树状数组

引例

数列操作 NKOJ1321

- 给出n个整数:a_1 , a_2 ,…, a_n
- 反复进行下列两种操作:
- 1.修改某个数的值,将第i个数增加d
- 2.求出指定区间[L,R]的数字和(如$a_3+a_4+..+a_{10}+a_{11}$)
- n<=100000,总操作数<=100000

可用**线段树**　　　也可用**树状数组**

介绍

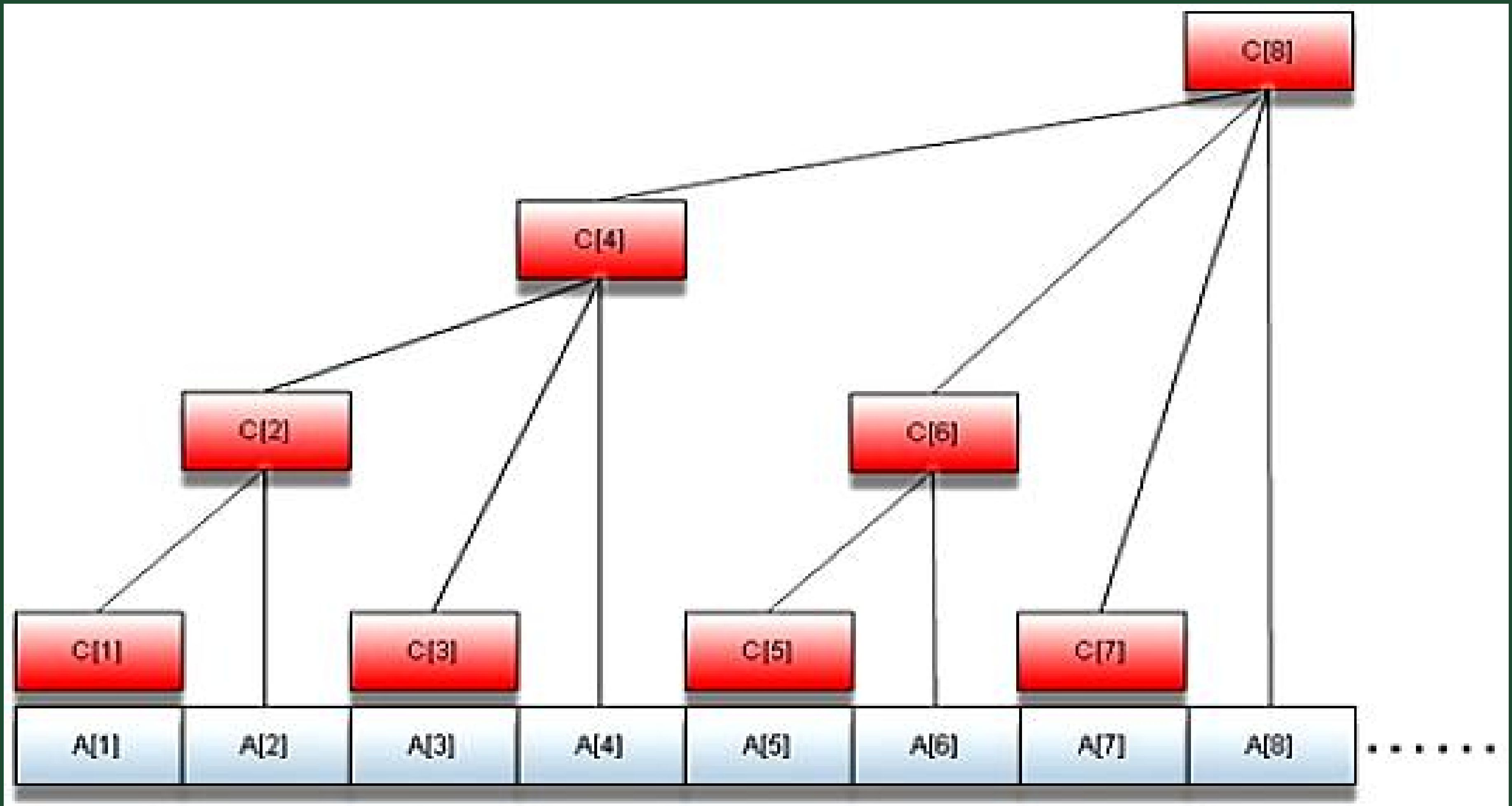
树状数组用来干什么？

- 树状数组(binary indexed tree，发明者Peter M. Fenwick 1994)，是一种设计新颖的数组结构，它能够高效地获取数组中**连续k个数的和**。

