第八章　映射和数的集合构造

8.1　有序对、关系和映射

映射 f 的图象 G(f)是二元关系，由习题 3.1.5 可知：G(f)和 f 有密切的联系。这就启示我们可以用 G(f)来定义 f，即用二元关系来定义映射。二元关系是有序对的集合，但有序对还不是集合，所以还需先用集合来构造有序对。

有序对中两个元素的有序性是通过有序对相等的定义

$$\langle a_1, b_1\rangle = \langle a_2, b_2\rangle \text{当且仅当 } a_1 = a_2 \text{ 且 } b_1 = b_2$$

来刻画的。所以如果我们能够使用集合构造出满足以上相等定义的$\langle a, b\rangle$来，就可以认为$\langle a, b\rangle$是有序对。

8.1.1 定义　无序对　集合$\{a, b\}$称为由 a, b 组成的无序对。

因为$\{a\} = \{a, a\}$，所以单元集$\{a\}$也是无序对。无序对是一种非常简单的由元素构造集合的方法。

8.1.2 定义　有序对　集合$\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$称为由 a, b 组成的有序对。

在有序对$\langle a, b\rangle$中，a 称为第一元素，b 称为第二元素。a, b 组成的有序对是由$\{a\}, \{a, b\}$组成的无序对，而$\{a\}$和$\{a, b\}$本身也是无序对，所以有序对可以通过无序对这种集合的构造方法所得到。

8.1.3 定理　如果$\langle a_1, b_1\rangle = \langle a_2, b_2\rangle$，则 $a_1 = a_2$ 且 $b_1 = b_2$。

证　如果 $a_2 = b_2$，则

$$\{\{a_1\}, \{a_1, b_1\}\}$$
$$= \langle a_2, a_2\rangle = \langle a_1, b_1\rangle = \langle a_2, b_2\rangle$$

$$= \{\{a_2\}, \{a_2, a_2\}\} = \{\{a_2\}\},$$

所以

$$\{a_1, b_1\} = \{a_2\},$$

因此 $a_1 = a_2$ 且 $b_1 = a_2 = b_2$。

如果 $a_2 \neq b_2$，则$\{a_1\} \neq \{a_2, b_2\}$，由$\langle a_1, b_1\rangle = \langle a_2, b_2\rangle$得

$$\{\{a_1\}, \{a_1, b_1\}\} = \{\{a_2\}, \{a_2, b_2\}\}$$

所以

$$\{a_1\} = \{a_2\} \text{且} \{a_1, b_1\} = \{a_2, b_2\},$$

由$\{a_1\} = \{a_2\}$得

$$a_1 = a_2,$$

由 $a_1 = a_2$ 和$\{a_1, b_1\} = \{a_2, b_2\}$得 $b_1 = b_2$。■

由定理 8.1.3，现在定义的有序对符合我们对有序对的直观要求。

有了有序对，就可以用第一章同样的方法定义两个集合 A 和 B 的卡氏积 $A\times B = \{\langle x, y\rangle \mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}$。

对于现在定义的有序对，我们来看卡氏积 $A\times B$ 与集合 A 和 B 的关系。

8.1.4 定理　$A\times B \subseteq \mathrm{P}(\mathrm{P}(A\cup B))$。

证　任给$\langle x, y\rangle\in A\times B$，都有 $x\in A$ 且 $y\in B$，所以

$$x, y\in A\cup B,$$

由 $x\in A\cup B$ 得

$$\{x\} \subseteq A\cup B,$$

由 $x, y\in A\cup B$ 得

$$\{x, y\} \subseteq A\cup B,$$

所以

$$\{x\}, \{x, y\} \subseteq A\cup B。$$

由$\{x\}, \{x, y\} \subseteq A\cup B$ 得

$$\{x\}, \{x, y\}\in \mathrm{P}(A\cup B),$$

由$\{x\}, \{x, y\}\in \mathrm{P}(A\cup B)$得

$\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathsf{P}(\mathsf{P}(A \cup B))$，

即$<x, y> \in \mathsf{P}(\mathsf{P}(A \cup B))$。

因此 $A \times B \subseteq \mathsf{P}(\mathsf{P}(A \cup B))$。■

因为 $A \times B \subseteq \mathsf{P}(\mathsf{P}(A \cup B))$，所以集合 A 和 B 的卡氏积 $A \times B$ 可以由集合 A 和 B 通过并集、幂集和子集三种构造方法所得到。

有了有序对，任给 n≥1，可以用数学归纳法定义 n 元有序组 $<a_1, \cdots, a_n>$如下：

(1) $<a_1> = a_1$；

(2) $<a_1, \cdots, a_{k+1}> = <<a_1, \cdots, a_k>, a_{k+1}>$

n 元有序组是通过逐次构造有序对得到的，所以对于 n≥2，每个 n 元有序组都是有序对，是一个 n−1 元有序组和另一个元素的有序对。

有了 n 元有序组，就可以用第一章的同样方法定义 n 个集合的卡氏积。由 n 元有序组的归纳定义可知，

$$A_0 \times \cdots \times A_{k+1} = (A_0 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}。$$

这样，n 个集合的卡氏积就是通过逐次构造两个集合的卡氏积得到的，所以对于 n≥2，每个 n 个集合的卡氏积都是两个集合的卡氏积，是一个 n−1 个集合的卡氏积和另一个集合的卡氏积。

由于以上原因，只需要定义有序对的集合——二元关系，而将 n 元有序组的集合—— n 元关系作为二元关系的特例。既然只定义二元关系，就将二元关系简称为关系。

8.1.5 定义 关系 有序对的集合称为关系。

既然现在定义的关系只是二元关系，所以可以用第三章的同样方法定义关系的逆和关系的复合。关系 R 的逆关系是

$$R^{-1} = \{<x, y> \mid <y, x> \in R\},$$

关系 R 和 Q 的复合是

$$Q \circ R = \{<x, y> \mid \text{存在 } z\text{，使得} <x, z> \in R \text{ 且} <z, y> \in Q\}$$

同样有$(R^{-1})^{-1} = R$ 和 $S \circ (Q \circ R) = (S \circ Q) \circ R$。

为了用关系定义映射，引进两个前面没有定义的概念。

8.1.6 定义 定义域和值域 R 是关系，集合

$$\{x \mid \text{存在 } y\text{，使得} <x, y> \in R\}$$

称为 R 的定义域，记为 $\mathrm{dom}(R)$。集合

$$\{y \mid \text{存在 } x\text{，使得} <x, y> \in R\}$$

称为 R 的值域，记为 $\mathrm{ran}(R)$。

显然，$R \subseteq \mathrm{dom}(R) \times \mathrm{ran}(R)$。

因为用关系定义映射，所以关系的限制和映射的限制最好是一致的，因此现在定义的关系的限制和第三章中定义的关系的限制不一样。

8.1.7 定义 关系的限制 R 是关系，B 是集合。集合

$$\{<x, y> \mid <x, y> \in R \text{ 且 } x \in B\}$$

称为 R 在 B 上的限制，记为 $R|_B$。

现在定义的关系的限制适合所有关系，而第三章中定义的关系的限制只适合 A 上关系；现在定义的关系的限制中的 B 是任意的，而第三章中定义的关系的限制中的 B 必须是 A 的子集；现在定义的关系的限制仅对定义域进行限制，而第三章中定义的关系的限制对定义域和值域都进行限制。

关系的逆、关系的复合和关系的限制的定义域和值域有以下性质。

8.1.8 定理

(1) $\mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{ran}(R)$，$\mathrm{ran}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R)$。

(2) $\mathrm{dom}(Q \circ R) \subseteq \mathrm{dom}(R)$，$\mathrm{ran}(Q \circ R) \subseteq \mathrm{ran}(Q)$。

(3) $\mathrm{dom}(R|_B) = \mathrm{dom}(R) \cap B$，$\mathrm{ran}(R|_B) \subseteq \mathrm{ran}(R)$。■

以下用关系来定义映射。

8.1.9 定义 映射 f 是关系，若 f 满足：

任给$<x, y>, <u, v> \in f$，都有如果 $x = u$，则 $y = v$，

就称 f 是映射。

关系 f 是映射的条件可以简化为：

任给$<x, y>, <x, z> \in f$，都有 $y = z$。

这样，映射就是一种特殊的关系，映射的定义域、值域就是作为关系的定义域、值域。

现在定义的映射中的条件相当于第二章定义的映射中的“元素的象是惟一的”这个条件，第二章定义的映射中的另一个条件“定义域中的元素都有象”现在是不需要的，因为现在定义的映射不事先规定定义域，而将全体有象的元素作为定义域，这个条件自然满足。

f 是映射，任给 $x\in\mathrm{dom}(f)$，满足 $<x, y>\in f$ 的元素 y 是惟一的，按通常习惯将这惟一的 y 记为 $f(x)$。

这样，f 中的有序对都可以写成 $<x, f(x)>$ 形式，而 f 也可以表示为 $\{<x, f(x)> \mid x\in\mathrm{dom}(f)\}$。

对于现在定义的映射只能定义单射而不能定义满射和双射。

8.1.10 定义 单射 f 是映射，若 f 满足：

任给 $<x, z>, <y, z>\in R$，都有 $x = y$

就称 f 是单射。

单射的条件恰好和映射的条件是对称的。

8.1.11 定义 A 到 B 的映射 f 是映射，如果

$\mathrm{dom}(f) = A$ 且 $\mathrm{ran}(f) \subseteq B$，

则称 f 是 A 到 B 的映射，记为 $f: A\to B$。

对于 A 到 B 的映射，才能定义满射和双射。

8.1.12 定义 满射 f 是 A 到 B 的映射，如果 $\mathrm{ran}(f) = B$，则称 f 是 A 到 B 的满射。

8.1.13 定义 双射 f 是 A 到 B 的映射，如果 f 既是单射又是 A 到 B 的满射，则称 f 是 A 到 B 的双射。

按定义，任何映射 f 总是 $\mathrm{dom}(f)$ 到 $\mathrm{ran}(f)$ 的满射，所以任何单射 f 总是 $\mathrm{dom}(f)$ 到 $\mathrm{ran}(f)$ 的双射。

