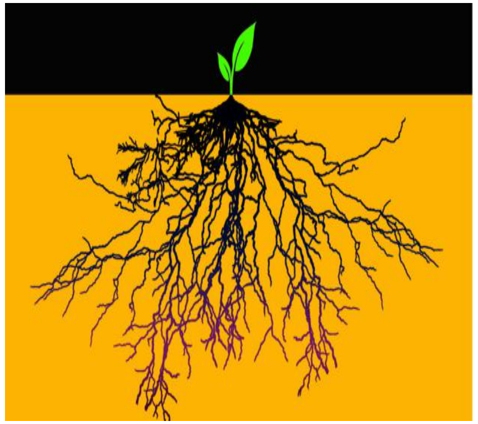
数据结构
Data Structure

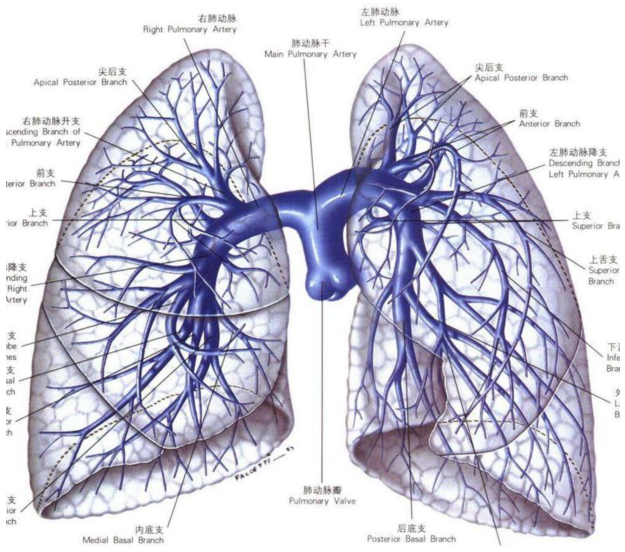
2017年秋季学期

刘鹏远

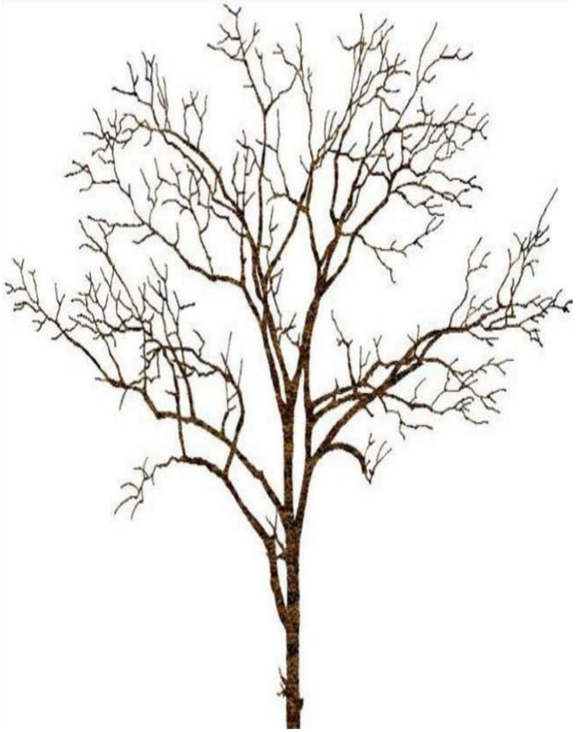
助教：韩越，卢梦依

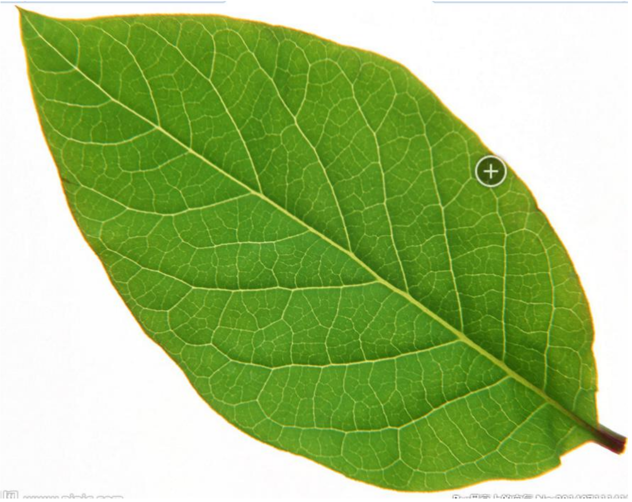
树





右肺动脉
Right Pulmonary Artery
左肺动脉
Left Pulmonary Artery
肺动脉干
Main Pulmonary Artery
尖后支
Apical Posterior Branch
尖后支
Apical Posterior Branch
右肺动脉升支
前支
Anterior Branch
前支
左肺动脉降支
上支
上支
上舌支
肺动脉瓣
Pulmonary Valve
内底支
Medial Basal Branch
后底支
Posterior Basal Branch





