第二章　映　　射

2.1　映射的概念

函数是数学中的重要概念。函数的主要特征是，对定义域的每个自变量，有惟一的函数值。数学中函数的定义域主要是实数或实数的子集。将函数推广到一般集合上就是映射。

2.1.1 定义　映射　A 是非空集合，A 到 B 的映射是指：A 中每个元素都对应到 B 中的某个元素，记为 $f∶A\to B$ (图 2.1.1)。

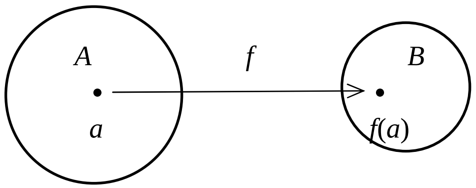

图 2.1.1

在 A 到 B 的映射 f 中，A 的元素 a 对应到 B 中的元素是惟一的，这个元素记为 $f(a)$，称为 a 在 f 下的象，也称 f 将 a 映成 $f(a)$。如果 $a = <a_1,\cdots, a_n>$，则 $f(a)$经常记为 $f(a_1,\cdots, a_n)$。注意 $f(a_1,\cdots, a_n)$ 是一个元素$<a,\cdots, a_n>$的象，而不是 n 个元素 $a,\cdots, a_n$ 的象。

如果对 A 中每个元素 x，它的象 $f(x)$确定了，则这个映射就确定了。所以只要对 A 中每个元素 x 都描述了映射 $f(x)$，也就描述 A 到 B 的映射 f。这种描述方法表示为：

$$f∶A\to B \quad f(x) = y$$

如果 A 是两个不相交集合 A_1 和 A_2 的并，即

$$A = A_1\cup A_2 \text{ 和 } A_1\cap A_2 = \varnothing,$$

则可以在 A_1 和 A_2 上分别描述 f 如下：

$$f∶A\to B \quad f(x) = \begin{cases} y & \text{如果 } x\in A_1 \\ z & \text{如果 } x\in A_2\text{。} \end{cases}$$

这种情况类似于数学中函数的分情况定义。

当 $A = \{a_1,\cdots, a_n\}$时，常用列举 A 中每个元素的象的方法来描述映射。如果 a_i 的象是 b_i (i = 1,⋯, n)，则这个映射就可以表示为：

$$f∶A\to B \quad f(a_1) = b_1,\cdots, f(a_n) = b_n\text{。}$$

在 A 到 B 的映射的定义中，我们允许 $B = \varnothing$而不允许 $A = \varnothing$。但如果 $B = \varnothing$，则不存在 A 到 B 的映射。注意这两种情况的区别，当 $B = \varnothing$时，按定义不存在 A 到 B 的映射，当 $A = \varnothing$时，我们没有定义 A 到 B 的映射。

为了统一起见，任给集合 B，我们规定$\varnothing$到 B 有一个映射，这个映射称为空映射，特记为θ_B。这样，在映射

$$f∶A\to B$$

中，A 就可以是空集$\varnothing$了，而且当 A 是空集时，就有 A 到$\varnothing$的映射$\theta_\varnothing$。注意当 $A\neq\varnothing$仍不存在 A 到$\varnothing$的映射。

一般用小写英文字母 f, g, h 等表示映射。

2.1.2 定义　定义域和值域　在映射

$$f∶A\to B$$

中，A 称为 f 的定义域，记为 dom(f)，即 dom(f) = A。集合

$$\{f(x) \mid x\in A\}$$

称为 f 的值域，记为 ran(f)。显然 ran(f) $\subseteq B$。

2.1.3 定义　映射的相等　f 和 g 是两个映射，如果 f 和 g 满足：

(1) dom(f) = dom(g)，

(2) 任给 $x\in$dom(f)，都有 $f(x) = g(x)$，

则称 f 和 g 相等，记为 $f = g$ (图 2.1.2)。

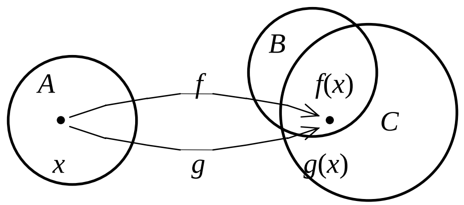

图 2.1.2

f 和 g 相等要求 f 和 g 有同样的定义域，所以

如果 $\mathrm{dom}(f) \neq \mathrm{dom}(g)$，则 $f \neq g$。

当 $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$时，$f \neq g$ 的条件是：

存在 $x\in\mathrm{dom}(f)$，使得 $f(x) \neq g(x)$。

任给集合 B, C，都有 $\mathrm{dom}(\theta_B) = \varnothing = \mathrm{dom}(\theta_C)$，又因为 $\mathrm{dom}(\theta_B)$ 中没有元素，所以也成立，

任给 $x\in\mathrm{dom}(\theta_B)$，都有$\theta_B(x) = \theta_C(x)$，

因此$\theta_B = \theta_C$。

这就是说，在映射相等的意义上，只有一个空映射。

映射是集合论中除集合外的另一重要概念，我们通过以下一些例子来加深对它的理解。

2.1.4 例 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 称为一元实函数，这是数学中常见的映射。如

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $f(x) = x^2$，

$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $g(x) = 3x$。

2.1.5 例 请看以下两个映射

$f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ $f(x) = x+1$，

$g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ $g(x) = x+1$。

虽然它们对于元素的象的描述是一样的，但因为它们有不同的定

义域，所以它们是不同的映射。

2.1.6 例 令 $A =$ 多边形集合。考虑以下两个映射

$f:A\to\mathbf{N}$ $f(x) = x$ 的边数

$g:A\to\mathbf{N}$ $g(x) = x$ 的角数，

虽然它们描述不一样，但因为多边形的边数等于角数，所以 $f = g$，它们实际上是同一个映射。

2.1.7 例 $n\geq1$，A^n 到 A 的映射 f 称为 A 上 n 元函数，也称为 A 上 n 元运算。如 **N** 和 **R** 上的加法和乘法分别是 **N** 和 **R** 上的二元运算。又如

$f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ $f(x) = -x$

是 **Z** 上的一元运算，称为 **Z** 上的负运算。

2.1.8 例 $\mathbf{T} = \{$真，假$\}$。**T** 上 n 元函数也称为 n 元真值函项。如一元真值函项：

$f:\mathbf{T}\to\mathbf{T}$ $f($真$) =$ 假，$f($假$) =$ 真。

和二元真值函项：

$g:\mathbf{T}^2\to\mathbf{T}$ $g($真,真$) =$ 真，$g($真,假$) =$ 假，
$g($假,真$) =$ 假，$g($假,假$) =$ 假；

$h:\mathbf{T}^2\to\mathbf{T}$ $g($真,真$) =$ 假，$g($真,假$) =$ 真，
$g($假,真$) =$ 真，$g($假,假$) =$ 真。

f 对应于真值联结词“否定”，g 对应于真值联结词“合取”，h 对应于真值联结词“析舍”。这些映射的性质说明了相应的真值联结词的性质。如

任给 $x\in\mathbf{T}$，都有 $f(x) = h(x, x)$

的逻辑意义就是：一个命题自身和自身的析舍就是这个命题的否定。也说明了“否定”可以由“析舍”来定义。

构成 A 到 B 的映射需要两个条件，一是对 A 中每个元素，都有 B 中的元素与之对应，二是这个对应是惟一的。不满足这两个条件就不能构成映射。

2.1.9 例 令 $A =$ 人类。任给 $x\in A$，将 x 对应到 x 的子女，因

为并非每个人都有子女，所以这个对应不能构成 A 到 A 的映射。任给 $x\in A$，将 x 对应到 x 的父亲，因为每个人都有惟一的父亲，所以这个对应能够构成 A 到 A 的映射

$$f：A\to A \quad f(x) = x \text{ 的父亲。}$$

2.1.10 例 任给 $x\in\mathbf{R}$，将 x 对应到比 x 小的整数，因为比 x 小的整数不止一个，所以这个对应不惟一，不能构成 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的映射。任给 $x\in\mathbf{R}$，将 x 对应到比 x 小的最大整数，这个对应不但存在而且惟一，所以存在 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{Z}$ 映射

$$f：\mathbf{R}\to\mathbf{Z} \quad f(x) = \text{ 比 } x \text{ 小的最大整数。}$$

从已知的映射可以构造新映射。

2.1.11 例 已知映射 $f：A\to B$，构造 A 到 $\mathrm{ran}(f)$的映射

$$g：A\to\mathrm{ran}(f) \quad g(x) = f(x)\text{。}$$

首先有 $\mathrm{dom}(f) = A = \mathrm{dom}(g)$，又任给 $x\in A$，都有 $f(x) = g(x)$，所以 $f = g$。

如果将 f 看成 A 的元素到 B 的元素的对应，则 g 就是同样的对应，只不过将它看做 A 的元素到 $\mathrm{ran}(f)$的元素的对应(图 2.1.3)。

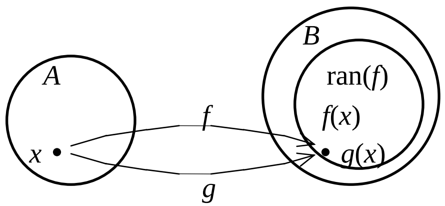

图 2.1.3

2.1.12 例 $f：A\to C$，任给 $B\subseteq A$，可以构造 B 到 C 的映射

$$g：B\to C \quad g(x) = f(x)\text{。}$$

g 称为 f 在 B 上的限制，记为 $f|_B$。如果将 f 看做 A 的元素到 C 的元素的对应，则只在 B 上考虑这种对应就是 g (图 2.1.4)。任给 B 到 C 的映射 h，$h = f|_B$ 的条件是：

任给 $x\in B$，都有 $h(x) = f(x)$。

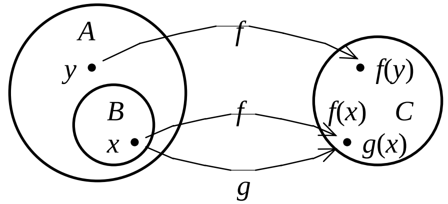

图 2.1.4

2.1.13 例 $A_1\cap A_2 = \varnothing$，$f：A_1\to B_1$ 和 $g：A_2\to B_2$ 是两个映射。将 A_1 到 B_1 的对应 f 和 A_2 到 B_2 的对应 g 放在一起，就是 $A_1\cup A_2$ 到 $B_1\cup B_2$ 的对应。

如果 $A_1\cap A_2 \neq \varnothing$，则 $A_1\cap A_2$ 中的元素 x 既要对应 $f(x)$，又要对应到 $g(x)$，可能使得 x 不能对应到惟一的元素。