- 概括说，树状数组通常用于解决以下问题：
  数组A中的元素可能不断地被修改，怎样才能快速地获取连续几个数的和？

介绍

什么是树状数组？



给定一个数组A[]，
我们设一个数组C[]满足

C[1]=A[1]

C[2]=A[1]+A[2]

C[3]=A[3]

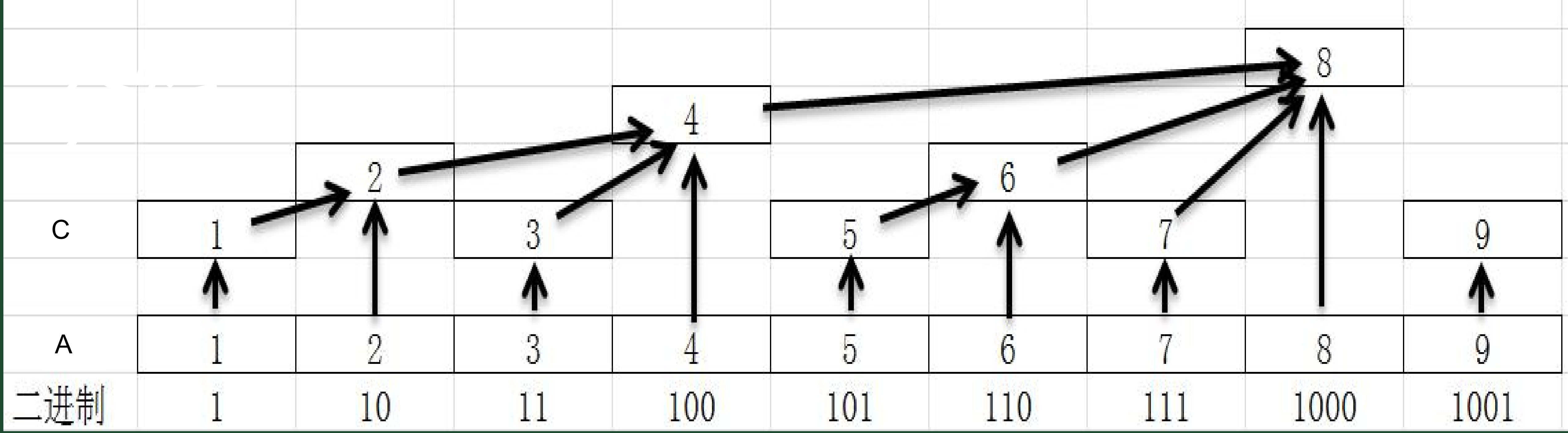
C[4]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4]

C[5]=A[5]

C[6]=A[5]+A[6]

......

C数组就是树状数组,C[i] = ?



给定序列（数组）A，我们设一个数组C满足

$C[i] = A[i-2^k+ 1] + … + A[i]$

其中，k为**i对应的二进制数末尾0的个数**，i从1开始算！

则我们称C为**树状数组**。

下面的问题是，给定i，如何求2^k?

