# 第四章　基　　数

## 4.1　集合的基数

对于有限集合有两个基本的问题。第一是集合有多少个元素，如{真, 假}、{1, 2}都有两个元素，太阳系的行星有 9 个元素；第二是两个集合的元素是否一样多，如太阳系的行星和 $\mathbf{N}_9$ 有一样多的元素。如果我们知道了两个集合的元素各是多少，当然也就知道了它们的元素是否一样多。但判断两个集合的元素是否一样多，并不一定需要知道它们各有多少元素，如电影院里坐满了人，我们就知道看电影的人和电影院的座位一样多，而不需要知道有多少人和多少座位。一般地，对两个有限集合来说，只要将它们的元素一一对应，就能断定它们的元素一样多。按映射的话来说，就是如果它们之间有一个双射，则它们的元素就一样多。

我们是如何数集合中元素的个数的呢？计数过程实际上是将这个集合的元素和一部分自然数作一一对应。详细地说，我们数一个有 n 个元素的集合，实际上就是将这 n 个元素和{1,⋯, n}的元素作一一对应。如果在计数过程中将第一个记为 0，则就是将这 n 个元素和 $\mathbf{N}_n$ 的元素作一一对应。

进一步问，自然数的概念从何而来，正是通过一一对应而得到的。如“ 5 ”这个概念，就是通过许多具有五个元素的集合抽象得到的，而这些集合有同样的元素正是因为它们的元素之间能够一一对应。

通过以上分析，可以看出两个有限集合元素之间的一一对应，不但是计数的根据，而且是自然数概念的基础。



注意到集合元素之间的一一对应并不依赖于集合是否有限，所以一个自然的想法就是将集合元素间的一一对应作为两个集合有同样多元素的标准，也可以用集合元素间的一一对应来推广自然数的概念。

**4.1.1 定义**　集合的等势　如果存在 $A$ 到 $B$ 的双射 $f$，则称 $A$ 和 $B$ 等势，记为 $A\approx B$。

集合等势有以下性质。

**4.1.2 定理**　$A, B, C$ 是任何集合。

(1) 自返性　$A\approx A$。

(2) 对称性　如果 $A\approx B$，则 $B\approx A$。

(3) 传递性　如果 $A\approx B$ 且 $B\approx C$，则 $A\approx C$。

**证**　(1) $A$ 到 $A$ 的恒等映射 $i_A$ 是双射，因此 $A\approx A$。

(2) 如果 $A\approx B$，则存在 $A$ 到 $B$ 的双射 $f$，所以存在 $B$ 到 $A$ 的双射 $f^{-1}$($f$ 的逆映射)，因此 $B\approx A$。

(3) 如果 $A\approx B$ 且 $B\approx C$，则存在 $A$ 到 $B$ 和双射 $f$ 和 $B$ 到 $A$ 的双射 $g$，所以存在 $A$ 到 $C$ 的双射 $g\circ f$ ($f$ 和 $g$ 的复合)，因此 $A\approx C$。

■

由定理 4.1.2，并参考关于等价关系、等价类的讨论，可知彼此等势的集合可以确定一个刻画元素个数的数。

**4.1.3 定义**　基数　所有彼此等势的集合确定的数称为基数。和集合 $A$ 彼此等势的所有集合(从而它们彼此等势)确定的基数称为 $A$ 的基数，记为$|A|$。这样就有：

$$|A| = |B| \text{当且仅当 } A\approx B\text{。}$$

空集到非空集合的空映射不是双射，所以空集的基数和任何非空集合的基数都不相同，即任给非空集合 $A$，都有$|\varnothing| \neq |A|$。

按照对自然数的直观理解，所有和 $\mathbf{N}_n$ 等势的集合确定的基数就是 n，即$|\mathbf{N}_n| = n$，特别地有$|\varnothing| = |\mathbf{N}_0| = 0$。$A$ 有 n 个元素就是$|A| = |\mathbf{N}_n| = n$。

注意需要证明当 $n \neq m$ 时有$|\mathbf{N}_n| \neq |\mathbf{N}_m|$，才能说$|\mathbf{N}_n| = n$，

否则会产生矛盾。这个证明以后再讲。

现在来看无限集合，令 $A = \{2x \mid x\in\mathbf{N}\}$是所有偶数的集合，则 $A$ 是 $\mathbf{N}$ 的真子集。取 $\mathbf{N}$ 到 $A$ 的映射

$$f：\mathbf{N}\to A \quad f(x) = 2x，$$

则 $f$ 是双射，所以$|\,\mathbf{N}\,| = |\,A\,|$。这就是说 $\mathbf{N}$ 可以和它的一个真子集有相同的基数，即 $\mathbf{N}$ 和它的一个真子集的元素个数一样多。

一个集合确实要比它的真子集多出一些元素，多出那些属于它而不属于它的真子集的元素，而现在又说它们的元素个数一样多，这点看起来似乎违背常识。历史上有人正是因为这一点而不承认无限集合，有些承认无限集合的人也因为这一点而反对对无限集合计数。

集合元素的个数只是集合的一种性质，为什么人们直观上认为集合和它的真子集不可以有同样多的元素呢？

因为人们对集合性质的直观认识一般总是从有限集合得到的，而在有限集合中，一个集合和它的真子集的元素个数一定不相等。详细地说，如果 $A$ 和 $B$ 都是有限集合且 $B\subseteq A$，则 $B = A$ 当且仅当 $B$ 和 $A$ 有同样的元素个数。这就使得在 $B\subseteq A$ 时，总是将 $B = A$ 和 $B$ 和 $A$ 有同样的元素个数这两个不同的概念当作一回事，所以当无限集合中这两个概念不一致时，就产生了困惑。

认识到这两个概念的不同，无限集合能和其真子集等势是可以接受的。以后我们还会看到，在一定的假设下，任何无限集合都能和其某个真子集等势。所以这个性质是区别有限和无限的的本质标志之一。

无限集合基数上产生的问题和“整体等于部分”这个问题无关。集合论中的整体和部分就是集合和它的真子集，它们严格遵守“整体不等于部分”的原则，因为真子集就是通过它不等于原集合而定义的。基数只是集合的一种性质，虽然在有限集合上，“整体不等于部分”恰好体现在整体的基数不等于部分的基数，但我们千万不能把整体的基数不等于部分的基数当作“整体不等于部分”的标准，推广到无限集合上。整体有些性质和部分一样，并不等于整体等于部分。



认识到无限集合的这一性质，对以下一些例子就不会感到惊讶了。

**4.1.4 例** $|\,\mathbf{N}\times\mathbf{N}\,| = |\,\mathbf{N}\,|$。首先将 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的元素排列如下：

$$\begin{array}{llllll}
\langle 0, 0\rangle & \langle 0, 1\rangle & \langle 0, 2\rangle & \langle 0, 3\rangle & \cdots & \langle 0, m\rangle \quad \cdots\cdots \\
\langle 1, 0\rangle & \langle 1, 1\rangle & \langle 1, 2\rangle & \cdots\cdots & & \\
\langle 2, 0\rangle & \langle 2, 1\rangle & \cdots\cdots & & & \\
\langle 3, 0\rangle & \cdots\cdots & & & & \\
\vdots & & & & & \\
\langle n, 0\rangle & & & & & \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

然后按箭头方向和 $\mathbf{N}$ 的元素作对应，即构造 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 映射

$$f：\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N} \quad f(0, 0) = 0, f(0, 1) = 1, f(1, 0) = 2, \cdots\cdots$$

实际上，这个映射就是 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 配对函数

$$f：\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N} \quad f(x, y) = \tfrac{1}{2}(x+y)(x+y+1)+x$$

在习题 2.2.7 中已经证明了 $f$ 是双射。

任给 $\mathrm{n}\in\mathbf{N}$，令 $A_{\mathrm{n}} = \{\langle \mathrm{n}, x\rangle \mid x\in\mathbf{N}\}$，因为

$$g：A_{\mathrm{n}}\to\mathbf{N} \quad f(\mathrm{n}, x) = x$$

是双射，所以 $A_{\mathrm{n}}$ 与 $\mathbf{N}$ 等势，而 $\mathbf{N}\times\mathbf{N} = \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathbf{N}} A_{\mathrm{n}}$。因此

$$|\,\mathbf{N}\times\mathbf{N}\,| = |\,\mathbf{N}\,|$$

也说明了无限多个与 $\mathbf{N}$ 等势的集合，它们的并还和 $\mathbf{N}$ 等势。

**4.1.5 例** $|\,\mathbf{Z}\,| = |\,\mathbf{N}\,|$。构造 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{N}$ 的映射

$$f：\mathbf{Z}\to\mathbf{N} \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{如果 } x\geq 0 \\ -(2x+1) & \text{如果 } x<0， \end{cases}$$

则 $f$ 是双射。直观上就是将 $\mathbf{Z}$ 的元素按以下方式排列，并依次与 $\mathbf{N}$ 作对应：

$$0, -1, 1, -2, -2, -3, \cdots, -n, n, -(n+1), \cdots\cdots$$

**4.1.6 例** $|\mathbf{Q}| = |\mathbf{Z}|$，从而$|\mathbf{Q}| = |\mathbf{N}|$。

首先将 $\mathbf{Q}^+$的元素表示为简约分数，将 n 表示为$\frac{n}{1}$，这样就没有重复了。先按分子分母之和的大小排列，在分子分母之和相等的几个数中，按分子的大小排列，直观形象如下：

$$\underbrace{\tfrac{1}{1}}_{2}, \underbrace{\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{1}}_{3}, \underbrace{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}}_{4}, \underbrace{\tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{4}{1}}_{5}, \cdots\cdots$$

依次将它们与 $\mathbf{Z}^+$的元素一一对应，即构造 $\mathbf{Q}^+$到 $\mathbf{Z}^+$的双射

$$f：\mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Z}^+ \quad f(\tfrac{1}{1}) = 1, f(\tfrac{1}{2}) = 2, f(\tfrac{2}{1}) = 3, f(\tfrac{1}{3}) = 4, \cdots\cdots$$