至此，我们完成了用集合定义映射的工作。

需要指出，用集合定义映射仅仅是技术性的，并不是说映射就是集合。实际上，映射和集合是同样基本的概念。

用集合定义映射在映射的讨论中可以带来一定的便利。我们选择以下一些问题。

空映射。第二章定义的映射概念中，不包括空映射，为了统一起见，我们规定了一个空映射，结果在定义映射的性质时，经常需要补充规定空映射的性质。这样，一来造成定义时的烦琐，二来也不清楚对空映射为何如此定义。

按现在定义的映射，空集不但是一个关系，而且也是一个映射，空集 $\varnothing$ 作为映射就是空映射。这样，空映射的性质直接从映射的定义得到，而不必要另外规定。如我们能够证明：

8.1.14 定理

(1) $\mathrm{dom}(\varnothing) = \mathrm{ran}(\varnothing) = \varnothing$。

(2) $\varnothing$ 是单射。

(3) $\varnothing$ 是 $\varnothing$ 到 $\varnothing$ 的满射，因此 $\varnothing$ 是 $\varnothing$ 到 $\varnothing$ 的双射。

(4) 如果 $B \neq \varnothing$，则 $\varnothing$ 不是 $\varnothing$ 到 B 的满射。■

映射的相等。对于第二章定义的映射，我们另外定义了映射的相等。当 $B \neq C$ 时，A 到 B 的映射和 A 到 C 的映射按映射的定义一定是不同的映射，但按映射相等的定义可以是相等的(见例 2.1.11)。“不同的映射可以相等”，虽然没有逻辑上的错误，但总是不自然的。

现在定义的映射是集合，映射的相等就是集合的相等，不需要另外定义。类似例 2.1.11 的情况按现在的定义应该是“同一个映射既作为 A 到 B 的映射又作为 A 到 C 的映射”，比“不同的映射可以相等”的说法自然的多。

映射的构造。在映射的讨论中，经常从已知的映射构造新的映射，这样的构造有时是需要条件的。

对于第二章定义的映射，需要在构造前先检查条件。这不是一种好方法，而且不同的构造可能需要不同的检查方法。

现在定义的映射是集合，可以用集合的构造方法构造新的集合，这样构造的集合一般是关系，我们可以根据映射定义的条件

来检查它是否是映射。

以下是一个类似于 2.1.14 的例子。

8.1.15 例 f 和 g 是两个映射，则

$$h = \{<<x, y>, <u, v>> \mid <x, u>\in f \text{ 且} <y, v>\in g\},$$

也是映射，且有 $\mathrm{dom}(h) = \mathrm{dom}(f)\times\mathrm{dom}(g)$，$\mathrm{ran}(h) = \mathrm{ran}(f)\times\mathrm{ran}(g)$。

证明如下：

任给$<<x, y>, <u, v>>, <<x, y>, <u', v'>>\in h$，都有

$$<x, u>\in f, <y, v>\in g, <x, u'>\in f, <y, v'>\in g$$

由$<x, u>, <x, u'>\in f$ 和 f 是映射得

$$u = u'$$

由$<y, v>, <y, v'>\in g$ 和 g 是映射得

$$v = v'$$

因此$<u, v> = <u', v'>$。

任给$<x, y>\in\mathrm{dom}(h)$，存在$<u, v>$，使得$<x, u>\in f$ 且$<y, v>\in g$，由$<x, u>\in f$ 得

$$x\in\mathrm{dom}(f),$$

由$<y, v>\in g$ 得

$$y\in\mathrm{dom}(g),$$

因此$<x, y>\in\mathrm{dom}(f)\times\mathrm{dom}(g)$。

任给$<x, y>\in\mathrm{dom}(f)\times\mathrm{dom}(g)$，都有 $x\in\mathrm{dom}(f)$且 $y\in\mathrm{dom}(g)$，由 $x\in\mathrm{dom}(f)$得

存在 u，使得$<x, u>\in f$，

由 $y\in\mathrm{dom}(g)$得

存在 v，使得$<y, v>\in g$，

因此$<x, y>\in\mathrm{dom}(h)$。

类似地可证 $\mathrm{ran}(h) = \mathrm{ran}(f)\times\mathrm{ran}(g)$。

映射的限制和复合。映射的限制和复合就是作为关系的限制和复合，可以证明它们还是映射。

8.1.16 定理 f, g 是映射，B 是集合，则：

(1) f 在 B 上的限制 $f|_B$ 还是映射。

(2) f 和 g 的复合 $g\circ f$ 还是映射。

证 (1) 任给$<x, y>, <x, z>\in f|_B$，都有

$$<x, y>, <x, z>\in f,$$

由 f 是映射得

$$y = z,$$

因此 $f|_B$ 是映射。

(2) 任给$<x, y>, <x, z>\in g\circ f$，存在 u, v，使得

$$<x, u>, <x, v>\in f \text{ 且} <u, y>, <v, z>\in g,$$

由 f 是映射得

$$u = v,$$

由$<u, y>, <u, z>\in g$ 和 g 是映射得

$$y = z,$$

因此 $g\circ f$ 是映射。■

逆映射。f 是映射，则 f^{-1} 作为关系 f 的逆总是存在的，问题在于 f^{-1} 是否是映射。由映射和单射的定义容易证明：

8.1.17 定理 f 是映射，则 f^{-1} 是映射当且仅当 f 是单射。

证 设 f 是单射，证明 f^{-1} 是映射。任给$<x, y>, <x, z>\in f^{-1}$，都有

$$<y, x>, <z, x>\in f,$$

由 f 是单射得

$$y = z,$$

因此 f^{-1} 是映射。

设 f^{-1} 是映射，证明 f 是单射。任给$<x, z>, <y, z>\in f$，都有

$$<z, x>, <z, y>\in f^{-1},$$

由 f^{-1} 是映射得

$$x = y,$$

因此 f^{-1} 是映射。■

注意，当 f 是 A 到 B 的单射时，f^{-1} 不一定是 B 到 A 的映射。

实际上，f^{-1}是 ran(f)到 A 的映射。所以当 ran(f) = B，即 f 是满射时，f^{-1}就是 B 到 A 的映射。因此有：

8.1.18 定理 f 是 A 到 B 的映射，则 f^{-1}是 B 到 A 的映射当且仅当 f 是 A 到 B 的双射。■

当 f^{-1}是映射时，可以严格证明

$$y = f(x)\text{当且仅当 } x = f^{-1}(y)\text{。}$$

从这个结果可以得到逆映射的许多重要的性质(参见定理 2.2.13 和定理 2.3.6)。

并映射。 Γ是映射族，因为映射是集合，所以Γ也是集合族，可以构造Γ的并$\bigcup\Gamma$。又因为任给 $f\in\Gamma$，f 都是关系，所以$\bigcup\Gamma$也是关系。在什么条件下$\bigcup\Gamma$是一个映射呢？

8.1.19 定理 Γ是映射族。$\bigcup\Gamma$是映射当且仅当Γ满足：任给 $f, g\in\Gamma$，任给 $x\in\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)$，都有 $f(x) = g(x)$。

证 称“任给 $f, g\in\Gamma$，任给 $x\in\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)$，都有 $f(x) = g(x)$”为条件(1)。

设Γ满足条件(1)，证明$\bigcup\Gamma$是映射。

任给$<x, y>, <x, z>\in\bigcup\Gamma$，存在 $f, g\in\Gamma$，使得

$$<x, y>\in f\text{ 且}<x, z>\in g\text{，}$$

所以

$$x\in\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)\text{，}$$

由条件(1)得 $y = f(x) = g(x) = z$。

设$\bigcup\Gamma$是映射，证明Γ满足条件(1)。

任给 $f, g\in\Gamma$，任给 $x\in\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)$，都有

$$<x, f(x)>\in f\text{ 且}<x, g(x)>\in g\text{，}$$

所以

$$<x, f(x)>, <x, g(x)>\in\bigcup\Gamma\text{，}$$

由$\bigcup\Gamma$是映射得 $f(x) = g(x)$。■

第二章定义的映射不是集合，映射族的并和集合族的并是两种不同意义上的“并”。现在定义的映射是集合，映射族的并和集

合族的并就是一回事，我们只需要一种“并”的意义。

重新证明良序集基本定理。在第五章的良序集基本定理的证明中，最关键的一步也是最复杂的一步是：通过 A 的前段和 B 的前段之间的相似构造映射族Γ，证明Γ满足一定的性质来证明Γ的并映射 f_Γ存在。

现在可以很简单地构造一个有序对的集合，并证明它是一个映射。通过这个映射的性质来证明良序集基本定理和原先的证明是类似的。

8.1.20 引理 A, B 是两个良序集，令

$$f = \{<x, y> \mid x\in A, y\in B\text{ 且 }A(x)\cong B(y)\}\text{。}$$

则：

(1) f 是映射，从而 $A(x)\cong B(f(x))$。

(2) f 是单射，从而 f 是 dom(f)到 ran(f)的双射。

(3) f 是 dom(f)到 ran(f)的相似映射。

(4) dom(f)是 A 的前段且 ran(f)是 B 的前段。

(5) dom(f) = A 或 ran(f) = B。

证 (1) 任给$<x, y>, <x, z>\in f$，都有

$$A(x)\cong B(y)\text{和 }A(x)\cong B(z)\text{，}$$

由相似的对称性和传递性得

$$B(y)\cong B(z)\text{，}$$

由例 5.1.7 得 $y = z$。

(2) 任给$<x, z>, <y, z>\in f$，都有

$$A(x)\cong B(z)\text{和 }A(y)\cong B(z)\text{，}$$

由相似的对称性和传递性得

$$A(x)\cong A(y)\text{，}$$

由例 5.1.7 得 $x = y$。

(3) 任给 $x, y\in\mathrm{dom}(f)$，都有

$$\begin{aligned} x\le y &\text{ 当且仅当 } A(x)\subseteq A(y)\\ &\text{ 当且仅当 } B(f(x))\subseteq B(f(y)) \end{aligned}$$