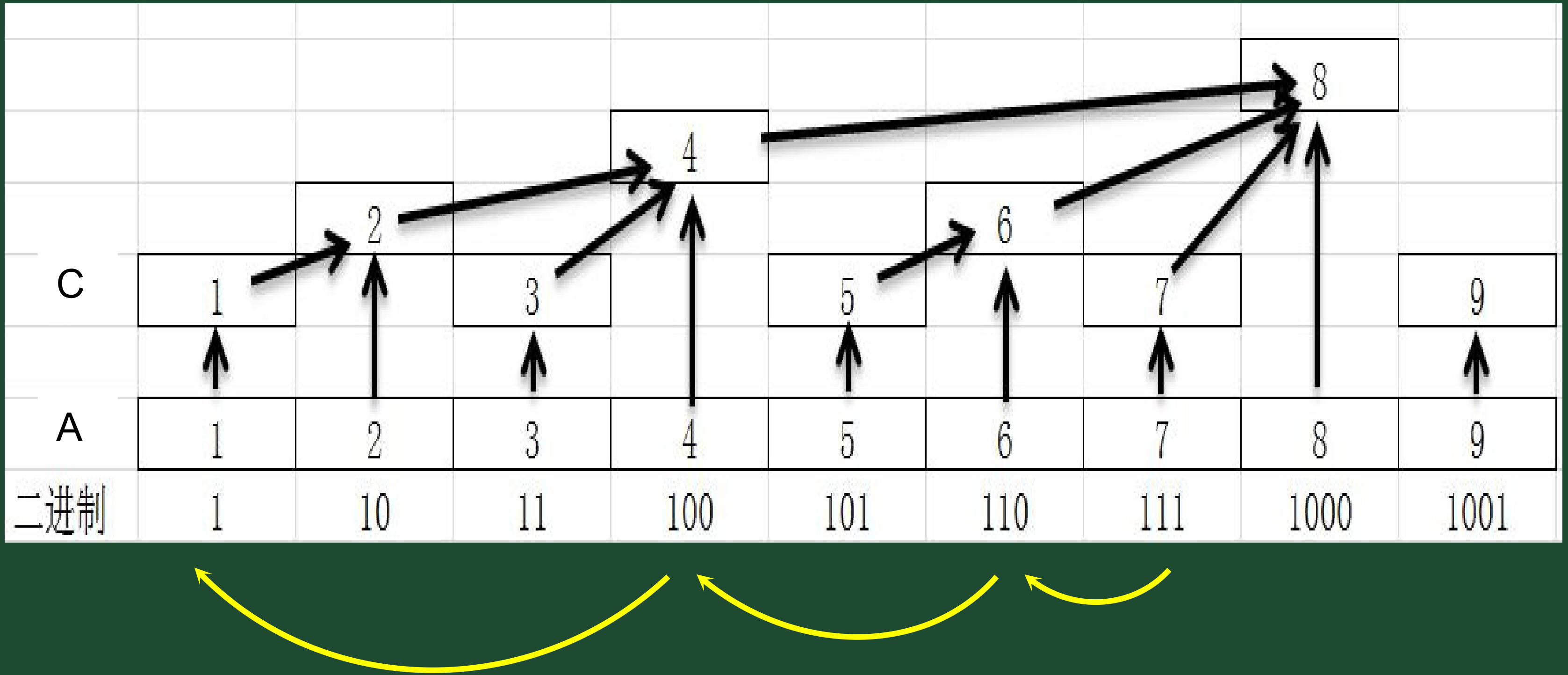
答案很简单：2^k = **i&(-i)**

i&(-i)

- 比如对于”010101000” 最末有3个0，k的值应该是3，算出的2^k应该为8
- 110101000　　这是-i的原码
- 101010111　　这是-i的反码
- 101011000　　这是-i的补码
- 010101000　　这是i的补码
- 000001000　　这是(i & (-i))
- $(00001000)_2=(8)_{10}$

```
int lowbit(int x)
{
    return x & ( -x );
}
```

求和



当我们求A[1]+...+A[x]的之和时，
C[x]如果包含的不一定是1..x的全部和，(比如C[6]=A[5]+A[6])就需要再找一个C[k](显然k<x)累加起来，这个k我们称之为x的**前驱**，举个例子：

A[1]+A[2]+..+A[6]=C[6]+C[4]

A[1]+A[2]+..+A[7]=C[7]+C[6]+C[4]

前驱的编号即为比自己小的，最近的，最末连续0比自己多的数

所以x的前驱**k=x-lowbit(x)**　　　//相当于x剪掉了自己最右边的1

求和GetSum( )

```
int getSum(int x)      //求A[1]+A[2]+…+A[x]
{
      int Sum= 0;
      for ( int k = x; k > 0; k -= lowbit(k) )  Sum += C[k];
      return Sum;
}
```