然后按例 2.2.10 将 $\mathbf{Q}^+$到 $\mathbf{Z}^+$的双射 $f$ 扩充成 $\mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的双射 $g$。

**4.1.7 例** $|(0, 1]\times(0, 1]| = |(0, 1]|$。

将 $x\in(0, 1]$表示为十进小数，注意有些 $x$ 的表示不惟一，如 0.35 也可以表示为 $0.34\dot{9}$。我们取后一种表达式，这种表达式的特征是不会在某一位后全是 0,所以这种表达式称为 $x$ 的十进无限小数 表达式，它是惟一的。特别地，1 的十进无限小数表达式是 $0.\dot{9}$。这样，任给 $x\in(0, 1]$，都有 $x = 0.a_0a_1a_2\cdots\cdots$。

任给$\langle x, y\rangle\in(0, 1] \times(0, 1]$，设 $x, y$ 的十进无限小数表达式分别为

$$x = 0.a_0a_1a_2\cdots\cdots$$

和

$$y = 0.b_0b_1b_2\cdots\cdots。$$

将 $a_0a_1a_2\cdots\cdots$分组为

$$a_0\cdots a_{n_0}, a_{n_0+1}\cdots a_{n_1}, \cdots\cdots,$$

将 $b_0b_1b_2\cdots\cdots$分组为

$$b_0\cdots b_{m_0}, b_{m_0+1}\cdots b_{m_1}, \cdots\cdots,$$

使得每组恰好最后一个数字不为 0，如

$$0.30200491\cdots\cdots$$



分组为

$$3, 02, 004, 9, 1, \cdots\cdots。$$

将 $x$ 和 $y$ 的分组交错放在一起得到

$$z = 0.a_0\cdots a_{n_0}b_0\cdots b_{m_0}a_{n_0+1}\cdots a_{n_1}b_{m_0+1}\cdots b_{m_1}\cdots\cdots,$$

则 $z\in(0, 1]$。这样就可以构造$(0, 1]\times(0, 1]$到$(0, 1]$的映射

$$f：(0, 1]\times(0, 1]\to(0, 1] \quad f(x, y) = z。$$

任给$\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle\in(0, 1]\times(0, 1]$，如果$\langle x_1, y_1\rangle \neq \langle x_2, y_2\rangle$，则 $x_1$ 和 $y_1$ 的分组与 $x_2$,和 $y_2$ 的分组一定有不一样，用交错方法构成的 $z_1$ 和 $z_2$ 就一定不相等，所以 $f$ 是单射。

任给 $z\in(0, 1]$，将 $z$ 用同样的方法分组，然后将第一组、第三组、第五组、…… 构成 $x$，将第二组、第四组、第六组、…… 构成 $y$，则

$$\langle x, y\rangle\in(0, 1]\times(0, 1]且 f(x, y) = z,$$

所以 $f$ 是满射。

**4.1.8 例** $|(0, 1)| = |\mathbf{R}|$。取$(0, 1)$到 $\mathbf{R}$ 的映射

$$f：(0, 1)\to\mathbf{R} \quad f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}$$

在例 2.2.9 中已经证明了 $f$ 是双射。

**4.1.9 例** $|(0, 1]| = |(3, 5]|$。取$(0, 1]$到$(3, 5]$的映射

$$f：(0, 1] \to(3, 5] \quad f(x) = 2x+3,$$

易证 $f$ 是双射。

类似地可证$|(0, 1)| = |(3, 5)|$。

一般地，如果 $a<b$ 且 $c<d$，则

$$|(a, b]| = |(c, d]|,$$

$$|(a, b)| = |(c, d)|。$$

**4.1.10 例** $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的单射，任给 $X \subseteq A$，取 $X$ 到 $f[X]$的映射

$$g：X\to f[X] \quad g(x) = f(x),$$

则 $g$ 是双射，所以$|X| = |f[X]|$。特别地，$|A| = |f[A]| = |\mathrm{ran}(f)|$。

以下是集合的交，并，卡氏积和幂集的基数相等的几个例子。

**4.1.11 例**　如果$|A_1|=|A_2|$且$|B_1|=|B_2|$，其中

$$A_1\cap B_1=\varnothing，A_2\cap B_2=\varnothing，$$

则$|A_1\cup B_1|=|A_2\cup B_2|$ (见例 2.1.13，例 2.2.5 和习题 2.2.2)。

**4.1.12 例**　如果$|A_1|=|A_2|$且$|B_1|=|B_2|$，则

$$|A_1\times B_1|=|A_2\times B_2|$$

(见例 2.1.14 和例 2.2.6)。

**4.1.13 例**　$|A\times B|=|B\times A|$，$|A\times(B\times C)|=|(A\times B)\times C|$ (见习题 2.2.5 和习题 2.2.6)。

**4.1.14 例**　如果$|A|=|B|$，则$|\mathrm{P}(A)|=|\mathrm{P}(B)|$ (见例 2.4.6)。

## 习题 4.1

4.1.1　证明：任给 $n\in\mathbf{N}$，都$|\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_n|=|\mathbf{N}|$。

4.1.2　在例 4.1.7 中，对 $x=0.a_0a_1a_2\cdots\cdots$和 $y=0.b_0b_1b_2\cdots\cdots$，取 $z=0.a_0b_0a_1b_1a_2b_2\cdots\cdots$，构造$(0,1]\times(0,1]$到$(0,1]$的映射

$$g：(0,1]\times(0,1]\to(0,1]\quad f(x,y)=z。$$

证明：$g$ 是单射但不是满射。

4.1.3　证明：如果 $a<b$ 且 $c<d$，则

$$|(a,b]|=|(c,d]|，|(a,b)|=|(c,d)|。$$

4.1.4　$f$ 是 $A$ 到 $B$ 是单射，则任给 $X,Y\subseteq A$，证明：

(1) $|X\cup Y|=|f[X]\cup f[Y]|$。

(2) $|X\cap Y|=|f[X]\cap f[Y]|$。

(3) $|X\setminus Y|=|f[X]\setminus f[Y]|$。

4.1.5　证明：如果$|B|=1$，则$|A\times B|=|A|$。

4.1.6　$\sim$是 $A$ 上等价关系，$B$ 是等价关系$\sim$的特征集。证明：$|A/\sim|=|B|$。



# 4.2　基数的大小　Bernstain 定理

基数作为自然数的推广，还必须考虑它们的大小。对于有限集合来说，如果 $C\subseteq A$，则 $C$ 的元素个数一定小于等于 $A$ 的元素个数，如果又有 $B\approx C$，则 $B$ 的元素个数也一定小于等于 $A$ 的元素个数。

所以 $B$ 的元素个数小于等于 $A$ 的元素个数相当于 $B$ 和 $A$ 的某个子集等势，也相当于存在 $B$ 到 $A$ 的单射 $f$ ($f[B]$就是与 $B$ 等势的 $A$ 的子集)。按照这个标准来定义基数的大小。

**4.2.1 定义**　基数的大小　$A,B$ 是任何集合。如果存在 $A$ 到 $B$ 的单射 $f$，则称$|A|$小于等于$|B|$，记为$|A|\le|B|$。有时也称$|B|$大于等于$|A|$，记为$|B|\ge|A|$。

这定义是合理的，因为如果$|A_0|=|A|$且$|B_0|=|B|$，令 $h_1$ 是 $A_0$ 到 $A$ 的双射，$h_2$ 是 $B_0$ 到 $B$ 的双射，则 $g=h_2^{-1}\circ f\circ h_1$ 就是 $A_0$ 到 $B_0$ 的单射。

空集到任何集合的空映射都是单射，所以空集的基数是最小的，即任给集合 $A$，都有$|\varnothing|\le|A|$。

先来看基数大小的几个例子。

**4.2.2 例**　如果 $B\subseteq A$，则$|B|\le|A|$。只要取

$$f；B\to A\quad f(x)=x$$

就行了。

因为当 $n\le m$ 时有 $\mathbf{N}_n\subseteq\mathbf{N}_m$，所以当 $n\le m$ 时有$|\mathbf{N}_n|\le|\mathbf{N}_m|$，因此基数的小于等于关系和自然数的小于等于关系是一致的。

**4.2.3 例**　$|\mathbf{Q}|\le|\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}|$。任给 $x\in\mathbf{Q}$，将 $x$ 表示为简约分数$\frac{a}{b}$，并使得 $b\in\mathbf{N}$，这样的表达式是惟一的。构造 $\mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 的映射：

$$f：\mathbf{Q}\to\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\quad f(\tfrac{a}{b})=\langle a,b\rangle$$

则 $f$ 是单射。

**4.2.4 例** $A_1\cap B_1=\varnothing$，$A_2\cap B_2=\varnothing$。由例 2.1.13 和习题 2.2.2 可知，如果$|A_1|\le|A_2|$且$|B_1|\le|B_2|$，则$|A_1\cup B_1|\le|A_2\cup B_2|$。

**4.2.5 例** 由例 2.1.14 和例 2.2.6 可知，如果$|A_1|\le|A_2|$且$|B_1|\le|B_2|$，则$|A_1\times B_1|\le|A_2\times B_2|$。

**4.2.6 例** 任给集合 $A$，都有$|A|\le|\mathrm{P}(A)|$。当 $A=\varnothing$时，取 $A$ 到 $\mathrm{P}(A)$的单射$\theta_{\mathrm{P}(A)}$；当 $A\ne\varnothing$时，取 $A$ 到 $\mathrm{P}(A)$的单射

$$f:A\to\mathrm{P}(A)\quad f(x)=\{x\}。$$

**4.2.7 例** $|\mathbf{R}|\le|\mathrm{P}(\mathbf{Q})|$。由$\Gamma(\mathbf{Q})\subseteq\mathrm{P}(\mathbf{Q})$得$|\Gamma(\mathbf{Q})|\le|\mathrm{P}(\mathbf{Q})|$。由例 2.2.7 得$|\mathbf{R}|=|\Gamma(\mathbf{Q})|$，所以$|\mathbf{R}|=|\Gamma(\mathbf{Q})|\le|\mathrm{P}(\mathbf{Q})|$。

