第七章　集域代数与超滤简介

7.1　集 域 代 数

如果 X, Y 都是 A 的子集，则 $X\cap Y, X\cup Y, X\setminus Y$ 也是 A 的子集。从集合运算的角度看，就是说 A 的幂集 $\mathrm{P}(A)$对于交、并、差三种运算是封闭的。现在考虑一般的对于交、并、差三种运算都封闭的子集族。

7.1.1 定义　集域代数　A 是非空集合，Γ是 A 的子集族。称Γ是 A 的集域代数，如果Γ满足以下条件：

(1) $\varnothing\in\Gamma$；

(2) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则 $X\cap Y\in\Gamma$；

(3) 如果 $X\in\Gamma$，则 $A\setminus X\in\Gamma$。

当不需要指明 A 时，简称Γ是集域代数。

在本书中，我们规定子集族是非空的(见集合族的定义)，在Γ是非空的情况，从条件(2)和(3)可以推出条件(1)，证明如下：取 $X\in\Gamma$，由(3)得 $A\setminus X\in\Gamma$，再由(2)得 $X\cap(A\setminus X)\in\Gamma$，即$\varnothing\in\Gamma$。

所以按本书的规定，集域代数的定义中并不需要条件(1)。但我们在验证Γ是集域代数时，还是要验证条件(1)的，因为我们首先要验证Γ非空，而验证条件(1)也就验证了Γ非空。当知道Γ非空时，我们只需验证条件(2)和(3)就行了。

当 X 是 A 的子集时，将 $A\setminus X$ 记为 X^*，称为 X 的余集。使用这种记法，条件(3)可以写成：如果 $X\in\Gamma$，则 $X^*\in\Gamma$。

注意余集的概念是相对的。如果 X 既是 A 的子集也是 B 的子集，则 X 在 A 中的余集和 X 在 B 中的余集是不同的。但我们使用

余集的概念时，总是假定有一个确定的集合 A，虽然有时并不明确指出 A。

余集有以下性质。

7.1.2 定理

(1) $(X\cup Y)^* = X^*\cap Y^*$，$(X\cap Y)^* = X^*\cup Y^*$。

(2) $X\setminus Y = X\cap Y^*$。

(3) $(X^*)^* = X$。

证　(1) $(X\cup Y)^* = A\setminus(X\cup Y) = (A\setminus X)\cap(A\setminus Y) = X^*\cap Y^*$。

$(X\cap Y)^* = A\setminus(X\cap Y) = (A\setminus X)\cup(A\setminus Y) = X^*\cup Y^*$。

(2) $X\setminus Y = X\cap(A\setminus Y) = X\cap Y^*$。

(3) $(X^*)^* = A\setminus X^* = A\setminus(A\setminus X) = X$。■

定理 7.1.2 的(1)称为余集的 De-Morgan 律，(3)称为余集的双重否定律。

为了熟悉集域代数的概念，我们先来看一些例子。

7.1.3 例　A 是非空集合。$\mathrm{P}(A)$是 A 的集域代数，称为 A 的幂集代数。$\Gamma_0 = \{\varnothing, A\}$是 A 的集域代数，称为 A 的极小代数。注意 A 非空，所以极小代数有两个元素。

7.1.4 例　A 是非空集合。令

$$\Gamma = \{X \mid X\subseteq A，X \text{ 有限或 } X^* \text{有限}\}，$$

则Γ是 A 的集域代数，理由如下：

(1) $\varnothing$有限，所以$\varnothing\in\Gamma$。

(2) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则(X 有限或 X^*有限)且(Y 有限或 Y^*有限)。当 X^*和 Y^*都有限时，就有

$$(X\cap Y)^* = X^*\cup Y^*\text{有限，}$$

所以

$$X\cap Y\in\Gamma；$$

当 X 和 Y 中有一个有限时，就有

$$X\cap Y \text{ 有限，}$$

所以也有 $X\cap Y\in\Gamma$。

(3) 如果 $X\in\Gamma$，则 X 有限或 X^*有限。当 X 有限时，就有

$$(X^*)^* = X \text{ 有限，}$$

所以 $X^*\in\Gamma$；当 X^*有限时，显然有 $X^*\in\Gamma$。

X 的余集 X^*有限也称为 X 余有限，所以这个集域代数称为 A 的有限–余有限代数。

当 A 有限时，A 的有限–余有限代数就是 A 的幂集代数；当 A 无限时，A 的有限–余有限代数不等于 A 的幂集代数。

7.1.5 例 $\mathbf{N}_3$ 除有基数为 2(极小代数)和基数为 8(幂集代数)的集域代数外，还有基数为 4 的集域代数$\Gamma = \{\varnothing, \{0\}, \{1, 2\}, \mathbf{N}_3\}$。

以下是一个较复杂的例子。

7.1.6 例 A 是非空集合，Φ是 A 的子集族，满足：

(1) $\varnothing\in\Phi$。

(2) Φ对交封闭，即任给 $X, Y\in\Phi$，都有 $X\cap Y\in\Phi$；

(3) Φ中集合的余集是Φ中有限个集合的并，即任给 $X\in\Phi$，存在 $X_1,\cdots, X_s\in\Phi$，使得 $X^* = X_1\cup\cdots\cup X_s$。

令$\Gamma = \{X_1\cup\cdots\cup X_n \mid n>0$ 且 $X_1,\cdots, X_n\in\Phi\}$。我们来证明Γ是 A 的集域代数。

(1) 因为$\varnothing\in\Phi$，所以$\varnothing\in\Gamma$。

(2) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则存在 $X_1,\cdots, X_n, Y_1,\cdots, Y_m\in\Phi$，使得

$$X = X_1\cup\cdots\cup X_n,\quad Y = Y_1\cup\cdots\cup Y_m,$$

所以

$$X\cap Y = (X_1\cup\cdots\cup X_n)\cap(Y_1\cup\cdots\cup Y_m)$$
$$= \bigcup\{X_i\cap Y_j \mid 1\le i\le n, 1\le j\le m\}\in\Gamma。$$

(3) 如果 $X\in\Gamma$，则存在 $X_1,\cdots, X_n\in\Phi$，使得

$$X = X_1\cup\cdots\cup X_n$$

任给 $1\le m\le n$，都有

$$X_m^* = X_{m\,1}\cup\cdots\cup X_{m\,s(m)}$$

所以

$$X^* = X_1^*\cap\cdots\cap X_n^*$$

$$= (X_{11}\cup\cdots\cup X_{1s(1)})\cap\cdots\cap(X_{n\,1}\cup\cdots\cup X_{n\,s(n)})$$
$$= \bigcup\{X_{1\,i_1}\cap\cdots\cap X_{n\,i_n} \mid 1\le i_1\le s(1),\cdots, 1\le i_n\le s(n)\}\in\Gamma。$$

例 7.1.6 中的集域代数Γ有这样的性质：

任给$\varnothing\ne X\in\Gamma$，存在 $Y\in\Phi$，使得 $Y\ne\varnothing$且 $Y\subseteq X$。

这样的性质称为Φ在Γ中稠密。

用已知的集域代数可以构造新的集域代数。

7.1.7 例 Γ是 A 的集域代数，B 是 A 的非空子集。令

$$\Sigma = \{X\cap B \mid X\in\Gamma\},$$

则Σ是 B 的集域代数，理由如下：

(1) $\varnothing\in\Gamma$，所以$\varnothing = \varnothing\cap B\in\Sigma$。

(2) 如果 $X\cap B, Y\cap B\in\Gamma$，则$(X\cap B)\cap(Y\cap B) = (X\cap Y)\cap B\in\Sigma$。

(3) 如果 $X\cap B\in\Gamma$，则 $B\setminus(X\cap B) = (A\setminus X)\cap B\in\Sigma$。

以后将这样的集域代数Σ记为(Γ, B)。

7.1.8 例 Γ和Σ分别是 A 和 B 的集域代数，$A\cap B = \varnothing$ (这样的Γ和Σ称为不相干的)，令

$$\Phi = \{X\cup Y \mid X\in\Gamma \text{ 且 } Y\in\Sigma\},$$

则Φ是 $A\cup B$ 的集域代数，理由如下：

(1) 因为$\varnothing\in\Gamma$且$\varnothing\in\Sigma$，所以$\varnothing = \varnothing\cup\varnothing\in\Phi$。

(2) 如果 $X_1\cup Y_1, X_2\cup Y_2\in\Gamma$，则

$$(X_1\cup Y_1)\cap(X_2\cup Y_2) = (X_1\cap X_2)\cup(Y_1\cap Y_2)\in\Phi。$$

(3) 如果 $X\cup Y\in\Gamma$，则$(A\cup B)\setminus(X\cup Y) = (A\setminus X)\cup(B\setminus Y)\in\Phi$。

以后将这样的集域代数Φ记为$\Gamma+\Sigma$，称为Γ和Σ的直和。

7.1.9 例 Γ是 A 的集域代数，B 是 A 的非空真子集。

由例 7.1.7 分别得到 B 和 $A\setminus B$ 的集域代数(Γ, B)和$(\Gamma, A\setminus B)$，由例 7.1.8 得到(Γ, B)和$(\Gamma, A\setminus B)$的直和$(\Gamma, B)+(\Gamma, A\setminus B)$，它是 A 的集域代数(因为 $A = B\cup(A\setminus B)$)。

因为任给 $X\in\Gamma$，都有 $X = (X\cap B)\cup(X\cap(A\setminus B))$，所以

$$\Gamma = (\Gamma, B)+(\Gamma, A\setminus B),$$

(Γ, B)和$(\Gamma, A\setminus B)$称为Γ的一个直和分解。

集域代数的定义中只说集域代数对集合的交封闭，以下定理说明了集域代数对集合的并和差也是封闭的。

7.1.10 定理 Γ是 A 的集域代数，则

(1) $A\in\Gamma$。

(2) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则 $X\cup Y\in\Gamma$。

(3) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则 $X\setminus Y\in\Gamma$。

证 (1) 因为$\varnothing\in\Gamma$，所以 $A = \varnothing^*\in\Gamma$。

(2) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则 $X^*, Y^*\in\Gamma$，所以

$$(X\cup Y)^* = X^*\cap Y^*\in\Gamma,$$

因此 $X\cup Y = ((X\cup Y)^*)^*\in\Gamma$。

(3) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则 $X, Y^*\in\Gamma$，所以 $X\setminus Y = X\cap Y^*\in\Gamma$。■