条件 $A_1\cap A_2 = \varnothing$保证了 $A_1\cup A_2$ 中的任何 x 不能同时对应到 $f(x)$ 和 $g(x)$，从而保证了 x 对应到 $B_1\cup B_2$ 中惟一的元素，所以可以构成 $A_1\cup A_2$ 到 $B_1\cup B_2$ 的映射 h 如下(图 2.1.5)：

$$h：A_1\cup A_2\to B_1\cup B_2 \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } x\in A_1 \\ g(x) & \text{如果 } x\in A_2\text{。} \end{cases}$$

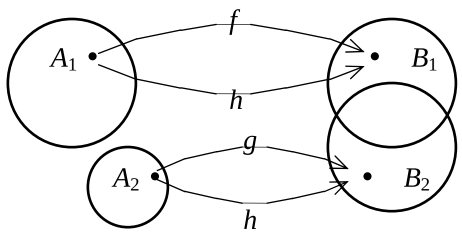

图 2.1.5

显然，h 满足：

任给 $x\in A_1$，都有 $h(x) = f(x)$，

任给 $x\in A_2$，都有 $h(x) = g(x)$。

2.1.14 例 $f：A_1\to B_1$ 和 $g：A_2\to B_2$ 是两个映射，可以构造 $A_1\times A_2$ 到 $B_1\times B_2$ 的映射

$$h：A_1\times A_2\to B_1\times B_2 \quad h(<x, y>) = <f(x), g(y)>。$$

2.1.15 例 $f：A\to B$ 和 $g：A\to C$ 是两个映射，可以构造 A 到 $B\times C$ 的映射

$$h：A\to B\times C \quad h(x) = <f(x), g(x)>，$$

记 $h = f{*}g$。任给 A 到 $B\times C$ 的映射 h，$h = f{*}g$ 的条件是：

任给 $x\in A$，都有 $h(x) = <f(x), g(x)>$。

设 f_1 和 f_2 是 A 到 B 映射，g_1 和 g_2 是 A 到 C 的映射，则任给 $x\in A$，都有

$$(f_1{*}g_1)(x) = (f_2{*}g_2)(x)$$

当且仅当 $<f_1(x), g_1(x)> = <f_2(x), g_2(x)>$

当且仅当 $f_1(x) = f_2(x)$且 $g_1(x) = g_2(x)$。

因此 $f_1{*}g_1 = f_2{*}g_2$ 当且仅当 $f_1 = f_2$ 且 $g_1 = g_2$。

以下是关于集合自身的一些重要映射。

2.1.16 例 将 A 的每一个元素映成自身的映射称为 A 上恒等映射，记为 i_A，即

$$\mathrm{i}_A：A\to A \quad \mathrm{i}_A(x) = x。$$

2.1.17 例 $b\in B$，将 A 的每一个元素都映成 b 的映射称为 A 到 B 的以 b 为值的常映射，记为 b，即

$$\mathsf{b}：A\to B \quad \mathsf{b}(x) = b。$$

b 是 b 的 Arial 体，以后都采用这样的办法，当我们用某个字母表示一个元素时，以这个元素为值的常映射就用相应的 Arial 体字母表示，如以 a, b, c 为值的常映射就分别用 $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$ 来表示。

显然，如果 $b \neq c$ 则 $\mathsf{b} \neq \mathsf{c}$。

当 $A = \{a\}$且 $B \neq \varnothing$时，任给 A 到 B 的映射 f，令 $b = f(a)$，则 $f = \mathsf{b}$。所以当 $A = \{a\}$且 $B \neq \varnothing$时，A 到 B 的映射都是常映射。

当 $B = \{b\}$且 $A \neq \varnothing$时，A 到 B 的映射只有一个，就是常映射 b。

2.1.18 例 $B \subseteq A$，任给 $x\in A$，如果 $x\in B$ 就让 x 对应到 1，如果 $x\in A\setminus B$ 就让 x 对应到 0，这样就构成了 A 到$\{0, 1\}$的映射

$$\mu_B：A\to\{0, 1\} \quad \mu_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x\in B \\ 0 & \text{如果 } x\in A\setminus B。\end{cases}$$

对于(A 中的)元素 x 来说，x 是否属于 B 由$\mu_B(x)$是否等于 1 来表示，所以映射μ_B称为 B (在 A 中)的特征函数(图 2.1.6)。

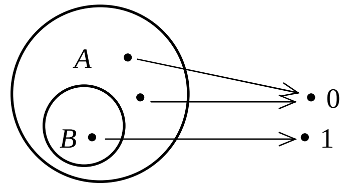

图 2.1.6

2.1.19 例 Γ是集合族，$\varnothing\notin\Gamma$，h 是Γ到$\bigcup\Gamma$的映射。如果 h 满足：

任给 $X\in\Gamma$，都有 $h(X)\in X$，

则称 h 是Γ上的选择函数。

它的意义是：同时对Γ中的每个集合 X，指定 X 自身的一个元素，这个元素就是 $h(X)$。

数学归纳法的等价命题最小数原理是指：

N 的任何非空子集都有最小数。

用最小数原理可以构造映射

$$h：\mathsf{P}(\mathbf{N})\setminus\{\varnothing\}\to\mathbf{N} \quad h(X) = X \text{ 的最小数，}$$

因为 $h(X)\in X$，$\bigcup(\mathsf{P}(\mathbf{N})\setminus\{\varnothing\}) = \mathbf{N}$，所以 h 是 $\mathsf{P}(\mathbf{N})\setminus\{\varnothing\}$上的选择函数。

习题 2.1

2.1.1　判断以下对应是否构成 A 到 B 的映射。能够构成映射的写出其值域，不能构成映射的说明理由。

(1) $A =$ 小学生，$B =$ 学校。将每个小学生对应到他所在的学校。

(2) $A =$ 人类，$B =$ 国家。将每个人对应到他曾到过的国家。

(3) $A = B = \mathbf{R}$。将每个 $x\in\mathbf{R}$ 对应到 $\sqrt{x}$ 。

(4) $A = \mathbf{N}$，$B = \mathbf{R}$。将每个 $x\in\mathbf{N}$ 对应到 $\sqrt{x}$ 。

2.1.2　B 是 A 的真子集。C 中至少有两个元素，g 是 B 到 C 的映射。证明：存在 A 到 C 映射 f_1 和 f_2，使得

$$f_1 \neq f_2 \text{ 且 } f_1\,|_B = f_2\,|_B = g。$$

2.1.3　$f：A\to C$ 和 $g：B\to C$ 是两个映射，其中 $A\cap B = \varnothing$。按例 2.1.13 构造映射

$$h：A\cup B\to C\quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } x\in A \\ g(x) & \text{如果 } x\in B。\end{cases}$$

证明：$h\,|_A = f$ 且 $h\,|_B = g$。

2.1.4　$h：A\to B\times C$，构造映射 f 和 g 如下：

$f：A\to B\quad f(x) = y$ (如果 $h(x) = <y, z>$)，

$g：A\to C\quad g(x) = z$ (如果 $h(x) = <y, z>$)。

证明：$h = f*g$ ($*$的定义见例 2.1.15)。

2.1.5　$f：A\to\{0, 1\}$，令 $B = \{x \mid x\in A \text{ 且 } f(x) = 1\}$，$\mu_B$是 B 的特征函数。证明：$\mu_B = f$。

2.1.6　构造集合族$\Gamma = \{(x, x+1] \mid x\in\mathbf{Z}\}$上的选择函数。

2.2　单射、满射和双射　逆映射

A 到 B 的映射，只要求 A 中每个元素的象是惟一的，并不要求 A 中不同的元素的象不一样，只要求 A 中每个元素都有象，并不要求 B 中每个元素都是象。

然而对于 A 到 B 的映射来说，A 中不同的元素有不同的象和 B 中每个元素都是象是两种重要性质。相对于这两种性质，就有两类重要的映射。

2.2.1 定义　单射　f 是 A 到 B 的映射，如果 A 中不同的元素有不同的象，则称 f 是单射(图 2.2.1)。f 是单射的条件是：

任给 $x, y\in A$，如果 $x \neq y$ 则 $f(x) \neq f(y)$。

因为不同的元素有不同的象，所以如果两个元素有相同的象，则它们就是同一个元素。因此 f 是单射的另一条件是：

任给 $x, y\in A$，如果 $f(x) = f(y)$则 $x = y$。

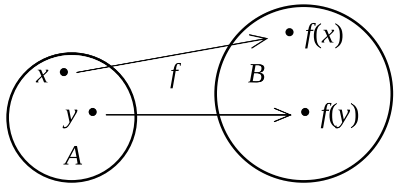

图 2.2.1

如果 f 不是单射，则 A 中有两个不同的元素，它们的象是一样的(图 2.2.2)。所以 f 不是单射的条件是：

存在 $x, y\in A$，使得 $x \neq y$ 且 $f(x) = f(y)$。

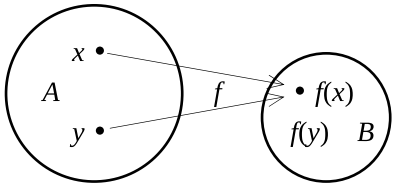

图 2.2.2

任给集合 B，因为$\varnothing$中没有元素，所以成立

任给 $x, y\in\varnothing$，如果 $x \neq y$ 则 $f(x) \neq f(y)$。

因此$\varnothing$到 B 的空映射θ_B是单射。

2.2.2 定义 满射 f 是 A 到 B 的映射，如果 B 中每个元素都是 A 中元素的象，则称 f 是满射。f 是满射就是说 $\mathrm{ran}(f) = B$，它的条件是：

任给 $y\in B$，存在 $x\in A$，使得 $f(x) = y$

如果 f 不是满射，则 B 中有元素不是象。所以 f 不是满射的条件是：

存在 $y\in B$，使得任给 $x\in A$，都有 $f(x) \neq y$

任给非空集合 B，取 $b\in B$，则因为$\varnothing$中没有元素，所以

任给 $x\in\varnothing$，都有 $f(x) \neq b$，

因此$\varnothing$到 B 的空映射θ_B不是满射。

对于$\varnothing$来说，显然有

任给 $y\in\varnothing$，存在 $x\in\varnothing$，使得 $f(x) = y$，

因此$\varnothing$到$\varnothing$的空映射$\theta_\varnothing$是满射。

以下是单射和满射的一些例子。

2.2.3 例 对于例 2.1.4 中的一元实函数

$f：\mathbf{R}\to\mathbf{R} \quad f(x) = x^2$

来说，因为 $f(1) = f(-1) = 1$，所以 f 不是单射，又因为任给 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)\geq 0$，所以 f 也不是满射。