Huffman树及Huffman编码

编码及传输问题

数据传输中，需要将数据中出现的每个字符进行二进制编码。在设计编码时需要遵守两个原则：

（1）发送方传输的二进制编码，到接收方解码后必须具有**唯一性**，即解码结果与发送方发送的电文完全一样；

（2）发送的二进制编码**尽可能地短**。

良好的编码可以取得更短的数据长度。

（数据压缩也类似）

编码及传输问题

等长编码，即每个编码所含的二进制位数相同。如ASCII码。

等长示例：对“ABACCDA”，可以将A,B,C,D的编码分别为00,01,10,11。则上述7个字符的长度为14位。

不等长编码，即每个编码所含二进制位数不一定相同。

大家觉得应该如何编码呢？使总长尽可能短

示例：令上例中A,B,C,D的编码分别为0,00,1,01，则上述长度可以减少为9个字符

为了减小传输长度，可以扫描数据一遍，利用自身结构信息，计算各个字符出现的频率，编码使出现频率最多的编码最短。

编码优化目标：使出现频次高的字符的编码尽可能的短

问题：编码后，字符的传输是连续的。

编码还要使不同的字符编码能在连续出现的时候被正确解码。

ABACCDA　　A,B,C,D---->0,00,1,01

000011010　　AAAACCACA？　BBCCDA？　　...?

上述示例中的数据无法在接收端正确翻译。怎么破？？

已知：每一个字符及对应的自身频次

优化目标：

使频次越高的字符，编码长度越短

（后果：频次越低的，编码长度可能会越长，因为编码的唯一性，使短的编码被频次高的占用）

突破：设计每个字符的编码，为某个点走向每个字符的通路，通路越短，编码越短（对应高频）。

Huffman及Huffman coding

1951年，哈夫曼和他在MIT信息论的同学需要选择是完成学期报告还是期末考试。导师Robert M. Fano给他们的学期报告的题目是，寻找最有效的二进制编码。

由于无法证明哪个已有编码是最有效的，哈夫曼放弃对已有编码的研究，转向新的探索，最终发现了基于有序频率二叉树编码的想法，并很快证明了这个方法是最有效的。

由于这个算法，学生青出于蓝。

David Albert Huffman

David Albert Huffman (August 9, 1925 – October 7, 1999) was a pioneer in computer science, known for his Huffman coding.

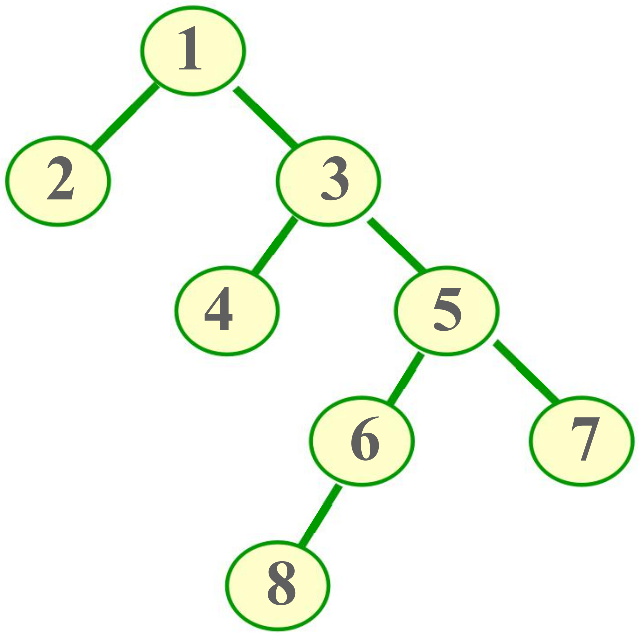
He was also one of the pioneers in the field of mathematical origami.

David Huffman died at the age of 74, ten months after being diagnosed with cancer.

几个基本概念

1. 路径和长度 (Path Length)

- 路径为一个节点到另一个节点之间的通路
- 两个结点之间的路径长度 PL 是连接两结点的路径上的分支数。
- 右图中，结点4与结点6间的路径长度为 3。
- 树的路径长度是各结点到**根结点**的路径长度之和。右侧树的PL为？