基数的大小真的能成为一种大小关系，必须有自返性、反对称性和传递性。基数大小的自返性和传递性是简单的。

**4.2.8 定理** 基数大小的基本性质。

(1) 自返性 任给集合 $A$，都有$|A|\le|A|$。

(2) 传递性 任给集合 $A, B, C$，如果$|A|\le|B|$且$|B|\le|C|$，则$|A|\le|C|$。

**证** 使用恒等映射和映射的复合，详细证明留给读者。■

基数大小的反对称性就不这么明显了。反对称性是说：

如果$|A|\le|B|$且$|B|\le|A|$，则$|A|=|B|$。

因为我们是用单射定义

$$|A|\le|B|和|B|\le|A|，$$

用双射定义

$$|A|=|B|$$

的，所以反对称性就要求我们能够从 $A$ 到 $B$ 的单射和 $B$ 到 $A$ 的单射构造出 $A$ 到 $B$ 的双射来。这就是著名的 Bernstain 定理。

首先证明一个关于集合族的引理。

**4.2.9 引理** $\{A_i\mid i\in\mathbf{N}\}$是集合族，满足任给 i, j$\in\mathbf{N}$，都有如果 $i\le j$ 则 $A_j\subseteq A_i$ (这样的集合族称为单调下降的)。

(1) $\{A_i\setminus A_{i+1}\mid i\in\mathbf{N}\}$是不交的。

(2) $(\bigcup_{i\ge0}(A_i\setminus A_{i+1}))\cap(\bigcap_{i\ge0}A_i)=\varnothing$。



(3) $A_0=(\bigcup_{i\ge0}(A_i\setminus A_{i+1}))\cup(\bigcap_{i\ge0}A_i)$。

**证** (1) 任给 i, j$\in\mathbf{N}$，如果 $A_i\setminus A_{i+1}\ne A_j\setminus A_{j+1}$，则 $i\ne j$，不妨假设 $i<j$，则

$$i+1\le j，$$

由单调下降性得

$$A_j\subseteq A_{i+1}，$$

更有

$$A_j\setminus A_{j+1}\subseteq A_{i+1}，$$

所以$(A_i\setminus A_{i+1})\cap(A_j\setminus A_{j+1})=\varnothing$ (见习题 1.4.3(4))。

(2) 如果 $x\in\bigcap_{i\ge0}A_i$，则

任给 $i\in\mathbf{N}$，都有 $x\in A_{i+1}$，

所以

任给 $i\in\mathbf{N}$，$x\notin A_i\setminus A_{i+1}$，

由集合族的并的定义得

$$x\notin\bigcup_{i\ge0}(A_i\setminus A_{i+1})。$$

这就证明了任给 $x$，都有

如果 $x\in\bigcap_{i\ge0}A_i$ 则 $x\notin\bigcup_{i\ge0}(A_i\setminus A_{i+1})$，

因此$(\bigcup_{i\ge0}(A_i\setminus A_{i+1}))\cap(\bigcap_{i\ge0}A_i)=\varnothing$。

(3) 由$\{A_i\mid i\in\mathbf{N}\}$的单调下降性可得

任给 $i\in\mathbf{N}$，都有 $A_i\subseteq A_0$，

更有

$$A_i\setminus A_{i+1}\subseteq A_0，$$

所以

$$\bigcup_{i\ge0}(A_i\setminus A_{i+1})\subseteq A_0 且\bigcap_{i\ge0}A_i\subseteq A_0，$$

因此$(\bigcup_{i\ge0}(A_i\setminus A_{i+1}))\cup(\bigcap_{i\ge0}A_i)\subseteq A_0$。

如果 $x\in A_0$，则当$\{j\mid j\in\mathbf{N}$ 且 $x\notin A_j\}=\varnothing$时，有

任给 $i\in\mathbf{N}$，都有 $x\in A_i$，

所以

$$x\in\bigcap_{i\ge0}A_i，$$

当$\{j \mid j\in\mathbf{N}$ 且 $x\notin A_j\} \neq \varnothing$时，由 $x\in A_0$ 可知它的最小数不为 0，可设这个最小数为 i+1，由 i+1 的定义得

$$x\in A_i \text{ 且 } x\notin A_{i+1},$$

所以

$$x\in A_i\setminus A_{i+1},$$

因此

$$\text{存在 } i\in\mathbf{N}\text{，使得 } x\in A_i\setminus A_{i+1},$$

由集合族的并的定义得

$$x\in \bigcup_{i\geq 0}(A_i\setminus A_{i+1}),$$

在两种情况下都有

$$x\in(\bigcup_{i\geq 0}(A_i\setminus A_{i+1}))\cup(\bigcap_{i\geq 0}A_i)。$$

这就证明了

$$\text{任给 } x\in A_0\text{，都有 } x\in(\bigcup_{i\geq 0}(A_i\setminus A_{i+1}))\cup(\bigcap_{i\geq 0}A_i),$$

因此 $A_0 \subseteq (\bigcup_{i\geq 0}(A_i\setminus A_{i+1}))\cup (\bigcap_{i\geq 0}A_i)$。■

引理 4.2.9 的直观意义是：$A_0, A_1,\cdots, A_n,\cdots\cdots$是一系列单调下降的集合，则可以将分成一系列用 $A_0, A_1,\cdots, A_n,\cdots\cdots$表示的互不相交的集合 $A_0\setminus A_1, A_1\setminus A_2,\cdots, A_n\setminus A_{n+1},\cdots\cdots, \bigcap_{i\geq 0}A_i$ (图 4.2.1)。

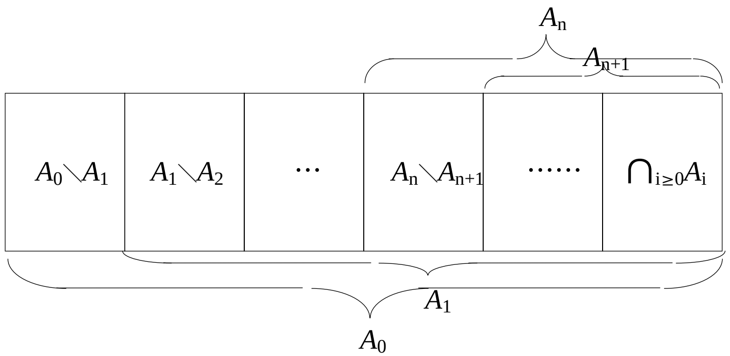


图 4.2.1



Bernstain 定理证明的思路是：用 $A$ 到 $B$ 的单射 $f$ 和 $B$ 到 $A$ 的单射 $g$ 构造两个单调下降的集合系列

$$A_0, A_1,\cdots, A_n,\cdots\cdots$$

和

$$B_0, B_1,\cdots, B_n,\cdots\cdots,$$

使得 $A = A_0$ 且 $B = B_0$。然后用引理 4.2.8 的方法将 $A_0$ 和 $B_0$ 分别分成一系列互不相交的集合，并使它们之间分别有双射，最后将这些双射组合起来，就得到 $A_0$ 到 $B_0$ (即 $A$ 到 $B$)。关键的问题是构造这样的两个单调下降的集合系列。

令 $A_0 = A$，$B_0 = B$，

$A_1 = g[B_0]$，$B_1 = f[A_0]$，

$A_2 = g[B_1]$，$B_2 = f[A_1]$。

显然有

$$A_1 \subseteq A_0 \text{ 且 } B_1 \subseteq B_0,$$

所以

$$f[A_1] \subseteq f[A_0] \text{ 且 } g[B_1] \subseteq g[B_0],$$

即

$$B_2 \subseteq B_1 \text{ 且 } A_2 \subseteq A_1,$$

因此 $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A_0$ 且 $B_2 \subseteq B_1 \subseteq B_0$。

由 $f$ 是单射得

$$f[A_0\setminus A_1] = f[A_0]\setminus f[A_1] = B_1\setminus B_2,$$

所以

$$|A_0\setminus A_1| = |f[A_0\setminus A_1]| = |B_1\setminus B_2|。$$

由 $g$ 是单射得

$$g[B_0\setminus B_1] = g[B_0]\setminus g[B_1] = A_1\setminus A_2,$$

所以

$$|B_0\setminus B_1| = |g[B_0\setminus B_1]| = |A_1\setminus A_2|。$$

从中可以看出前三项 $A_0, A_1, A_2$ 和 $B_0, B_1, B_2$ 是满足要求的。要注意是用 $f$ 将 $A_0\setminus A_1$ 对应到 $B_1\setminus B_2$，用 $g$ 将 $B_0\setminus B_1$ 对应到 $A_1\setminus A_2$。

将 $f$ 限制在 $A_2$ 上，并将它看做 $A_2$ 到 $B_2$ 的映射，同样将 $g$ 限制在 $B_2$ 上，并将它看做 $B_2$ 到 $A_2$ 的映射。这两个映射和 $A_2$, $B_2$ 相当于原来的 $f, g$ 和 $A, B$。因此用同样的方法构造出的

$$A_3 = g\,[B_2]，B_3 = f\,[A_2]，$$

和

$$A_4 = g\,[B_3]，B_4 = f\,[A_3]，$$

仍然满足要求的，即

$$A_4 \subseteq A_3 \subseteq A_2 \text{ 且 } B_4 \subseteq B_3 \subseteq B_2，$$

用 $f$ 将 $A_2 \setminus A_3$ 对应到 $B_3 \setminus B_4$，用 $g$ 将 $B_2 \setminus B_3$ 对应到 $A_3 \setminus A_4$。

这样一直做下去，得到的 $A_i$ 系列和 $B_i$ 系列就满足要求，即

$$\{A_i \mid i \in \mathbf{N}\}\text{和}\{B_i \mid i \in \mathbf{N}\}$$

都是单调下降的，并有

$$A_{2i} \setminus A_{2i+1} \text{ 和 } B_{2i+1} \setminus B_{2i+2} \text{ 对应，}$$

和

$$B_{2i} \setminus B_{2i+1} \text{ 和 } A_{2i+1} \setminus A_{2i+2} \text{ 对应。}$$

注意任给 $i \in I$，都是

用 $f$ 将 $A_{2i} \setminus A_{2i+1}$ 对应到 $B_{2i+1} \setminus B_{2i+2}$，

和

用 $g$ 将 $B_{2i} \setminus B_{2i+1}$ 对应到 $A_{2i+1} \setminus A_{2i+2}$，

所以在定理的证明中，是用 $f$

将并 $\bigcup_{i \geq 0}(A_{2i} \setminus A_{2i+1})$ 对应到并 $\bigcup_{i \geq 0}(B_{2i+1} \setminus B_{2i+2})$，