2.2.4 例 f 和 $f|_B$ 的关系($f|_B$ 的定义见例 2.1.12)。

如果 f 是单射，则 A 中不同的元素有不同的象，当然 B 中不同的元素也有不同的象，所以 $f|_B$ 是单射。

如果 $f|_B$ 是满射，则 C 中每个元素都是 B 中某个元素的象，当然也是 A 中某个元素的象，所以 f 是满射。

2.2.5 例 $f：A_1\to B_1$ 和 $g：A_2\to B_2$ 是两个映射，其中 $A_1\cap A_2 = \varnothing$。由 2.1.13 构造 $A_1\cup A_1$ 到 $B_1\cup B_1$ 的映射

$$h：A_1\cup A_2\to B_1\cup B_2 \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } x\in A_1 \\ g(x) & \text{如果 } x\in A_2。\end{cases}$$

如果 f, g 都是满射，则 h 是满射，理由如下：

任给 $y\in B_1\cup B_2$，当 $y\in B_1$ 时，由 f 是满射得

存在 $x\in A_1$，使得 $f(x) = y$，

当 $y\in B_2$ 时，由 g 是满射得

存在 $x\in A_2$，使得 $g(x) = y$。

所以在两种情况下都有：

存在 $x\in A_1\cup A_2$，使得 $h(x) = y$。

因此 h 是满射。

2.2.6 例 $f：A_1\to B_1$ 和 $g：A_2\to B_2$ 是两个映射，构造 $A_1\times A_2$ 到 $B_1\times B_2$ 的映射

$h：A_1\times A_2\to B_1\times B_2：h(<x, y>) = <f(x), g(y)>$，

如果 f 和 g 都是单射，则 h 是单射，如果 f, g 都是满射，则 h 是满射，理由如下：

任给$<x_1, y_1>, <x_2, y_2>\in A_1\times A_2$，如果 $h(<x_1, y_1>) = h(<x_2, y_2>)$，则

$<f(x_1), g(y_1)> = <f(x_2), g(y_2)>$，

由有序对相等的定义得

$f(x_1) = f(x_2)$且 $g(y_1) = g(y_2)$，

由 $f(x_1) = f(x_2)$和 f 是单射得

$x_1 = x_2$，

由 $g(y_1) = g(y_2)$和 g 是单射得

$$y_1 = y_2,$$

所以$<x_1, y_2> = <x_2, y_2>$。

任给$<x, y>\in B_1\times B_2$，都有

$$x\in B_1 \text{ 且 } y\in B_2,$$

由 f 是满射得

存在 $x_0\in A_1$，使得 $f(x_0) = x$，

由 g 是满射得

存在 $y_0\in A_1$，使得 $f(y_0) = y$，

所以

存在$<x_0, y_0>\in A_1\times A_2$，

使得 $h(<x_0, y_0>) = <f(x_0), g(y_0)> = <x, y>$。

2.2.7 例　Γ是以 I 为指标集的集合族，即$\Gamma = \{A_i \mid i\in I\}$，令

$$f：I\to\Gamma \quad f(i) = A_i$$

则 f 是满射。如果Γ满足

任给 $i, j\in I$，只要 $i \neq j$，就有 $A_i \neq A_j$，

则上述的 f 还是单射。特别地，

$$g：\mathbf{N}\to\Gamma(\mathbf{N}) \quad g(n) = \mathbf{N}_n$$

和

$$h：\mathbf{R}\to\Gamma(\mathbf{Q}) \quad h(a) = \mathbf{Q}_a$$

都既是满射又是单射(见例 1.1.4 和习题 1.2.2)。

既是单射又是满射的映射是另一类重要的映射。

2.2.8 定义　双射　f 是 A 到 B 的映射，如果 f 既是单射又是满射，则称 f 是双射。

满射保证了对于 A 中每个元素都存在 B 中某个元素与之对应，单射保证了 A 中不同的元素对应到不同的元素，所以双射就是 A 的元素和 B 的元素一个一个对应。

因此，如果存在 A 到 B 的双射，则称 A 和 B 的元素间有一一对应。

2.2.9 例　$f：(0, 1) \to\mathbf{R} \quad f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}$，任给 $a\in\mathbf{R}$，方程

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} = a,$$

在开区间(0, 1)中有惟一的解，所以 f 是双射。

2.2.10 例　f 是 $\mathbf{Q}^+$到 $\mathbf{Z}^+$的双射，可以将它扩充为 $\mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的双射如下：

$$g：\mathbf{Q}\to\mathbf{Z} \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } x>0 \\ -f(x) & \text{如果 } x<0 \\ 0 & \text{如果 } x = 0, \end{cases}$$

可以证明 g 也是双射。

f 是 A 到 B 的双射。任给 $x\in B$，由 f 是满射得

存在 $y\in A$，使得 $f(y) = x$，

由 f 是单射得这样的 y 是惟一的，所以

任给 $x\in B$，存在惟一的 $y\in A$，使得 $f(y) = x$。

因此将 B 中的元素 x 对应到 A 中满足 $f(y) = x$ 的惟一的 y 可以构成 B 到 A 的映射。

2.2.11 定义　逆映射　f 是 A 到 B 的双射，将 B 中元素 x 对应到 A 中元素 y(满足 $f(y) = x$)的映射称为 f 的逆映射，记为 f^{-1}。即

$$f^{-1}：B\to A \quad f^{-1}(x) = y(\text{如果 } f(y) = x)。$$

逆映射的直观意义是：如果将双射 f 看做 A 到 B 的对应，则将这个对应反过来就是 B 到 A 的对应 f^{-1} (图 2.2.3)。

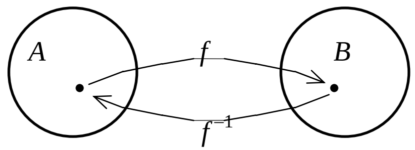

图 2.2.3

2.2.12 例 例 2.1.18 中的一元真值函项

$$f：\mathbf{T}\to\mathbf{T} \quad f(真) = 假，f(假) = 真。$$

是双射，它的逆映射是它自身，即 $f^{-1} = f$。

例 2.1.4 中的一元实函数

$$g：\mathbf{R}\to\mathbf{R} \quad g(x) = 3x$$

是双射，它的逆映射是

$$g^{-1}：\mathbf{R}\to\mathbf{R} \quad g^{-1}(x) = \frac{1}{3}x。$$

根据逆映射的定义可知：任给 $x\in B$，任给 $y\in A$，都有

$$f^{-1}(x) = y \text{ 当且仅当 } f(y) = x。$$

由这点可以证明逆映射的以下性质。

2.2.13 定理 f 是 A 到 B 的双射，f^{-1} 是 f 的逆映射。

(1) 任给 $x\in B$，都有 $f(f^{-1}(x)) = x$。

(2) 任给 $y\in A$，都有 $f^{-1}(f(y)) = y$。

(3) f^{-1} 是双射，并且 $(f^{-1})^{-1} = f$。

证 (1) 任给 $x\in B$，令 $y = f^{-1}(x)$，则 $y\in A$，所以

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(x) \text{当且仅当 } f(f^{-1}(x)) = x，$$

因此 $f(f^{-1}(x)) = x$ (图 2.2.4)。

(2) 任给 $y\in A$，令 $x = f(y)$，则 $x\in B$，所以

$$f^{-1}(f(y)) = y \text{ 当且仅当 } f(y) = f(y)，$$

因此 $f^{-1}(f(y)) = y$ (图 2.2.4)。

(3) 任给 $x, y\in B$，如果 $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$，则

$$x = f(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(y)) = y，$$

所以 f^{-1} 是单射。

任给 $y\in A$，存在 $f(y)\in B$，使得 $f^{-1}(f(x)) = y$，所以 f^{-1} 是满射。

f^{-1} 既是单射又是满射，所以 f^{-1} 是双射，因此 f^{-1} 有逆映射

$$(f^{-1})^{-1}：A\to B。$$

任给 $x\in A$，对于 f^{-1} 来说，由(1)得

$$f^{-1}((f^{-1})^{-1}(x)) = x，$$

对于 f 来说，由(2)得

$$f^{-1}(f(x)) = x，$$

所以

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}((f^{-1})^{-1}(x))，$$

又由 f^{-1} 是单射得

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)。$$

这就证明了任给 $x\in A$，都有

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)，$$

因此 $(f^{-1})^{-1} = f$。■

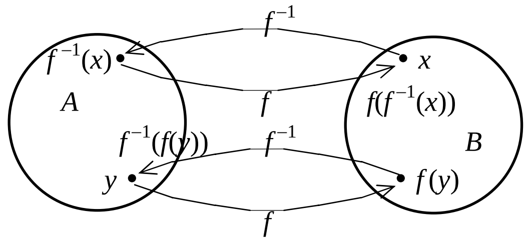

图 2.2.4

习题 2.2

2.2.1 $f：\mathbf{Z}\to\mathbf{Z} \quad f(x) = x+1$，$g：\mathbf{N}\to\mathbf{N} \quad g(x) = x+1$。

(1) 证明 f 是双射并写出逆映射。

(2) 证明 g 是单射但不是满射。

2.2.2 $A_1\cap A_2 = \varnothing$，$f$ 和 g 分别是 A_1 到 B_1 和 A_2 到 B_2 的单射，按例 2.1.13 构造

$$h：A_1\cup A_2\to B_1\cup B_2 \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } x\in A_1 \\ g(x) & \text{如果 } x\in A_2。\end{cases}$$

(1) 证明：如果 $B_1 \cap B_2 = \varnothing$，则 h 是单射。

(2) 举例说明当 $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$时，$h$ 不一定是单射。

2.2.3　$f：A_1 \to B_1$，$g：A_2 \to B_2$，按例 2.1.14 构造

$$h：A_1 \times A_2 \to B_1 \times B_2 \quad h(<x, y>) = <f(x), g(y)>。$$

证明：

(1) 如果 h 是单射，则 f 和 g 都是单射。

(2) 如果 h 是满射，则 f 和 g 都是满射。

2.2.4　f 是 $\mathbf{Q}^+$到 $\mathbf{Z}^+$的双射，构造 $\mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的双射如下：

$$g：\mathbf{Q} \to \mathbf{Z} \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } x>0 \\ -f(x) & \text{如果 } x<0 \\ 0 & \text{如果 } x = 0， \end{cases}$$

证明：g 是双射。

2.2.5　$f：A \times B \to B \times A$　$f(<x, y>) = <y, x>$，证明 f 是双射。

2.2.6　构造一个双射 $f：A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$。

2.2.7　构造 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的配对函数 f 如下：

$$f：\mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N} \quad f(x, y) = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1)+x，$$