进一步由数学归纳法可得，集域代数Γ中任何有限个集合的交和并还在Γ中，即

任给 $X_1,\cdots, X_n\in\Phi$，都有 $X_1\cap\cdots\cap X_n$，$X_1\cup\cdots\cup X_n\in\Phi$。

A 的任意多个集域代数的交还是 A 的集域代数。

7.1.11 定理 Δ是 A 的集域代数组成的集合族，即任给$\Gamma\in\Delta$，Γ都是 A 的集域代数，则$\bigcap\Delta$是 A 的集域代数。

证 (1) 因为任给$\Gamma\in\Delta$，都有$\varnothing\in\Gamma$，所以$\varnothing\in\bigcap\Delta$。

(2) 如果 $X, Y\in\bigcap\Delta$，则

任给$\Gamma\in\Delta$，都有 $X, Y\in\Gamma$，

由Γ是集域代数得

$$X\cap Y\in\Gamma,$$

因此 $X\cap Y\in\bigcap\Delta$。

(3) 如果 $X\in\bigcap\Delta$，则

任给$\Gamma\in\Delta$，都有 $X\in\Gamma$，

由Γ是集域代数得

$$X^*\in\Gamma,$$

因此 $X^*\in\bigcap\Delta$。■

A 的任何子集族都可以扩充成 A 的集域代数。

7.1.12 定义 生成 Φ是 A 的子集族，令

$$\Delta = \{\Gamma \mid \Gamma\text{是 } A \text{ 的集域代数且}\Phi\subseteq\Gamma\}。$$

由定理 7.1.11 得$\bigcap\Delta$是集域代数，$\bigcap\Delta$称为由Φ生成的集域代数，记为[Φ]。

[Φ]是包含Φ的最小的 A 的集域代数。所以如果 A 的集域代数Γ满足：

任给 A 的集域代数Σ，都有如果$\Phi\subseteq\Sigma$，则$\Gamma\subseteq\Sigma$，

则Γ就是Φ生成的集域代数[Φ]。

7.1.13 例 因为集域代数对有限并封闭，所以例 7.1.6 中的Γ就是由Φ生成的集域代数[Φ]。

7.1.14 例 Φ是 A 的子集族，满足：

任给 $x\in A$，$\{x\}\in\Phi$，

Γ是 A 的有限–余有限代数，则$\Gamma\subseteq[\Phi]$。理由如下：

任给 $X\in\Gamma$，都有 X 有限或 X^*有限。

如果 X 有限，可设 $X = \{a_1,\cdots, a_n\}$，则

任给 1≤i≤n，都有$\{a_i\}\in\Phi$，

所以

任给 1≤i≤n，都有$\{a_i\}\in[\Phi]$，

因此 $X = \{a_1\}\cup\cdots\cup\{a_n\}\in[\Phi]$；

如果 X^*有限，可设 $X^* = \{a_1,\cdots, a_n\}$，同理可证

$$X^*\in[\Phi],$$

因此 $X = (X^*)^*\in[\Phi]$。

习题 7.1

7.1.1 κ是无限基数，$\kappa\leq|A|$，令

$$\Gamma_{A,\kappa} = \{X \mid X\subseteq A，|X|<\kappa\text{或}|X^*|<\kappa\}$$

证明：

(1) 如果$|X|<\kappa$且$|Y|<\kappa$，则$|X\cup Y|<\kappa$。

(2) $\Gamma_{A,\kappa}$是 A 的集域代数。

7.1.2　分别构造 $\mathbf{N}_4$ 的基数为 4 和 8 的集域代数。

7.1.3　Γ是 A 的集域代数，B 是 A 的非空真子集。证明：$\Gamma = (\Gamma, B)+(\Gamma, A\setminus B)$。

7.1.4　A 是非空集合，Γ是 A 的子集族，且满足以下条件：

(1) $A\in\Gamma$；

(2) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则 $X\cup Y\in\Gamma$；

(3) 如果 $X\in\Gamma$，则 $A\setminus X\in\Gamma$。

证明：Γ是 A 的集域代数。

7.1.5　Δ是 A 的集域代数组成集合族。证明：

(1) 如果Δ是单调的，则$\bigcup\Delta$是 A 的集域代数。

(2) 举例说明当Δ不是单调时，$\bigcup\Delta$不一定是 A 的集域代数。

7.1.6　Φ是 A 的子集族，Γ是 A 的集域代数，Γ满足：

任给 A 的集域代数Σ，都有如果$\Phi\subseteq\Sigma$，则$\Gamma\subseteq\Sigma$。

证明：Γ就是Φ生成的集域代数$[\Phi]$。

7.1.7　$\Phi = \{\mathbf{N}_n \mid n\in\mathbf{N}\}$。证明：

(1) 任给 $n\in\mathbf{N}$，都有$\{n\}\in[\Phi]$

(2) $[\Phi]$是 $\mathbf{N}$ 的有限-余有限代数。

7.1.8　A 是非空集合，Φ是 A 的子集族，归纳定义Φ_n如下：

$\Phi_0 = \Phi\cup\{\varnothing\}$；

$\Phi_{n+1} = \{X\cap Y \mid X, Y\in\Phi_n\}\cup\{A\setminus X \mid X\in\Phi_n\}$。

令

$\Gamma = \bigcup_{i\geq 0}\Phi_i$。

证明：

(1) $\{\Phi_n \mid n\in\mathbf{N}\}$是单调的；

(2) $\Gamma = [\Phi]$。

7.2　子代数、同态、完备性

这一节简单讨论集域代数中几个重要的概念。

7.2.1 定义　子代数　Γ和Σ都是 A 的集域代数，如果$\Sigma\subseteq\Gamma$，则称Σ是Γ的子代数。

7.2.2 例　任给 A 的集域代数Γ，Γ都是 A 的幂集代数 $P(A)$的子代数，A 的极小代数Γ_0都是Γ的子代数。

7.2.3 例　B 是 A 的真子集。$P(A)$和 $P(B)$都是集域代数，且有 $P(B)\subseteq P(A)$，但 $P(B)$并不是 $P(A)$的子代数，因为 $P(B)$并不是 A 的集域代数。

7.2.4 定义　同态映射　Γ和Σ都是集域代数，h 是Γ到Σ的映射，称 h 是Γ到Σ的同态映射，如果 h 满足以下条件：

(1) $h(X\cap Y) = h(X)\cap h(Y)$；

(2) $h(X^*) = h(X)^*$。

请看同态的一个例子。

7.2.5 例　A 是无限集，Γ是 A 的有限-余有限代数，Γ_0是 A 的极小代数，构造Γ到Γ_0的映射

$$h：\Gamma\to\Gamma_0\quad h(X)=\begin{cases}\varnothing & \text{如果 } X \text{ 有限}\\ A & \text{如果 } X \text{ 余有限，}\end{cases}$$

则 h 是Γ到Γ_0的同态映射。证明如下：

(1) X 有限，则 X^*余有限且 $X\cap Y$ 有限，所以

$h(X\cap Y) = \varnothing = \varnothing\cap h(Y) = h(X)\cap h(Y)$，

$h(X^*) = A = \varnothing^* = h(X)^*$。

(2) X 余有限且 Y 有限，则 X^*有限且 $X\cap Y$ 有限，所以

$h(X\cap Y) = \varnothing = h(X)\cap\varnothing = h(X)\cap h(Y)$，

$h(X^*) = \varnothing = A^* = h(X)^*$。

(3) X 余有限且 Y 余有限，则 X^*有限且 $X\cap Y$ 余有限，所以

$h(X\cap Y) = A = A\cap A = h(X)\cap h(Y)$，

$h(X^*) = \varnothing = A^* = h(X)^*$。

同态有以下性质。

7.2.6 定理 Γ和Σ分别是 A 和 B 的集域代数，h 是Γ到Σ的同态映射，则

(1) $h(\varnothing) = \varnothing$。

(2) $h(A) = B$。

(3) 任给 $X, Y\in\Gamma$，都有 $h(X\cup Y) = h(X)\cup h(Y)$。

(4) 任给 $X, Y\in\Gamma$，如果 $X \subseteq Y$，则 $h(X) \subseteq h(Y)$。

(5) $h[\Gamma]$是Σ的子代数。

证 (1) 取 $X\in\Gamma$，则 $X^*\in\Gamma$，所以

$h(\varnothing) = h(X\cap X^*) = h(X)\cap h(X^*) = h(X)\cap h(X)^* = \varnothing$。

(2) 取 $X\in\Gamma$，则 $X^*\in\Gamma$，所以

$h(A) = h(X\cup X^*) = h(X)\cup h(X^*) = h(X)\cup h(X)^* = B$。

(3) $h(X\cup Y) = h((X^*\cap Y^*)^*) = (h(X^*\cap Y^*))^*$

$= (h(X)^*\cap h(Y)^*)^* = h(X)\cup h(Y)$。

(4) 如果 $X \subseteq Y$，则 $X\cap Y = X$，所以 $h(X\cap Y) = h(X)$，由同态的定义得

$h(X)\cap h(Y) = h(X)$，

因此 $h(X) \subseteq h(Y)$。

(5) 因为 $h[\Gamma] \subseteq \Sigma$且 $B\in\Sigma$，所以只需证 $h[\Gamma]$是集域代数就行了。

如果 $Y_1, Y_2\in h[\Gamma]$，则

存在 $X_1, X_2\in\Gamma$，使得 $h(X_1) = Y_1$ 且 $h(X_2) = Y_2$，

所以 $Y_1\cap Y_2 = h(X_1)\cap h(X_2) = h(X_1\cap X_2)\in h[\Gamma]$。

如果 $Y\in h[\Gamma]$，则

存在 $X\in\Gamma$，使得 $h(X) = Y$，

所以 $Y^* = h(X)^* = h(X^*)\in h[\Gamma]$。■

7.2.7 定义 同构映射和同构 Γ和Σ都是集域代数，h 是Γ到Σ的同态映射。如果 h 是双射，则称 h 是Γ到Σ的同构映射。如果存在Γ到Σ的同构映射，则称Γ和Σ同构，记为$\Gamma\cong\Sigma$。