当且仅当 $f(x) \le f(y)$。

(4) 任给 $x \in \mathrm{dom}(f)$，都有 $A(x) \cong B(f(x))$，如果 $y < x$，则

$A(x)(y)$是 $A(x)$的真前段，

所以

存在 $B(f(x))$的真前段 $B(f(x))(z)$，使得 $A(x)(y) \cong B(f(x))(z)$，

所以

$$A(y) = A(x)(y) \cong B(f(x))(z) = B(z),$$

由 f 的定义得

$$<y, z> \in f,$$

因此 $y \in \mathrm{dom}(f)$。

类似地可证 $\mathrm{ran}(f)$是 B 的前段。

(5) 反证法。如果 $\mathrm{dom}(f) \neq A$ 且 $\mathrm{ran}(f) \neq B$，则存在 $x \in A, y \in B$，使得

$$\mathrm{dom}(f) = A(x)，\mathrm{dom}(f) = B(y)\text{且 } A(x) \cong B(y)。$$

由 $\mathrm{dom}(f) = A(x)$得

$$x \notin \mathrm{dom}(f),$$

由 $A(x) \cong B(y)$得 $x \in \mathrm{dom}(f)$，矛盾。■

8.1.21 定理 良序集基本定理 任给两个良序集 A, B，都有 A 相似于 B 的前段或 B 相似于 A 的前段。

证 令 $f = \{<x, y> \mid x \in A, y \in B \text{ 且 } A(x) \cong B(y)\}$，则由引理 8.1.20 的(3), (4)和(5)得 A 相似于 B 的前段或 B 相似于 A 的前段。■

以下是一个过去没有讨论过的问题，它将用于下一节整数和有理数的构造中。

商集上的函数。$\sim$是 A 上等价关系，f 是 A 上 n 元函数，

$$\tilde{f} = \{<<\tilde{x}_1,\cdots, \tilde{x}_n>, \tilde{x}> \mid <<x_1,\cdots, x_n>, x> \in f\}$$

是关系。在什么条件下 $\tilde{f}$ 是一个映射呢？

8.1.22 定义 保持等价关系不变 $\sim$是 A 上等价关系，f 是 A 上 n 元函数，若 f 满足：

如果 $x_1 \sim y_1,\cdots, x_n \sim y_n$，则 $f(x_1,\cdots, x_n) \sim f(y_1,\cdots, y_n)$

就称 f 保持等价关系$\sim$不变。

8.1.23 定理 $\sim$是 A 上等价关系，f 是 A 上 n 元函数，如果 f 保持等价关系$\sim$不变，则 $\tilde{f}$ 是 $A/\sim$上 n 元函数。

证 任给$<<\tilde{x}_1,\cdots, \tilde{x}_n>, \tilde{x}>, <<\tilde{y}_1,\cdots, \tilde{y}_n>, \tilde{y}> \in \tilde{f}$，如果$<\tilde{x}_1,\cdots, \tilde{x}_n> = <\tilde{y}_1,\cdots, \tilde{y}_n>$，则 $\tilde{x}_1 = \tilde{y}_1,\cdots, \tilde{x}_n = \tilde{y}_n$，所以

$$x_1 \sim y_1,\cdots, x_n \sim y_n,$$

由 f 保持等价关系$\sim$不变得

$$f(x_1,\cdots, x_n) \sim f(y_1,\cdots, y_n),$$

所以

$$x \sim y,$$

因此 $\tilde{x} = \tilde{y}$。■

习题 8.1

8.1.1 $n \ge 1$，证明：如果$<a_1, \cdots, a_n> = <b_1, \cdots, b_n>$，则任给 $1 \le i \le n$，都有 $a_i = b_i$。

8.1.2 证明定理 8.1.8、8.1.14 和 8.1.18。

8.1.3 证明：

(1) 如果 f 是 A 到 B 的映射，则 $f \subseteq \mathrm{P}(\mathrm{P}(A \cup B))$

(2) $B^A \subseteq \mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathrm{P}(A \cup B)))$。

8.1.4 f 和 f^{-1} 都是映射，证明：$y = f(x)$当且仅当 $x = f^{-1}(y)$。

8.1.5 f 和 g 是映射，$h = \{<x, <y, z>> \mid <x, y> \in f \text{ 且} <x, z> \in g\}$。证明：

(1) h 是映射。

(2) $\mathrm{dom}(h) = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$。

(3) 如果 $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$，则

$$\mathrm{dom}(\mathrm{ran}(h)) = \mathrm{ran}(f)，\mathrm{ran}(\mathrm{ran}(h)) = \mathrm{ran}(g)。$$

8.1.6 $\sim$是 A 上等价关系，f 是 A 上 n 元函数。证明：如果 $\tilde{f}$ 是 $A/\sim$上 n 元函数，则 f 保持$\sim$不变。

8.2 整数和有理数

可以用集合构造自然数，进而构造整数、有理数和实数。但用集合构造自然数需要更多的有关集合的知识，在本书中无法进行。本书讨论在自然数的基础上，如何构造整数、有理数和实数。

在本节中讨论整数和有理数的构造。

整数可以由自然数通过卡氏积和商集的方法构造得到。

8.2.1 定义 整数 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上的关系

$$\sim = \{\langle\langle n, m\rangle, \langle s, t\rangle\rangle \mid n+t = s+m\}$$

是等价关系(见习题 3.2.4)。$\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 对于~的商集 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}/\sim$ 称为整数集，记为 $\mathbf{Z}$。$\mathbf{Z}$ 中的元素称为整数。

记 $\langle n, m\rangle$ 的等价类为 $[n, m]$，则

$$[n, m] = [s, t] \text{ 当且仅当 } \langle n, m\rangle\sim\langle s, t\rangle$$
$$\text{当且仅当 } n+t = s+m。$$

用这种记法，$\mathbf{Z}$ 就是 $\{[n, m] \mid n, m\in\mathbf{N}\}$。

8.2.2 定理 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{Z}$ $f(n) = [n, 0]$ 是单射。

证 任给 $n, m\in\mathbf{N}$，如果 $f(n) = f(m)$，则

$$[n, 0] = [m, 0],$$

所以

$$n+0 = m+0,$$

因此 $n = m$。■

因为 f 是单射，所以 $\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{Z}$ 的子集 $f[\mathbf{N}] = \{[n, 0] \mid n\in\mathbf{N}\}$ 一一对应。可以将 $\mathbf{N}$ 和 $\{[n, 0] \mid n\in\mathbf{N}\}$ 等同。这样，$\mathbf{N}$ 就是 $\mathbf{Z}$ 的子集，$\langle n, 0\rangle$ 的等价类 $[n, 0]$ 就是 n。

任给 $n\in\mathbf{N}$，记 $\langle 0, n\rangle$ 的等价类 $[0, n]$ 为 $-n$。

8.2.3 定理

(1) $0 = -0$。

(2) 任给 $n\in\mathbf{N}$，如果 $-n = -m$，则 $n = m$。

(3) $\mathbf{Z} = \mathbf{N}\cup\{-n \mid n\in\mathbf{N}\}$。

证 (1) 显然。

(2) 如果 $-n = -m$，则

$$[0, n] = [0, m],$$

所以

$$0+n = 0+m,$$

因此 $n = m$。

(3) 任给 $[n, m]\in\mathbf{Z}$，证明存在 $s\in\mathbf{N}$，使得 $a = s$ 或 $a = -s$。

如果 $n\geq m$，令 $s = n-m$，则

$$n+0 = s+m,$$

所以 $a = [n, m] = [s, 0] = s$；

如果 $n\leq m$，令 $n = m-n$，则

$$n+s = 0+m,$$

所以 $a = [n, m] = [0, s] = -s$。■

以下讨论 $\mathbf{Z}$ 上的关系和函数。

8.2.4 定理 取~是定义 8.2.1 中的等价关系，取 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上的二元函数：

$f:(\mathbf{N}\times\mathbf{N})^2\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ $f(\langle n, m\rangle, \langle s, t\rangle) = \langle n+s, m+t\rangle$

$g:(\mathbf{N}\times\mathbf{N})^2\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ $g(\langle n, m\rangle, \langle s, t\rangle) = \langle n\cdot s+m\cdot t, n\cdot t+m\cdot s\rangle$

和 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上的一元函数：

$h:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ $f(\langle n, m\rangle) = \langle m, n\rangle$

则 f, g 和 h 都保持~不变。

证 如果 $\langle n, m\rangle\sim\langle n', m'\rangle$ 且 $\langle s, t\rangle\sim\langle s', t'\rangle$，则

$$n+m' = n'+m \text{ 且 } s+t' = s'+t,$$

两式相加得

$$(n+s)+(m'+t') = (n'+s')+(m+t),$$

所以

$$\langle n+s, m+t\rangle\sim\langle n'+s', m'+t'\rangle,$$

即 $f(\langle n, m\rangle, \langle s, t\rangle)\sim f(\langle n', m'\rangle, \langle s', t'\rangle)$。

如果$\langle n, m\rangle \sim \langle n', m'\rangle$且$\langle s, t\rangle \sim \langle s', t'\rangle$，则

$$n+m' = n'+m \text{ 且 } s+t' = s'+t,$$

在 $n+m' = n'+m$ 两边分别乘上 s, t 得

$$n\cdot s+m'\cdot s = n'\cdot s+m\cdot s \text{ 和 } n'\cdot t+m\cdot t = n\cdot t+m'\cdot t,$$

在 $s+t' = s'+t$ 两边分别乘上 n', m'得

$$n'\cdot s+n'\cdot t' = n'\cdot s'+n'\cdot t \text{ 和 } m'\cdot s'+m'\cdot t = m'\cdot s+m'\cdot t',$$

四个等式相加并消去相同的项得

$$(n\cdot s+m\cdot t)+(n'\cdot t'+m'\cdot s')= (n'\cdot s'+m'\cdot t')+(n\cdot t+m\cdot s),$$

所以

$$\langle n\cdot s+m\cdot t, n\cdot t+m\cdot s\rangle \sim \langle n'\cdot s'+m'\cdot t', n'\cdot t'+m'\cdot s'\rangle,$$