任给 $x \in \mathbf{N}$，令 $\mathrm{n}(x) = \{\mathrm{n} \mid \mathrm{n}^2+3\mathrm{n} \geq 2x\}$的最小数。

证明：

(1) 如果 $x_1+y_1 \neq x_2+y_2$，则 $f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2)$。

(2) 如果 $x_1+y_1 = x_2+y_2$ 且 $x_1 \neq x_2$，则 $f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2)$。

(3) 任给 $x \in \mathbf{N}$，$x-\frac{1}{2}(\mathrm{n}(x)^2+\mathrm{n}(x))$, $\frac{1}{2}(\mathrm{n}(x)^2+3\mathrm{n}(x))-x \in \mathbf{N}$。

(4) 任给 $x \in \mathbf{N}$，$f(x-\frac{1}{2}(\mathrm{n}(x)^2+\mathrm{n}(x)), \frac{1}{2}(\mathrm{n}(x)^2+3\mathrm{n}(x))-x) = x$。

(5) f 是双射。

2.3　映射的复合

f 是 A 到 B 的映射，g 是 B 到 C 的映射。对于 A 中的每个元素 x，f 将 x 映成 $f(x) \in B$，g 又将 $f(x)$映成 $g(f(x)) \in C$，又因为 $g(f(x))$是惟一的，所以将 A 中元素 x 对应到 C 中元素 $g(f(x))$能够构成 A 到 C 的映射。

2.3.1 定义　映射的复合　f 是 A 到 B 的映射，g 是 B 到 C 的映射。将 A 中元素 x 对应到 C 中元素 $g(f(x))$的映射称为 f 和 g 的复合，记为 $g \circ f$，即

$$g \circ f：A \to C \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ (图 2.3.1)。}$$

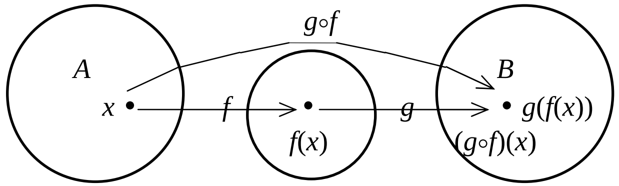

图 2.3.1

先来看一些例子。

2.3.2 例　取例 2.1.5 中的映射 $f：\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$　$f(x) = x+1$，则

$$f \circ f：\mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \quad (f \circ f)(x) = x+2。$$

取例 2.1.8 中的一元真值函项 f，二元真值函项 g 和 h，则

$$f \circ g = h，f \circ h = g，$$

这两个复合的逻辑意义是：“析舍”可以由“合取”和“否定”来定义，“合取”可以由“析舍”和“否定”来定义。

2.3.3 例　f 和 g 分别是 A 到 B 和 B 到 A 的映射，则 $g \circ f$ 是 A 到 A 的映射，$f \circ g$ 是 B 到 B 的映射。

如果 $A \neq B$，当然 $g\circ f \neq f\circ g$。就是 $A = B$，一般也没有 $g\circ f = f\circ g$。如对于例 2.1.4 中的映射

$$f: \mathbf{R}\to\mathbf{R} \quad f(x) = x^2 \text{ 和 } g: \mathbf{R}\to\mathbf{R} \quad g(x) = 3x,$$

就有

$$(f\circ g)(1) = (3\cdot 1)^2 = 3^2 = 9 \neq 3 = 3\cdot 1^2 = (g\circ f)(1)。$$

所以 $g\circ f \neq f\circ g$。

现在讨论映射复合的性质。

2.3.4 定理 f 和 g 分别是 A 到 B 和 B 到 C 的映射，i_A 和 i_B 分别是 A 和 B 上的恒等映射。

(1) $\mathrm{dom}(g\circ f) = \mathrm{dom}(f)$，$\mathrm{ran}(g\circ f) \subseteq \mathrm{ran}(g)$。

(2) $f\circ \mathrm{i}_A = f$，$\mathrm{i}_B\circ f = f$。

(3) 如果 f 是双射，则 $f^{-1}\circ f = \mathrm{i}_A$，$f\circ f^{-1} = \mathrm{i}_B$。

(4) 如果 g 和 f 都是单射，则 $g\circ f$ 是单射。

(5) 如果 g 和 f 都是满射，则 $g\circ f$ 是满射。

证 (1)(2)显然。

(3) 由定理 2.2.13(1)(2)直接可得。

(4) 任给 $x, y\in A$，如果$(g\circ f)(x) = (g\circ f)(y)$，则 $g(f(x)) = g(f(y))$。由 g 是单射得

$$f(x) = f(y),$$

再由 f 是单射得

$$x = y。$$

因此 $g\circ f$ 是单射。

(5) 任给 $z\in C$，由 g 是满射得

存在 $y\in B$，使得 $g(y) = z$，

对于这个 y，由 f 是满射得

存在 $x\in A$，使得 $f(x) = y$，

所以

存在 $x\in A$，使得$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)= z$。

因此 $g\circ f$ 是满射。■

设 $f: A\to B$，$g: B\to C$，$h: C\to D$ 是三个映射。

任给 $x\in A$，f 将 x 映成 $f(x)\in B$，再由 g 将 $f(x)$映成 $g(f(x))\in C$，最后由 h 将 $g(f(x))$映成 $h(g(f(x)))\in D$，这样就得到了 A 到 D 的一个映射。

这个映射有两种看法，一是看做将 A 中元素先由 $g\circ f$ 映到 C，再由 h 映到 D，一是看做将 A 中元素先由 f 映到 B，再由 $h\circ g$ 映到 D。按前一种看法，这个映射是 $h\circ(g\circ f)$，按后一种看法，这个映射是$(h\circ g)\circ f$。所以应该有 $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\, f$ (图 2.3.2)。

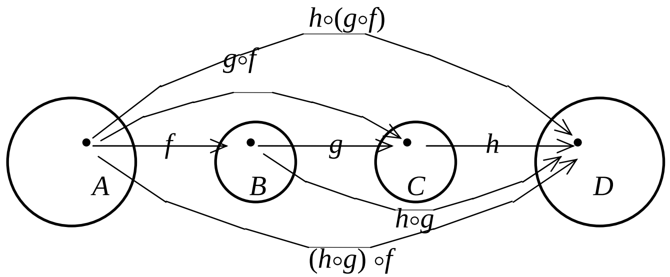

图 2.3.2

2.3.5 定理 映射复合的结合律 任给三个映射

$$f: A\to B,\ g: B\to C,\ h: C\to D,$$

都有 $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$。

证 任给 $x\in A$，都有

$$h\circ(g\circ f)(x) = h(g\circ f)(x) = h(g(f(x)))$$

和

$$(h\circ g)\circ f = (h\circ g)(f(x)) = h(g(f(x))),$$

所以

$$h\circ(g\circ f)(x) = ((h\circ g)\circ f)(x)。$$

因此 $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$。■

由定理 2.3.5，当三个或更多的映射复合时，可以省略括号。

f和 g 分别是 A 到 B 和 B 到 A 的映射，定理 2.3.4(3)是说，当 g 是 f 的逆映射时，g 和 f 的复合是 A 上恒等映射，f 和 g 的复合是 B 上恒等映射。

反之也成立，即，如果 g 和 f 的复合是 A 上恒等映射，f 和 g 的复合是 B 上恒等映射，则 g 是 f 的逆映射。

2.3.6 定理 f 是 A 到 B 的映射，g 是 B 到 A 的映射，如果 $g\circ f = \mathrm{i}_A$ 且 $f\circ g = \mathrm{i}_B$，则 $g = f^{-1}$。

证 任给 $x, y\in A$，如果 $f(x) = f(y)$，则 $g(f(x)) = g(f(y))$，所以

$$x = \mathrm{i}_A(x) = (g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y))$$
$$= (g\circ f)(y) = \mathrm{i}_A(y) = y。$$

因此 f 是单射。

任给 $y\in B$，都有 $g(y)\in A$，令 $x = g(y)$，则存在 $x\in A$，使得

$$f(x) = f(g(y)) = (f\circ g)(y) = \mathrm{i}_B(y) = y。$$

因此 f 是满射。

由 f 是双射得 f 有逆映射 f^{-1}。

任给 $y\in B$，都有

$$f(g(y)) = (f\circ g)(y) = \mathrm{i}_B(y) = (f\circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y))，$$

由 f 是单射得

$$g(y) = f^{-1}(y)。$$

因此 $g = f^{-1}$。■

由定理 2.3.6 可证映射的复合和逆映射的以下关系。

2.3.7 定理 f 和 g 分别是 A 到 B 和 B 到 C 的映射，如果 f 和 g 都是双射，则$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$。

证 首先有 $g\circ f$ 是 A 到 C 的映射，$f^{-1}\circ g^{-1}$ 是 C 到 A 的映射，由定理 2.3.6，只需证$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) = \mathrm{i}_A$ 和$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1}) = \mathrm{i}_C$ 。

$$\begin{aligned}(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) &= ((f^{-1}\circ g^{-1})\circ g)\circ f\\ &= (f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g))\circ f\\ &= (f^{-1}\circ \mathrm{i}_B)\circ f = f^{-1}\circ f\\ &= \mathrm{i}_A，\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1}) &= ((g\circ f)\circ f^{-1})\circ g^{-1}\\ &= (g\circ(f\circ f^{-1}))\circ g^{-1}\\ &= (g\circ \mathrm{i}_B)\circ g^{-1}= g\circ g^{-1}\\ &= \mathrm{i}_C。\blacksquare\end{aligned}$$

习题 2.3

2.3.1 求 $g\circ f$ 和 $f\circ g$。

(1) $f：\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ $f(x, y) = xy$，
  $g：\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ $g(x) = <x, x+1>$。

(2) $f：\mathbf{N}^2\to\mathbf{N}$ $f(x, y) = x$，
  $g：\mathbf{N}\to\mathbf{N}^2$ $g(x) = <x, 0>$。

(3) $f：A\times(B\times C) \to A\times(B\times C)$ $f(<x, <y, z>>) = <y, <x, z>>$，
  $g：A\times(B\times C) \to A\times(B\times C)$ $g(<x, <y, z>>) = <x, <z, y>>$。

2.3.2 写出定理 2.3.4(1)(2)(3)的详细证明。

2.3.3 f 是 A 到 B 的映射，g 是 B 到 C 的映射。证明：如果 $g\circ f$ 是双射，则 g 是满射且 f 是单射。

2.3.4 定义性质，φ_1：双射，φ_2：单射非满射，φ_3：满射非单射，φ_4：非单射非满射。f 是 A 到 B 的映射，g 是 B 到 C 的映射。

讨论当 f 有性质φ_i，g 有性质φ_j 时，$g\circ f$ 有和没有哪种性质。例如，当 f 和 g 都有性质φ_1 时，$g\circ f$ 有性质φ_1 而没有性质φ_2, φ_3 和 φ_4。