先来看同构的一些例子。

7.2.8 例 任何两个极小代数都同构。

7.2.9 例 如果$|A| = |B|$，则 $\mathrm{P}(A)\cong\mathrm{P}(B)$。证明如下：

设 f 是 A 到 B 的双射，构造 $\mathrm{P}(A)$到 $\mathrm{P}(B)$的映射

$h：\mathrm{P}(A)\to\mathrm{P}(B)$　$h(X) = f[X]$

由例 2.4.6 得 h 是双射，又任给 $X, Y\in \mathrm{P}(A)$，都有

$h(X\cap Y) = f[X\cap Y] = f[X]\cap f[Y] = h(X)\cap h(Y)$，

$h(X^*) = f[A\setminus X] = f[A]\setminus f[X] = B\setminus f[X]$

$= B\setminus h(X) = h(X)^*$。

因此 h 是 $\mathrm{P}(A)$到 $\mathrm{P}(B)$的同构映射。

7.2.10 例 例 7.1.5 中的集域代数$\Gamma = \{\varnothing, \{0\}, \{1, 2\}, \mathbf{N}_3\}$同构于 $\mathrm{P}(\mathbf{N}_2) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \mathbf{N}_2\}$。同构映射是：

$h：\Gamma\to \mathrm{P}(\mathbf{N}_2)$　$h(\varnothing) = \varnothing$，$h(\{0\}) = \{0\}$

$h(\{1, 2\}) = \{1\}$，$h(\mathbf{N}_3) = \mathbf{N}_2$

7.2.11 例 Γ_1和Σ_1不相干，Γ_2和Σ_2不相干，f 是Γ_1到Γ_2的同构映射，g 是Σ_1到Σ_2的同构映射，构造$\Gamma_1+\Sigma_1$到$\Gamma_2+\Sigma_2$的映射

$h：\Gamma_1+\Sigma_1\to\Gamma_2+\Sigma_2$　$h(X\cup Y) = f(X)\cup g(Y)$

则 h 是双射且 h 是$\Gamma_1+\Sigma_1$到$\Gamma_2+\Sigma_2$的同态。

证 h 是单射。任给 $X_1\cup Y_1, X_2\cup Y_2\in\Gamma_1+\Sigma_1$，如果

$h(X_1\cup Y_1) = h(X_2\cup Y_2)$，

则 $f(X_1)\cup g(Y_1) = f(X_2)\cup g(Y_2)$，所以

$f(X_1) = f(X_2)$且 $g(Y_1) = g(Y_2)$，

由 f 和 g 是单射得

$X_1 = X_2$ 且 $Y_1 = Y_2$，

所以 $X_1\cup Y_1 = X_2\cup Y_2$。

证 h 是满射。任给 $X_2\cup Y_2\in\Gamma_2+\Sigma_2$，由 f 和 g 是满射得

存在 $X_1\in\Gamma_1, Y_1\in\Sigma_1$，使得 $f(X_1) = X_2$ 且 $g(Y_1) = Y_2$，

由 h 的定义得

$$h(X_1\cup Y_1) = f(X_1)\cup g(Y_1) = X_2\cup Y_2,$$

所以，存在 $X_1\cup Y_1\in\Gamma_1+\Sigma_1$，使得 $h(X_1\cup Y_1) = X_2\cup Y_2$。

证 h 是$\Gamma_1+\Sigma_1$到$\Gamma_2+\Sigma_2$的同态。

任给 $X_1\cup Y_1, X_2\cup Y_2\in\Gamma_1+\Sigma_1$，都有

$$h((X_1\cup Y_1)\cap(X_2\cup Y_2)) = h((X_1\cap X_2)\cup(Y_1\cap Y_2))$$
$$= f(X_1\cap X_2)\cup g(Y_1\cap Y_2) = (f(X_1)\cap f(X_2))\cup(g(Y_1)\cap g(Y_2))$$
$$= (f(X_1)\cup g(Y_1))\cap(f(X_2)\cup g(Y_2)) = h(X_1\cup Y_1)\cap h(X_2\cup Y_2)$$

任给 $X\cup Y\in\Gamma_1+\Sigma_1$，都有

$$h((X\cup Y)^*) = (f(X)\cup g(Y))^* = f(X)^*\cap g(Y)^*$$
$$= f(X^*)\cap g(Y^*) = h(X^*\cap Y^*) = h((X\cup Y)^*)。$$

因此，如果$\Gamma_1\cong\Gamma_2$且$\Sigma_1\cong\Sigma_2$，则$\Gamma_1+\Sigma_1\cong\Gamma_2+\Sigma_2$。

两个集域代数的同构有以下性质。

7.2.12 定理 集域代数同构的性质

(1) $\Gamma\cong\Gamma$。

(2) 如果$\Gamma\cong\Sigma$，则$\Sigma\cong\Gamma$。

(3) 如果$\Gamma\cong\Sigma$且$\Sigma\cong\Phi$，则$\Gamma\cong\Phi$。

证 使用恒等映射、逆映射和映射的复合，详细证明留给读者。■

Γ是集域代数， Γ中任何有限个集合的交还在Γ中，但Γ中无限个集合的交就不一定在Γ中了。

7.2.13 定义 完备性 Γ是集域代数，如果

任给$\Phi\subseteq\Gamma$且$\Phi\neq\varnothing$，都有$\bigcap\Phi\in\Gamma$，

则称Γ是完备的集域代数，简称Γ完备的。

先来看完备性的一些例子。

7.2.14 例 任何有限的集域代数是完备的。任何幂集代数是完备的。

7.2.15 例 A 是无限集，A 的有限-余有限代数Γ不是完备的，证明如下：

取 $B\subseteq A$ 使得 B 和 B^*都是无限的，则 $B\notin\Gamma$。任给 $x\in B$，令 $B_x = \{x\}^*$，则 B_x 都是余有限的，所以$\{B_x \mid x\in B\}\subseteq\Gamma$，但

$$(\bigcap\{B_x \mid x\in B\})^* = \bigcup\{B_x^* \mid x\in B\} = \bigcup\{\{x\} \mid x\in B\} = B\notin\Gamma,$$

所以$\bigcap\{B_x \mid x\in B\}\notin\Gamma$，因此Γ不是完备的。

完备性的定义中只说Γ中任意多个集合的交还在Γ中，以下定理说明了Γ中任意多个集合的并还在Γ中。

7.2.16 定理 Γ是完备的集域代数，则任给$\Phi\subseteq\Gamma$且$\Phi\neq\varnothing$，都有$\bigcup\Phi\in\Gamma$。

证 取$\Sigma = \{X^* \mid X\in\Phi\}$，则$\Sigma\subseteq\Gamma$且$\Sigma\neq\varnothing$，由Γ的完备性得$\bigcap\Sigma\in\Gamma$，所以$(\bigcup\Phi)^* = \bigcap\Sigma\in\Gamma$，因此$\bigcup\Phi\in\Gamma$。■

反之，如果集域代数Γ中任意多个集合的并还在Γ中，则Γ是完备的。

任意多个集域代数的交还是集域代数(见定理 7.1.11)，类似地可以证明任意多个完备的集域代数的交还是完备的集域代数。设Φ是 A 的子集族，取

$$\Delta = \{\Gamma \mid \Gamma\text{是 } A \text{ 的完备的集域代数且}\Phi\subseteq\Gamma\},$$

则$\bigcap\Delta$是包含Φ的最小的完备的集域代数，称为由Φ生成的完备集域代数。

7.2.17 例 A 的有限-余有限代数Γ生成的完备集域代数是 $\mathrm{P}(A)$。设Γ生成的完备集域代数是Σ，证明 $\mathrm{P}(A)\subseteq\Sigma$。

任给 $X\in\mathrm{P}(A)$，任给 $x\in X$，都有$\{x\}\in\Gamma$，所以$\{x\}\in\Sigma$，由Σ的完备性得 $X = \bigcup\{\{x\} \mid x\in X\}\in\Sigma$。

因为当 A 无限时，A 的有限–余有限代数不等于 A 的幂集代数，所以例 7.2.17 再次证明了，当 A 无限时，A 的有限–余有限代数不是完备的。

习题 7.2

7.2.1 Γ和Σ都是集域代数，h 是Γ到Σ的映射，且满足以下条

件：

(1) $h(X\cup Y) = h(X)\cup h(Y)$；

(2) $h(X^*) = h(X)^*$。

证明：h 是Γ到Σ的同态映射。

7.2.2　Γ和Σ分别是 A 和 B 的有限-余有限代数，f 是 A 到 B 的双射。证明：

(1) $h：\Gamma\to\Sigma$　$h(X) = f[X]$ 是双射。

(2) $\Gamma\cong\Sigma$。

7.2.3　A 是无限集，Γ是 A 的有限-余有限代数，Γ_0 是 A 的极小代数。证明：Γ到Γ_0 的映射

$$h：\Gamma\to\Gamma_0 \quad h(X) = \begin{cases} \varnothing & \text{如果 } X \text{ 有限} \\ A & \text{如果 } X \text{ 余有限，} \end{cases}$$

是Γ到Γ_0 的同态映射。

7.2.4　给出定理 7.2.12 的详细证明。

7.2.5　κ是无限基数，$\kappa\le|A|$，令

$$\Gamma_{A,\kappa} = \{X \mid X\subseteq A，|X|<\kappa\text{或}|X^*|<\kappa\}$$

证明：

(1) 如果$|A| = |B|$，则$\Gamma_{A,\kappa}\cong\Gamma_{B,\kappa}$。

(2) $\Gamma_{A,\kappa}$不是完备的。

7.2.6　分别构造：$\mathbf{N}_4$ 的基数为 4 的集域代数到 $\mathrm{P}(\mathbf{N}_2)$的同构映射、$\mathbf{N}_4$ 的基数为 8 的集域代数到 $\mathrm{P}(\mathbf{N}_3)$的同构映射。

7.2.7　Γ和Σ是集域代数，h 是Γ到Σ的同构映射，证明：任给 $X, Y\in\Gamma$，如果 $h(X)\subseteq h(Y)$，则 $X\subseteq Y$。

7.2.8　Γ是集域代数。证明：如果任给$\Phi\subseteq\Gamma$，都有$\bigcup\Phi\subseteq\Gamma$，则$\Gamma$是完备的。