即 $g(\langle n, m\rangle, \langle s, t\rangle) \sim g(\langle n', m'\rangle, \langle s', t'\rangle)$。

如果$\langle n, m\rangle \sim \langle n', m'\rangle$，则 $n+m' = n'+m$，所以

$$m+n' = m'+n,$$

因此

$$\langle m, n\rangle \sim \langle m', n'\rangle,$$

即 $h(\langle n, m\rangle) \sim h(\langle n', m'\rangle)$。

这证明了 f, g 和 h 都保持$\sim$不变。■

因为 f, g 和 h 都保持$\sim$不变，所以由定理 8.1.23 可得到 **Z** 上二元函数：

$$\tilde{f}:\mathbf{Z}^2\to\mathbf{Z} \quad \tilde{f}([n, m], [s, t]) = [n+s, m+t]$$

$$\tilde{g}:\mathbf{Z}^2\to\mathbf{Z} \quad \tilde{g}([n, m], [s, t]) = [n\cdot s+m\cdot t, n\cdot t+m\cdot s]$$

和 **Z** 上的一元函数：

$$\tilde{h}:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z} \quad \tilde{h}([n, m]) = [m, n]$$

$\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 就是 **Z** 上的加法和乘法，按习惯将 $\tilde{f}(a, b)$记为 $a+b$，将 $\tilde{g}(a, b)$记为 $a\cdot b$。

$\tilde{h}$ 称为 **Z** 上的负运算，将 $\tilde{h}(a)$简记为$-a$。由加法和负运算可以定义 **Z** 上的减法：$a-b = a+(-b)$。

整数的运算是自然数的运算的扩充，即有

任给 $n, m\in\mathbf{N}$，$n+m = k$ 当且仅当$[n, 0]+[m, 0] = [k, 0]$

和

任给 $n, m\in\mathbf{N}$，$n\cdot m = k$ 当且仅当$[n, 0]\cdot[m, 0] = [k, 0]$

从自然数加法和乘法的性质可得到 f, g 和 h 的性质，进一步可得到整数的加法、乘法和负运算的性质。

8.2.5 定理 整数运算的性质。

(1) 交换律 $a+b = b+a$，$a\cdot b = b\cdot a$。

(2) 结合律 $a+(b+c) = (a+b)+c$，$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$。

(3) 分配律 $a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c$。

(4) $a+(-a) = 0$。

(5) $a+0 = a$，$a\cdot 1 = a$。

证 (1) 令 $a = [n, m]$，$b = [s, t]$，则

$$a+b = [n, m]+[s, t] = [n+s, m+t]$$
$$= [s+n, t+m] = b+a。$$

类似地可证 $a\cdot b = b\cdot a$。

(2) 令 $a = [n, m]$，$b = [s, t]$，$c = [k, l]$，则

$$a+(b+c) = [n, m]+([s, t]+[k, l])$$
$$= [n, m]+[s+k, t+l] = [n+(s+k), m+(t+l)]$$
$$= [(n+s)+k, (m+t)+l] = [n+s, m+t]+[k, l]$$
$$= ([n, m]+[s, t])+[k, l] = (a+b)+c$$

类似地可证 $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$。

(3) 令 $a = [n, m]$，$b = [s, t]$，$c = [k, l]$，则

$$a\cdot(b+c) = [n, m]\cdot([s, t]+[k, l])$$
$$= [n, m]\cdot[s+k, t+l]$$
$$= [n\cdot(s+k)+m\cdot(t+l), n\cdot(t+l)+m\cdot(s+k)]$$
$$= [(n\cdot s+n\cdot k)+(m\cdot t+m\cdot l), (n\cdot t+n\cdot l)+(m\cdot s+m\cdot k)]$$
$$= [n\cdot s+n\cdot k, n\cdot t+n\cdot l]+[m\cdot t+m\cdot l, m\cdot s+m\cdot k]$$
$$= [n, m]\cdot[s, t]+[n, m]\cdot[k, l] = a\cdot b+a\cdot c$$

(4) 令 $a = [n, m]$，则

$$a+(-a) = [n, m]+[m, n] = [0, 0] = 0$$

(5) 留给读者。■

由定理 8.2.5 可以得到整数运算的其它性质。

8.2.6 定理

(1) 如果 $a+b=0$，则 $a=-b$。

(2) $a\cdot(-1)=-a$。

(3) $a=-(-a)$。

(4) 符号法则 $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$，$a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$，

$(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$。

证 (1) $a=a+0=a+(b+(-b))$

$=(a+b)+(-b)$

$=0+(-b)=-b$。

(2) $a\cdot(-1)+a=a\cdot(-1)+a\cdot 1$

$=a\cdot((-1)+1)$

$=a\cdot 0=0$，

由(1)得 $a\cdot(-1)=-a$。

(3) $a+(-a)=0$，由(1)得 $a=-(-a)$。

(4) $(-a)\cdot b+a\cdot b=((-a)+a)\cdot b$

$=0\cdot b=0$，

由(1)得$(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$。

类似地可证 $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$。

$(-a)\cdot(-b)=-(a\cdot(-b))=-(-(a\cdot b))=a\cdot b$。■

定义 **Z** 上二元关系≤ = {<[n, m], [s, t]> | s+m≤n+t}。

8.2.7 定理 [n, m]≤[s, t]当且仅当 s+m≤n+t。

证 如果 s+m≤n+t，则由≤的定义得[n, m]≤[s, t]。

如果[n, m]≤[s, t]，则存在 n′, m′, s′, t′，使得

[n′, m′] = [n, m]，[s′, t′] = [s, t]且 s′+m′≤n′+t′，,

由[n′, m′] = [n, m]，[s′, t′] = [s, t]得

n+m′ = n′+m，s+t′ = s′+t

所以 s+m≤n+t。■

8.2.8 定理 ≤是 **Z** 上全序关系。

证 证明≤有自返性、反对称性、传递性和可比较性。

自返性。任给[n, m]∈**Z**，由 n+m≤n+m 得[n, m]≤[n, m]。

反对称性。任给[n, m], [s, t]∈**Z**，如果

[n, m]≤[s, t]且[s, t]≤[n, m]，

则

s+m≤n+t 且 n+t≤s+m，

所以

n+t = s+m，

因此[n, m] = [s, t]。

传递性。任给[n, m], [s, t], [k, l]∈**Z**，

如果

[n, m]≤[s, t]且 [s, t]≤[k, l]，

则

s+m≤n+t 且 k+t≤s+l，

两式相加得

s+m+k+t≤n+t+s+l，

所以

k+m≤n+l，

因此[n, m]≤[k, l]。

可比较性。任给[n, m], [s, t]∈**Z**，都有

s+m≤n+t 或 n+t≤s+m，

所以[n, m]≤[s, t]或[s, t]≤[n, m]。■

≤就是 **Z** 上的小于等于关系，并且是 **N** 上小于等于关系≤的扩充，即

任给 n, m∈**N**，n≤m 当且仅当[n, 0]≤[m, 0]

由≤可以定义正整数集 $\mathbf{Z}^+$ = {n | n∈**Z** 且 n>0}和负整数集 $\mathbf{Z}^-$ = {n | n∈**Z** 且 n<0}。

整数上的运算保持小于等于关系≤不变。

8.2.9 定理

(1) 如果 $b\le c$，则 $a+b\le a+c$。

(2) 如果 $b\le c$ 且 $a\ge 0$，则 $a\cdot b\le a\cdot c$。

(3) 如果 $a\le b$，则 $-b\le -a$。

证 (1) 令 $a=[n, m]$, $b=[s, t]$ 且 $c=[k, l]$，则

$a+b=[n+s, m+t]$，$a+c=[n+k, m+l]$。

如果 $b\le c$，则 $[s, t]\le[k, l]$，所以 $k+t\le s+l$，两边加上 $n+m$ 得

$(n+m)+(k+t)\le(n+m)+(s+l)$，

整理得

$(n+k)+(m+t)\le(n+s)+(m+l)$，

所以

$[n+s, m+t]\le[n+k, m+l]$，

即 $a+b\le a+c$。

(2) 令 $a=[n, m]$，$b=[s, t]$ 且 $c=[k, l]$，则

$a\cdot b=[n\cdot k+m\cdot l, n\cdot l+m\cdot k]$，

$a\cdot c=[n\cdot k+m\cdot l, n\cdot l+m\cdot k]$。

如果 $b\le c$ 且 $a\ge 0$，则 $[s, t]\le[k, l]$ 且 $[n, m]\ge 0$，所以

$k+t\le s+l$ 且 $n-m\ge 0$,，

在 $k+t\le s+l$ 两边乘上 $n-m$ 得

$(n-m)\cdot(k+t)\le(n-m)\cdot(s+l)$，

展开并整理得

$(n\cdot k+m\cdot l)+(n\cdot t+m\cdot s)\le(n\cdot s+m\cdot t)+(n\cdot l+m\cdot k)$，

所以

$[n\cdot k+m\cdot l, n\cdot l+m\cdot k]\le[n\cdot k+m\cdot l, n\cdot l+m\cdot k]$，

即 $a\cdot b\le a\cdot c$。

(3) 令 $a=[n, m]$，$b=[s, t]$，则 $-a=[m, n]$，$-b=[t, s]$。

如果 $a\le b$，则 $[n, m]\le[s, t]$，所以 $s+m\le n+t$，由自然数的交换律得

$m+s\le t+n$，

因此

$[t, s]\le[m, n]$，

即 $-b\le -a$。■

以下讨论有理数的构造。有理数可以由整数通过子集、卡氏积和商集的方法构造得到。

8.2.10 定义 有理数 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^+$ 上的关系

$\sim=\{<<a, b>, <c, d>> \mid a\cdot d=c\cdot b\}$

是等价关系(见例 3.2.4)。$\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^+$ 对于 $\sim$ 的商集 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^+/\sim$ 称为有理数集，记为 $\mathbf{Q}$。$\mathbf{Q}$ 中的元素称为有理数。

任给 $n\in\mathbf{N}$，记 $<a, b>$ 的等价类为 $\dfrac{a}{b}$，则

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 当且仅当 $<a, b>\sim<c, d>$ 当且仅当 $a\cdot d=b\cdot c$。