2.3.5 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 和φ_4 同习题 2.3.4，f 是 A 到 B 的映射，g 是 B 到 C 的映射。

讨论当 $g\circ f$ 有性质φ_i 时，f 和 g 有和没有哪种性质。

2.4　子集的象和逆象

f 是 A 到 B 的映射，$X\subseteq A$。每个 $x\in X$ 在 B 中有象 $f(x)$，这些象的全体组成 B 的一个子集。

2.4.1 定义　子集的象　f 是 A 到 B 的映射，$X\subseteq A$。X 中所有元素的象的集合称为 X 在 f 下的象，记为 $f[X]$。即

$$f[X]=\{f(x)\mid x\in X\}。$$

用属于关系表示就是：

$$y\in f[X]\text{当且仅当存在 }x\in X\text{，使得 }y=f(x)。$$

有时也称 f 将 X 映成 $f[X]$。

显然有 $f[\varnothing]=\varnothing$，$f[A]=\mathrm{ran}(f)$。

又当 $X=\{a_1,\cdots,a_n\}$时，有 $f[X]=\{f(a_1),\cdots,f(a_n)\}$，特别地有 $f(\{a\})=\{f(a)\}$。

先来看子集的象的一些例子。

2.4.2 例　$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$　$f(x)=x^2$，则

$$f[(0,2)]=(0,4)，f[\mathbf{R}^+]=\mathbf{R}^+。$$

$g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$　$g(x)=x+1$，令

$$A=\{2x\mid x\in\mathbf{N}\}，B=\{2x+1\mid x\in\mathbf{N}\}，$$

则 $g[A]=B$，$g[B]=A\setminus\{0\}$。

现在讨论子集的象的性质。

2.4.3 定理　f 是 A 到 B 的映射，$X, Y\subseteq A$。

(1) 如果 $X\subseteq Y$，则 $f[X]\subseteq f[Y]$。

(2) $f[X\cup Y]=f[X]\cup f[Y]$。

(3) $f[X]\cap f[Y]=f[X\cap Y]\cup(f[X\setminus Y]\cap f[Y\setminus X])$，因此 $f[X\cap Y]\subseteq f[X]\cap f[Y]$。

(4) $f[X]\setminus f[Y]=f[X\setminus Y]\setminus f[Y]$，因此 $f[X]\setminus f[Y]\subseteq f[X\setminus Y]$。

证　(1) 任给 y，如果 $y\in f[X]$，则

存在 $x\in X$，使得 $f(x)=y$，

由 $X\subseteq Y$ 得 $x\in Y$，所以

$$f(x)\in f[Y]，$$

即

$$y\in f[Y]。$$

因此 $f[X]\subseteq f[Y]$。

(2) 任给 y，如果 $y\in f[X\cup Y]$，则

存在 $x\in X\cup Y$，使得 $f(x)=y$，

当 $x\in X$ 时有

$$f(x)\in f[X]，$$

当 $x\in Y$ 时有

$$f(x)\in f[Y]，$$

在两种情况下都有

$$f(x)\in f[X]\cup f[Y]。$$

因此 $f[X\cup Y]\subseteq f[X]\cup f[Y]$。

由 $X, Y\subseteq X\cup Y$ 和(1)得

$$f[X], f[Y]\subseteq f[X\cup Y]，$$

因此 $f[X]\cup f[Y]\subseteq f[X\cup Y]$。

(3) 由习题 1.4.3(2)得

$$X=(X\cap Y)\cup(X\setminus Y)\text{和 }Y=(X\cap Y)\cup(Y\setminus X)，$$

由 $X=(X\cap Y)\cup(X\setminus Y)$和(2)得

$$f[X]=f[(X\cap Y)\cup(X\setminus Y)]=f[X\cap Y]\cup f[X\setminus Y]$$

由 $Y=(X\cap Y)\cup(Y\setminus X)$和(2)得

$$f[Y]=f[(X\cap Y)\cup(Y\setminus X)]=f[X\cap Y]\cup f[Y\setminus X]$$

所以

$$\begin{aligned}f[X]\cap f[Y]&=(f[(X\cap Y)\cup(X\setminus Y)])\cap(f[(X\cap Y)\cup(Y\setminus X)])\\&=f[X\cap Y]\cup(f[X\setminus Y]\cap f[Y\setminus X])。\end{aligned}$$

(4) 由 $f[X]=f[(X\setminus Y)\cup(X\cap Y)]=f[X\setminus Y]\cup f[X\cap Y]$，

$$f[X\cap Y]\subseteq f[Y]$$

和习题 1.4.3(1)。详细证明留给读者。■

2.4.4 定理 f 是 A 到 B 的单射，$X, Y \subseteq A$。

(1) 如果 $X \cap Y = \varnothing$，则 $f[X] \cap f[Y] = \varnothing$。

(2) $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$。

(3) $f[X \setminus Y] = f[X] \setminus f[Y]$。

证 (1) 反证法。设 $f[X] \cap f[Y] \neq \varnothing$，则存在 $z \in f[X] \cap f[Y]$，所以

$$z \in f[X] \text{且} z \in f[Y],$$

由 $z \in f[X]$得

$$\text{存在 } x \in X\text{，使得 } f(x) = z,$$

由 $z \in f[Y]$得

$$\text{存在 } y \in Y\text{，使得 } f(y) = z,$$

所以

$$f(x) = f(y),$$

由 f 是单射得 $x = y$，所以

$$x \in X \text{ 且 } x \in Y,$$

因此

$$\text{存在 } x\text{，使得 } x \in X \cap Y,$$

和 $X \cap Y = \varnothing$矛盾。

(2) 由$(X \setminus Y) \cap (Y \setminus X) = \varnothing$和(1)得

$$f[X \setminus Y] \cap f[Y \setminus X] = \varnothing,$$

由 $f[X \setminus Y] \cap f[Y \setminus X] = \varnothing$和定理 2.4.3(3)得 $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$。

(3) 由$(X \setminus Y) \cap Y = \varnothing$，习题 1.4.3(3)和定理 2.4.3(4)。详细证明留给读者。■

可以将子集的象的交和并的性质推广到集合族。

2.4.5 定理 f 是 A 到 B 的映射，任给 $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$，都有 $A_\mathrm{i} \subseteq A$。

(1) $f[\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} A_\mathrm{i}] = \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} f[A_\mathrm{i}]$。

(2) $f[\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} A_\mathrm{i}] \subseteq \bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} f[A_\mathrm{i}]$，

(3) 如果 f 是单射，则$\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} f[A_\mathrm{i}] \subseteq f[\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} A_\mathrm{i}]$。

证 (1) 任给 $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$，都有 $A_\mathrm{i} \subseteq \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} A_\mathrm{i}$，由定理 2.4.3(1)得

$$f[A_\mathrm{i}] \subseteq f[\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} A_\mathrm{i}]。$$

因此$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} f[A_\mathrm{i}] \subseteq f[\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} A_\mathrm{i}]$。

任给 y，如果 $y \in f[\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} A_\mathrm{i}]$，则

$$\text{存在 } x \in \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} A_\mathrm{i}\text{，使得 } f(x) = y,$$

对于这个 x，存在 $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$，使得 $x \in A_\mathrm{i}$，所以

$$f(x) \in f[A_\mathrm{i}],$$

即

$$y \in f[A_\mathrm{i}],$$

这就证明了

$$\text{存在 } \mathrm{i} \in \mathrm{I}\text{，使得 } y \in f[A_\mathrm{i}],$$

由集合族的并的定义得

$$y \in \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} f[A_\mathrm{i}]。$$

因此 $f[\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} A_\mathrm{i}] \subseteq \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} f[A_\mathrm{i}]$。

(2) 任给 $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$，都有$\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} A_\mathrm{i} \subseteq A_\mathrm{i}$，由定理 2.4.3(1)得

$$f[\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} A_\mathrm{i}] \subseteq f[A_\mathrm{i}]。$$

因此 $f[\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} A_\mathrm{i}] \subseteq \bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} f[A_\mathrm{i}]$。

(3) 任给 $y \in \bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} f[A_\mathrm{i}]$，任给 $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$，都有 $y \in f[A_\mathrm{i}]$，所以

$$\text{任给 } \mathrm{i} \in \mathrm{I}\text{，存在 } x_\mathrm{i} \in A_\mathrm{i}\text{，使得 } f(x_\mathrm{i}) = y。$$

由 f 是单射得所有的 x_i 都相同，记为 x，所以

$$\text{任给 } \mathrm{i} \in \mathrm{I}\text{，都有 } x \in A_\mathrm{i},$$

由集合族的交的定义得 $x \in \bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} A_\mathrm{i}$，所以

$$f(x) \in f[\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} A_\mathrm{i}],$$

即

$$y \in f[\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} A_\mathrm{i}]。$$

因此$\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} f[A_\mathrm{i}] \subseteq f[\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} A_\mathrm{i}]$。■

利用子集的象，可以从 A 到 B 的映射构造 $\mathrm{P}(A)$到 $\mathrm{P}(B)$的映射，这两个映射的性质有密切的关系。

2.4.6 例 $f: A \to B$，构造 $\mathrm{P}(A)$到 $\mathrm{P}(B)$的映射

$$g: \mathrm{P}(A) \to \mathrm{P}(B) \quad g(X) = f[X]。$$

如果 f 是单射则 g 也是单射，理由如下：

任给 $X, Y\in \mathrm{P}(A)$，如果 $X\neq Y$，则

$$X\setminus Y \neq \varnothing\text{或 } Y\setminus X\neq\varnothing \text{ (见习题 1.4.4(2))},$$