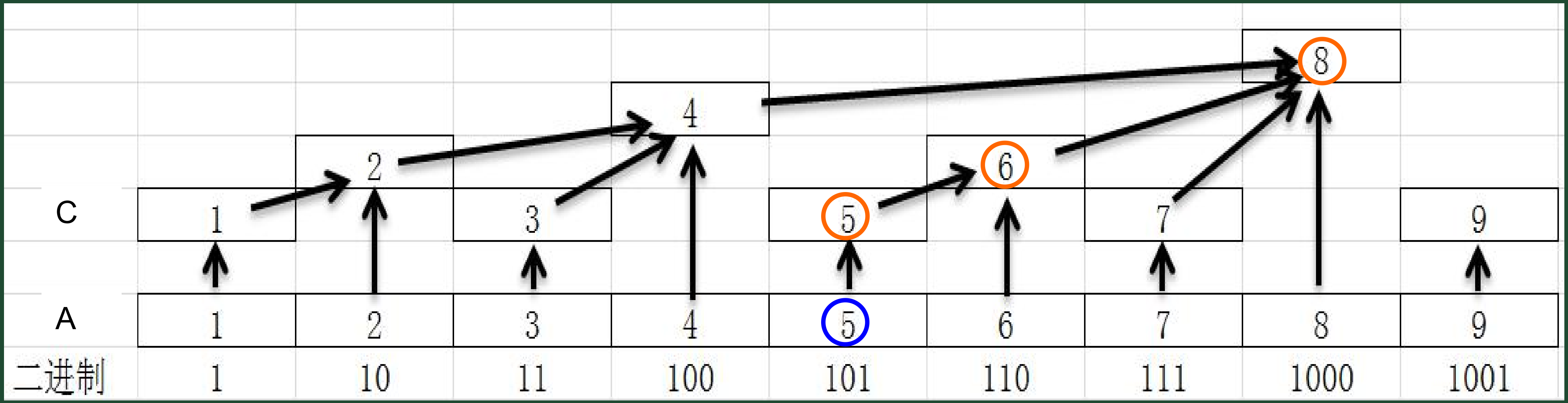
求t的前驱

直接用一个循环求得Sum,时间复杂度为O(logN)

求区间[x,y]之和怎么办？ A[x]+A[x+1]+…+A[y]

getSum(y) - getSum(x-1)

修改



修改了某个A[i],就需改动所有包含A[i]的C[j];
从上图看就是要**更改从改叶子节点到根节点路径上的所有C[j]**

怎么求一个节点的父节点?

经过观察和探究,前人们得出了这个规律:
父亲:**比自己大的,最近的,末位连续0比自己多的数**
x节点父亲的编号 = x+lowbit(x) //相当于让x最右边的1变为0，增加1个0

修改modify( )

```
void modify(int x,int d)  //将所有包含A[x]的C[ ]增加d
{                                      求i的父亲
        for( int i = x; i<=n; i+=lowbit(i) )C[i] += d;
}
```

/*其中n为数组的长度，时间复杂度同样是O(logN)的*/

回到引例

数列操作 nkoj 1321

- 给出n个整数:a_1 , a_2 ,..., a_n
- 反复进行下列两种操作:
- 1.修改某个数的值,将第i个数增加d
- 2.求出指定区间[L,R]的数字和(如$a_3+a_4+..+a_{10}+a_{11}$)
- n<=100000,总操作数<=100000

回到引例

数列操作 nkoj 1321

处理：给出n个整数:a_1 , a_2 ,…, a_n

一开始树状数组C[ ]全是0，一边输入初始数组，一边将数据加入树状数组

```
long long A,i,C[100005];
for(i=1;i<=n;i++)
{
     cin>>A;
     modify(i,A);
}//时间O(logn)
```

```
void modify(int x,int d)  //将所有包含A[x]的C[ ]增加d
{
     for( int i = x; i<=n; i+=lowbit(i) )C[i] += d;
}
```

回到引例

数列操作 nkoj 1321

处理操作：1.修改某个数的值,将第i个数增加d

modify(i,d)

处理操作：2.求出指定区间[L,R]的数字和

getSum(R) - getSum(L-1)

```
int getSum(int x)      //求A[1]+A[2]+…+A[x]
{
    int Sum= 0;
    for ( int k = x; k > 0; k -= lowbit(k) )  Sum += C[k];
    return Sum;
}
```

例1：求逆序对数

树状数组例题1：求逆序对数

一个长度为n(1<=n<=10000)的数列**由数字1到n构成**，求该数列中逆序对的个数。

输入格式：

第一行，一个整数n

第二行，n个空格间隔的整数，表示数列

输出格式：

一行，一个整数，表示逆序对的个数。

样例输入：

5

3 2 5 1 4

样例输出：5

样例说明：逆序对分别是(3 2),(3 1),(2 1),(5 1),(5 4)