用 $g$

将并 $\bigcup_{i \geq 0}(B_{2i} \setminus B_{2i+1})$ 对应到并 $\bigcup_{i \geq 0}(A_{2i+1} \setminus A_{2i+2})$。

最后，$\bigcap_{i \geq 0} A_i$ 与 $\bigcap_{i \geq 0} B_i$ 的对应是容易的，因为

$$\begin{aligned} f\,[\textstyle\bigcap_{i \geq 0} A_i] &= \textstyle\bigcap_{i \geq 0} f\,[A_i] = \bigcap_{i \geq 0} B_{i+1} \\ &= \textstyle\bigcap_{i \geq 1} B_i = \bigcap_{i \geq 0} B_i， \end{aligned}$$

同理还有 $g\,[\bigcap_{i \geq 0} B_i] = \bigcap_{i \geq 0} A_i$ (图 4.2.2)。



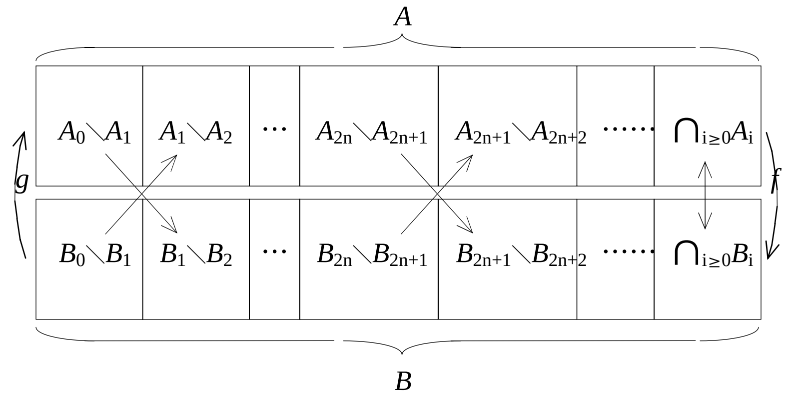


图 4.2.2

下面是 Bernstain 定理的严格证明。

**4.2.10 定理** Bernstain 定理 如果$|A| \leq |B|$且$|B| \leq |A|$，则 $|A| = |B|$ 。

**证** 设 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的单射，$g$ 是 $B$ 到 $A$ 的单射。任给 $n \in \mathbf{N}$，归纳定义 $A_n$ 和 $B_n$ 如下：

$$A_0 = A，A_{n+1} = g\,[B_n]$$

$$B_0 = B，B_{n+1} = f\,[A_n]$$

用归纳法可以证明，如果 $i \leq j$，则 $A_j \subseteq A_i$ 且 $B_j \subseteq B_i$。

由引理 4.2.9(1)得

$$\{A_i \setminus A_{i+1} \mid i \in \mathbf{N}\}\text{和}\{B_i \setminus B_{i+1} \mid i \in \mathbf{N}\}$$

都是不交的。所以有

$$\textstyle\bigcup_{i \geq 0}(A_{2i} \setminus A_{2i+1}) \text{ 与 } \bigcup_{i \geq 0}(A_{2i+1} \setminus A_{2i+2}) \text{ 不交，}$$

和

$$\textstyle\bigcup_{i \geq 0}(B_{2i} \setminus B_{2i+1}) \text{ 与 } \bigcup_{i \geq 0}(B_{2i+1} \setminus B_{2i+2}) \text{ 不交。}$$

显然有

$$\textstyle\bigcup_{i \geq 0}(A_i \setminus A_{i+1}) = (\bigcup_{i \geq 0}(A_{2i} \setminus A_{2i+1})) \cup (\bigcup_{i \geq 0}(A_{2i+1} \setminus A_{2i+2}))$$

和

$$\bigcup_{i\geq 0}(B_i \setminus B_{i+1}) = (\bigcup_{i\geq 0}(B_{2i+1} \setminus B_{2i+2}))\cup(\bigcup_{i\geq 0}(B_{2i} \setminus B_{2i+1}))。$$

因为 $f$ 是单射，所以

$$f[\bigcup_{i\geq 0}(A_{2i} \setminus A_{2i+1})] = \bigcup_{i\geq 0}(f[A_{2i}] \setminus f[A_{2i+1}]) = \bigcup_{i\geq 0}(B_{2i+1} \setminus B_{2i+2})，$$

因此

$$|\bigcup_{i\geq 0}(A_{2i} \setminus A_{2i+1})| = |f[\bigcup_{i\geq 0}(A_{2i} \setminus A_{2i+1})]| = |(B_{2i+1} \setminus B_{2i+2})|。$$

同理由 $g$ 是单射得$|\bigcup_{i\geq 0}(B_{2i} \setminus B_{2i+1})| = |\bigcup_{i\geq 0}(A_{2i+1} \setminus A_{2i+2})|$。

综合以上两个结果得

$$|\bigcup_{i\geq 0}(A_i \setminus A_{i+1})| = |(\bigcup_{i\geq 0}(A_{2i} \setminus A_{2i+1}))\cup(\bigcup_{i\geq 0}(A_{2i+1} \setminus A_{2i+2}))|$$
$$= |(\bigcup_{i\geq 0}(B_{2i+1} \setminus B_{2i+2}))\cup(\bigcup_{i\geq 0}(B_{2i} \setminus B_{2i+1}))|$$
$$= |\bigcup_{i\geq 0}(B_i \setminus B_{i+1})|。$$

注意$\bigcap_{i\geq 1}B_i \subseteq B_0$，所以

$$\bigcap_{i\geq 0}B_{i+1} = B_0\cap\bigcap_{i\geq 1}B_i = \bigcap_{i\geq 0}B_i，$$

又

$$f[\bigcap_{i\geq 0}A_i] = \bigcap_{i\geq 0}f[A_i] = \bigcap_{i\geq 0}B_{i+1} = \bigcap_{i\geq 1}B_i = \bigcap_{i\geq 0}B_i，$$

因此$|\bigcap_{i\geq 0}A_i| = |f[\bigcap_{i\geq 0}A_i]| = |\bigcap_{i\geq 0}B_i|$。

由引理 4.2.9(2)得

$\bigcup_{i\geq 0}(A_i \setminus A_{i+1})$与$\bigcap_{i\geq 0}A_i$ 不交，

$\bigcup_{i\geq 0}(B_i \setminus B_{i+1})$与$\bigcap_{i\geq 0}B_i$ 不交，

由引理 4.2.9(3)得

$$A_0 = (\bigcup_{i\geq 0}(A_i \setminus A_{i+1}))\cup(\bigcap_{i\geq 0}A_i)$$
$$B_0 = (\bigcup_{i\geq 0}(B_i \setminus B_{i+1}))\cup(\bigcap_{i\geq 0}B_i)，$$

因此

$$|A| = |A_0| = |(\bigcup_{i\geq 0}(A_i \setminus A_{i+1})) \cup(\bigcap_{i\geq 0}A_i)|$$
$$= |(\bigcup_{i\geq 0}(B_i \setminus B_{i+1}))\cup(\bigcap_{i\geq 0}B_i)|$$



$$= |B_0| = |B|。\blacksquare$$

这个证明是比较烦琐的，好处在于比较直观，本节后的习题中给出一个较简洁的证明，而且不使用数学归纳法。

为了更好的理解 Bernstain 定理，给出一个具体的例子，看看在这个具体例子中，$A_i$ 系列和 $B_i$ 系列是什么，$\bigcup_{i\geq 0}(A_{2i} \setminus A_{2i+1})$与$\bigcup_{i\geq 0}(B_{2i+1} \setminus B_{2i+2})$是怎样对应的，$\bigcup_{i\geq 0}(B_{2i} \setminus B_{2i+1})$与$\bigcup_{i\geq 0}(A_{2i+1} \setminus A_{2i+2})$是怎样对应的，$\bigcap_{i\geq 0}A_i$ 与$\bigcap_{i\geq 0}B_i$ 是怎样对应的。

**4.2.11 例** 证明$|(0, 1)| = |(0, 1]|$。取

$f$；$(0, 1)\to(0, 1]$ $f(x) = x$，

$g$；$(0, 1]\to(0, 1)$ $g(x) = \frac{1}{2}x$，

则

$A_0 = (0, 1)$，$B_0 = (0, 1]$，

$A_1 = (0, \frac{1}{2}]$，$B_1 = (0, 1)$，

$A_2 = (0, \frac{1}{2})$，$B_2 = (0, \frac{1}{2}]$，

$A_3 = (0, \frac{1}{4})$，$B_3 = (0, \frac{1}{2})$，

……，

它们的一般形式是：

$A_{2i} = (0, \frac{1}{2^i})$，$A_{2i+1} = (0, \frac{1}{2^{i+1}}]$，

$B_{2i} = (0, \frac{1}{2^i}]$，$B_{2i+1} = (0, \frac{1}{2^i})$，

所以

$A_{2i} \setminus A_{2i+1} = (\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i})$，$A_{2i+1} \setminus A_{2i+2} = \{\frac{1}{2^{i+1}}\}$，

$B_{2i} \setminus B_{2i+1} = \{\frac{1}{2^i}\}$，$B_{2i+1} \setminus B_{2i+2} = (\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i})$，

而$\bigcap_{i\geq 0}A_i = \bigcap_{i\geq 0}B_i = \varnothing$。

因此$(0, 1)$与$(0, 1]$的具体对应是：将$(0, 1)$中的形如$(\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i})$的开区间与$(0, 1]$中的相同的开区间对应，将$(0, 1)$的子集

$$\{\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\cdots,\ \tfrac{1}{2^{i+1}},\cdots\cdots\}$$