7.2.9　Δ是 A 的完备的集域代数组成的集合族，即任给$\Gamma\in\Delta$，Γ都是 A 的完备的集域代数。证明：$\bigcap\Delta$是 A 的完备的集域代数。

7.3　原　　子

这一节较详细地讨论集域代数的重要概念——原子。

单元集本身不是空集，但没有非空的真子集。在集域代数Γ中我们考虑本身不是空集，但没有非空的属于Γ的真子集的集合。

7.3.1 定义　原子　Γ是集域代数，$T\in\Gamma$，如果 T 满足：

(1) $T\neq\varnothing$；

(2) 任给 $X\in\Gamma$，如果 $X\subseteq T$，则 $X = \varnothing$或 $X = T$；

则称 T 是Γ的一个原子。

先来看原子的一些例子。

7.3.2 例　T 是幂集代数的原子当且仅当 T 是单元集。

7.3.3 例　如果集域代数Γ有非空有限集，则Γ一定有原子。证明如下：取 n 是

$$\{|X| \mid X\in\Gamma\text{且 }0<|X|<\aleph_0\}$$

的最小数，取 $T\in\Gamma$，使得$|T| = \mathrm{n}$，则 T 是Γ的原子。

7.3.4 例　Γ是集域代数，Φ在Γ中稠密，则任给Γ的原子 T，都有 $T\in\Phi$。

以下讨论原子的性质。

7.3.5 定理　Γ是集域代数，T 和 S 都是Γ的原子，则

(1) 任给 $X\in\Gamma$，都有 $T\cap X = \varnothing$或 $T\subseteq X$。

(2) 如果 $T\subseteq S$，则 $T = S$。

(3) 原子的不交性　如果 $T\neq S$，则 $T\cap S = \varnothing$。

证　(1) 由 $T\cap X\subseteq T$ 和 T 是原子得

$$T\cap X = \varnothing\text{或 }X\cap T = T，$$

因此 $X\cap T = \varnothing$或 $T\subseteq X$。

(2) 如果 $T\subseteq S$，由 S 是原子得

$$T = \varnothing\text{或 }T = S，$$

由 T 是原子得

$T \neq \varnothing$，

因此 $T = S$。

(3) 由(1)得 $T \cap S = \varnothing$或 $T \subseteq S$，如果 $T \subseteq S$，则由(2)和 $T \neq \varnothing$ 得

$T = S$，

和 $T \neq S$ 矛盾，因此 $T \cap S = \varnothing$■

原子在同构下不变。

7.3.6 定理 原子的同构不变性 Γ和Σ都是集域代数，h 是Γ到Σ的同构映射，则 T 是Γ的原子当且仅当 $h(T)$是Σ的原子。

证 设 T 是Γ的原子，证明 $h(T)$是Σ的原子。

任给 $h(X) \subseteq h(T)$，由习题 7.2.8 得

$X \subseteq T$，

由 T 是Γ的原子得

$X = \varnothing$或 $X = T$，

所以

$h(X) = h(\varnothing) = \varnothing$或 $h(X) = h(T)$，

因此 $h(T)$是Σ的原子。

设 $h(T)$是Σ的原子，证明 T 是Γ的原子。

任给 $X \subseteq T$，由定理 7.2.6(4)得

$h(X) \subseteq h(T)$，

由 $h(T)$是Σ的原子得

$h(X) = \varnothing = h(\varnothing)$或 $h(X) = h(T)$，

由 h 是单射得

$X = \varnothing$或 $X = T$，

因此 T 是Γ的原子。■

单元集一定是原子，原子不一定是单元集。然而，任何原子都可以“压缩”成单元集。

7.3.7 引理 Γ是 A 的有原子的集域代数，令

$\Psi = \{T \mid T$ 是Γ的原子$\}$

则$\Psi \neq \varnothing$，取Ψ上的选择函数 f，令

$H = \mathrm{ran}(f) = \{f(T) \mid T$ 是Γ的原子$\}$，

再令

$G = \bigcup\Psi = \bigcup\{T \mid T$ 是Γ的原子$\}$，

则

(1) 任给Γ的原子 T，任给 $X \in \Gamma$，如果 $f(T) \in X$，则 $T \subseteq X$。

(2) 任给 $X, Y \in \Gamma$，如果 $X \cap G = Y \cap G$，则 $X \cap H = Y \cap H$。

(3) 任给 $X, Y \in \Gamma$，如果 $X \cap H = Y \cap H$，则 $X \cap G = Y \cap G$。

(4) g : $(\Gamma, G) \to (\Gamma, H)$ $g(X \cap G) = X \cap H$ 是同构映射。

(5) 任给Γ的原子 T，都有 $T \cap H = \{f(T)\}$。

证 (1) 如果 $f(T) \in X$，则由 $f(T) \in T$ 得 $f(T) \in X \cap T$，所以

$X \cap T \neq \varnothing$，

由定理 7.3.5(1)得 $T \subseteq X$。

(2) 任给 $x \in X \cap H$，由 $x \in H$ 得

存在原子 T，使得 $x = f(T)$，

由 $f(T) \in X$ 和(1)得 $T \subseteq X$，所以

$f(T) \in T \subseteq X \cap G = Y \cap G \subseteq Y$，

由 $f(T) \in H$ 得 $f(T) \in Y \cap H$，即

$x \in Y \cap H$。

因此 $X \cap H \subseteq Y \cap H$。

同理可证 $Y \cap H \subseteq X \cap H$。

(3) 任给 $x \in X \cap G$，由 $x \in G$ 得

存在原子 T，使得 $x \in T$，

由 $x \in X$ 得 $X \cap T \neq \varnothing$，由定理 7.3.5(1)得 $T \subseteq X$，所以

$f(T) \in X$，

所以

$f(T) \in X \cap H = Y \cap H \subseteq Y$，

由 $s(T) \in Y$ 和(1)得 $T \subseteq Y$，所以

$x \in T \subseteq Y$，

由 $x\in G$ 得

$$x\in Y\cap G。$$

因此 $X\cap G \subseteq Y\cap G$。

同理可证 $Y\cap G \subseteq X\cap G$。

(4) 由(2)得

$$g：(\Gamma, G)\to(\Gamma, H) \quad g(X\cap G) = X\cap H$$

的定义是合理的。

由(3)得 g 是单射，显然 g 是满射，所以 g 是双射。

任给 $X\cap G\in(\Gamma, G)$，都有

$$g(G\setminus(X\cap G)) = g((A\setminus X)\cap G)$$
$$= (A\setminus X)\cap H = H\setminus(X\cap H)$$

任给 $X\cap G, Y\cap G\in(\Gamma, G)$，都有

$$g((X\cap G)\cap(Y\cap G)) = g((X\cap Y)\cap G)$$
$$= (X\cap Y)\cap H = (X\cap G)\cap(Y\cap G)$$

因此 g 是同构映射。

(5) 由 f 是选择函数得 $f(T)\in T$，又

$$f(T)\in \mathrm{ran}(f) = H，$$

因此$\{f(T)\} \subseteq T\cap H$。

任给 $x\in T\cap H$，由 $x\in H$ 得

存在原子 S，使得 $x = f(S)$，

所以 $x = f(S)\in S$，又 $x\in T$，所以

$$x\in T\cap S，$$

由原子的不交性得 $T = S$，所以

$$x = f(T)，$$

因此 $T\cap H \subseteq \{f(T)\}$。■

7.3.8 定理 任给有原子的集域代数Γ，存在集域代数Σ，使得Γ≌Σ且Σ中的原子都是单元集。

证 设Γ是 A 的集域代数，取引理 7.3.7 中的 H, G 和 f。由引理 7.3.7(4)得$(\Gamma, G)\cong(\Gamma, H)$。

当 $G = A$ 时，取$\Sigma = (\Gamma, H)$，则

$$\Gamma = (\Gamma, G)\cong(\Gamma, H) = \Sigma，$$

同构映射是：

$$h：\Gamma\to\Sigma \quad h(X) = g(X\cap G) = X\cap H$$

任给Σ的原子 S，存在Γ的原子 T，使得 $S = h(T)$，所以

$$S = h(T) = g(T\cap H) = T\cap H = \{f(T)\}。$$

因此 S 是单元集。

当 $G \neq A$ 时，取$\Sigma = (\Gamma, H)+(\Gamma, A\setminus G)$，则

$$\Gamma = (\Gamma, G)+(\Gamma, A\setminus G)\cong(\Gamma, H)+(\Gamma, A\setminus G) = \Sigma，$$

同构映射是：

$$h：\Gamma\to\Sigma \quad h(X) = g(X\cap G)\cup(X\cap(A\setminus G))$$
$$= (X\cap H)\cup(X\cap(A\setminus G))$$

任给Σ的原子 S，存在Γ的原子 T，使得 $S = h(T)$，所以

$$S = h(T) = (T\cap H)\cup(T\cap(A\setminus G))$$
$$= T\cap H = \{f(T)\}。$$

因此 S 是单元集。■

并非每个集域代数都有原子。如果Γ没有原子，则称Γ是无原子集域代数。

由原子的定义，Γ是无原子集域代数的条件是：

任给 $X \neq \varnothing$，存在 $Y \neq \varnothing$，使得 $Y \subseteq X$ 且 $Y \neq X$。

由例 7.3.3，无原子集域代数Γ中除空集外没有有限集，因为Γ对于交封闭，所以任给 $X, Y\in\Gamma$，如果 $X\cap Y \neq \varnothing$，则 $X\cap Y$ 还是无限集，这样的集域代数比较复杂。

7.3.9 例 任给 $\mathrm{k}\in\mathbf{N}$，任给 $0\le \mathrm{m}\le 2^{\mathrm{k}}-1$，定义

$$A(\mathrm{k}, \mathrm{m}) = \{2^{\mathrm{k}}x+\mathrm{m} \mid x\in\mathbf{N}\}，$$

任给 $\mathrm{k}\in\mathbf{N}$，$A(\mathrm{k}, 0) ,\cdots, A(\mathrm{k}, 2^{\mathrm{k}}-1)$两两不交，且

$$\bigcup\{\{A(\mathrm{k}, \mathrm{i}) \mid 0\le \mathrm{i}\le 2^{\mathrm{k}}-1\} = \mathbf{N}，$$