求逆序对可以用**归并排序**，也可以用**树状数组**

树状数组例题1：求逆序对数

1.因为题目给出的数据范围是1<=n<=10000,所以我们相当于有了一个A数组，下标范围是1到10000。其中A[i]记录的数字i是否出现过，是A[i]=1,否则A[i]=0。

那么，对于树状数组而言，**C[i]= A[i–lowbit(i)+ 1] + … + A[i]**，相当于记录了在**[i-lowbit(i)+1，i]**这段区间中的数字出现的个数。

2.一边读入数列一边讨论。当读入了数字x：

首先，我们查询[x+1,n]这段区间中的数字出现的个数，因为它们是在x之前出现的，又比x大，所以都能与x构成逆序对。ANS+=getSum(n)-getSum(x);

然后，我们再把x插入到树状数组中，更新所有包含了x的C[ ]。

注：因为树状数组的元素比如C[i]表示的是一段区间的数字和，若C[i]对应的区间中包含了x,我们就把C[i]++。

也就是modify(x,1)

树状数组例题1：参考代码

```
int main()
{
        int i,x,ans=0;
        scanf("%d",&n);
        for(i=1;i<=n;i++)
        {
                scanf("%d",&x);
                ans+=(getSum(n)-getSum(x));
                insert(x,1);
        }
        cout<<ans<<endl;
}
```

```
int lowbit(int x)
{
        return x&(-x);
}

int getSum(int x)
{
        int Sum=0;
        for( int i=x;i>0;i-=lowbit(i) )Sum+=c[i];
        return Sum;
}

void insert(int x,int d)
{
        for( int i=x;i<=n;i+=lowbit(i) ) c[i]+=d;
}
```