与(0, 1]子集的

$$\{1,\ \tfrac{1}{2},\cdots,\ \tfrac{1}{2^{i}},\cdots\cdots\}$$

对应。

由$|(0, 1)| = |(0, 1]|$，例 4.1.5 和例 4.1.6 可得实数 **R** 的一个重要性质。

**4.2.12 例** 因为$|\mathbf{R}| = |(0, 1)| = |(0, 1]|$，所以

$$|\mathbf{R}\times\mathbf{R}| = |(0, 1]\times(0, 1]| = |(0, 1]| = |\mathbf{R}|。$$

由 Bernstain 定理，可以简化基数相等的一些例子的证明。

**4.2.13 例** 重新证明$|\mathbf{Q}| = |\mathbf{N}|$。因为

$$|\mathbf{Q}|\le|\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}| = |\mathbf{N}\times\mathbf{N}| = |\mathbf{N}|,$$

又$|\mathbf{N}|\le|\mathbf{Q}|$。

**4.2.14 例** 重新证明$|(0, 1]\times(0, 1]| = |(0, 1]|$。

任给$<x, y>\in(0, 1]\times(0, 1]$，将 $x, y$ 分别表示为

$$x = 0.a_0a_1a_2\cdots\cdots$$

和

$$y = 0.b_0b_1b_2\cdots\cdots,$$

取

$$z = 0.a_0b_0a_1b_1a_2b_2\cdots\cdots,$$

构造(0, 1]×(0, 1]到(0, 1]的映射

$$g：(0, 1]\times(0, 1]\to(0, 1]\quad f(x, y) = z$$

则 $g$ 是单射(见习题 4.1.2)，所以

$$|(0, 1]\times(0, 1]|\le|(0, 1]|。$$

又

$$f：(0, 1]\to(0, 1]\times(0, 1]\quad f(x) = <x, 1>$$

是单射，所以

$$|(0, 1]|\le|(0, 1]\times(0, 1]|。$$

由 Bernstain 定理可知，基数的小于等于关系确实是一种大小关系，所以将基数作为集合元素个数的数是合理的。



以后将$|A|\le|B|$且$|A|\ne|B|$记为$|A|<|B|$，称为$|A|$小于$|B|$，有时也记为$|B|>|A|$，称为$|B|$大于$|A|$。参考关于偏序集的讨论可知：

如果$|A|\le|B|$且$|B|<|C|$，则$|A|<|C|$。

如果$|A|<|B|$且$|B|\le|C|$，则$|A|<|C|$。

## 习题 4.2

4.2.1 证明：如果 $B\ne\varnothing$，则$|A|\le|A\times B|$。

4.2.2 证明：如果$|A| = |B| = |\mathbf{R}|$且 $A\cap B = \varnothing$，则$|A\cup B| = |\mathbf{R}|$。

4.2.3 证明：任给 $n\ge1$，都有$|\mathbf{R}^n| = |\mathbf{R}|$。

4.2.4 取 $f$；$(0, 1)\to(0, 2]\quad f(x) = x$，

$g：(0, 2]\to(0, 1)\quad g(x) = \frac{1}{4}x$。

仿例 4.2.10 构造 $A_i, B_i, A_i\setminus A_{i+1}, B_i\setminus B_{i+1}, \bigcap_{i\ge0}A_i$ 和$\bigcap_{i\ge0}B_i$，讨论(0, 1)到(0, 2]的具体对应。

4.2.5 $C\subseteq B\subseteq A$，$f：A\to C$ 是双射。令

$$D = B\setminus C，\Gamma = \{X \mid X\subseteq A \text{ 且 } f[X]\cup D\subseteq X\},$$
$$E = \bigcap\Gamma。$$

证明：

(1) 任给 $X\in\Gamma$，如果 $f[X]\cup D\ne X$，则存在 $x\in A$，使得 $X\setminus\{x\}\in\Gamma$。

(2) $f[E]\cup D = E$。

(3) $B = (C\setminus f[E])\cup E, C = (C\setminus f[E])\cup f[E]$和$(C\setminus f[E])\cap E = \varnothing$。

因此$|B| = |C| = |A|$。

4.2.6 利用习题 4.2.5 重新证明 Bernstain 定理。

# 4.3 有限集和无限集

直观上我们知道什么是有限集和无限集，也知道有限集和无限集的一些性质。现在严格定义有限集和无限集，并根据定义来讨论它们的基本性质。

**4.3.1 定义** 有限集和无限集 $A$ 是集合，如果存在 $n\in\mathbf{N}$，使得$|A|=|\mathbf{N}_n|$，则称 $A$ 是有限集，不是有限集的集合称为无限集。

因为有限集是通过和 $\mathbf{N}_n$ 等势而定义的，所以在讨论有限集的性质前先讨论的 $\mathbf{N}_n$ 性质。

**4.3.2 引理** $\mathbf{N}_n$ 有以下性质。

(1) 任给 $a\in\mathbf{N}_{n+1}$，都有$|\mathbf{N}_{n+1}\setminus\{a\}|=|\mathbf{N}_n|$。

(2) 如果 $n\neq m$，则$|\mathbf{N}_n|\neq|\mathbf{N}_m|$。

(3) 如果 $A\subseteq\mathbf{N}_n$，则存在 m，使得$|A|=|\mathbf{N}_m|$。

(4) $|\mathbf{N}_{n+m}\setminus\mathbf{N}_m|=|\mathbf{N}_n|$。

(5) $|\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_m|=|\mathbf{N}_{nm}|$。

(6) $|\mathrm{P}(\mathbf{N}_n)|=|\mathbf{N}_{2^n}|$。

**证** (1) 当 $n=0$ 时，有 $\mathbf{N}_{n+1}=\mathbf{N}_1=\{0\}$，所以$|\mathbf{N}_{n+1}\setminus\{a\}|=|\mathbf{N}_1\setminus\{0\}|=|\varnothing|=|\mathbf{N}_0|=|\mathbf{N}_n|$。

当 $n\neq 0$ 时，构造 $\mathbf{N}_{n+1}\setminus\{a\}$的 $\mathbf{N}_n$ 的映射

$$f:\mathbf{N}_{n+1}\setminus\{a\}\to\mathbf{N}_n\quad f(x)=\begin{cases}x & \text{如果 } x<a\\ x-1 & \text{如果 } x>a,\end{cases}$$

则 $f$ 是双射，所以也有$|\mathbf{N}_{n+1}\setminus\{a\}|=|\mathbf{N}_n|$。

(2) 反证法。假设存在 $n\neq m$，使得$|\mathbf{N}_n|=|\mathbf{N}_m|$，则

$$A=\{i\mid \text{存在 } j\in\mathbf{N}\text{，使得 } i<j \text{ 且} |\mathbf{N}_i|=|\mathbf{N}_j|\}$$

非空，设 $A$ 的最小数为 m。由 m 的定义可知，存在 $n\in\mathbf{N}$，使得 $m<n$ 且$|\mathbf{N}_n|=|\mathbf{N}_m|$。

当 $m=0$ 时，有 $\mathbf{N}_m=\varnothing$且 $\mathbf{N}_n\neq\varnothing$，矛盾。



当 $m>0$ 时，取 $\mathbf{N}_m$ 到 $\mathbf{N}_n$ 的双射 $f$，则

$$\begin{aligned}f[\mathbf{N}_{m-1}]&=f[\mathbf{N}_m\setminus\{m-1\}]\\&=f[\mathbf{N}_m]\setminus f[\{m-1\}]\\&=\mathbf{N}_n\setminus\{f(m-1)\},\end{aligned}$$

由(1)得

$$\begin{aligned}|\mathbf{N}_{m-1}|&=|f[\mathbf{N}_{m-1}]|\\&=|\mathbf{N}_n\setminus\{f(m-1)\}|\\&=|\mathbf{N}_{n-1}|,\end{aligned}$$

又

$$m-1<n-1,$$

所以 $m-1\in A$，和 m 是 $A$ 的最小数矛盾。

(3) 由 $A\subseteq\mathbf{N}_n$ 得$|A|\le|\mathbf{N}_n|$，所以

$$B=\{i\mid |A|\le|\mathbf{N}_i|\}$$

非空，设 $B$ 的最小数为 m，则

$$|A|\le|\mathbf{N}_m|,$$

所以可取 $A$ 到 $\mathbf{N}_m$ 的单射 $f$。如果 $f$ 是双射，则$|A|=|\mathbf{N}_m|$。以下用反证法证明 $f$ 是双射：

假设 $f$ 不是双射，则存在 $a\in\mathbf{N}_m$，使得

$$f[A]\subseteq\mathbf{N}_m\setminus\{a\},$$

所以

$$|A|=|f[A]|\le|\mathbf{N}_m\setminus\{a\}|=|\mathbf{N}_{m-1}|,$$

因此 $m-1\in B$，和 m 是 $B$ 的最小数矛盾。

(4) 取 $\mathbf{N}_{n+m}\setminus\mathbf{N}_m$ 到 $\mathbf{N}_n$ 的映射

$$f:\mathbf{N}_{n+m}\setminus\mathbf{N}_m\to\mathbf{N}_n\quad f(x)=x-m,$$

则 $f$ 是双射，所以$|\mathbf{N}_{n+m}\setminus\mathbf{N}_m|=|\mathbf{N}_n|$。

(5) 当 $n=0$ 或 $m=0$ 时，有 $\mathbf{N}_n=\varnothing$或 $\mathbf{N}_m=\varnothing$，所以

$$\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_m=\varnothing,$$

又

$$\mathbf{N}_{nm}=\mathbf{N}_0=\varnothing,$$

因此$|\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_m| = |\varnothing| = |\mathbf{N}_{nm}|$。

以下设 $n \neq 0$ 且 $m \neq 0$。任给$<x, y>\in\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_m$，都有

$$xm+y\in\mathbf{N}_{nm},$$

所以可以构造 $\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_m$ 到 $\mathbf{N}_{nm}$ 的映射

$$f:\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_m\to\mathbf{N}_{nm}\quad f(x, y) = xm+y$$

由自然数的带余除法可证 $f$ 是双射，因此$|\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_m| = |\mathbf{N}_{nm}|$。