不妨设 $X\setminus Y\neq\varnothing$，则由 f 是单射得

$$f[X]\setminus f[Y] = f[X\setminus Y] \neq \varnothing,$$

所以

$$f[X] \neq f[Y],$$

即 $g(X) \neq g(Y)$。

如果 f 是满射则 g 也是满射，理由如下：任给 $Y\in \mathrm{P}(B)$，取

$$X = \{x \mid x\in A \text{ 且 } f(x)\in Y\}$$

则

$$X\in \mathrm{P}(A)\text{且 } f[X] \subseteq Y,$$

又任给 $y\in Y$，由 f 是满射得

$$\text{存在 } x\in A\text{，使得 } f(x) = y,$$

由 X 的定义得

$$x\in X,$$

再由 $y = f(x)$和 $f(x)\in f[X]$得

$$y\in f[X],$$

因此

$$Y \subseteq f[X],$$

这证明了：存在 $X\in \mathrm{P}(A)$，使得 $g(X) = f[X] = Y$。

f 是 A 到 B 的映射，$Y \subseteq B$。A 中所有象在 Y 中的元素组成 A 的一个子集。

2.4.7 定义 子集的逆象 f 是 A 到 B 的映射，$Y \subseteq B$。A 中所有象在 Y 中的元素组成的集合称为 Y 在 f 下的逆象，记为 $f^{-1}[Y]$。即

$$f^{-1}[Y] = \{x \mid x\in A \text{ 且 } f(x)\in Y\}。$$

用属于关系表示就是：

$$x\in f^{-1}[Y]\text{当且仅当 } f(x)\in Y。$$

显然有 $f^{-1}[\varnothing] = \varnothing$，$f^{-1}[\mathrm{ran}(f)] = A$。

以下是子集的逆象的一些例子。

2.4.8 例 对于映射 $f：\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $f(x) = x^2$，有

$$f^{-1}[(0,4)] = (-2, 2)，f^{-1}[\mathbf{R}^+] = \mathbf{R}\setminus\{0\}。$$

对于映射 $g：\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ $g(x) = x+1$，如果令

$$A = \{2x \mid x\in\mathbf{N}\}，B = \{2x+1 \mid x\in\mathbf{N}\},$$

则有

$$g^{-1}[A] = B，g^{-1}[B] = A。$$

子集的逆象的性质要比子集的象的性质简单。

2.4.9 定理 f 是 A 到 B 的映射，$X, Y \subseteq B$。

(1) 如果 $X \subseteq Y$，则 $f^{-1}[X] \subseteq f^{-1}[Y]$。

(2) $f^{-1}[X\cup Y] = f^{-1}[X]\cup f^{-1}[Y]$。

(3) $f^{-1}[X\cap Y] = f^{-1}[X]\cap f^{-1}[Y]$。

(4) $f^{-1}[X\setminus Y] = f^{-1}[X]\setminus f^{-1}[Y]$。

证 (1) 任给 x，如果 $x\in f^{-1}[X]$，则 $f(x)\in X$，由 $X \subseteq Y$ 得

$$f(x)\in Y,$$

所以

$$x\in f^{-1}[Y]。$$

因此 $f^{-1}[X] \subseteq f^{-1}[Y]$。

(2) 任给 x，

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}[X\cup Y] \ &\text{当且仅当 } f(x)\in X\cup Y \\ &\text{当且仅当 } (f(x)\in X \text{ 或 } f(x)\in Y) \\ &\text{当且仅当 } (x\in f^{-1}[X]\text{或 } x\in f^{-1}[Y]) \\ &\text{当且仅当 } x\in f^{-1}[X]\cup f^{-1}[Y]。\end{aligned}$$

(3)和(4)的证明类似(2)，留给读者。■

子集的逆象的交和并的性质也可以推广到集合族。

2.4.10 定理 f 是 A 到 B 的映射，任给 $\mathrm{i}\in \mathrm{I}$，都有 $B_\mathrm{i} \subseteq B$。

(1) $f^{-1}[\bigcup_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}B_\mathrm{i}] = \bigcup_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}} f^{-1}[B_\mathrm{i}]$。

(2) $f^{-1}[\bigcap_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}B_\mathrm{i}] = \bigcap_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}} f^{-1}[B_\mathrm{i}]$。

证　留给读者。■

子集的象和逆象有以下关系。

2.4.11 定理　f 是 A 到 B 的映射，$X \subseteq A$，$Y \subseteq B$。

(1) $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$。如果 f 是单射，则 $f^{-1}[f[X]] = X$。

(2) $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$。如果 f 是满射，则 $f[f^{-1}[Y]] = Y$。

证　(1) 证明 $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$。任给 x，如果 $x \in X$，则 $f(x) \in f[X]$，由 $f^{-1}[f[X]]$的定义和 $f(x) \in f[X]$得

$$x \in f^{-1}[f[X]]。$$

因此 $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$。

设 f 是单射，证明 $f^{-1}[f[X]] \subseteq X$。任给 x，如果 $x \in f^{-1}[f[X]]$，则 $f(x) \in f[X]$，由 $f[X]$的定义和 $f(x) \in f[X]$得

存在 $y \in X$，使得 $f(y) = f(x)$，

由 f 是单射得

$$x = y，$$

所以 $x \in X$。

(2) 证明 $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$。任给 y，如果 $y \in f[f^{-1}[Y]]$，则

存在 $x \in f^{-1}[Y]$，使得 $f(x) = y$，

由 $f^{-1}[Y]$的定义和 $x \in f^{-1}[Y]$得

$$f(x) \in Y，$$

所以 $y \in Y$。

设 f 是满射，证明 $Y \subseteq f[f^{-1}[Y]]$。任给 y，如果 $y \in Y$，则 $y \in B$，由 f 是满射得

存在 $x \in X$，使得 $f(x) = y$，

所以

$$f(x) \in Y，$$

由 $f^{-1}[Y]$的定义和 $f(x) \in Y$ 得

$$x \in f^{-1}[Y]，$$

再由 $f[f^{-1}[Y]]$的定义和 $x \in f^{-1}[Y]$得

$$f(x) \in f[f^{-1}[Y]]，$$

所以 $y \in f[f^{-1}[Y]]$。■

在映射的复合下，子集的象和逆象有以下性质。

2.4.12 定理　f 和 g 分别是 A 到 B 和 B 到 C 的映射。

(1) 任给 $X \subseteq A$，都有$(g \circ f)[X] = g[f[X]]$。

(2) 任给 $Y \subseteq C$，都有$(g \circ f)^{-1}[Y] = f^{-1}[g^{-1}[Y]]$。

证　(1) 任给 $z \in (g \circ f)[X]$，存在 $x \in X$，使得$(g \circ f)(x) = z$，所以

$$z = g(f(x))，$$

由 $x \in X$ 得

$$f(x) \in f[X]，$$

由 $f(x) \in f[X]$得

$$g(f(x)) \in g[f[X]]，$$

因此 $z \in g[f[X]]$。

任给 $z \in g[f[X]]$，存在 $y \in f[X]$，使得 $g(y) = z$，由 $y \in f[X]$得

存在 $x \in X$，使得 $f(x) = y$，

所以

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)，$$

因此 $z \in (g \circ f)[X]$。

(2) 任给 $x \in (g \circ f)^{-1}[Y]$，都有$(g \circ f)(x) \in Y$，所以

$$g(f(x)) \in Y，$$

由 $g(f(x)) \in Y$ 得

$$f(x) \in g^{-1}[Y]，$$

由 $f(x) \in g^{-1}[Y]$得 $x \in f^{-1}[g^{-1}[Y]]$。

任给 $x \in f^{-1}[g^{-1}[Y]]$，都有 $f(x) \in [g^{-1}[Y]]$，所以

$$g(f(x)) \in Y，$$

即

$$(g \circ f)(x) \in Y，$$

由$(g \circ f)(x) \in Y$ 得 $x \in (g \circ f)^{-1}[Y]$。■

习题 2.4

2.4.1　求 $f[X_1], f[X_2], f^{-1}[Y_1]$和 $f^{-1}[Y_2]$。

(1) f：$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$　$f(x, y) = xy$，

$X_1 = \{<x, x>|\ x\in\mathbf{R}\}$，$X_2 = (0, 1)\times(0, 1)$，

$Y_1 = \{0\}$，$Y_2 = (-1, 0)\cup(0, 1)$。。

(2) f：$\mathbf{N}\to\mathbf{N}$　$f(x) = x+1$，

$X_1 = Y_1 = \mathbf{N}_n$，$X_2 = Y_2 = \mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_n$。

(3) $a\in A$，$A\cap B = \varnothing$，

$$f: A\cup B\to A\quad f(x) = \begin{cases} x & \text{如果 } x\in A \\ a & \text{如果 } x\in B, \end{cases}$$

$X_1 \subseteq A\cup B$ 且 $X_1\cap B \neq \varnothing$，$X_2 \subseteq A$，

$Y_1 \subseteq A$ 且 $a\in Y_1$，$Y_2 \subseteq A$ 且 $a\notin Y_2$。

2.4.2　f 是 A 到 B 的映射，$X \subseteq A$，证明：如果 $g = f|_X$，则 $f[X] = \mathrm{ran}(g)$。

2.4.3　证明定理 2.4.3(4)和定理 2.4.4(3)，即证明：

(1) $f[X]\setminus f[Y] = f[X\setminus Y]\setminus f[Y]$，

(2) 如果 f 是单射，则 $f[X\setminus Y] = f[X]\setminus f[Y]$。

2.4.4　证明定理 2.4.9(3)(4)，即证明：

(1) $f^{-1}[X\cap Y] = f^{-1}[X]\cap f^{-1}[Y]$。

(2) $f^{-1}[X\setminus Y] = f^{-1}[X]\setminus f^{-1}[Y]$。

2.4.5　证明定理 2.4.10，即证明：

(1) $f^{-1}[\bigcup_{i\in I}B_i] = \bigcup_{i\in I}f^{-1}[B_i]$。

(2) $f^{-1}[\bigcap_{i\in I}B_i] = \bigcap_{i\in I}f^{-1}[B_i]$。

2.4.6　f 是 A 到 B 的双射，$Y \subseteq B$，$f^{-1}[Y]$是 Y 在 f 下的逆象，$(f^{-1})[Y]$是 Y 在 f^{-1} 下的象，证明：$f^{-1}[Y] = (f^{-1})[Y]$。

2.5　映射族　一般卡氏积

因为集合的元素是任意的，所以映射也可以作为集合的元素。给予每个元素都是映射的集合一个专门的名称。

2.5.1 定义　映射族　每个元素都是映射的非空集合称为映射族。映射族一般用大写希腊字母$\Sigma, \Gamma, \Phi, \Psi$等表示。

注意映射族仍然是集合，是具有一定性质的集合。当我们对这样的集合使用映射族的称呼时，表明我们讨论的重点在于作为它的元素的那些映射。按定义，映射族总是非空的。

设 I 是一个非空集合，如果任给 $i\in I$，f_i 是 A_i 到 B_i 的映射，则$\{f_i \mid i\in I\}$是映射族，称为以 I 为指标集的映射族。

为了简单起见，以后使用映射族$\{f_i \mid i\in I\}$时，总是假定 f_i 是 A_i 到 B_i 的映射。

和集合族类似，任何映射族都可以表示为以某个非空集合为指标集的映射族。

A 的所有子集组成重要的集合族——幂集，A 到 B 的所有映射也组成一个重要的映射族。

2.5.2 定义　A 是非空集合，由 A 到 B 的所有映射组成的映射族记为 B^A，即 $B^A = \{f \mid f: A\to B\}$。

B 是集合，因为$\varnothing$到 B 有惟一的空映射θ_B，所以 $B^{\varnothing} = \{\theta_B\}$。如果 $A \neq \varnothing$，则按定义不存在 A 到$\varnothing$的映射，所以$\varnothing^A = \varnothing$。