用这种记法，$\mathbf{Q}$ 就是 $\{\dfrac{a}{b} \mid a\in\mathbf{Z}$ 且 $b\in\mathbf{Z}^+\}$。

8.2.11 定理 $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Q}$ $f(a)=\dfrac{a}{1}$ 是单射。

证 任给 $a, c\in\mathbf{Z}$，如果 $f(a)=f(c)$，则 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{c}{1}$，所以 $a\cdot 1=1\cdot c$，因此 $a=c$。■

因为 f 是单射，所以 $\mathbf{Z}$ 和 $\mathbf{Q}$ 的子集 $f[\mathbf{Z}]=\{\dfrac{a}{1} \mid a\in\mathbf{Z}\}$ 一一对应。可以将 $\mathbf{Z}$ 和 $\{\dfrac{a}{1} \mid a\in\mathbf{Z}\}$ 等同，这样，$\mathbf{Z}$ 就是 $\mathbf{Q}$ 的子集，$<a, 1>$ 的等价类 $\dfrac{a}{1}$ 就是 a。特别地，$\dfrac{0}{1}$ 就是 0，$\dfrac{1}{1}$ 就是 1。

以下讨论 $\mathbf{Q}$ 上的关系和函数。

8.2.12 定理 取 $\sim$ 是定义 8.2.10 中的等价关系，取 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^+$ 上的二元函数：

$f:(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*)^2\to\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*$ $f(<a, b>, <c, d>)=<a\cdot d+b\cdot c, b\cdot d>$

$g:(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*)^2\to\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*$ $g(<a, b>, <c, d>)=<a\cdot c, b\cdot d>$

和一元函数：

$$h:(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*)^2\to\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^* \quad h(<a, b>) = <-a, b>$$

则 f, g 和 h 都保持 $\sim$ 不变。

证　如果 $<a, b>\sim<a', b'>$ 且 $<c, d>\sim<c, d>$，则

$$a\cdot b' = a'\cdot b \text{ 且 } c\cdot d' = c'\cdot d,$$

在 $a\cdot b' = a'\cdot b$ 两边乘上 $d\cdot d'$ 得

$$a\cdot b'\cdot d\cdot d' = a'\cdot b\cdot d\cdot d',$$

在 $c\cdot d' = c'\cdot d$ 两边乘上 $b\cdot b'$ 得

$$b\cdot b'\cdot c\cdot d' = b\cdot b'\cdot c'\cdot d,$$

两式相加得

$$(a\cdot d+b\cdot c)\cdot b'\cdot d' = (a'\cdot d'+b'\cdot c')\cdot b\cdot d,$$

所以

$$<a\cdot d+ b\cdot c, b\cdot d>\sim<a'\cdot d'+ b'\cdot c', b'\cdot d'>,$$

即 $f(<a, b>, <c, d>) = f(<a', b'>, <c', d'>)$。

如果 $<a, b>\sim<a', b'>$ 且 $<c, d>\sim<c, d>$，则

$$a\cdot b' = a'\cdot b \text{ 且 } c\cdot d' = c'\cdot d,$$

两式相乘得

$$a\cdot c\cdot b'\cdot d' = a'\cdot c'\cdot b\cdot d,$$

所以

$$<a\cdot c, b\cdot d>\sim<a'\cdot c', b'\cdot d'>,$$

即 $g(<a, b>, <c, d>) = g(<a', b'>, <c', d'>)$。

如果 $<a, b>\sim<a', b'>$，则 $a\cdot b' = a'\cdot b$，所以

$$-a\cdot b' = -a'\cdot b,$$

因此

$$<-a, b>\sim<-a', b'>,$$

即 $h(<a, b>) = h(<a', b'>)$。

这证明了 f, g 和 h 都保持 $\sim$ 不变。■

因为 f, g 和 h 都保持 $\sim$ 不变，所以由定理 8.1.23 可得到 $\mathbf{Q}$ 上二元函数

$$\tilde{f}:\mathbf{Q}^2\to\mathbf{Q} \quad \tilde{f}\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$$

$$\tilde{g}:\mathbf{Q}^2\to\mathbf{Q} \quad \tilde{g}\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

和 $\mathbf{Q}$ 上的一元函数：

$$\tilde{h}:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q} \quad \tilde{h}\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{-a}{b}$$

$\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 就是 $\mathbf{Q}$ 上的加法和乘法，按习惯将 $\tilde{f}(p, q)$ 记为 $p+q$，将 $\tilde{g}(p, q)$ 记为 $p\cdot q$。$\tilde{h}$ 就是 $\mathbf{Q}$ 上的负运算，按习惯将 $\tilde{h}(p)$ 简记为 $-p$。

当 $\frac{a}{b}\neq 0$ 时，定义 $\frac{a}{b}$ 的倒数 $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ 如下：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\begin{cases}\dfrac{b}{a} & \text{如果 } a>0\\[2mm] \dfrac{-b}{-a} & \text{如果 } a<0。\end{cases}$$

有理数的运算是整数的运算的扩充，即有

任给 $a, b\in\mathbf{Z}$，$a+b = c$ 当且仅当 $\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\frac{c}{1}$，

任给 $a, b\in\mathbf{Z}$，$a\cdot b = c$ 当且仅当 $\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1}=\frac{c}{1}$

和

任给 $a\in\mathbf{Z}$，$-a = b$ 当且仅当 $-\frac{a}{1}=\frac{b}{1}$

从整数加法、乘法和负运算的性质可得到 f, g 和 h 的性质，进一步可得到有理数加法、乘法和负运算的性质。

8.2.13 定理　有理数运算的性质。

(1) 交换律　$p+q = q+p$，$p\cdot q = q\cdot p$。

(2) 结合律　$p+(q+r) = (p+q)+r$，$p\cdot(q\cdot r) = (p\cdot q)\cdot r$。

(3) 分配律　$p\cdot(q+r) = p\cdot q+p\cdot r$。

(4) $p+(-p) = 0$。

(5) $p+0=p$，$p\cdot 1=p$。

(6) 如果 $p\neq 0$，则 $p\cdot p^{-1}=1$。

证 (1) 令 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$，则

$$p+q=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{c\cdot b+d\cdot a}{d\cdot b}=q+p。$$

类似地可证 $p\cdot q=q\cdot p$。

(2) 令 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$，$r=\frac{u}{v}$，则

$$\begin{aligned}p+(q+r)&=\frac{a}{b}+\frac{c\cdot v+d\cdot u}{d\cdot v}\\&=\frac{a\cdot(d\cdot v)+b\cdot(c\cdot v+d\cdot u)}{b\cdot(d\cdot v)}\\&=\frac{(a\cdot d+b\cdot c)\cdot v+(b\cdot d)\cdot u}{(b\cdot d)\cdot v}\\&=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}+\frac{u}{v}=(p+q)+r。\end{aligned}$$

类似地可证 $p\cdot(q\cdot r)=(p\cdot q)\cdot r$。

(3) 令 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$，$r=\frac{u}{v}$，则

$$\begin{aligned}p\cdot(q+r)&=\frac{a}{b}\cdot\frac{c\cdot v+d\cdot u}{d\cdot v}=\frac{a\cdot(c\cdot v+d\cdot u)}{b\cdot(d\cdot v)}\\&=\frac{(a\cdot d)\cdot(b\cdot v)+(b\cdot d)\cdot(a\cdot u)}{(b\cdot d)\cdot(b\cdot v)}\\&=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{a\cdot u}{b\cdot v}=p\cdot q+p\cdot r。\end{aligned}$$

(4)(5)(6)留给读者。■

8.2.14 定理

(1) 如果 $p+q=0$，则 $p=-q$。

(2) $p\cdot(-1)=-p$。

(3) $p=-(-p)$。

(4) 符号法则 $(-p)\cdot q=-(p\cdot q)$，$p\cdot(-q)=-(p\cdot q)$，
$(-p)\cdot(-q)=p\cdot q$。

(5) 如果 $p\cdot q=1$，则 $p=q^{-1}$。

(6) $p=(p^{-1})^{-1}$。

证 留给读者。■

定义 **Q** 上二元关系 $\leq=\{<\frac{a}{b},\ \frac{c}{d}>\mid a\cdot d\leq b\cdot c\}$。

8.2.15 定理 $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$ 当且仅当 $a\cdot d\leq b\cdot c$。

证 如果 $a\cdot d\leq b\cdot c$，则由≤的定义得 $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$。

如果 $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$，则存在 a', b', c', d'，使得

$$\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b}，\frac{c'}{d'}=\frac{c}{d}，a\cdot b'=a'\cdot b，c\cdot d'=c'\cdot d，$$
$$a'\cdot d'\leq b'\cdot c'，$$

所以 $a\cdot d\leq b\cdot c$。■

8.2.16 定理 ≤是 **Q** 上全序关系。

证 证明≤有自返性、反对称性、传递性和可比较性。

自返性。任给 $\frac{a}{b}\in\mathbf{Q}$，由 $a\cdot b\leq b\cdot a$ 得 $\frac{a}{b}\leq\frac{a}{b}$。

反对称性。任给 $\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}\in\mathbf{Q}$，如果 $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$ 且 $\frac{c}{d}\leq\frac{a}{b}$，则

$$a\cdot d\leq b\cdot c \text{ 且 } c\cdot b\leq d\cdot a，$$

所以

$$a\cdot d=b\cdot c，$$

即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

传递性。任给 $\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$，$\frac{u}{v}\in\mathbf{Q}$，如果 $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$ 且 $\frac{c}{d}\leq\frac{u}{v}$，则 $a\cdot d\leq b\cdot c$ 且 $c\cdot v\leq d\cdot u$。