(6) 可以证明，$\mathrm{P}(\mathbf{N}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathbf{N}_n)\cup\Gamma$ 且 $\mathrm{P}(\mathbf{N}_n)\cap\Gamma = \varnothing$，其中

$$\Gamma = \{X\cup\{n\} \mid X\in \mathrm{P}(\mathbf{N}_n)\}。$$

由此可以归纳构造 $\mathrm{P}(\mathbf{N}_n)\to\mathbf{N}_{2^n}$ 的映射 $f_n$ 如下：

$$f_0:\mathrm{P}(\mathbf{N}_0)\to\mathbf{N}_1\quad f_0(\varnothing) = 0$$

$$f_{n+1}:\mathrm{P}(\mathbf{N}_{n+1})\to\mathbf{N}_{2^{n+1}}\quad f_{n+1}(X) = \begin{cases} f_n(X) & 若\ x\in\mathrm{P}(\mathbf{N}) \\ f_n(X\setminus\{n\})+2^n & 若\ x\in\Gamma, \end{cases}$$

则任给 $n\in\mathbf{N}$，$f_n$ 都是双射，所以$|\mathrm{P}(\mathbf{N}_n)| = |\mathbf{N}_{2^n}|$。■

由定理 4.3.2(2)，使用$|\mathbf{N}_n| = n$ 就不会有问题了。所以

$A$ 是有限集当且仅当存在 $n\in\mathbf{N}$，使得$|A| = n$。

现在讨论有限集的性质。

**4.3.3 定理** 有限集不能与其真子集等势。

**证** 设 $A$ 是有限集，$B$ 是 $A$ 的真子集，则

$A \neq \varnothing$且存在 $a\in A$，使得 $B\subseteq A\setminus\{a\}$。

由 $A \neq \varnothing$得

$$|A| \neq 0,$$

所以可设$|A| = n+1$，取 $A$ 到 $\mathbf{N}_{n+1}$ 的双射 $f$，则

$$|B| = |f[B]| \leq |f[A\setminus\{a\}]| = |f[A]\setminus f[\{a\}]|$$
$$= |\mathbf{N}_{n+1}\setminus\{f(a)\}| = |\mathbf{N}_n| = n,$$

因此 $B$ 与 $A$ 不等势。■

**4.3.4 定理**

(1) 有限集的子集是有限集。

(2) 有限集的交、并和差是有限集。



(3) 有限集的卡氏积是有限集。

(4) 有限集的幂集是有限集。

**证** (1) 由引理 4.3.2(3)直接可得。

(2) 如果 $A, B$ 是有限集，则 $A\cap B$ 和 $A\setminus B$ 都是 $A$ 子集，由(1)得 $A\cap B$ 和 $A\setminus B$ 都是有限集。

由 $B$ 是 $A\setminus B$ 都是有限集可设

$$|B| = |\mathbf{N}_m| 和 |A\setminus B| = |\mathbf{N}_n|,$$

由引理 4.3.2(4)得

$$|A\setminus B| = |\mathbf{N}_{n+m}\setminus\mathbf{N}_m|,$$

所以

$$|A\cup B| = |(A\setminus B)\cup B| = |(\mathbf{N}_{n+m}\setminus\mathbf{N}_m)\cup\mathbf{N}_m| = |\mathbf{N}_{n+m}|,$$

因此 $A\cup B$ 是有限集。

(3) 由引理 4.3.2(5)直接可得。

(4) 由引理 4.3.2(6)直接可得。■

有限集的基数是自然数，所以可以用自然数的归纳法(或最小数原理)证明有限集的性质，请看下面的例子。

**4.3.5 例** 有限非空全序集必有最小元。取全序集 $A$，使得 $A \neq \varnothing$且$|A| = n$，对 $n$ (从 $n = 1$ 开始)作归纳，证明 $A$ 有最小元。

(1) $n = 1$。这时有 $A = \{a\}$，所以 $a$ 就是 $A$ 的最小元。

(2) $n = m+1$。取 $a\in A$，则$|A\setminus\{a\}| = m$，由归纳假设，$A\setminus\{a\}$有最小元 $b$。因为 $A$ 是全序集，所以 $a\leq b$ 或 $b\leq a$，如果 $a\leq b$，则 $a$ 是 $A$ 的最小元，如果 $b\leq a$，则 $b$ 是 $A$ 的最小元。

类似地可证：有限非空全序集必有最大元。

下面讨论无限集。

**4.3.6 定义** 可数集和可数基数　和 $\mathbf{N}$ 等势的集合称为可数集，它们的基数都是$|\mathbf{N}|$，这个基数称为可数基数，记为$\aleph_0$ ($\aleph$是希伯来字母，读作阿列夫)。

$A = \{a_i \mid i\in I\}$，如果 $A$ 满足

任给 $i, j\in I$，都有只要 $i \neq j$ 就有 $a_i \neq a_j$，

则称$\{a_i \mid i\in I\}$是 $A$ 的一个无重复表示。

如果$\{a_i \mid i\in I\}$是 $A$ 的一个无重复表示，则$|A| = |I|$，因为

$$f: I\to A \quad f(i) = a_i$$

是双射。特别地，如果 $A$ 能无重复地表示为$\{a_i \mid i\in \mathbf{N}\}$，则 $A$ 是可数集。反之，任何可数集 $A$ 都能无重复的表示为$\{a_i \mid i\in \mathbf{N}\}$，只要取 $a_i = f(i)$就行了，其中 $f$ 是 $\mathbf{N}$ 到 $A$ 的双射。

$\mathbf{N}$ 可以与其某个真子集等势，从而每个可数集都可与其某个真子集等势。

**4.3.7 定理** 任何可数集都可与其某个真子集等势。

**证** 设 $A$ 是可数集，$\{a_i \mid i\in \mathbf{N}\}$是 $A$ 的无重复表示。任给 $i\in \mathbf{N}$，令 $b_i = a_{2i}$，令 $B = \{b_i \mid i\in \mathbf{N}\}$，则 $B$ 是 $A$ 的真子集，又$\{b_i \mid i\in \mathbf{N}\}$是 $B$ 的无重复表示，所以 $B$ 是可数集，因此 $A$ 与 $B$ 等势。■

一般地，任何无限集都有可与其某个真子集等势的性质。

**4.3.8 定理** 任何无限集都有可数子集。

**证** 设 $A$ 是无限集，则 $A$ 不是空集，可取

$$a_0\in A,$$

$A\setminus\{a_0\}$仍不是空集，又可取

$$a_1\in A\setminus\{a_0\},$$

一般地有

$$A\setminus\{a_0,\cdots, a_n\} \neq \varnothing,$$

(否则 $A \subseteq \{a_0,\cdots, a_n\}$就是有限集了)，所以可取

$$a_{n+1}\in A\setminus\{a_0,\cdots, a_n\},$$

这样任给 $i\in \mathbf{N}$，都存在 $a_i\in A$。令

$$B = \{a_i \mid i\in \mathbf{N}\},$$

则 $B$ 是 $A$ 的子集，又由 $a_i$ 的构造得

$$\{a_i \mid i\in \mathbf{N}\}$$

是 $B$ 的无重复表示，所以 $B$ 是可数集。■

**4.3.9 定理** 任何无限集都可与其某个真子集等势。

**证** 设 $A$ 是无限集，由定理 4.3.8 得 $A$ 有可数子集 $B$，由定理



4.3.7 得 $B$ 有真子集 $C$，使得

$$|B| = |C|。$$

由 $C$ 是 $B$ 的真子集得$(A\setminus B)\cup C$ 是 $A$ 的真子集，又

$$|A| = |(A\setminus B)\cup B| = |(A\setminus B)\cup C|,$$

所以 $A$ 和其真子集$(A\setminus B)\cup C$ 等势(图 4.3.1)。■

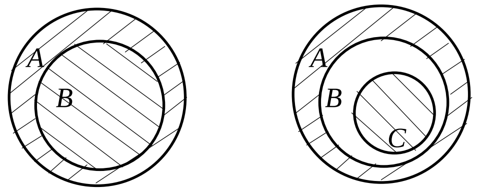


图 4.3.1

定理 4.3.8 的直观想法是从无限集中一个一个地取元素，从而得到一个可数子集，这样的证明是不够严格的。在严格的证明中，不允许随意从有限到无限，从有限到无限需要一定的条件。按数学归纳法的思想，要使定理 4.3.8 证明成为严格，必须**预先**给定一个标准，使得当 $a_0,\cdots, a_n$ 取定后，按这个标准能找到 $a_{n+1}$，而不能当 $a_0,\cdots, a_n$ 取定后，再随意去找 $a_{n+1}$。所以对于满足一定条件的无限集，定理 4.3.8 的证明才是严格的(见本节后的习题)。

因此，严格地说，定理 4.3.8 和定理 4.3.9 只有在某种假设下才成立，这点以后再讨论。

不是可数集的无限集称为不可数集，它们的基数称为不可数基数。我们已经知道 $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 等无限集都是可数集，是否存在不可数集呢？换句话说，是否存在不可数基数呢？以下定理说明不可数集合和不可数基数是存在的。

**4.3.10 定理** $|\mathbf{Q}| < |\mathbf{R}|$。

**证** 因为$|\mathbf{Q}| \le |\mathbf{R}|$，所以只需证$|\mathbf{Q}| \neq |\mathbf{R}|$就行了，又因为$|\mathbf{R}| = |(0, 1]|$，所以只需证$(0, 1]$不是可数集就行了。以下用反证

法证明(0, 1]不是可数集。

假设(0, 1]是可数集，则可将(0, 1]表示为$\{x_i \mid i\in\mathbf{N}\}$，任给 $i\in\mathbf{N}$，将 $x_i$ 表示为十进无限小数 $0.a_{i0}a_{i1}\cdots a_{in}\cdots\cdots$(见例 4.1.5)，然后排列如下：

$$\begin{array}{ll} x_0 & 0.a_{00}a_{01}\cdots a_{0n}\cdots\cdots \\ x_1 & 0.a_{10}a_{11}\cdots a_{1n}\cdots\cdots \\ \vdots & \\ x_n & 0.a_{n0}a_{n1}\cdots a_{nn}\cdots\cdots \\ \vdots & \end{array}$$