为了简单起见，将 $\mathbf{N}_n{}^A$ 简记 $\mathbf{n}^A$，即 $\mathbf{n}^A = \{f \mid f: A\to\mathbf{N}_n\}$。

以下是映射族的一些例子。

2.5.3 例　$n\geq 1$，$A_0,\cdots, A_{n-1}$ 是 n 个集合，则

$$\{f \mid f: \mathbf{N}_n\to\textstyle\bigcup_{i<n}A_i\text{，任给 } 0\leq i\leq n-1\text{，都有 } f(i)\in A_i\}$$

是映射族。这个映射族记为$\prod_{i<n}A_i$。

2.5.4 例　如果 $A \neq \varnothing$，则$\{b\}^A = \{b\}$。如果 $B \neq \varnothing$，则

$B^{\{a\}} = \{b \mid b\in B\}$ (见例 2.1.17)。

映射族既然是集合，所以可以有它到别的集合的映射，也有别的集合到它的映射。为了清楚起见，这样的映射一般用英文大写字母 F, G, H 等表示，当然仍可以用 f, g, h 等表示。

2.5.5 例 任给 $X\in \mathrm{P}(A)$，X 在 A 中的特征函数 $\mu_X \in \mathbf{2}^A$ (见例 2.1.18)，所以可以构造 $\mathrm{P}(A)$ 到 $\mathbf{2}^A$ 的映射

$$F：\mathrm{P}(A)\to\mathbf{2}^A \quad F(X) = \mu_X。$$

可以证明 F 是双射。

任给 $X, Y\in \mathrm{P}(A)$，如果 $X \neq Y$，则

存在 $x\in A$，使得($x\in X$ 且 $x\notin Y$)或($x\in Y$ 且 $x\notin X$)，

不妨假设 $x\in X$ 且 $x\notin Y$，所以

$$\mu_X(x) = 1 \text{ 且 } \mu_Y(x) = 0，$$

因此

$$\mu_X \neq \mu_Y。$$

即

$$F(X) \neq F(Y)。$$

这就证明了 F 是单射。

任给 $f\in\mathbf{2}^A$，令 $X = \{x \mid x\in A \text{ 且 } f(x) = 1\}$，则

$$F(X) = \mu_X = f \text{ (见习题 2.1.5)。}$$

这就证明了 F 是满射。

2.5.6 例 $A\cap B = \varnothing$，任给 $h\in C^{A\cup B}$，h 在 A 上和 B 上的限制分别是

$$h|_A\in C^A \text{ 和 } h|_B\in C^B，$$

所以可以构造 $C^{A\cup B}$ 到 $C^A\times C^B$ 的映射

$$F：C^{A\cup B}\to C^A\times C^B \quad F(h) = \langle h|_A, h|_B\rangle$$

可以证明 F 是双射。

任给 $h, k\in C^{A\cup B}$，如果 $h \neq k$，则

存在 $x\in A\cup B$，使得 $h(x) \neq k(x)$，

当 $x\in A$ 时有 $h|_A(x) \neq k|_A(x)$，所以

$$h|_A \neq k|_A，$$

当 $x\in B$ 时有 $h|_B(x) \neq k|_B(x)$，所以

$$h|_B \neq k|_B，$$

在两种情况下都有

$$\langle h|_A, h|_B\rangle \neq \langle k|_A, k|_B\rangle。$$

因此 F 是单射。

任给 $\langle f, g\rangle\in C^A\times C^B$，由例 2.1.13 构造 $h\in C^{A\cup B}$，则

$$h|_A = f \text{ 且 } h|_B = g \text{ (见习题 2.1.3)，}$$

所以

$$F(h) = \langle h|_A, h|_B\rangle = \langle f, g\rangle。$$

因此 F 是满射。

如果 f 是集合 A 到映射族的映射，则任给 $x\in A$，$f(x)$是映射，而 $\mathrm{dom}(f(x))$中的元素 y 的象就是 $f(x)(y)$，通过这种形式可以定义新的映射，请看以下例子。

2.5.7 例 $f：A\to C^B$，可以构造 $B\times A$ 到 C 的映射

$$f^*：B\times A\to C \quad f^*(y, x) = f(x)(y)$$

从而可以构造$(C^B)^A$ 到 $C^{B\times A}$ 的映射

$$F：(C^B)^A\to C^{B\times A} \quad F(f) = f^*$$

$h：B\times A\to C$，可以构造 A 到 C^B 的映射如下：首先对任意的 $x\in A$，构造 B 到 C 的映射

$$h_x：B\to C \quad h_x(y) = h(\langle y, x\rangle)$$

然后构造 A 到 C^B 的映射

$$f：A\to C^B \quad f(x) = h_x$$

可以证明 $f^* = h$。

在例 2.1.13 中，从映射

$$f：A_1\to B_1 \text{ 和 } g：A_2\to B_2$$

构造了映射

$$h：A_1\cup A_2\to B_1\cup B_2 \quad h(\langle x, y\rangle) = \langle f(x), g(y)\rangle。$$

h 满足：

任给 $x \in A_1$，都有 $h(x) = f(x)$，

任给 $x \in A_2$，都有 $h(x) = g(x)$。

容易证明满足如此性质的映射是惟一的，所以我们可以不使用构造的方法，而利用 h 所满足的性质来定义 h。这种定义方法可以推广到映射族。

2.5.8 定义 并映射 $\Gamma = \{f_i \mid i \in I\}$是映射族，$h$ 是 A 到 B 的映射，其中 $A = \bigcup_{i \in I} A_i$，$B = \bigcup_{i \in I} B_i$。如果 h 满足：

任给 $i \in I$，任给 $x \in A_i$，都有 $h(x) = f_i(x)$，

则称 h 是映射族Γ的并映射，简称 h 是映射族Γ的并。

注意映射不是集合，这里的“并”不是集合意义上的“并”，但我们只在映射族上使用这种含义的“并”，所以决不会和集合意义上的“并”相混。

首先我们来证明一个映射族的并是惟一的。

2.5.9 定理 如果 h 和 k 都是映射族$\{f_i \mid i \in I\}$的并映射，则 $h = k$。

证 显然有

$$\mathrm{dom}(h) = \bigcup_{i \in I} A_i = \mathrm{dom}(k),$$

又任给 $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$，存在 $i \in I$，使得 $x \in A_i$，所以

$$h(x) = f_i(x) = k(x)。$$

因此 $h = k$。■

由并映射的惟一性，以后将映射族Γ的并记为 f_Γ。

并不是任何映射族都有并映射的，并映射存在是需要一定条件的。

2.5.10 定理 $\Gamma = \{f_i \mid i \in I\}$是映射族。如果$\Gamma$满足：

任给 $i, j \in I$，任给 $x \in A_i \cap A_j$，都有 $f_i(x) = f_j(x)$，

则Γ的并映射 f_Γ存在。

证 考虑这样的对应：任给 $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$，当 $x \in A_i$ 时将 x 对应到 $f_i(x)$。如果 $x \in A_i \cap A_j$，则由 $x \in A_i$ 得 x 对应到 $f_i(x)$，由 $x \in A_j$ 得 x 对应到 $f_j(x)$，但因为 $f_i(x) = f_j(x)$，所以 x 对应到$\bigcup_{i \in I} B_i$ 中惟一的元

素 $f_i(x)$ (也是 $f_j(x)$)，因此这个对应构成了$\bigcup_{i \in I} A_i$ 到$\bigcup_{i \in I} B_i$ 的映射

$$h: \bigcup_{i \in I} A_i \to \bigcup_{i \in I} B_i \quad h(x) = f_i(x)\ (\text{当 } x \in A_i \text{ 时})$$

任给 $i \in I$，任给 $x \in A_i$，都有 $h(x) = f_i(x)$，所以 h 就是映射族Γ的并映射 f_Γ。■

实际上，定理 2.5.10 的条件也是并映射 f_Γ存在的必要条件，这个证明留给读者。

为验证映射族的并映射是否存在，定理 2.5.10 使用起来不太方便。下面再给出并映射存在的两个条件。

2.5.11 定理 $\Gamma = \{f_i \mid i \in I\}$是映射族，令$\Sigma = \{A_i \mid i \in I\}$。在以下两种情况下 f_Γ存在。

(1) Σ是不交的。

(2) Σ是单调的，且满足：任给 $i, j \in I$，如果 $A_i \subseteq A_j$，则任给 $x \in A_i$，都有 $f_i(x) = f_j(x)$。

证 (1) 任给 $i, j \in I$，如果 $i = j$，则任给 $x \in A_i \cap A_j$，由 $f_i(x) = f_i(x)$ 得

$$f_i(x) = f_j(x),$$

如果 $i \neq j$，则由Σ是不交的得

$$A_i \cap A_j = \varnothing,$$

所以不存在满足 $x \in A_i \cap A_j$ 的 x，因此也有

任给 $x \in A_i \cap A_j$，都有 $f_i(x) = f_j(x)$。

这就证明了

任给 $i, j \in I$，任给 $x \in A_i \cap A_j$，都有 $f_i(x) = f_j(x)$，

由定理 2.5.11 得 f_Γ存在。

(2) 任给 $i, j \in I$，则由Σ是单调的得

$$A_i \subseteq A_j \text{ 或 } A_j \subseteq A_i,$$

不妨设 $A_i \subseteq A_j$，所以

$$A_i \cap A_j = A_i,$$

任给 $x \in A_i \cap A_j$，都有 $x \in A_i$，由定理条件得

$$f_i(x) = f_j(x)。$$

这就证明了

$$任给\ \mathrm{i}, \mathrm{j}\in \mathrm{I}，任给\ x\in A_{\mathrm{i}}\cap A_{\mathrm{j}}，都有\ f_{\mathrm{i}}(x) = f_{\mathrm{j}}(x)，$$

由定理 2.5.11 得 f_Γ存在。■

下面讨论并映射的性质。

2.5.12 定理 $\Gamma = \{f_{\mathrm{i}} \mid \mathrm{i}\in \mathrm{I}\}$是映射族，

$$f_\Gamma：\bigcup_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}A_{\mathrm{i}}\to\bigcup_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}B_{\mathrm{i}}$$

是Γ的并映射，令$\Sigma_1 = \{A_{\mathrm{i}} \mid \mathrm{i}\in \mathrm{I}\}$，$\Sigma_2 = \{B_{\mathrm{i}} \mid \mathrm{i}\in \mathrm{I}\}$。