所以任给 $0\le \mathrm{m}\le 2^{\mathrm{k}}-1$，都有

$$A(\mathrm{k}, \mathrm{m})^* = \bigcup\{\{A(\mathrm{k}, \mathrm{i}) \mid 0\le \mathrm{i}\le 2^{\mathrm{k}}-1 \text{ 且 } \mathrm{i} \neq \mathrm{m}\}。$$

令

$$\Phi = \{A(\mathrm{k}, \mathrm{m}) \mid \mathrm{k}\in\mathbf{N}, 0\le\mathrm{m}\le2^{\mathrm{k}}-1\}\cup\{\varnothing\},$$

则

(1) $\varnothing\in\Phi$；

(2) 任给 $A(\mathrm{s}, \mathrm{m}), A(\mathrm{t}, \mathrm{n})\in\Phi$，不妨设 $\mathrm{s}\le\mathrm{t}$，则

$$A(\mathrm{s}, \mathrm{m})\cap A(\mathrm{t}, \mathrm{n}) = \begin{cases} A(\mathrm{t}, \mathrm{n}) & \text{如果 } \mathrm{m} = \mathrm{n} \\ \varnothing & \text{如果 } \mathrm{m} \ne \mathrm{n}, \end{cases}$$

所以 $A(\mathrm{s}, \mathrm{m})\cap A(\mathrm{t}, \mathrm{n})\in\Phi$；

(3) 任给 $A(\mathrm{k}, \mathrm{m})\in\Phi$，由

$$\bigcup\{\{A(\mathrm{k}, \mathrm{i}) \mid 0\le\mathrm{i}\le2^{\mathrm{k}}-1\} = \mathbf{N}$$

得

$$A(\mathrm{k}, \mathrm{m})^* = \bigcup\{\{A(\mathrm{k}, \mathrm{i}) \mid 0\le\mathrm{i}\le2^{\mathrm{k}}-1 \text{ 且 } \mathrm{i} \ne \mathrm{m}\}。$$

所以 $A(\mathrm{k}, \mathrm{m})^*$是$\Phi$中有限个集合的并。

这样定义的Φ满足例 7.1.6 中的条件，由例 7.1.6 得

$$\Gamma = \{X_1\cup\cdots\cup X_{\mathrm{n}} \mid \mathrm{n}\in\mathbf{N}，X_1,\cdots, X_{\mathrm{n}}\in\Phi\},$$

是 $\mathbf{N}$ 的集域代数，并且Φ在Γ中稠密。

以下证明Γ是无原子集域代数。

任给 $X\in\Gamma$，如果 $X \ne \varnothing$，则

存在 $A(\mathrm{k}, \mathrm{m})\in\Phi$，使得 $A(\mathrm{k}, \mathrm{m}) \subseteq X$。

取 $Y = A(\mathrm{k}+1, \mathrm{m})$，则

$$Y \ne \varnothing, Y \subseteq X \text{ 且 } Y \ne X。$$

由无原子集域代数的条件得Γ是无原子集域代数。

和无原子集域代数相对的概念是原子集域代数。原子集域代数并不仅仅是有原子的集域代数，而是要求每个非空子集都包含一个原子，所以原子集域代数的条件是：

任给 $X \ne \varnothing$，存在原子 T，使得 $T \subseteq X$。

幂集代数是原子集域代数，而且是完备的原子集域代数。反之，任何完备的原子集域代数都同构于某个幂集代数。所以，从同构的意义上说，只有幂集代数是完备的原子集域代数。

7.3.10 引理 Γ是 A 的完备的原子集域代数，令

$$G = \bigcup\{T \mid T \text{ 是}\Gamma\text{的原子}\},$$

则 $G = A$。

证 由Γ是完备的得 $G\in\Gamma$，所以 $A\setminus G\in\Gamma$，用反证法证明 $G = A$。

如果 $G \ne A$，则 $A\setminus G \ne \varnothing$，由$\Gamma$是原子集域代数得

存在原子 T，使得 $T \subseteq A\setminus G$，

和 $T \subseteq G$ 矛盾。■

7.3.11 定理 完备的原子集域代数同构幂集代数。

证 设Γ是 A 的完备的原子集域代数，取引理 7.3.7 中的 H, G 和 f。由引理 7.3.10 得

$$G = A,$$

由定理 7.3.8 得

$$\Gamma\cong(\Gamma, H),$$

同构映射是

$$h：\Gamma\to(\Gamma, H) \quad h(X) = X\cap H$$

所以(Γ, H)也是完备的。

以下证明(Γ, H)就是 H 的集域代数 $\mathrm{P}(H)$，也就是证明任给 $X\in \mathrm{P}(H)$，都有 $X\in(\Gamma, H)$。

任给 $X\in \mathrm{P}(H)$，任给 $x\in X$，都有 $x\in H$，所以

存在Γ的原子 T，使得 $x = f(T)$，

所以

$$\{x\} = \{f(T)\} = h(T)\in(\Gamma, H),$$

因此 $X = \bigcup\{\{x\} \mid x\in X\}\in(\Gamma, H)$。■

布尔代数是一种重要的代数结构，在逻辑、数学和计算机科学中有重要的应用。集域代数是布尔代数的具体例子，了解集域代数对学习布尔代数有一定的帮助。更重要的是，从同构意义上说，集域代数已经刻画了布尔代数，因为布尔代数中有一个重要

的定理——Stone 表示定理：任何一个布尔代数同构于一个集域代数。

习题 7.3

7.3.1　Γ是集域代数，Φ在Γ中稠密。证明：任给Γ的原子 T，都有 $T\in\Phi$。

7.3.2　任给 $\mathrm{k}\in\mathbf{N}$，任给 $0\le \mathrm{m}\le 2^{\mathrm{k}}-1$，定义

$$A(\mathrm{k}, \mathrm{m}) = \{2^{\mathrm{k}}x+\mathrm{m} \mid x\in\mathbf{N}\},$$

证明：

(1) 任给 $\mathrm{k}\in\mathbf{N}$，$A(\mathrm{k}, 0) ,\cdots, A(\mathrm{k}, 2^{\mathrm{k}}-1)$两两不交。

(2) $\bigcup\{\{A(\mathrm{k}, \mathrm{i}) \mid 0\le \mathrm{i}\le 2^{\mathrm{k}}-1\} = \mathbf{N}$。

(3) 任给 $\mathrm{m}, \mathrm{n}, \mathrm{s}\le \mathrm{t}$，都有

$$A(\mathrm{s}, \mathrm{m})\cap A(\mathrm{t}, \mathrm{n}) = \begin{cases} A(\mathrm{t}, \mathrm{n}) & \text{如果 } \mathrm{m} = \mathrm{n} \\ \varnothing & \text{如果 } \mathrm{m} \neq \mathrm{n}, \end{cases}$$

7.3.3　证明：A 的有限-余有限代数Γ是原子集域代数。

7.3.4　Γ是完备的原子集域代数，Σ是完备的无原子集域代数，Γ和Σ不相干。证明：$\Gamma+\Sigma$是完备的集域代数，但不是原子集域代数。

7.3.5　Γ是 A 的完备的有原子的集域代数，但不是原子集域代数。令

$$G = \bigcup\{T \mid T \text{ 是}\Gamma\text{的原子}\}。$$

证明：

(1) $G \neq A$ 且 $G \neq \varnothing$。

(2) (Γ, G)是完备的原子集域代数。

(3) $(\Gamma, A\setminus G)$完备的无原子集域代数。

7.4　滤 和 超 滤

在现代逻辑的研究中，经常使用另一类重要的子集族。

7.4.1 定义　滤　A 是非空集合，Γ是 A 的子集族。称Γ是 A 上的滤，如果Γ满足以下条件：

(1) $\varnothing\notin\Gamma$，$A\in\Gamma$；

(2) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则 $X\cap Y\in\Gamma$；

(3) 如果 $X\in\Gamma$且 $X \subseteq Y \subseteq A$，则 $Y\in\Gamma$。

当不需要指明 A 时，简称Γ是滤。

在本书中，我们规定子集族是非空的(见集合族的定义)，在Γ是非空的情况，从条件(3)可以推出 $A\in\Gamma$，所以当知道Γ非空时，可以不验证 $A\in\Gamma$。

为了熟悉滤的概念，我们先来看一些例子。

7.4.2 例　B 是 A 的非空子集，令

$$\Gamma = \{X \mid B \subseteq X \subseteq A\}$$

则Γ是 A 上的滤。特别地，当 $B = \{a\}$时，有

$$\Gamma = \{X \mid B \subseteq X \subseteq A\} = \{X \mid a\in X \subseteq A\},$$

所以

任给 $X \subseteq A$，都有 $X\in\Gamma$当且仅当 $a\in X$。

7.4.3 例　A 是无限集。令

$$\Gamma = \{X \mid X \subseteq A \text{ 且 } X^*\text{有限}\},$$

则Γ是 A 上的滤，理由如下：

(1) 由$\varnothing^* = A$ 无限得$\varnothing\notin\Gamma$，由 $A^* = \varnothing$有限得 $A\in\Gamma$。

(2) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则 X^*和 Y^*都有限，所以

$$(X\cap Y)^* = X^*\cup Y^*\text{有限},$$

因此 $X\cap Y\in\Gamma$。

(3) 如果 $X\in\Gamma$且 $X \subseteq Y \subseteq A$，则

$$Y^* \subseteq X^*\text{且 } X^*\text{有限},$$

所以

Y^*有限，

因此 $Y\in\Gamma$。

这个滤称为 A 上的余有限滤，记为$\Gamma_{A,\aleph_0}$。虽然余有限滤和有限–余有限代数用同样的记号，但我们现在讨论的是滤，所以并不会混淆。习题中的记号$\Gamma_{A,\kappa}$的情况是类似的。

7.4.4 例 Δ是 A 上的滤组成的集合，即任给$\Gamma\in\Delta$，Γ都是 A 上的滤，那么

(1) $\bigcap\Delta$是 A 上的滤。

(2) 如果Δ是单调的，则$\bigcup\Delta$是 A 上的滤。

(参考定理 7.1.11 和习题 7.1.5)。

和集域代数不一样，并不是 A 的每个子集族Φ都能生成一个滤。

设Γ是一个滤，因为$\varnothing\notin\Gamma$，所以Γ中任意两个集合的交都不是空集，由数学归纳法可证，Γ中任何有限个集合的交也不是空集，即Γ具有以下所定义的性质。