当 $a, c, u>0$ 时，两式相乘得

$a\cdot d\cdot c\cdot v\le b\cdot c\cdot d\cdot u$，

两边除以 $b\cdot c$ 得

$a\cdot v\le b\cdot u$，

所以 $\frac{a}{b}\le\frac{u}{v}$。

当 $a, c, u<0$ 时，两式相乘得

$a\cdot d\cdot c\cdot v\ge b\cdot c\cdot d\cdot u$，

两边除以 $b\cdot c$ 得

$a\cdot v\le b\cdot u$，

所以 $\frac{a}{b}\le\frac{u}{v}$。

当 $a\le 0$ 且 $u\ge 0$ 时，有 $a\cdot v\le 0$ 且 $b\cdot u\ge 0$，所以

$a\cdot v\le b\cdot u$，

也有 $\frac{a}{b}\le\frac{u}{v}$。

可比较性。任给 $\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}\in\mathbf{Q}$，都有

$a\cdot d\le b\cdot c$ 或 $c\cdot b\le d\cdot a$，

所以 $\frac{a}{b}\le\frac{c}{d}$ 或 $\frac{c}{d}\le\frac{a}{b}$。■

≤就是 **Q** 上的小于等于关系，并且是 **Z** 上小于等于关系≤的扩充，即

任给 $a, b\in\mathbf{Z}$，$a\le b$ 当且仅当 $\frac{a}{1}\le\frac{b}{1}$。

由≤可以定义正有理数集 $\mathbf{Q}^+=\{p\mid p\in\mathbf{Q}$ 且 $p>0\}$和负有理数集 $\mathbf{Q}^-=\{p\mid p\in\mathbf{Q}$ 且 $p<0\}$。

可以证明 $\frac{a}{b}<0$ 当且仅当 $a<0$，$\frac{a}{b}>0$ 当且仅当 $a>0$。

有理数上的运算保持小于等于关系≤不变。

8.2.17 定理

(1) 如果 $q\le r$，则 $p+q\le p+r$。

(2) 如果 $q\le r$ 且 $p\ge 0$，则 $p\cdot q\le p\cdot r$。

(3) 如果 $p\le q$，则 $-q\le -p$。

(4) 如果 $0<p\le q$，则 $q^{-1}\le p^{-1}$。

证 (1) 令 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$，$r=\frac{u}{v}$，则

$p+q=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$，$p+r=\frac{a\cdot v+b\cdot u}{b\cdot v}$。

如果 $q\le r$，则 $\frac{c}{d}\le\frac{u}{v}$，所以

$c\cdot v\le d\cdot u$，

两边乘以 $b\cdot b$ 并加上 $a\cdot d\cdot b\cdot v$ 得

$b\cdot b\cdot c\cdot v+a\cdot d\cdot b\cdot v\le b\cdot b\cdot d\cdot u+a\cdot d\cdot b\cdot v$，

所以

$(a\cdot d+b\cdot c)\cdot b\cdot v\le b\cdot d\cdot(a\cdot v+b\cdot u)$，

因此

$$\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\le\frac{a\cdot v+b\cdot u}{b\cdot v}。$$

即 $p+q\le p+r$。

(2) 令 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$，$r=\frac{u}{v}$，则

$p\cdot q=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$，$p\cdot r=\frac{a\cdot u}{b\cdot v}$，$a\ge 0$。

如果 $q\le r$ 且 $p\ge 0$，则 $\frac{c}{d}\le\frac{u}{v}$ 且 $a\ge 0$，所以 $c\cdot v\le d\cdot u$，两边乘上 $a\cdot c$ 得

$a\cdot c\cdot b\cdot v\le b\cdot d\cdot a\cdot u$，

所以

$$\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\le\frac{a\cdot u}{b\cdot v}$$

即 $p\cdot q\le p\cdot r$。

(3) 令 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$，则 $-p=\frac{-a}{b}$，$-q=\frac{-c}{d}$。

如果 $p\le q$，则 $\frac{a}{b}\le\frac{c}{d}$，所以 $a\cdot d\le b\cdot c$，两边乘上 -1 得

$$(-c)\cdot b\le d\cdot(-a),$$

所以

$$\frac{-a}{b}\le\frac{-c}{d}$$

即 $-q\le -p$。

(4) 令 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$，则 $p^{-1}=\frac{b}{a}$ 且 $q^{-1}=\frac{d}{c}$。

如果 $p\le q$，则 $\frac{a}{b}\le\frac{c}{d}$，所以 $a\cdot d\le b\cdot c$，因此 $d\cdot a\le c\cdot b$，这就是

$$\frac{b}{a}\le\frac{d}{c},$$

即 $q^{-1}\le p^{-1}$。■

8.2.18 定理 稠密性 任给 $p<q$，存在 r，使得 $p<r$ 且 $r<q$。

证 令 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$，则

$$p=\frac{2\cdot a\cdot d}{2\cdot b\cdot d},\ q=\frac{2\cdot b\cdot c}{2\cdot b\cdot d} \text{ 且 } a\cdot d<b\cdot c,$$

所以

$$2\cdot a\cdot d<2\cdot a\cdot d+1 \text{ 且 } 2\cdot a\cdot d+1<2\cdot b\cdot c,$$

取 $r=\frac{2\cdot a\cdot d+1}{2\cdot b\cdot d}$，则 $p<r$ 且 $r<q$。■

8.2.19 定理 *Archimed* 性质 任给 $p, q>0$，存在 $\mathrm{n}\in\mathbf{N}$，使得 $\mathrm{n}\cdot p>q$。

证 令 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$，取 $\mathrm{n}=b\cdot c+1$，则

$$\mathrm{n}\cdot p=\frac{(b\cdot c+1)\cdot a}{b},$$

由 $(b\cdot c+1)\cdot a\cdot d=b\cdot c\cdot a\cdot d+a\cdot d>b\cdot c$ 得

$$\frac{(b\cdot c+1)\cdot a}{b}>\frac{c}{d},$$

所以 $\mathrm{n}\cdot p>q$。■

习题 8.2

8.2.1 补充定理 8.2.5 的证明，即证明：任给 $a, b, c\in\mathbf{Z}$，都有

(1) $a\cdot b=b\cdot a$。

(2) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$。

(3) $a+0=a$，$a\cdot 1=a$。

8.2.2 证明：任给 $a\in\mathbf{Z}$，都存在 $b\in\mathbf{Z}$，使得 $b<a$。

8.2.3 证明：任给 $a\in\mathbf{Z}$，不存在 $b\in\mathbf{Z}$，使得 $a<b<a+1$。

8.2.4 补充定理 8.2.13 的证明，即证明：任给 $p, q, r\in\mathbf{Q}$，都有

(1) $p\cdot q=q\cdot p$。

(2) $p\cdot(q\cdot r)=(p\cdot q)\cdot r$。

(3) $p+(-p)=0$。

(4) $p+0=p$，$p\cdot 1=p$。

(5) 如果 $p\neq 0$，则 $p\cdot p^{-1}=1$。

8.2.5 证明定理 8.2.14。

8.2.6 有理数的无端点性 证明：

(1) 任给 $p\in\mathbf{Q}$，都存在 $q\in\mathbf{Q}$，使得 $q<p$。

(2) 任给 $p\in\mathbf{Q}$，都存在 $q\in\mathbf{Q}$，使得 $q>p$。

8.3 实　数

本节讨论实数的构造。实数的构造主要有两种方法，Cantor 序列和 Dedekind 分割。我们采用 Dedekind 分割的方法，但处理上稍有差别。

我们曾对每个实数 a 定义了有理数的集合 $\mathbf{Q}_a$，并证明了所有这样集合的集合族$\Gamma(\mathbf{Q}) = \{\mathbf{Q}_a \mid a\in\mathbf{R}\}$和 $\mathbf{R}$ 一一对应。实数构造的本质就是用 $\mathbf{Q}_a$ 代替 a，也就是说实数是某种有理数的集合。

直接用 $\mathbf{Q}_a$ 来定义实数 a 是不行的，因为 $\mathbf{Q}_a$ 是用实数 a 来定义的。

$\mathbf{Q}_a$ 是有理数的集合，我们可以不使用实数而使用某种性质来定义这样的有理数集合，然后用这样的有理数集合去定义实数。

$\mathbf{Q}_a$ 有以下三条性质：

(1) $\mathbf{Q}_a \neq \varnothing$ 且 $\mathbf{Q}_a \neq \mathbf{Q}$；

(2) 任给 $p\in\mathbf{Q}_a$，任给 $q\in\mathbf{Q}$，如果 $q<p$，则 $q\in\mathbf{Q}_a$；

(3) $\mathbf{Q}_a$ 没有最大元。

条件(2)类似于良序集前段的定义，我们就用这个条件来定义全序集的前段。

8.3.1 定义　全序集的前段　A 是全序集，$B\subseteq A$。如果

任给 $p\in B$，任给 $q\in A$，只要 $q\leq p$ 就有 $q\in B$，

则称 B 是 A 的前段。

显然$\varnothing$和 A 都是 A 的前段。如果 B 是 A 的前段且 $B\neq A$，则称 B 是 A 的真前段。

可以证明 B 是 A 的前段的等价条件是(参考习题 5.1.2)：

任给 $p\in B$，任给 $q\in A\setminus B$，都有 $p<q$。

全序集的前段与良序集的前段有类似的性质。

8.3.2 定理　全序集前段的基本性质

(1) 传递性　如果 B 是 A 的前段且 C 是 B 的前段，则 C 是 A 的前段。

(2) 可比较性　如果 B 和 C 都是 A 的前段，则 B 是 C 的前段或 C 是 B 的前段。

(3) 前段对并的封闭性　如果任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，A_i 都是 A 的前段，则 $\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$ 是 A 的前段。

证　参考定理 5.1.12。■

$\mathbf{Q}_a$ 的三条性质用前段的话来说就是：$\mathbf{Q}_a$ 是 $\mathbf{Q}$ 的没有最大元的非空的真前段。

以下是这样的有理数子集的两个例子。

8.3.3 例　任给 $r\in\mathbf{Q}$，$\mathbf{Q}_r = \{p \mid p\in\mathbf{Q}$ 且 $p<r\}$是 $\mathbf{Q}$ 的没有最大元的非空的真前段。理由如下：