树状数组例题1：求逆序对数

如果题目改为：由n(n<=1,0000)个正整数构成的数列，数列中数字的数值范围是在1,000,000,000以内，求该数列中逆序对的个数。

这个问题还能用树状数组来处理吗？

我们无法开一个大小为C[1000000000]的树状数组，直接用树状数组是不行的。

这样的问题应该先离散化,再用树状数组处理，就是所谓

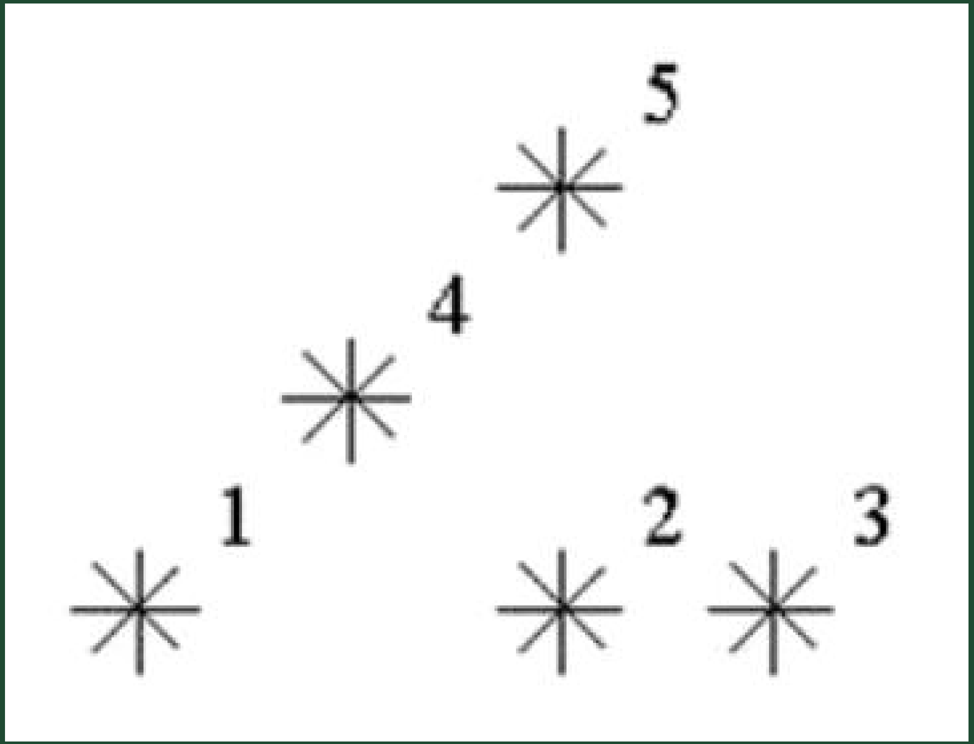
离散化+树状数组

例2：数星星

树状数组例题2：数星星 nkoj1908 源自ural1028

宇航员经常检测星图,在星图上，星星由点表示而且每颗星星都有笛卡尔坐标。星星的等级表示左下方(包含正左和正下方)星星的数量。宇航员想知道星星等级的分布。

例如，如右面图形所示，第5号星等级是3 (它由三个标记为1,2和4的星组成)。在此地图上，0等级的星星只有一个(1号)，1等级的有两个（2和4号），2等级的有一个(3号)，3等级的有一个（5号）。



请你设计一个程序，给出N（N<=200,000）颗星星及坐标(0<=X,Y<=32000)，在给定地图上计算出每个等级星星的数量。

树状数组例题2：数星星 nkoj1908 源自ural1028

求一颗坐标为（x,y）的星星的等级，
就是求坐标为(x',y')满足x'<=x且y'<=y的星星的数量。

1.于是我们可以先按y坐标由小到大排序，若两颗星星y相同，则按x坐标由小到大排序。

2.因为题目给出的数据范围是0<=x,y<=32000,所以我们可以建立一颗表示区间[0,32000]的**线段树**，每个节点中有一个Cnt值，用于记录x坐标在对应区间的星星的颗数。
假设树中有一个节点k表示的区间为[a,b]，那么Tree[k].Cnt记录了**x坐标**在[a,b]间的星星的颗数。

3.按排序后的顺序，从左往右依次讨论每颗星星：
当讨论到坐标为(p,q)的星星时，只需查询区间[0,p]中星星的颗数就行了。因为前面讨论过的所有星星的y坐标都不会大于q。
查询完成后，再把该星星插入到线段树中，即更新线段树中所有包含坐标p的节点的Cnt值。

既然线段树用于记录一个区间中星星的颗数，我们也可以用树状数组来实现

树状数组例题2：数星星 树状数组解法

1.我们可以把星星先按y坐标由小到大排序，若两颗星星y相同，则按x坐标由小到大排序。

2.因为题目给出的数据范围是0<=x,y<=32000,所以我们相当于有了一个A数组，下标范围是0到32000，其中A[i]记录的是x坐标为i的星星的颗数。

那么，对于树状数组而言，$C[i] = A[i-2^k+1] + \ldots + A[i]$，相当于记录了x坐标在$[i-2^k+1, i]$这段区间中的星星的颗数。

3.按排序后的顺序，从左往右依次讨论每颗星星：

当讨论到坐标为(p,q)的星星时，只需查询区间[0,p]中星星的颗数就行了。因为前面讨论过的所有星星的y坐标都不会大于q。

查询完成后，再把该星星插入到树状数组中，即更新C数组中，所有包含了A[p]的元素的值。

树状数组例题2：数星星 树状数组核心代码

```
void main()
{
        scanf("%d",&n);
        int i,x,y;
        for(i=1;i<=n;i++)
        {
                scanf("%d%d",&x,&y);
                ans[getSum(x)]++; //getSum(x)查询当前坐标在1到x间的星星颗数,ans记录结果
                Modify(x,1);
        }
        for(i=0;i<=32000;i++)printf("%d\n",ans[i]);
}
```

注意：
1.题目给出的数据是排好顺的；
2.树状数组只能表示从1开始的区间，而此题中x,y可能取到0，上面代码需适当修改。

小结

- 在很多的情况下,线段树都可以用树状数组实现.凡是能用树状数组的一定能用线段树.
- 当题目不满足**减法原则**的时候,就只能用线段树,不能用树状数组.例如数列操作如果让我们求出一段数字中最大或者最小的数字,就不能用树状数组了.
- 树状数组的每个操作都是0(log(n))的复杂度.

习题：NKOJ3697，3702，3703，4406
思维：NKOJ 3709
难题： NKOJ 2033