果 } X = \varnothing \\ X \text{ 中的数的乘积} & \text{如果 } X \neq \varnothing， \end{cases}$$

如 $f(\{2, 5\}) = 10$，$f(\{2, 3, 5\}) = 30$ 等。

f 就是 $\mathrm{P}(A)$到 B 的相似映射，所以 $\mathrm{P}(A) \cong B$。

在下一个例子前，我们先来证明相似映射的一个性质。

3.4.19 定理 A, B 是偏序集，偏序关系分别是 $\leq_A$ 和 $\leq_B$，f 是 A 到 B 的相似映射，则任给 $x, y \in A$，都有 $x <_A y$ 当且仅当 $f(x) <_B f(y)$。

证 任给 $x, y \in A$，如果 $x <_A y$，则

$$x \leq_A y \text{ 且 } x \neq y，$$

由 $x \leq_A y$ 和 f 是相似映射得

$$f(x) \leq_B f(y)，$$

由 $x \neq y$ 和 f 是双射得

$$f(x) \neq f(y)，$$

所以

$$f(x) <_B f(y)，$$

类似地可证，如果 $f(x) <_B f(y)$，则 $x <_A y$。■

3.4.20 例 f 是 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的相似映射，则 f 一定是 $\mathrm{i}_{\mathbf{N}}$，使用反证法证明如下：

设 $f \neq \mathrm{i}_{\mathbf{N}}$，则存在 $\mathrm{n} \in \mathbf{N}$，使得 $f(\mathrm{n}) \neq \mathrm{i}_{\mathbf{N}}(\mathrm{n}) = \mathrm{n}$，所以

$$A = \{\mathrm{n} \mid \mathrm{n}\in\mathbf{N} \text{ 且 } f(\mathrm{n}) \ne \mathrm{n}\}$$

不是空集，由自然数的最小数原理，A 有最小数 s。由 s 是 A 的极小数可知：$f(\mathrm{s}) \ne \mathrm{s}$ 而任给 $\mathrm{n}<\mathrm{s}$，都有 $f(\mathrm{n}) = \mathrm{n}$。

如果 $f(\mathrm{s})<\mathrm{s}$，则由定理 3.4.19 得

$$f(f(\mathrm{s}))<f(\mathrm{s}),$$

由 $f(\mathrm{s})<\mathrm{s}$ 和 s 是 A 的极小数得

$$f(f(\mathrm{s})) = f(\mathrm{s}),$$

和 $f(f(\mathrm{s}))<f(\mathrm{s})$矛盾。

如果 $\mathrm{s}<f(\mathrm{s})$，则

$$f(f^{-1}(\mathrm{s})) = \mathrm{s}<f(\mathrm{s}),$$

由 $f(f^{-1}(\mathrm{s}))<f(\mathrm{s})$和定理 3.4.19 得

$$f^{-1}(\mathrm{s})<\mathrm{s},$$

由 $f^{-1}(\mathrm{s})<\mathrm{s}$ 和 s 是 A 的极小数得

$$f(f^{-1}(\mathrm{s})) = f^{-1}(\mathrm{s}),$$

所以

$$f^{-1}(\mathrm{s}) = f(f^{-1}(\mathrm{s})) = \mathrm{s},$$

和 $f^{-1}(\mathrm{s})<\mathrm{s}$ 矛盾。

习题 3.4

3.4.1　A 是偏序集，$a, b, c\in A$，证明：

(1) 如果 $a<b$ 且 $b\le c$，则 $a<c$。

(2) 如果 $a\le b$ 且 $b<c$，则 $a<c$。

3.4.2　$A = \{0, 1, 2, 3,4\}$，$B = \{0, 1\}$，$C = \{0, 1, 2\}$。令$\le = \{<0,1>, <0,2>, <0,3>, <0,4>, <1,3>, <1,4>, <2,3>, <2,4>, <3,4>\}\cup \mathrm{I}_A$。

(1) 仿例 3.3.3 画出 A 的直观图形。

(2) 分别指出 B 和 C 的上界、上确界、极大元和极小元。

3.4.3　A 是偏序集，$X \subseteq A$，a 是 X 的上界，证明：如果 $a\in X$，则 a 是 A 的最大元。

3.4.4　A 是偏序集，$X \subseteq A$，证明：如果 X 只有一个上界 a，则 a 是 A 的极大元。

3.4.5　A, B 是偏序集，f 是 A 到 B 的相似映射。证明：a 是 X 的上界(上确界，最大元，极大元)当且仅当 $f(a)$是 $f[X]$的上界(上确界，最大元，极大元)。

3.4.6　R 是 A 上偏序关系，$Q = R^{-1}$ 也是 A 上偏序关系。为了区别在这两个不同偏序下的上界，下界等概念，分别加上前缀 R-和 Q-，如 R-上界是指在偏序 R 下的上界，Q-极小元是指在 Q 下的极小元。设 $X \subseteq A$，证明：

(1) a 是 X 的 R-上界(上确界，最大元，极大元)当且仅当 a 是 X 的 Q-下界(下确界，最小元，极小元)。

(2) a 是 X 的 R-下界(下确界，最小元，极小元)当且仅当 a 是 X 的 Q-上界(上确界，最大元，极大元)。

因此在一般偏序集上成立的关于上界，上确界，最大元和极大元的性质，也一定有相应的关于下界，下确界，最小元和极小元的性质。特别地，习题 3.4.3、习题 3.4.4 和习题 3.4.5 所证明的关于上界，上确界，最大元和极大元的性质，对于下界，下确界，最小元和极小元也有相应的结果。

3.4.7　A 是偏序集，$\Gamma = \{A_{\mathrm{i}} \mid \mathrm{i}\in \mathrm{I}\}$，任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，A_{i} 都是 A 的线形链。证明：如果Γ是单调的，则$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_{\mathrm{i}}$ 也是 A 的线形链。

3.4.8　A, B 是偏序集，f 是 A 到 B 的相似映射，$X \subseteq A$。证明：X 是 A 的线形链当且仅当 $f[X]$是 B 的线形链。特别地，A 是全序集当且仅当 B 是全序集。

3.4.9　A, B 是偏序集，偏序关系分别是$\le_A$和$\le_B$，f 是 A 到 B 的映射。如果 f 满足

任给 $x, y\in A$，如果 $x\le_A y$ 则 $f(x)\le_B f(y)$。

则称 f 是 A 到 B 的保序映射。设 f 是双射。

(1) 证明：如果 A 是全序集，则 f 是 A 到 B 的相似映射。

(2) 举例说明 f 不一定是 A 到 B 的相似映射。