任给 $p\in\mathbf{Q}_r$，任给 $q\in\mathbf{Q}$，如果 $q<p$，则由 $p\in\mathbf{Q}_r$ 得

$p<r$，

由 $q<p$ 和 $p<r$ 得 $q<r$，所以

$q\in\mathbf{Q}_r$。

因此 $\mathbf{Q}_r$ 是 $\mathbf{Q}$ 的前段。

任给 $p\in\mathbf{Q}_r$，都有 $p<r$，由有理数的稠密性(定理 8.2.18)得

存在 q，使得 $p<q<r$，

所以 $\mathbf{Q}_r$ 没有最大元。

由有理数的无端点性(习题 8.2.6)得 $\mathbf{Q}_r$ 非空。

由 $r\notin\mathbf{Q}_r$ 得 $\mathbf{Q}_r$ 是真前段。

8.3.4 例　$A = \{p \mid p\in\mathbf{Q}$ 且$(p<0$ 或 $p^2<2)\}$是 $\mathbf{Q}$ 的没有最大元的非空的真前段。理由如下：

任给 $p\in A$，任给 $q\in\mathbf{Q}$，如果 $q<p$，则当 $q<0$ 时直接得

$q\in A$，

当 $q\geq 0$ 时由 $q<p$ 得 $p\geq 0$，所以

$p^2<2$，

由 $q<p$ 和 $p^2<2$ 得 $q^2<2$，也有

$q\in A$。

因此 A 是 $\mathbf{Q}$ 的前段。

$A \neq \varnothing$，$A \neq \mathbf{Q}$ 和 A 没有最大元显然。

但 A 不是任何一个 $\mathbf{Q}_r$，可以用反证法这一点。设存在 $r\in\mathbf{Q}$，使得 $A = \mathbf{Q}_r$，当 $p\geq 0$ 时有

$p^2<2$ 当且仅当 $p\in A$ 当且仅当 $p\in\mathbf{Q}_r$ 当且仅当 $p<r$，

所以

$p^2<2$ 当且仅当 $p^2<r^2$，

因此 $r^2 = 2$，矛盾。

我们就用这样的前段定义实数。

8.3.5 定义 实数 $\mathbf{Q}$ 的没有最大元的非空的真前段称为实数，所有实数的集合称为实数集，记为 $\mathbf{R}$。

这样定义的实数集 $\mathbf{R}$ 是有理数的子集族，即 $\mathbf{R} \subseteq \mathrm{P}(\mathbf{Q})$。

8.3.6 定理 $f: \mathbf{Q}\to\mathbf{R}$ $f(p) = \mathbf{Q}_p$ 是单射。

证 任给 $p, q\in\mathbf{Q}$，如果 $p \neq q$，则由习题 1.2.2 得

$\mathbf{Q}_p \neq \mathbf{Q}_q$，

所以 $f(p) \neq f(q)$。■

因为 f 是单射，所以 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 的子集 $f[\mathbf{Q}] = \{\mathbf{Q}_p \mid p\in\mathbf{Q}\}$一一对应。

可以将 $\mathbf{Q}$ 和$\{\mathbf{Q}_p \mid p\in\mathbf{Q}\}$等同。这样，$\mathbf{Q}$ 就是 $\mathbf{R}$ 的子集，有理数 r 就是所有小于 r 的有理数集合 $\mathbf{Q}_r$。特别地，0 就是 $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}^-$(负有理数集)。

由例 8.3.4 可知 $\mathbf{Q} \neq \mathbf{R}$，所以一定有不是有理数的实数，不是有理数的实数称为无理数。

$\mathbf{R}$ 上的小于等于关系≤就是 $\mathbf{R}$ 上的包含关系⊆，所以≤是偏序关系，由前段的可比较性可得≤还是全序关系。

$\mathbf{R}$ 上的小于等于关系≤是 $\mathbf{Q}$ 上小于等于关系≤的扩充，即

任给 $p, q\in\mathbf{Q}$，都有 $p\leq q$ 当且仅当 $\mathbf{Q}_p \subseteq \mathbf{Q}_q$。

由≤可以定义正实数集 $\mathbf{R}^+ = \{x \mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x>0\}$和负实数集 $\mathbf{R}^- = \{x \mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x<0\}$。

与有理数 $\mathbf{Q}$ 类似，实数 $\mathbf{R}$ 也有稠密性、无端点性，但更强。

8.3.7 引理 r 是有理数，x 是实数，则 $r\in x$ 当且仅当 $r<x$。

证 设 $r\in x$，证明 $r<x$，即证明 $\mathbf{Q}_r \subseteq x$ 且 $\mathbf{Q}_r \neq x$。

任给 $p\in\mathbf{Q}_r$，都有 $p<r$，由 $r\in x$ 得 $p\in x$，因此 $\mathbf{Q}_r \subseteq x$。

由 $r\notin\mathbf{Q}_r$ 得 $\mathbf{Q}_r \neq x$。

设 $r\notin x$，证明 $x\leq r$。

任给 $p\in x$，由 $r\notin x$ 和 x 是前段得 $p<r$，所以 $x \subseteq \mathbf{Q}_r$，即 $x\leq r$。

■

8.3.8 定理 有理数在实数中稠密。

(1) 任给实数 x, y，如果 $x<y$，则存在有理数 r，使得 $x<r$ 且 $r<y$。

(2) 任给实数 x，存在有理数 p, q，使得 $p<x<q$。

证 (1) 由 $x<y$ 得

存在有理数 p，使得 $p\notin x$ 且 $p\in y$，

由 y 没有最大元得

存在有理数 r，使得 $p<r$ 且 $r\in y$。

由 $p\notin x$ 得

$x\leq p<r$，

由 $r\in y$ 得

$r<y$，

因此存在有理数 r，使得 $x<r$ 且 $r<y$。

(2) 由 x 非空得

存在有理数 p，使得 $p\in x$，

所以

$p<x$。

由 $x \neq \mathbf{Q}$ 得

存在有理数 r，使得 $r\notin x$，

由 $\mathbf{Q}$ 的无端点性得

存在有理数 q，使得 $r<q$，

由 $r\notin x$ 得

$$x\le r<q。$$

因此存在有理数 p, q，使得 $p<x<q$。■

建立在实数上的数学理论(如微积分)，依赖于实数的基本性质：任何有界的实数非空子集都有上确界。可以证明我们构造的实数确实有这样的性质。实际上，构造实数的目的之一就是为了证明实数的基本性质。

8.3.9 引理 A 是实数的非空子集，令 $x=\bigcup A$，则

(1) x 是有理数 $\mathbf{Q}$ 的非空前段。

(2) x 没有最大元。

(3) 如果 A 有上界，则 x 是实数。

证 (1) x 非空显然。由前段对并的封闭性得 x 是前段。

(2) 任给 $p\in x$，存在 $y\in A$，使得 $p\in y$。由 y 没有最大元得

$$存在\ q\in y，使得\ p<q，$$

所以

$$存在\ q\in x，使得\ p<q。$$

因此 x 没有最大元。

(3) 由(1)和(2)，只需证 $x\neq\mathbf{Q}$。设 A 的上界为 z，则

$$任给\ y\in A，都有\ y\subseteq z，$$

所以

$$x=\bigcup A\subseteq z，$$

由 $z\neq\mathbf{Q}$ 得 $x\neq\mathbf{Q}$。■

8.3.10 定理 实数基本定理 任何有界的实数非空子集都有上确界。

证 设 A 是有界的实数非空子集，令 $x=\bigcup A$，则由引理 8.3.9 得 x 是实数。因为实数集是集合族，x 是 A 的并，所以 x 是 A 的上确界(见例 3.4.6)。■

实数不仅有稠密性，而且还有完备性(也称为连续性)。

8.3.11 定义 完备性 A 是全序集，A 称为完备的，如果 A 满足：任给 A 的非空真前段 X，X 有最大元或 $A\setminus X$ 有最小元。

8.3.12 定理 实数的完备性 实数集 $\mathbf{R}$ 是完备的。

证 设 A 是 $\mathbf{R}$ 的非空真前段，令 $x=\bigcup A$，则 x 是实数且 x 是 A 的上确界。

如果 $x\in A$，则 x 是 A 的最大元。

如果 $x\notin A$，则 $A\setminus X=\{y\mid y\ 是\ A\ 的上界\}$，所以 x 是 $A\setminus X$ 的最小元。■

注意，有理数没有完备性。取 $A=\{p\mid p\in\mathbf{Q}\ 且(p<0\ 或\ p^2<2)\}$ (见例 8.3.4)，则 A 没有最大元且 $A\setminus X$ 没有最小元。