(1) $\mathrm{ran}(f_\Gamma) = \bigcup_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}\mathrm{ran}(f_{\mathrm{i}})$，因此，如果任给 $\mathrm{i}\in \mathrm{I}$，f_{i} 都是满射，则 f_Γ是满射。

(2) 如果Γ_1是单调的，并且任给 $\mathrm{i}\in \mathrm{I}$，f_{i} 都是单射，则 f_Γ是单射。

(3) 如果Γ_2是不交的，并且任给 $\mathrm{i}\in \mathrm{I}$，f_{i} 都是单射，则 f_Γ是单射。

证 (1) 任给 $y\in\mathrm{ran}(f_\Gamma)$，存在 $x\in\bigcup_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}A_{\mathrm{i}}$，使得 $f_\Gamma(x) = y$，由 $x\in\bigcup_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}A_{\mathrm{i}}$ 得

$$存在\ \mathrm{i}\in \mathrm{I}，使得\ x\in A_{\mathrm{i}}，$$

所以

$$y = f_\Gamma(x) = f_{\mathrm{i}}(x)\in\mathrm{ran}(f_{\mathrm{i}})，$$

因此

$$y\in\bigcup_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}\mathrm{ran}(f_{\mathrm{i}})。$$

这就证明了

$$任给\ y\in\mathrm{ran}(f_\Gamma)，都有\ y\in\bigcup_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}\mathrm{ran}(f_{\mathrm{i}})，$$

因此 $\mathrm{ran}(f_\Gamma) \subseteq \bigcup_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}\mathrm{ran}(f_{\mathrm{i}})$。

任给 $y\in\bigcup_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}\mathrm{ran}(f_{\mathrm{i}})$，存在 $\mathrm{i}\in \mathrm{I}$，使得 $y\in\mathrm{ran}(f_{\mathrm{i}})$，所以

$$存在\ x\in A_{\mathrm{i}}，使得\ f_{\mathrm{i}}(x) = y，$$

因此

$$y = f_{\mathrm{i}}(x) = f_\Gamma(x)\in\mathrm{ran}(f_\Gamma)。$$

这就证明了

$$任给\ y\in\bigcup_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}\mathrm{ran}(f_{\mathrm{i}})，都有\ y\in\mathrm{ran}(f_\Gamma)，$$

因此$\bigcup_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}\mathrm{ran}(f_{\mathrm{i}}) \subseteq \mathrm{ran}(f_\Gamma)$。

如果任给 $\mathrm{i}\in \mathrm{I}$，f_{i} 都是满射，则

$$任给\ \mathrm{i}\in \mathrm{I}，都有\ B_{\mathrm{i}} = \mathrm{ran}(f_{\mathrm{i}})，$$

所以

$$\mathrm{ran}(f_\Gamma) = \bigcup_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}\mathrm{ran}(f_{\mathrm{i}}) = \bigcup_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}B_{\mathrm{i}}，$$

因此 f_Γ是满射。

(2) 任给 $x, y\in\bigcup_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}A_{\mathrm{i}}$，由$\Gamma_1$是单调的得(见习题 1.5.5)

$$存在\ \mathrm{i}\in \mathrm{I}，使得\ x, y\in A_{\mathrm{i}}，$$

如果 $x \neq y$，则 $f_{\mathrm{i}}(x) \neq f_{\mathrm{i}}(y)$，所以

$$f_\Gamma(x) = f_{\mathrm{i}}(x) \neq f_{\mathrm{i}}(y) = f_\Gamma(y)。$$

因此 f_Γ是单射。

(3) 任给 $x, y\in\bigcup_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}A_{\mathrm{i}}$，存在 $\mathrm{i}, \mathrm{j}\in \mathrm{I}$，使得

$$x\in A_{\mathrm{i}}\ 且\ y\in A_{\mathrm{j}}，$$

所以

$$f_{\mathrm{i}}(x)\in B_{\mathrm{i}}\ 且\ f_{\mathrm{j}}(y)\in B_{\mathrm{j}}，$$

如果 $x \neq y$，则当 $\mathrm{i} = \mathrm{j}$ 时，由 f_{i} 是单射得

$$f_{\mathrm{i}}(x) \neq f_{\mathrm{i}}(y)，$$

当 $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$ 时，由 $B_{\mathrm{i}}\cap B_{\mathrm{j}} = \varnothing$得

$$f_{\mathrm{i}}(x) \neq f_{\mathrm{i}}(y)，$$

所以在两种情况下都有

$$f_\Gamma(x) = f_{\mathrm{i}}(x) \neq f_{\mathrm{i}}(y) = f_\Gamma(y)。$$

因此 f_Γ是单射。■

n 个集合的卡氏积可以和一个映射族联系起来。为了便于对应，将 n 个集合的卡氏积记为 $A_0\times\cdots\times A_{\mathrm{n}-1}$，将 $A_0\times\cdots\times A_{\mathrm{n}-1}$ 中的元素记为$<a_0,\cdots, a_{\mathrm{n}-1}>$。

考虑例 2.5.3 中的映射族$\prod_{\mathrm{i}<\mathrm{n}}A_{\mathrm{i}}$，则

$$任给\ f\in\prod_{\mathrm{i}<\mathrm{n}}A_{\mathrm{i}}，都有<f(0),\cdots, f(\mathrm{n}-1)>\in A_0\times\cdots\times A_{\mathrm{n}-1}，$$

可以构造$\prod_{\mathrm{i}<\mathrm{n}}A_{\mathrm{i}}$ 到 $A_0\times\cdots\times A_{\mathrm{n}-1}$ 的映射

$$F：\prod_{\mathrm{i}<\mathrm{n}}A_{\mathrm{i}}\to A_0\times\cdots\times A_{\mathrm{n}-1} \quad F(f) = <f(0),\cdots, f(\mathrm{n}-1)>。$$

任给 $f, g\in\prod_{i<n}A_i$，如果 $f\neq g$，则

存在 $0\leq i\leq n-1$，使得 $f(i)\neq g(i)$，

所以

$$<f(0),\cdots, f(n-1)> \neq <g(0),\cdots, g(n-1)>,$$

即 $F(f)\neq F(g)$。因此 F 是单射。

任给 $<a_0,\cdots, a_{n-1}>\in A_0\times\cdots\times A_{n-1}$，构造 $\mathbf{N}_n$ 到 $\bigcup_{i<n}A_i$ 映射

$$f:\mathbf{N}_n\to\bigcup_{i<n}A_i \quad f(i)=a_i,$$

则 $f\in\prod_{i<n}A_i$ 且 $F(f)=<a_0,\cdots, a_{n-1}>$。因此 F 是满射。

因为 F 是双射，也可以用 $\prod_{i<n}A_i$ 来定义 n 个集合 $A_0,\cdots, A_{n-1}$ 的卡氏积。

这种用映射族定义卡氏积的方法可以推广到集合族。

2.5.13 定义 一般卡氏积 $\Gamma=\{A_i\mid i\in I\}$是集合族，映射族

$$\{f\mid f:I\to\bigcup_{i\in I}A_i，任给\ i\in I，都有\ f(i)\in A_i\}$$

称为集合族Γ的卡氏积，记为 $\prod_{i\in I}A_i$。

$I=\mathbf{N}_n$ 时，$\prod_{i\in I}A_i$ 就是 $\prod_{i<n}A_i$，所以下标 $i<n$ 就是下标 $i\in\mathbf{N}_n$ 的简写，这和集合族是类似的。

显然，如果存在 $i\in I$，使得 $A_i=\varnothing$，则 $\prod_{i\in I}A_i=\varnothing$。

但如果任给 $i\in I$，都有 $A_i\neq\varnothing$，却不容易证明 $\prod_{i\in I}A_i\neq\varnothing$，同样的结论对于 n 个集合的卡氏积是容易证明的(见习题 1.6.5)。

以后，在一般地讨论卡氏积时，都使用这样的定义，但如果仅讨论 n 个集合的卡氏积时，仍然使用 n 元有序组的定义，特别是对于两个集合的卡氏积。

如果在集合族 $\{A_i\mid i\in I\}$ 中，每个 A_i 都等于 A，则称 $\prod_{i\in I}A_i$ 为 A 的以 I 为指标集的卡氏幂。这时有

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I}A_i &= \{f\mid f:I\to\bigcup_{i\in I}A_i，任给\ i\in I，都有\ f(i)\in A_i\}\\ &= \{f\mid f:I\to A，任给\ i\in I，都有\ f(i)\in A\}\\ &= \{f\mid f:I\to A\}。\end{aligned}$$

原来，A 的以 I 为指标集的卡氏幂就是 A^I。因此，以后将映射族 B^A 称为卡氏幂。为了简单起见，将 $A^{\mathbf{N}_n}$ 简记为 $A^{\mathbf{n}}$。注意，$A^{\mathbf{n}}$ 是指映射族

$$\{f\mid f:\mathbf{N}_n\to A\},$$

而 A^n 是指 n 元有序组的集合

$$\{<x_1,\cdots, x_n>\mid 任给\ 1\leq i\leq n，都有\ x_i\in A\}。$$

习题 2.5

2.5.1 $A\neq\varnothing$，b 是 A 到 B 的以 b 为值的常映射，则 $b\in B^A$，构造 B 到 B^A 的映射

$$F:B\to B^A \quad F(b)=b。$$

证明：

(1) F 是单射。

(2) 如果 $A=\{a\}$，则 F 是满射。

(3) 如果 A 和 B 都至少有两个元素，则 F 不是是满射。

2.5.2 $F:B^A\times C^A\to(B\times C)^A$ $F(f, g)=f{*}g$。(*的含义见例 2.1.15)。证明：F 是双射。

2.5.3 (1) $f, g\in C^B$，证明：如果 $f=g$，则 $f^*=g^*$(*的含义见例 2.5.7)。

(2) 设 $h:B\times A\to C$，按例 2.5.7 的方法构造 A 到 C^B 的映射 f。证明：$f^*=h$。

2.5.4 $F:A\to\mathbf{2}^A$，构造 A 到 $\mathbf{N}_2$ 的映射

$$f:A\to\mathbf{N}_2 \quad f(x)=\begin{cases}1 & 如果\ F(x)(x)=0\\ 0 & 如果\ F(x)(x)=1。\end{cases}$$

证明：不存在 $x\in A$，使得 $F(x)=f$。

2.5.5 $\Gamma=\{f_i\mid i\in I\}$是映射族，Γ的并映射 f_Γ 存在。证明：任给 $i, j\in I$，任给 $x\in A_i\cap A_j$，都有 $f_i(x)=f_j(x)$。

2.5.6 任给 $i\in I$，A_i 都是 $\mathbf{N}$ 的非空子集，证明：$\prod_{i\in I}A_i\neq\varnothing$。