7.4.5 定义 有限交性质 Φ是 A 的子集族，如果Φ满足：

任给 $n\in\mathbf{N}$，任给 $X_1,\cdots,X_n\in\Phi$，都有 $X_1\cap\cdots\cap X_n\in\Phi$，

则称Φ有有限交性质。

每个滤都有有限交性质，所以能生成滤的子集族一定有有限交性质。

以下定理说明了任何一个有有限交性质的子集族都能生成一个滤。

7.4.6 定理 Φ是 A 的有有限交性质的子集族，令

$\Gamma=\{X\mid$ 存在 $X_1,\cdots,X_n\in\Phi$，使得 $X_1\cap\cdots\cap X_n\subseteq X\subseteq A\}$

则Γ是 A 上的滤。

证 证明Γ满足滤的三个条件。

(1) 任给 $X\in\Gamma$，存在 $X_1,\cdots,X_n\in\Phi$，使得

$X_1\cap\cdots\cap X_n\subseteq X$。

因为Φ有有限交性质，所以

$X_1\cap\cdots\cap X_n\neq\varnothing$，

因此

$X\neq\varnothing$。

这就证明了$\varnothing\notin\Gamma$。

(2) 如果 $X,Y\in\Gamma$，则存在 $n,m\in\mathbf{N}$，存在

$X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_m\in\Phi$，

使得

$X_1\cap\cdots\cap X_n\subseteq X\subseteq A$ 且 $Y_1\cap\cdots\cap Y_m\subseteq Y\subseteq A$。

任给 $1\le i\le m$，令 $X_{n+i}=Y_i$，则存在 $X_1,\cdots,X_{n+m}\in\Phi$，使得

$X_1\cap\cdots\cap X_{n+m}=(X_1\cap\cdots\cap X_n)\cap(Y_1\cap\cdots\cap Y_m)\subseteq X\cap Y\subseteq A$，

所以 $X\cap Y\in\Gamma$。

(3) 如果 $X\in\Gamma$且 $X\subseteq Y\subseteq A$，则存在 $n\in\mathbf{N}$，存在 $X_1,\cdots,X_n\in\Phi$，使得

$X_1\cap\cdots\cap X_n\subseteq X\subseteq A$，

所以

$X_1\cap\cdots\cap X_n\subseteq Y\subseteq A$，

因此 $Y\in\Gamma$。■

定理 7.4.6 中构造的滤Γ称为由Φ生成的滤，记为(Φ)，可以证明(Φ)是包含Φ的最小的滤。

设 B 是 A 的非空子集，则$\{B\}$是 A 的有有限交性质的子集族，由$\{B\}$生成的滤$(\{B\})$简记为(B)，简称为由 B 生成的滤。实际上，(B)就是例 7.4.2 中的滤

$\{X\mid B\subseteq X\subseteq A\}$。

特别地有，

$(\{a\})=\{X\mid\{a\}\subseteq X\subseteq A\}$

$=\{X\mid a\in X\subseteq A\}$。

如果 A 上的滤Γ可由 A 的一个非空子集生成，即

存在 A 的非空子集 B，使得$\Gamma=(B)$，

则称Γ是 A 上的主滤。

7.4.7 例 Γ是有限的，取 B 是Γ中所有集合的交，则

$$B\in\Gamma \text{且} \Gamma = (B),$$

所以Γ是主滤。

特别地，如果 A 是有限的，则 A 上的任何滤Γ都是有限的，从而 A 上的任何滤Γ都是主滤。

7.4.8 例 A 是无限集，A 上的余有限滤$\Gamma_{A,\aleph_0}$不是主滤，可以用反证法证明这一点。

假设存在 A 的非空子集 B，使得

$$\Gamma_{A,\aleph_0} = (B)。$$

取 $b\in B$，令 $X = B\setminus\{b\}$，则

$$B \nsubseteq X,$$

又因为 $B\in\Gamma_{A,\aleph_0}$，所以

$$B^*\text{有限},$$

因此

$$X^* = A\setminus(B\setminus\{b\}) = B^*\cup\{b\}\text{有限},$$

由$\Gamma_{A,\aleph_0}$的定义得

$$X\in\Gamma_{A,\aleph_0},$$

和 $B \nsubseteq X$ 矛盾。

最重要的滤是超滤。

7.4.9 定义 超滤 Γ是 A 上的滤，如果Γ满足：

$$\text{任给 } X \subseteq A\text{，都有 } X\in\Gamma \text{或} X^*\in\Gamma,$$

则称Γ是 A 上的超滤。

设Γ是 A 上的超滤，$X \subseteq A$。由滤的定义(1)和(2)可知，X 和 X^*中至多有一个属于Γ，由超滤的定义可知，X 和 X^*中至少有一个属于Γ。

所以如果Γ是 A 上的超滤，则任给 $X \subseteq A$，X 和 X^*中恰好有一个属于Γ。也就是说，A 上的超滤Γ将 A 的幂集 $\mathrm{P}(A)$分成两部分，一部分是Γ，另一部分由Γ中集合的余集所组成。

7.4.10 例 任给 $a\in A$，主滤

$$(\{a\}) = \{X \mid a\in X \subseteq A\}$$

是超滤。证明如下：

任给 $X \subseteq A$，如果 $a\in X$，则

$$X\in(\{a\}),$$

如果 $a\notin X$，则

$$a\in X^*,$$

所以 $X^*\in(\{a\})$。

7.4.11 例 如果Γ是 A 上的主超滤(既是主滤又是超滤)，则存在 $a\in A$，使得$\Gamma = (\{a\})$。证明如下：

由Γ是主滤可设$\Gamma = (B)$，其中 B 是 A 的非空子集。取 $a\in B$，令 $X = B\setminus\{a\}$，则

$$X\notin\Gamma,$$

由Γ是超滤得

$$X^*\in\Gamma,$$

由滤对交的封闭性得

$$\{a\} = B\cap X^*\in\Gamma,$$

所以

$$B \subseteq \{a\},$$

因此 $B = \{a\}$。

7.4.12 例 A 是无限集，Γ是 A 上的超滤且$\Gamma_{A,\aleph_0} \subseteq \Gamma$，则$\Gamma$不是主滤。否则，由例 7.4.11 得存在 $a\in A$，使得

$$\Gamma = (\{a\}),$$

所以

$$\{a\}\in\Gamma,$$

又由$\{a\}^*\in\Gamma_{A,\aleph_0}$和$\Gamma_{A,\aleph_0} \subseteq \Gamma$得

$$\{a\}^*\in\Gamma,$$

因此

$$\varnothing = \{a\}\cap\{a\}^*\in\Gamma,$$

矛盾。

主超滤($\{a\}$)没有多大意义，有意义的超滤是非主超滤(不是主滤的超滤)。因为有限集上的滤都是主滤，所以只有无限集上可能存在非主超滤。

在选择公理下，我们可以证明每个滤都可以扩充为一个超滤。任给无限集 A，将 A 上的余有限滤$\Gamma_{A,\aleph_0}$扩充为超滤Γ，则Γ就是非主超滤。所以，在选择公理下，我们可以证明每个无限集上都有非主超滤。

为证明每个滤都可以扩充为一个超滤，引进极大滤的概念。

7.4.13 定义 极大滤 Γ是 A 上的滤，满足：

任给 A 上的滤Σ，如果$\Gamma\subseteq\Sigma$，则$\Gamma=\Sigma$，

就称Γ是 A 上的极大滤。

7.4.14 引理 Γ是 A 上的滤，任给 $X\subseteq A$，$\Gamma\cup\{X\}$有有限交性质或$\Gamma\cup\{X^*\}$有有限交性质。

证 如果$\Gamma\cup\{X\}$没有有限交性质，则存在 $X_1,\cdots,X_n\in\Gamma$，使得

$$(\bigcap_{1\le i\le n}X_i)\cap X=\varnothing,$$

令 $Y=\bigcap_{1\le i\le n}X_i$，则由$\Gamma$是滤得

$$Y\in\Gamma,$$

所以存在 $Y\in\Gamma$，使得 $Y\cap X=\varnothing$。

类似地可证，如果$\Gamma\cup\{X^*\}$没有有限交性质，则存在 $Z\in\Gamma$，使得 $Z\cap X^*=\varnothing$。

现在用反证法证明定理。

假设$\Gamma\cup\{X\}$和$\Gamma\cup\{X^*\}$都没有有限交性质，则存在 $Y,Z\in\Gamma$，使得

$$Y\cap X=\varnothing\text{且 }Z\cap X^*=\varnothing,$$

所以

$$Y\cap Z\cap X=\varnothing\text{且 }Y\cap Z\cap X^*=\varnothing,$$

因此

$$(Y\cap Z\cap X)\cup(Y\cap Z\cap X^*)=\varnothing,$$

化简得

$$Y\cap Z=\varnothing,$$

与 $Y\cap Z\in\Gamma$矛盾。■

7.4.15 引理 Γ是 A 上的滤，如果Γ是 A 上的极大滤，则Γ是 A 上的超滤。

证 证明如果Γ不是 A 上的超滤，则Γ不是 A 上的极大滤。

设Γ不是 A 上的超滤，则存在 $X\subseteq A$，使得

$$X\notin\Gamma\text{且 }X^*\notin\Gamma,$$

由定理 7.4.14 得

$$\Gamma\cup\{X\}\text{有有限交性质或}\Gamma\cup\{X^*\}\text{有有限交性质。}$$

不妨设$\Gamma\cup\{X\}$有有限交性质，由引理 7.4.14，$\Gamma\cup\{X\}$可生成一个滤

$$\Sigma=(\Gamma\cup\{X\}),$$

显然

$$\Gamma\subseteq\Sigma\text{且}\Gamma\neq\Sigma,$$

所以Γ不是极大滤。■

现在证明每个滤都可以扩充为超滤。

7.4.16 定理 超滤存在定理 任给 A 上的滤Γ，存在 A 上的超滤Σ，使得$\Gamma\subseteq\Sigma$。

证 令$\Delta=\{\Phi\mid\Phi$是 A 上的滤且$\Gamma\subseteq\Phi\}$，则Δ在$\subseteq$下是一个非空偏序集。