以下讨论实数的运算。

实数加法的定义比较简单。

8.3.13 引理 如果 x, y 是实数，则 $z=\{p+q\mid p\in x\ 且\ q\in y\}$ 也是实数。

证 任给 $p+q\in z$，任给 $r\in\mathbf{Q}$，如果 $r<p+q$，则 $r-q<p$，由 x 是前段和 $p\in x$ 得

$$r-q\in x，$$

所以

$$r=(r-q)+q\in z，$$

因此 z 是 $\mathbf{Q}$ 的前段。

任给 $p+q\in z$，由 x 没有最大元得

$$存在\ p'\in x，使得\ p<p'，$$

由 x 没有最大元得

$$存在\ q'\in x，使得\ q<q'，$$

所以

$$存在\ p'+q'\in z，使得\ p+q<p'+q'，$$

因此 z 没有最大元。

由 $x\neq\mathbf{Q}$ 和 $y\neq\mathbf{Q}$ 得

$$存在\ p, q\in\mathbf{Q}，使得\ p\notin x\ 且\ q\notin y，$$

所以

存在 $p+q\in\mathbf{Q}$，使得 $p+q\notin z$，

因此 $z\neq\mathbf{Q}$。

由 $x\neq\varnothing$ 和 $y\neq\varnothing$ 得

存在 $p, q\in\mathbf{Q}$，使得 $p\in x$ 且 $q\in y$，

所以

存在 $p+q\in\mathbf{Q}$，使得 $p+q\in z$，

因此 $z\neq\varnothing$。

综合以上所证得 z 是实数。■

由引理 8.3.13，可以定义实数上的二元函数如下：

$$f(x, y) = \{p+q \mid p\in x \text{ 且 } q\in y\}$$

f 就是实数的加法，按习惯将 $f(x, y)$ 记为 $x+y$。

从有理数加法性质可以得到实数加法的性质。

8.3.14 定理 实数加法的性质。

(1) 交换律 $x+y = y+x$。

(2) 结合律 $x+(y+z) = (x+y)+z$。

(3) $x+0 = x$。

(4) 保序性 如果 $y\leq z$，则 $x+y\leq x+z$。

证 (1) $x+y = \{p+q \mid p\in x \text{ 且 } q\in y\}$

$= \{q+p \mid q\in y \text{ 且 } p\in x\}$

$= y+x$。

(2) 类似于(1)，详细证明留给读者。

(3) 分别证 $x+0\subseteq x$ 和 $x\subseteq x+0$。。

任给 $r\in x+0$，存在 $p\in x, q\in 0$，使得

$r = p+q$，

由 $q\in 0$ 和引理 8.3.7 得 $q<0$，所以

$r = p+q<p$，

因此 $r\in x$。

任给 $r\in x$，存在 $p\in x$，使得 $r<p$，所以

$r-p\in 0$，

因此 $r = p+(r-p)\in x+0$。

(4) 设 $y\subseteq z$，证明 $x+y\subseteq x+z$。

任给 $r\in x+y$，存在 $p\in x, q\in y$，使得

$r = p+q$，

由 $q\in y$ 和 $y\subseteq z$ 得

$q\in z$，

由 $p\in x$ 和 $q\in z$ 得

$p+q\in x+z$，

即 $r\in x+z$。■

实数乘法的定义比较复杂。我们先在非负实数上定义乘法，然后用符号法则推广到整个实数。

任给 $x\geq 0$，令 $x^{+} = \{p \mid p\in x \text{ 且 } p\geq 0\}$

8.3.15 引理 如果 $x\geq 0, y\geq 0$，则

$$z = \{p\cdot q \mid p\in x^{+} \text{且 } q\in y^{+}\}\cup 0$$

也是实数，且 $z\geq 0$。

证 类似于引理 8.3.13，详细证明留给读者。■

由引理 8.3.15，可以定义非负实数上的二元函数如下：

$$f(x, y) = \{p\cdot q \mid p\in x^{+} \text{且 } q\in y^{+}\}\cup 0$$

f 就是非负实数的乘法，按习惯将 $f(x, y)$ 记为 $x\cdot y$。

从有理数乘法性质可以得到非负实数乘法的性质。

8.3.16 定理 非负实数乘法的性质。$x, y, z\geq 0$

(1) 交换律 $x\cdot y = y\cdot x$。

(2) 结合律 $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$。

(3) 分配律 $x\cdot(y+z) = x\cdot y+x\cdot z$。

(4) $x\cdot 1 = x$。

(5) 保序性 如果 $y\leq z$，则 $x\cdot y\leq x\cdot z$。

证 (1) $x\cdot y = \{p\cdot q \mid p\in x^{+} \text{且 } q\in y^{+}\}\cup 0$

$= \{q\cdot p \mid q\in y^{+} \text{且 } p\in x^{+}\}\cup 0 = y\cdot x$。

(2)(3) 类似于(1)，详细证明留给读者。

(4) 分别证 $x\cdot 1\subseteq x$ 和 $x\subseteq x\cdot 1$。只需考虑 $x\cdot 1$ 和 x 中非负有理数就行了。

任给 $r\in x\cdot 1$，存在 $p\in x^+, q\in 1^+$，使得 $r=p\cdot q$，由 $q\in 1$ 和引理 8.3.7 得 $q<1$，所以

$$r=p\cdot q<p,$$

因此 $r\in x$。

任给 $r\in x$，存在 $p\in x$，使得 $r<p$，所以

$$\frac{r}{p}\in 1,$$

因此 $r=p\cdot \frac{r}{p}\in x\cdot 1$。

(5) 设 $y\subseteq z$，证明 $x\cdot y\subseteq x\cdot z$。只需证

$$\{p\cdot q\mid p\in x^+ 且\ q\in y^+\}\subseteq\{p\cdot q\mid p\in x^+ 且\ q\in z^+\}$$

就行了。

任给 $r\in\{p\cdot q\mid p\in x^+ 且\ q\in y^+\}$，存在 $p\in x^+, q\in y^+$，使得

$$r=p\cdot q,$$

由 $q\in y$ 和 $y\subseteq z$ 得

$$q\in z^+,$$

由 $p\in x^+$和 $q\in z^+$得

$$p\cdot q\in\{q\cdot p\mid q\in y^+ 且\ p\in z^+\},$$

即 $r\in\{q\cdot p\mid q\in y^+ 且\ p\in z^+\}$。

任给有理数的子集 X，当 X 没有最小元时，令 $X^*=X$，当 X 有最小元 p，令 $X^*=X\setminus\{p\}$。

8.3.17 引理 如果 x 是实数，则$(\mathbf{Q}\setminus x)^*$没有最小元。

证 如果 $\mathbf{Q}\setminus x$ 没有最小元，则$(\mathbf{Q}\setminus x)^*=\mathbf{Q}\setminus x$ 没有最小元。

如果 $\mathbf{Q}\setminus x$ 有最小元 p，则

任给 $q\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*$，都有 $p<q$，

由有理数的稠密性得

存在 $r\in\mathbf{Q}$，使得 $p<r<q$，

由 x 是前段，$p\in\mathbf{Q}\setminus x$ 和 $p<r$ 得

$$r\in\mathbf{Q}\setminus x,$$

由 $p\neq r$ 得

$$r\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*。$$

这证明了

任给 $q\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*$，存在 $r\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*$，使得 $r<q$，

因此$(\mathbf{Q}\setminus x)^*$没有最小元。■

8.3.18 引理 如果 x 是实数，则

$$z=\{p\mid -p\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*\}$$

也是实数。

证 任给 $p\in z$，任给 $q\in\mathbf{Q}$，如果 $q<p$，则

$$-p<-q,$$

由 x 是前段，$-p\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*$和$-p<-q$ 得

$$-q\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*,$$

所以

$$q\in z,$$

因此 z 是 $\mathbf{Q}$ 的前段。

任给 $p\in z$，都有$-p\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*$，由$(\mathbf{Q}\setminus x)^*$没有最小元得

存在$-q\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*$，使得$-q<-p$，

所以

存在 $q\in z$，使得 $p<q$，

因此 z 没有最大元。

由 $x\neq\mathbf{Q}$ 得$(\mathbf{Q}\setminus x)^*\neq\varnothing$，所以 $z\neq\varnothing$。由 $x\neq\varnothing$得$(\mathbf{Q}\setminus x)^*\neq\mathbf{Q}$，所以 $z\neq\mathbf{Q}$。

综合以上所证得 z 是实数。■

由引理 8.3.18，可以定义实数上的一元函数如下：

$$f(x)=\{p\mid -p\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*\}$$

f 就是实数的负运算，按习惯将 $f(x)$记为$-x$。

负运算有以下性质。

8.3.19 定理

(1) $x+(-x) = 0$。

(2) 如果 $x+y = 0$，则 $x = -y$。

(3) $x = -(-x)$。

(4) 如果 $x\le y$，则$-y\le -x$。

证 留给读者。■

由定理 8.3.19 可以证明：

任给 $x\le 0$，存在 $y\ge 0$，使得 $x = -y$。

因此可以用以下定义(符号法则)将乘法从非负实数推广到全体实数。任给实数 $x, y\ge 0$，定义

$$(-x)\cdot y = -(x\cdot y),$$

$$x\cdot(-y) = -(x\cdot y),$$

$$(-x)\cdot(-y) = x\cdot y。$$

非负实数乘法性质在实数乘法上也成立。

8.3.20 定理 实数乘法的性质。

(1) 交换律 $x\cdot y = y\cdot x$。

(2) 结合律 $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$。

(3) 分配律 $x\cdot(y+z) = x\cdot y+x\cdot z$。

(4) $x\cdot 1 = x$。

(5) 保序性 如果 $y\le z$ 且 $x\ge 0$，则 $x\cdot y\le x\cdot z$。

证 留给读者。■

最后，我们来构造实数的倒数。和乘法类似，先定义正实数的倒数，再推广到全体非零实数。

8.3.21 引理 如果 $x>0$，则 $z = \{p \mid \frac{1}{p}\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*\}$也是实数，且 $z>0$。

证 类似于引理 8.3.18，详细证明留给读者。■

由引理 8.3.21，任给实数 $x>0$，可以定义 x 的倒数如下：

$$x^{-1} = \{p \mid \frac{1}{p}\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*\}$$

再用以下定义将倒数推广到负实数。任给实数 $x>0$，定义：

$$(-x)^{-1} = -(x^{-1})。$$

倒数有以下性质。

8.3.22 定理 $x, y \neq 0$。

(1) $x\cdot x^{-1} = 1$。

(2) 如果 $x\cdot y = 1$，则 $x = y^{-1}$。

(3) $x = (x^{-1})^{-1}$。

(4) 如果 $0<x\le y$，则 $y^{-1}\le x^{-1}$。

证 先对正实数证明，然后再推广到负实数，详细证明留给读者。■

习题 8.3

8.3.1 补充定理 8.3.14 的证明，即证明：任给 $x, y, z\in\mathbf{R}$，都有 $x+(y+z) = (x+y)+z$。

8.3.2 补充定理 8.3.16 的证明，即证明：任给实数 $x, y, z\ge 0$，都有

(1) $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$。

(2) $x\cdot(y+z) = x\cdot y+x\cdot z$。

8.3.3 证明引理 8.3.15 和引理 8.3.21。

8.2.4 证明定理 8.3.19 和定理 8.3.20。

8.2.5 证明定理 8.3.22。

8.2.6 $r\in\mathbf{Q}, x\in\mathbf{R}$。证明：如果 $r\ge 0$，则 $r\cdot x = \{r\cdot p \mid p\in x\}$。

8.2.7 实数的 Archimed 性质 证明：任给实数 $x, y>0$，存在 $\mathrm{n}\in\mathbf{N}$，使得 $\mathrm{n}\cdot x>y$。