任给 $n\in\mathbf{N}$，取

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{如果 } a_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{如果 } a_{nn} = 1, \end{cases}$$

令

$$x = 0.b_0b_1\cdots b_n\cdots\cdots,$$

则 $x\in(0, 1]$，但

任给 $n\in\mathbf{N}$，都有 $b_n \neq a_{nn}$，

因此

任给 $n\in\mathbf{N}$，都有 $x \neq x_n$，

矛盾。■

这种证明方法就是著名的 Contor 对角线方法，它已经成为数学中一种重要的证明方法。

## 习题 4.3

4.3.1　$A$ 是任何集合，$a\notin A$，令$\Gamma = \{X\cup\{a\} \mid X\in \mathrm{P}(A)\}$，证明：

(1) $\mathrm{P}(A)\cap\Gamma = \varnothing$。

(2) $\mathrm{P}(A\cup\{a\}) = \mathrm{P}(A)\cup\Gamma$。



4.3.2　设 $f$：$\mathrm{P}(\mathbf{N}_n)\to\mathbf{N}_{2^n}$ 是双射，$\Gamma = \{X\cup\{n\} \mid X\in \mathrm{P}(\mathbf{N}_n)\}$，证明：

(1) 任给 $X\in \mathrm{P}(\mathbf{N}_n)$，都有 $f(X)+ 2^n\in\mathbf{N}_{2^{n+1}}$。

(2) $g$：$\mathrm{P}(\mathbf{N}_{n+1})\to\mathbf{N}_{2^{n+1}}$　$g(X) = \begin{cases} f(X) & \text{若 } x\in\mathrm{P}(\mathbf{N}) \\ f(X\setminus\{n\})+2^n & \text{若 } x\in\Gamma, \end{cases}$

是双射。

4.3.3　证明：有限非空全序集必有最大元。

4.3.4　$A, B$ 是有限非空全序集且$|A| = |B|$，证明：存在 $A$ 到 $B$ 的相似映射。

4.3.5　证明：如果$|A|\leq|\mathbf{N}|$，则 $A$ 是有限集或可数集。

4.3.6　$f$：$\mathbf{N}\to A$。证明：如果 $f$ 是满射，则 $A$ 是有限集或可数集。

4.3.7　$A$ 是无限集。如果 $h$ 是 $\mathrm{P}(A)\setminus\{\varnothing\}$上的选择函数(见例 2.1.19)，则可归纳定义 $\mathbf{N}_n$ 到 $A$ 的映射 $f_n$ 如下：

$$f_0 = \theta_A \text{ (是 } \mathbf{N}_0 \text{ 到 } A \text{ 的映射)},$$

$$f_{n+1}：\mathbf{N}_{n+1}\to A \quad f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{如果 } x\in \mathbf{N}_n \\ f_n(A\setminus f_n[\mathbf{N}_n]) & \text{如果 } x = n, \end{cases}$$

证明：

(1) 映射族$\{f_n \mid n\in\mathbf{N}\}$的并映射 $f$ 存在，且 $f$ 是 $\mathbf{N}$ 到 $A$ 的映射。

(2) 任给 $n\in\mathbf{N}$，都有 $f(n) = h(A\setminus f[\mathbf{N}_n])$。

(3) $f$ 是单射，从而 $f[\mathbf{N}]$是 $A$ 的可数子集。

4.3.8　$A\cap B = \varnothing$，$A$ 是可数集，证明：

(1) 如果 $B$ 是有限集，则$|A\cup B| = |A|$。

(2) 如果 $B$ 是无限集，则$|A\cup B| = |B|$。

# 4.4　幂集和卡氏幂的基数

集合 $A$ 的所有子集组成 $A$ 的幂集 $\mathrm{P}(A)$，$A$ 到 $B$ 的所有映射组成卡氏幂 $B^A$，它们也是集合，所以也有基数。它们的基数和 $A, B$ 的基数有什么关系呢？它们的基数之间有什么关系呢？

先来看幂集的基数。

**4.4.1 定理**　Cantor 定理　任给集合 $A$，都有$|A|<|\mathrm{P}(A)|$。

**证**　因为$|A|\leq|\mathrm{P}(A)|$，所以只需证$|A|\neq|\mathrm{P}(A)|$就行了。以下用反证法证明$|A|\neq|\mathrm{P}(A)|$。

假设$|A|=|\mathrm{P}(A)|$，取 $A$ 到 $\mathrm{P}(A)$的双射 $f$，令

$$B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin f(x)\},$$

则 $B\in\mathrm{P}(A)$，再令 $a=f^{-1}(B)$，则 $a\in A$ 且 $f(a)=B$。

任给 $x\in A$，由 $B$ 的定义得

$$x\in B \text{ 当且仅当 } x\notin f(x),$$

所以对于 $a\in A$ 就有

$$a\in B \text{ 当且仅当 } a\notin f(a),$$

即

$$a\in B \text{ 当且仅当 } a\notin B,$$

矛盾。■

定理 4.4.1 说明了 $A$, $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(\mathrm{P}(A))$,…… 两两不等势，它们确定了无限多个不同的基数，当 $A$ 是无限集时，这些基数中至多只有一个是可数基数，所以定理 4.4.1 说明了有无限多个不可数基数。

另外，这个定理也说明了没有最大的基数。

再来看卡氏幂的基数。

**4.4.2 定理**　卡氏幂的基数有以下性质。

(1) 如果 $A\neq\varnothing$，则$|B|\leq|B^A|$。

(2) 如果$|A|=1$，则$|B^A|=|B|$，如果$|B|=1$，则$|B^A|=1$。



(3) 如果$|B_1|\leq|B_2|$，则$|B_1{}^A|\leq|B_2{}^A|$。

(4) 如果$|A_1|\leq|A_2|$，则$|B^{A_1}|\leq|B^{A_2}|$。

(5) 如果$|B_1|\leq|B_2|$且$|A_1|\leq|A_2|$，则$|B_1{}^{A_1}|\leq|B_2{}^{A_2}|$。因此如果$|B_1|=|B_2|$且$|A_1|=|A_2|$，则$|B_1{}^{A_1}|=|B_2{}^{A_2}|$。

**证**　(1)(2)见例 2.5.4 和习题 2.5.1。

(3) 取 $B_1$ 到 $B_2$ 的单射 $h$，构造 $B_1{}^A$ 到 $B_2{}^A$ 的映射

$$F: B_1{}^A\to B_2{}^A \quad F(f)=h\circ f,$$

以下证明 $F$ 是单射。

任给 $f, g\in B_1{}^A$，如果 $f\neq g$，则

$$\text{存在 } x\in A\text{，使得 } f(x)\neq g(x),$$

由 $h$ 是单射得

$$h(f(x))\neq h(g(x)),$$

这就是

$$\text{存在 } x\in A\text{，使得}(h\circ f)(x)\neq(h\circ g)(x),$$

所以

$$h\circ f\neq h\circ g,$$

即 $F(f)\neq F(g)$ (图 4.4.1)。

(4) 取 $A_1$ 到 $A_2$ 的单射 $k$，固定 $a\in A$，构造 $A_2$ 到 $A_1$ 的映射

$$h: A_2\to A_1 \quad h(y)=\begin{cases} x & \text{如果 } y\in k[A_1] \text{且 } k(x)=y \\ a & \text{如果 } y\in A_2\setminus k[A_1], \end{cases}$$

则 $h$ 满足

$$\text{任给 } x\in A_1\text{，都有 } h(k(x))=x。$$

再构造 $B^{A_1}$ 到 $B^{A_2}$ 的映射

$$F: B^{A_1}\to B^{A_2} \quad F(f)=f\circ h。$$

以下证明 $F$ 是单射。

任给 $f, g\in B^{A_1}$，如果 $f\neq g$，则

$$\text{存在 } x\in A_1\text{，使得 } f(x)\neq g(x),$$

所以

$f(h(k(x))) \neq g(h(k(x)))$，

这就是

存在 $k(x) \in A_2$，使得$(f \circ h)(k(x)) \neq (g \circ h)(k(x))$，

所以

$f \circ h \neq g \circ h$，

即 $F(f) \neq F(g)$ (图 4.4.2)。

(5) 由(2)和(3)得$|\, B_1{}^{A_1} \,|\leq|\, B_2{}^{A_1} \,|\leq|\, B_2{}^{A_2} \,|$。■

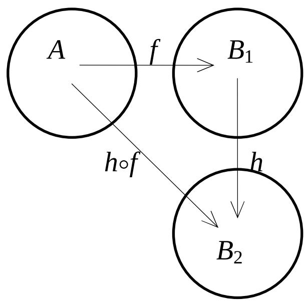


图 4.4.1

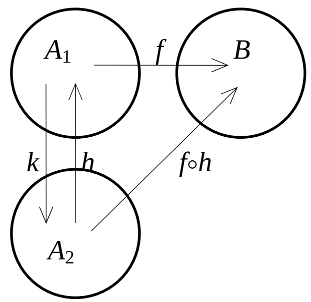


图 4.4.2

幂集的基数和卡氏幂的基数有相当密切的关系。

**4.4.3 定理** 如果 $A \neq \varnothing$，则$|\, \mathrm{P}(A) \,| = |\, \mathbf{2}^A \,|$。

**证** $F：\mathrm{P}(A) \to \mathbf{2}^A$ $F(X) = \mu_X$ 是双射(见例 2.5.5)。■

由定理 4.4.1 和定理 4.4.3 还可得$|\, A \,|<|\, \mathrm{P}(A) \,| = |\, \mathbf{2}^A \,|$。

以后将$|\, \mathbf{2}^A \,|$记为 $2^{|A|}$。这样就有$|\, \mathrm{P}(\mathbf{N}) \,| = |\, \mathbf{2}^{\mathbf{N}} \,| = 2^{|\mathbf{N}|} = 2^{\aleph_0}$。同样也有$|\, \mathrm{P}(\mathbf{Q}) \,| = 2^{\aleph_0}$。