任给Δ的线性链Δ_1，都有Δ_1是单调的，由例 7.4.4 得

$$\bigcup\Delta_1\text{是 }A\text{ 上的滤且}\Gamma\subseteq\bigcup\Delta_1,$$

所以

$$\bigcup\Delta_1\in\Delta,$$

因此$\bigcup\Delta_1$是Δ_1的上界。

这说明了任给Δ的线性链Δ_1，Δ_1都有上界，由 Zorn 引理得Δ有极大元Σ，Σ就是极大滤，由引理 7.4.15，Σ就是超滤。■

习题 7.4

7.4.1　Δ是 A 上的滤组成的集合，即任给$\Gamma\in\Delta$，Γ都是 A 上的滤，那么

(1) $\bigcap\Delta$是 A 上的滤。

(2) 如果Δ是单调的，则$\bigcup\Delta$是 A 上的滤。

7.4.2　Φ是 A 的有有限交性质的子集族，(Φ)是由Φ生成的滤，令

$$\Delta = \{\Gamma \mid \Gamma\text{是 } A \text{ 上的滤且}\Phi \subseteq \Gamma\}。$$

证明：$\bigcap\Delta = (\Phi)$。

7.4.3　Γ是 A 上的超滤。证明：如果存在 A 的有限子集 B，使得 $B\in\Gamma$，则Γ是主滤。

7.4.4　Γ是 A 上的滤，证明以下两条件等价：

(1) Γ是 A 上的超滤。

(2) 任给 $X, Y\in\Gamma$，$X\cup Y\in\Gamma$当且仅当 $X\in\Gamma$或 $Y\in\Gamma$。

7.4.5　Γ是 A 上的滤，证明：如果Γ是 A 上的超滤，则Γ是 A 上的极大滤。

7.4.6　κ是无限基数，$|A|\geq\kappa$，令

$$\Gamma_{A,\kappa} = \{X \mid X \subseteq A \text{ 且} |X^*| < \kappa\}。$$

证明：

(1) $\Gamma_{A,\kappa}$是 A 上的滤。

(2) 任给 A 上的滤Γ，如果$\Gamma_{A,\kappa} \subseteq \Gamma$，则任给 $X\in\Sigma$，都有$|X|\geq\kappa$。

(3) 任给 A 上的超滤Σ，如果$\Gamma_{A,\kappa} \subseteq \Gamma$，则$\Gamma$不是主滤。

7.4.7　A 是非空集合，$\{\varnothing, A\}$是 A 的极小代数。证明以下两条件等价：

(1) Γ是 A 上的超滤。

(2) 存在 $\mathrm{P}(A)$到$\{\varnothing, A\}$同态映射 h，使得$\Gamma = \{X \mid h(X) = A\}$。

7.5　超积和超幂

用超滤可以在卡氏积上定义一个重要的等价关系，从而得到一个重要的商集。

7.5.1 定理　Γ是 I 上的超滤，在卡氏积$\prod_{i\in I}A_i$上定义二元关系 R_Γ如下：

$$<f, g>\in R_\Gamma\text{当且仅当}\{i \mid f(i) = g(i)\}，$$

则 R_Γ是$\prod_{i\in I}A_i$上的等价关系。

证　证明 R_Γ具有自返性、对称性和传递性。

自返性。任给 $f\in\prod_{i\in I}A_i$，都有

$$\{i \mid f(i) = f(i)\} = I\in\Gamma，$$

因此$<f, f>\in R_\Gamma$。

对称性。任给 $f, g\in\prod_{i\in I}A_i$，如果$<f, g>\in R_\Gamma$，则

$$\{i \mid f(i) = g(i)\}\in\Gamma，$$

所以

$$\{i \mid g(i) = f(i)\}\in\Gamma，$$

因此$<g, f>\in R_\Gamma$。

传递性。任给 $f, g, h\in\prod_{i\in I}A_i$，如果$<f, g>\in R_\Gamma$且$<g, h>\in R_\Gamma$，则

$$\{i \mid f(i) = g(i)\}\in\Gamma\text{且}\{i \mid g(i) = h(i)\}\in\Gamma，$$

又

$$\{i \mid f(i) = g(i)\}\cap\{i \mid g(i) = h(i)\} \subseteq \{i \mid f(i) = h(i)\}，$$

所以

$$\{i \mid f(i) = h(i)\}\in\Gamma，$$

因此$<f, h>\in R_\Gamma$。■

7.5.2 定义　超积和超幂　Γ是 I 上超滤，在卡氏积$\prod_{i\in I}A_i$上取 $\sim\, = R(\Gamma)$。称商集

$$\prod_{i\in I}A_i/\!\sim\; = \{\, \tilde{f} \mid f\in\prod_{i\in I}A\}$$

为集合族$\{A_i \mid i\in I\}$的超积。如果任给 $i\in I$，都有 $A_i = A$，则称

$$\prod_{i\in I} A_i /\sim = A^I /\sim = \{ \tilde{f} \mid f : I\to A \}$$

为 A 的超幂。

$\{A_i \mid i\in I\}$是集合族，任给 $i\in I$，给定 A_i 上的 n 元关系 S_i，我们讨论如何构造超积$\prod_{i\in I}A_i /\sim$上的 n 元关系 S'，类似地，任给 $i\in I$，给定 A_i 上的 n 元函数 F_i，我们讨论如何构造超积$\prod_{i\in I}A_i /\sim$上的 n 元函数 F'。

要使用某种性质在商集上定义关系和函数，必须保证这种性质对于等价关系是不变。为此我们需要以下结果。

7.5.3 定理 $\{A_i \mid i\in I\}$是集合族，任给 $i\in I$，S_i 是 A_i 上的 n 元关系，F_i 是 A_i 上的 n 元函数。Γ是 I 上超滤，在卡氏积$\prod_{i\in I}A_i$ 上取二元关系$\sim = R_\Gamma$，就有

(1) 如果 $f_1\sim g_1,\cdots, f_n\sim g_n$，则$\{i \mid <f_1(i),\cdots, f_n(i)>\in S_i\}\in\Gamma$当且仅当$\{i \mid <g_1(i),\cdots, g_n(i)>\in S_i\}\in\Gamma$。

(2) 如果 $f_1\sim g_1,\cdots, f_n\sim g_n$，则 $f\sim g$，其中 $f, g\in\prod_{i\in I}A_i$，满足：任给 $i\in I$，都有 $f(i) = F_i(f_1(i),\cdots, f_n(i))$和 $g(i) = F_i(g_1(i),\cdots, g_n(i))$。

证 令

$$A = \{i \mid f_1(i) = g_1(i),\cdots, f_n(i) = g_n(i)\},$$

任给 $1\le m\le n$，令

$$A_m = \{i \mid f_m(i) = g_m(i)\}。$$

如果 $f_1\sim g_1,\cdots,\ f_n\sim g_n$，则

$$A_1\in\Gamma,\cdots, A_n\in\Gamma,$$

因为 $A_1\cap\cdots\cap A_n \subseteq A$，所以 $A\in\Gamma$。

(1) 如果$\{i \mid <f_1(i),\cdots, f_n(i)>\in S_i\}\in\Gamma$，则由

$$A\cap\{i \mid <f_1(i),\cdots, f_n(i)>\in S_i\} \subseteq \{i \mid <g_1(i),\cdots, g_n(i)>\in S_i\}$$

得

$$\{i \mid <g_1(i),\cdots, g_n(i)>\in S_i\}\in\Gamma。$$

类似地，如果$<g_1(i),\cdots, g_n(i)>\in S_i\}\in\Gamma$，则

$$\{i \mid \{i \mid <f_1(i),\cdots, f_n(i)>\in S_i\}\in\Gamma。$$

因此

$$\{i \mid <f_1(i),\cdots, f_n(i)>\in S_i\}\in\Gamma$$

当且仅当

$$\{i \mid <g_1(i),\cdots, g_n(i)>\in S_i\}\in\Gamma。$$

(2) 因为

$$A \subseteq \{i \mid F_i(f_1(i),\cdots, f_n(i))=F_i(g_1(i),\cdots, g_n(i))\} = \{i \mid f(i)=g(i)\},$$

所以

$$\{i \mid f(i) =g(i)\}\in\Gamma,$$

因此 $f\sim g$。■

$\{A_i \mid i\in I\}$是集合族，Γ是 I 上超滤。任给 $i\in I$，S_i 是 A_i 上的 n 元关系，F_i 是 A_i 上的 n 元函数，由定理 7.5.3，我们可以构造超积$\prod_{i\in I}A_i /\sim$上的 n 元关系：

$$S' = \{< \tilde{f}_1,\cdots, \tilde{f}_n > \mid \{i \mid <f_1(i),\cdots, f_n(i)>\in S_i\}\in\Gamma\}$$

和超积$\prod_{i\in I}A_i /\sim$上的 n 元函数：

$$F' : (\prod_{i\in I} A_i /\sim)^n\to\prod_{i\in I} A_i /\sim \quad F'(\tilde{f}_1,\cdots, \tilde{f}_n) = \tilde{f}$$

f 满足：任给 $i\in I$，都有 $f(i) = F_i(f_1(i),\cdots, f_n(i))$。

A 是任何集合，S 是 A 上 n 元关系，F 是 A 上 n 元集合。任给 $i\in I$，令 $A_i = A$，$S_i = S$，$F_i = F$，则以上方法就从 S 和 F 构造了超幂 $A^I /\sim$上的 n 元关系 S'和 n 元函数 F'，它们满足：

$$< \tilde{f}_1,\cdots, \tilde{f}_n >\in S' \text{ 当且仅当 } \{i \mid <f_1(i),\cdots, f_n(i)>\in S\}\in\Gamma$$

和

$$F' : (A^I /\sim)^n\to A^I /\sim \quad F'(\tilde{f}_1,\cdots, \tilde{f}_n) = \tilde{f}$$

f 满足：任给 $i\in I$，都有 $f(i) = F(f_1(i),\cdots, f_n(i))$。

以下简单地讨论，S'与 S 的关系和 F'与 F 的关系。

7.5.4 引理 A 是集合，Γ是 I 上超滤，$a_1,\cdots,a_n\in A$，$\mathsf{a}_1,\cdots,\ \mathsf{a}_n$ 是 I 到 A 的分别以 $a_1,\cdots,a_n$ 为值的常映射，S 是 A 上的 n 元关系，则$<a_1,\cdots,a_n>\in S$ 当且仅当$\{i \mid <\mathsf{a}_1(i),\cdots, \mathsf{a}_n(i)>\in S\}\in\Gamma$。