前面已经证明了 **R** 的基数大于 **N** 的基数，下面的定理说明了 **R** 的基数和 P(**N**)的基数一样是 $2^{\aleph_0}$。

**4.4.4 定理** $|\, \mathbf{R} \,| = 2^{\aleph_0}$。

**证** 任给 $A \in \mathrm{P}(\mathbf{N})$，令



$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{如果 } i \in A \\ 2 & \text{如果 } i \in \mathrm{N} \setminus A, \end{cases}$$

再令 $x_A = 0.a_0a_1\cdots a_n\cdots\cdots$，构造 P(**N**)到(0, 1]映射

$f：\mathrm{P}(\mathbf{N}) \to (0, 1]$ $h(x) = x_A$

任给 $A, B \in \mathrm{P}(\mathbf{N})$，如果 $A \neq B$，则

存在 $i \in \mathbf{N}$，使得$(i \in A$ 且 $i \notin B)$或$(i \notin A$ 且 $i \in B)$，

由以上构造可知 $x_A \neq x_B$，所以 $f$ 是单射，因此

$2^{\aleph_0} = |\, \mathrm{P}(\mathbf{N}) \,|\leq|\, (0, 1] \,| = |\, \mathbf{R} \,|$。

又由例 4.2.7 得

$|\, \mathbf{R} \,|\leq|\, \mathrm{P}(\mathbf{Q}) \,| = 2^{\aleph_0}$。

最后由 Bernstein 定理得$|\, \mathbf{R} \,| = 2^{\aleph_0}$。■

## 习题 4.4

4.4.1 设$|\, B_1 \,| = |\, B_2 \,|$，$|\, A_1 \,| = |\, A_2 \,|$，直接构造 $B_1{}^{A_1}$ 到 $B_2{}^{A_2}$ 的双射证明$|\, B_1{}^{A_1} \,| = |\, B_2{}^{A_2} \,|$。

4.4.2 直接证明$|\, A \,|\leq|\, \mathbf{2}^A \,|$且$|\, A \,| \neq |\, \mathbf{2}^A \,|$。

4.4.3 证明：如果 $2\leq|\, B \,|$，则$|\, A \,|<|\, B^A \,|$。

4.4.4 证明：

(1) 如果 $A \cap B = \varnothing$，则$|\, C^A \times C^B \,| = |\, C^{A \cup B} \,|$。

(2) $|\, (B \times C)^A \,| = |\, B^A \times C^A \,|$。

(3) $|\, (C^B)^A \,| = |\, C^{B \times A} \,|$。

4.4.5 $\{A_i \mid i \in \mathrm{I}\}$是集合族，证明：存在集合 $B$，使得任给 $i \in \mathrm{I}$，都有$|\, A_i \,|<|\, B \,|$。

## 4.5　基数的运算

自然数上的两种基本运算，加法和乘法，都可以推广到基数上。在讨论基数时，一般用小写希腊字母$\kappa, \lambda, \mu, \eta$等表示基数。

**4.5.1 定义**　基数的加法　$\kappa, \lambda$是任意两个基数，取集合 $A, B$ 满足 $A\cap B = \varnothing$，$|A| = \kappa$且$|B| = \lambda$，定义$\kappa+\lambda = |A\cup B|$。

由例 4.1.11，这样的定义是合理的。

有一个小问题：虽然存在 $A, B$ 满足$|A| = \kappa$且$|B| = \lambda$，但是否存在不相交的 $A, B$ 满足$|A| = \kappa$且$|B| = \lambda$呢？留给读者考虑。

**4.5.2 定义**　基数的乘法　$\kappa, \lambda$是任意两个基数，取集合 $A, B$ 满足$|A| = \kappa$且$|B| = \lambda$，定义$\kappa\cdot\lambda = |A\times B|$。

由例 4.1.12，这样的定义是合理的。

由定理 4.3.2(4)(5)，这样定义的基数的加法和乘法在自然数上与原来的加法和乘法是一致的。

基数的加法和乘法与自然数的加法和乘法有许多相同的性质。

**4.5.3 定理**　基数运算的基本性质

(1) $0+\kappa = \kappa$。

(2) 加法交换律　$\kappa+\lambda = \lambda+\kappa$。

(3) 加法结合律　$\kappa+(\lambda+\mu) = (\kappa+\lambda)+\mu$。

(4) $0\cdot\kappa = 0$。

(5) $1\cdot\kappa = \kappa$。

(6) 乘法交换律　$\kappa\cdot\lambda = \lambda\cdot\kappa$。

(7) 乘法结合律　$\kappa\cdot(\lambda\cdot\mu) = (\kappa\cdot\lambda)\cdot\mu$。

(8) 乘法对加法的分配律　$\kappa\cdot(\lambda+\mu) = (\kappa\cdot\lambda)+(\kappa\cdot\mu)$。

**证**　(1) 利用$\varnothing\cup A = A$。

(2) 利用 $A\cup B = B\cup A$。

(3) 利用 $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$。



(4) 利用$\varnothing\times A = \varnothing$。

(5) 见习题 4.1.5。

(6) 见例 4.1.13。

(7) 见例 4.1.13。

(8) 利用 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$。■

**4.5.4 定理**　如果$\kappa\leq\lambda$且$\mu\leq\eta$，则$\kappa+\mu\leq\lambda+\eta$且$\kappa\cdot\mu\leq\lambda\cdot\eta$。

**证**　见例 4.2.4 和例 4.2.5。■

自然数的有些性质是不能推广到一般基数上的，因为无限基数的运算有其特殊的性质。这里先讨论可数基数的性质。

**4.5.5 定理**　可数基数的运算性质

(1) $\aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0$。

(2) 任给 $n\in\mathbf{N}$，都有 $n+\aleph_0 = \aleph_0$。

(3) 任给无限基数$\kappa$，都有$\kappa+\aleph_0 = \kappa$。

**证**　(1) 见例 4.1.4。

(2) 见习题 4.3.8。

(3) 见习题 4.3.8。■

由定理 4.5.5 可得

$$\aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0 = 1\cdot\aleph_0 \text{ 和 } 1+\aleph_0 = \aleph_0 = 2+\aleph_0，$$

但

$$\aleph_0 \neq 1，1 \neq 2。$$

这说明了乘法和加法的消去律在一般基数上不成立。

自然数的指数运算也能推广到基数。自然数的指数运算是一些同样的自然数的连乘积，相应的集合运算是有限个集合的卡氏幂，所以自然地就用一般的卡氏幂 $B^A$ 来定义$\kappa^\lambda$。

**4.5.6 定义**　基数的指数　$\kappa, \lambda$是任意两个基数，取集合 $A, B$ 满足$|A| = \kappa$且$|B| = \lambda$，定义$\kappa^\lambda = |B^A|$。

由定理 4.2.2(5)，这样的定义是合理的。

基数的指数与自然数的指数也有许多相同的性质。

**4.5.7 定理**　基数的指数的基本性质。

(1) $\kappa^0 = 1$。

(2) 如果$\lambda \neq 0$，则 $0^\lambda = 0$。

(3) $1^\lambda = 1$。

(4) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$。

(5) $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$。

(6) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$。

(7) 如果$\kappa \leq \mu$，$0 < \lambda \leq \eta$，则$\kappa^\lambda \leq \mu^\eta$。

**证** (1) $B^\varnothing = \{\theta_B\}$

(2) 当 $A \neq \varnothing$时有$\varnothing^A = \varnothing$。

(3) 见定理 4.4.2(2)。

(4)(5)(6) 见习题 4.4.4。

(7) 见定理 4.4.2(5)。■

对于可数基数$\aleph_0$有

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

和

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \text{ (见定理 4.5.5)。}$$

对于基数 $2^{\aleph_0}$也有

$$\begin{aligned} 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} &= 1 \cdot 2^{\aleph_0} + 1 \cdot 2^{\aleph_0} = (1+1) \cdot 2^{\aleph_0} \\ &= 2 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^1 \cdot 2^{\aleph_0} \\ &= 2^{1+\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \end{aligned}$$

和

$$2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0}。$$

对于一般无限基数$\kappa$，是否也有

$$\kappa + \kappa = \kappa$$

和

$$\kappa \cdot \kappa = \kappa$$

呢？这个问题比较困难，以后再讨论。



## 习题 4.5

4.5.1 任给集合 $A, B$，证明：存在集合 $A_1, B_1$，使得 $|A_1| = |A|$，$|B_1| = |B|$且 $A_1 \cap B_1 = \varnothing$。

4.5.2 $\kappa$是基数，归纳定义$\kappa_n$如下：

$\kappa_0 = 0$，

$\kappa_{n+1} = \kappa_n + \kappa$，

证明：$\kappa_{n+1} = n \cdot \kappa$。

4.5.3 $\kappa$是基数，归纳定义$\kappa_n$如下：

$\kappa_0 = 1$，

$\kappa_{n+1} = \kappa_n \cdot \kappa$，

证明：$\kappa_{n+1} = \kappa^n$。

4.5.4 $\kappa$是无限基数，证明：

(1) 任给 $n \in \mathbf{N}$，都有 $n + \kappa = \kappa$。

(2) 任给$\lambda \geq 2$，都有$\lambda^\kappa + \lambda^\kappa = \lambda^\kappa$。

4.5.5 证明$\aleph_0$和 $2^{\aleph_0}$的以下性质：

(1) 任给 $n \geq 1$，都有 $n\aleph_0 = \aleph_0$和$\aleph_0^{\ n} = \aleph_0$。

(2) $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$，$\aleph_0^{\ \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$。

4.5.6 举例说明$\kappa < \lambda$时不一定有

$$\kappa + \mu < \lambda + \mu$$

和

$$\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu \ (\mu \neq 0)。$$

4.5.7 设$\kappa + \kappa = \kappa$，证明：

(1) 如果$\kappa \leq \lambda$，则$\kappa + \lambda = \lambda$。

(2) 如果$\lambda \leq \kappa$，则$\kappa + \lambda = \kappa$。

(3) $\lambda^\kappa \cdot \lambda^\kappa = \lambda^\kappa$。