证 因为任给 $i\in I$，都有

$$\mathsf{a}_1(i) = a_1,\cdots, \mathsf{a}_n(i) = a_n,$$

所以当$<a_1,\cdots,a_n>\in S$时，有

$$\{i \mid <a_1(i),\cdots, a_n(i)>\in S\} = I\in\Gamma,$$

当$<a_1,\cdots,a_n>\notin S$时，有

$$\{i \mid <a_1(i),\cdots, a_n(i)>\in S\} = \varnothing\notin\Gamma,$$

因此

$$<a_1,\cdots,a_n>\in S \text{ 当且仅当} \{i \mid <a_1(i),\cdots, a_n(i)>\in S\}\in\Gamma。\blacksquare$$

7.5.5 定理 A是集合，Γ是I上超滤，在A^I上取等价关系$\sim = R_\Gamma$。S是A上的n元关系，F是A上的n元函数，构造超幂$A^I/\sim$上的n元关系S'和n元函数F'，它们满足：

$$<\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n>\in S' \text{ 当且仅当} \{i \mid <f_1(i),\cdots, f_n(i)>\in S\}\in\Gamma$$

和

$$F'(\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n) = \tilde{f}，\text{任给 } i\in I，\text{都有 } f(i) = F(f_1(i),\cdots, f_n(i))。$$

任给$a\in A$，I到A的以a为值的常映射$a\in A^I$，所以$\tilde{a}\in A^I/\sim$，构造A到$A^I/\sim$的映射：$h：A\to A^I$　$h(a) = \tilde{a}$，则

(1) h是单射。

(2) 任给$a_1,\cdots,a_n\in A$，都有

$$<a_1,\cdots,a_n>\in S \text{ 当且仅当} <h(a_1),\cdots, h(a_n)>\in S'。$$

(3) 任给$a_1,\cdots,a_n\in A$，都有$F'(h(a_1),\cdots, h(a_n)) = h(F(a_1,\cdots, a_n))$。

(4) 如果Γ是主超滤，则h是满射。

证 (1) 任给$a, b\in A$，如果$a \neq b$，则

$$\{i \mid a(i) = b(i)\} = \varnothing\notin\Gamma,$$

所以$\tilde{a}\neq\tilde{b}$，即

$$h(a) \neq h(b)。$$

因此h是单射。

(2) 任给$a_1,\cdots,a_n\in A$，由引理7.5.4得：

$$\begin{aligned}<a_1,\cdots,a_n>\in S &\text{ 当且仅当 } \{i \mid <a_1(i),\cdots, a_n(i)>\in S\}\in\Gamma\\ &\text{ 当且仅当 } <\tilde{a}_1,\cdots, \tilde{a}_n>\in S'\\ &\text{ 当且仅当 } <h(a_1),\cdots, h(a_n)>\in S'。\end{aligned}$$

(3) 任给$a_1,\cdots,a_n\in A$，令$b = F(a_1,\cdots,a_n)$，$F'(\tilde{a}_1,\cdots, \tilde{a}_n) = \tilde{f}$，

则任给$i\in I$，都有

$$f(i) = F(a_1(i),\cdots, a_n(i)) = F(a_1,\cdots,a_n) = b,$$

所以f就是I到A的常映射b，因此

$$\begin{aligned}F'(h(a_1),\cdots, h(a_n)) &= F'(\tilde{a}_1,\cdots, \tilde{a}_n)\\ &= \tilde{f} = \tilde{b} = h(b)\\ &= h(F(a_1,\cdots, a_n))。\end{aligned}$$

(4) 只需证任给$f\in A^I$，存在$a\in A$，使得$f\sim a$就行了。

因为Γ是主超滤，所以存在$i_0\in I$，使得$\Gamma = \Gamma(\{i_0\})$(见例7.2.11)，因此，$X\in\Gamma$当且仅当$i_0\in X$。

令$a = f(i_0)$，则$a\in A$，又任给$i\in I$，都有

$$a(i) = f(i_0),$$

特别地$a(i_0) = f(i_0)$，所以

$$i_0\in\{i \mid a(i) = f(i)\},$$

因此

$$\{i \mid a(i) = f(i)\}\in\Gamma,$$

由$\sim$的定义得$f\sim a$。$\blacksquare$

因为h是单射，所以任给$a\in A$，可以将a和$h(a)$等同，从而A就和$h[A]$等同，也就是将A看作$A^I/\sim$的一个子集。在这种看法下，定理7.5.5(2)就是：

任给$a_1,\cdots,a_n\in A$，都有

$$<a_1,\cdots,a_n>\in S \text{ 当且仅当 } <a_1,\cdots, a_n>\in S'。$$

定理7.5.5(3)就是：

任给$a_1,\cdots,a_n\in A$，都有$F'(a_1,\cdots, a_n) = F(a_1,\cdots, a_n)$。

这恰好是说S'是S的扩充，F'是F的扩充。

简单地说，我们可以将集合A扩充成超幂$A^I/\sim$，同时将A上n元关系S扩充成$A^I/\sim$上n元关系S'，将A上n元函数F扩充成$A^I/\sim$上n元函数F'。这种扩充会保持S和F的许多性质不变，从而在逻辑和数学中有很大的应用。

如取$I = \mathbf{N}$，取I上由余有限滤$\Gamma_{I,\aleph_0}$扩充成的非主超滤Γ(见例

7.2.8 和习题 7.2.6)，则自然数 **N** 的扩充 $\mathbf{N}^{\mathrm{I}}/\sim$称为非标准自然数，实数 **R** 的扩充 $\mathbf{R}^{\mathrm{I}}/\sim$称为非标准实数。

更一般地，超积$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上的 n 元关系 S'保持 $S_i(i\in I)$的许多公共性质不变，超积$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上的 n 元函数 F'保持 $F_i(i\in I)$的许多公共性质不变。

另外，定理 7.5.5(4)告诉我们，如果Γ是主超滤，则 $A^{\mathrm{I}}/\sim$就是 A，S'就是 S，F'就是 F。所以用主超滤来构造超幂是没有意义的。由选择公理，每个无限集上都有非主超滤，而且在一定的条件下，由非主超滤构造的超幂 $A^{\mathrm{I}}/\sim$一定是的 A 真扩充。

习题 7.5

7.5.1　Γ是 A 上的超滤，在 $A^{\mathrm{I}}/\sim$上取等价关系$\sim = R_\Gamma$，证明：

(1) 任给 $f\in A^{\mathrm{I}}$，如果存在 $a\in A$，使得 $f\sim a$，则存在 $i_0\in I$，使得 $a = f(i_0)$。

(2) 任给 $f\in A^{\mathrm{I}}$，如果 f 是单射且存在 $a\in A$，使得 $f\sim a$，则存在 $i_0\in I$，使得$\{i_0\}\in\Gamma$。

7.5.2　Γ是 A 上的超滤，在 $A^{\mathrm{I}}/\sim$上取等价关系$\sim = R_\Gamma$，取 A 到 $A^{\mathrm{I}}/\sim$的映射：

$$h：A\to A^{\mathrm{I}}\quad h(a) = \tilde{a}\ ,$$

其中 a 是 I 到 A 的以 a 为值的常映射。

证明：如果$|\,I\,|\le|\,A\,|$且 h 是满射，则Γ是主滤。

7.5.3　$\{A_i\mid i\in I\}$是集合族，Γ是 I 上超滤，在$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上取等价关系$\sim = R(\Gamma)$。任给 $i\in I$，$\le_i$是 A_i 上的偏序关系，构造$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上的二元关系如下：

$$\tilde{f}\le'\tilde{g}\text{ 当且仅当}\{i\mid f(i)\le_i g(i)\}\in\Gamma$$

证明：

(1) $\le'$是$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上的偏序关系。

(2) 如果任给 $i\in I$，$\le_i$是全序，则$\le'$也是$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上的全序。

7.5.4　$\{A_i\mid i\in I\}$是集合族，Γ是 I 上超滤，在$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上取等价关系$\sim = R_\Gamma$。任给 $i\in I$，F_i是 A_i 上的 n 元函数，构造$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上的 n 元函数 F'如下：

$$F'：(\prod_{i\in I}A_i/\sim)^n\to\prod_{i\in I}A_i/\sim\quad F'(\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n) = \tilde{f}$$

f 满足：任给 $i\in I$，都有 $f(i) = F_i(f_1(i),\cdots,f_n(i))$。

证明：

(1) 如果任给 $i\in I$，F_i是单射，则 F'是单射。

(2) 如果任给 $i\in I$，F_i是满射，则 F'是满射。

7.5.5　非标准自然数　$I = \mathbf{N}$，Γ是 I 上由余有限滤$\Gamma_{I,\aleph_0}$扩充成的非主超滤，在 $\mathbf{N}^{\mathrm{I}}/\sim$上取等价关系$\sim = R_\Gamma$。≤是 **N** 上的小于等于关系，构造 $\mathbf{N}^{\mathrm{I}}/\sim$上的二元关系$\le'$如下：

$$\tilde{f}\le'\tilde{g}\text{ 当且仅当 }\{i\mid f(i)\le g(i)\}\in\Gamma$$

任给 $n\in\mathbf{N}$，令

$$f_n：I\to A\quad f_n(i) = \begin{cases}0 & \text{如果 } i<n\\ i-n & \text{如果 } i\ge n,\end{cases}$$

证明：

(1) 如果 $n\le m$，则 $\tilde{f}_n\le'\tilde{f}_m$。

(2) 如果 $n\ne m$，则 $\tilde{f}_n\ne\tilde{f}_m$。

(3) 任给 $n\in\mathbf{N}$，都有 $\tilde{n}\le\tilde{f}_0$且 $\tilde{n}\ne\tilde{f}_0$，其中 n 是 I 到 **N** 的以 n 为值的常映射。

(4) $\le'$不是 $\mathbf{N}^{\mathrm{I}}/\sim$上的良序关系。