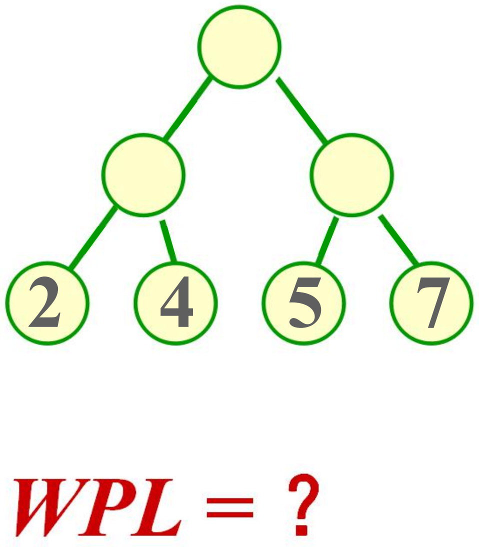


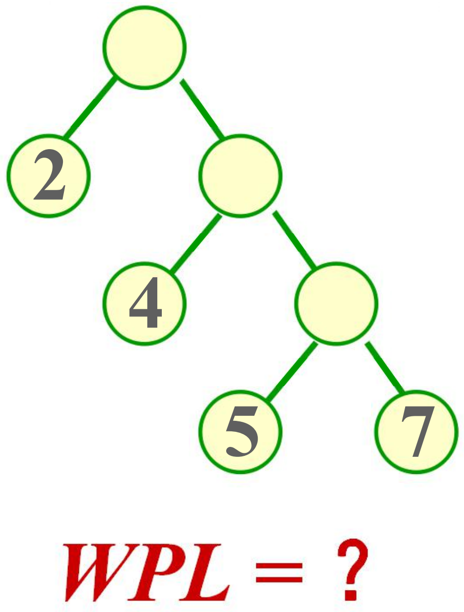
2. 树的带权路径长度 (Weighted Path Length of Tree, WPL)

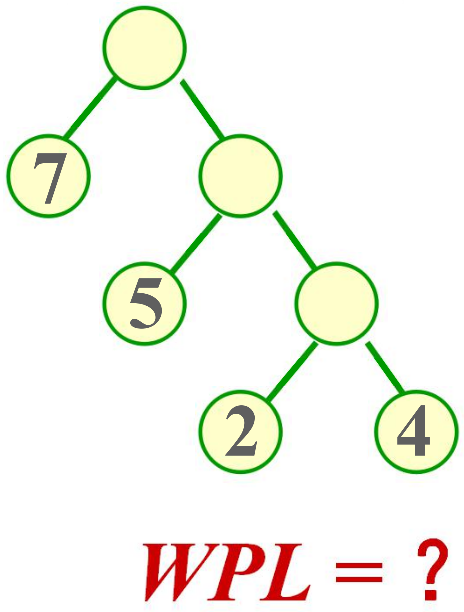
节点的**带权路径长度**为该节点权值与该节点的到根节点间的路径长度之积。**树的WPL为所有叶节点的WPL的和**：

$$WPL = \sum_{i=1}^{n} w_i l_i$$

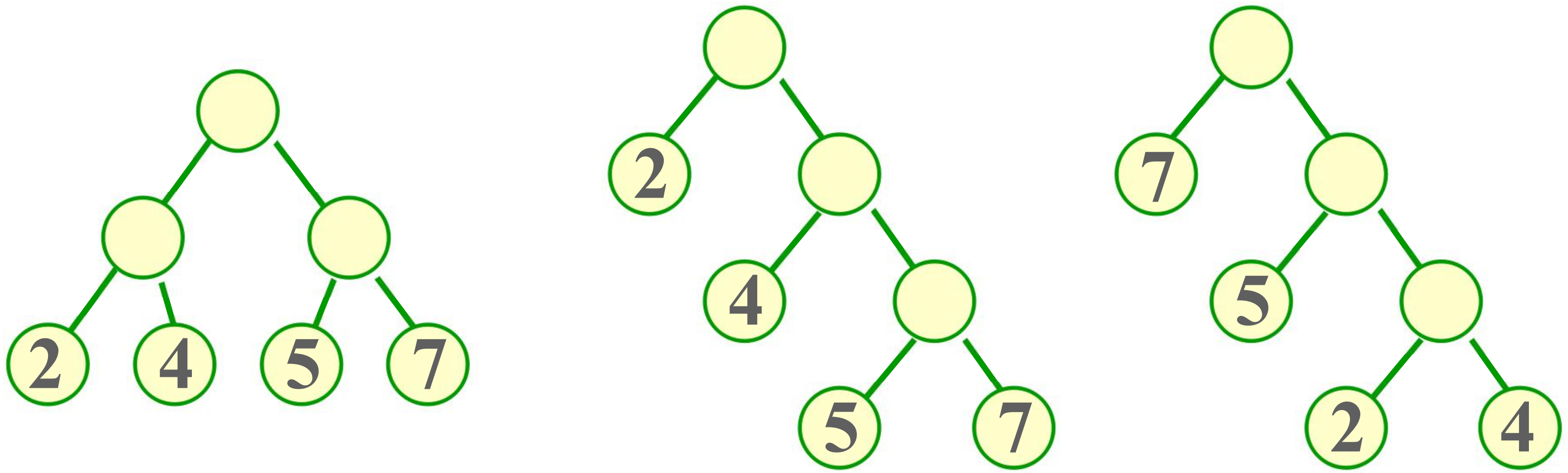
其中，L_i 是第 i 结点的路径长度，W_i 是相应结点的的权值。







节点内的数字为权值



$$WPL = 2*2+4*2+5*2+7*2 = 36$$

$$WPL = 2*1+4*2+5*3+7*3 = 46$$

$$WPL = 7*1+5*2+2*3+4*3 = 35$$

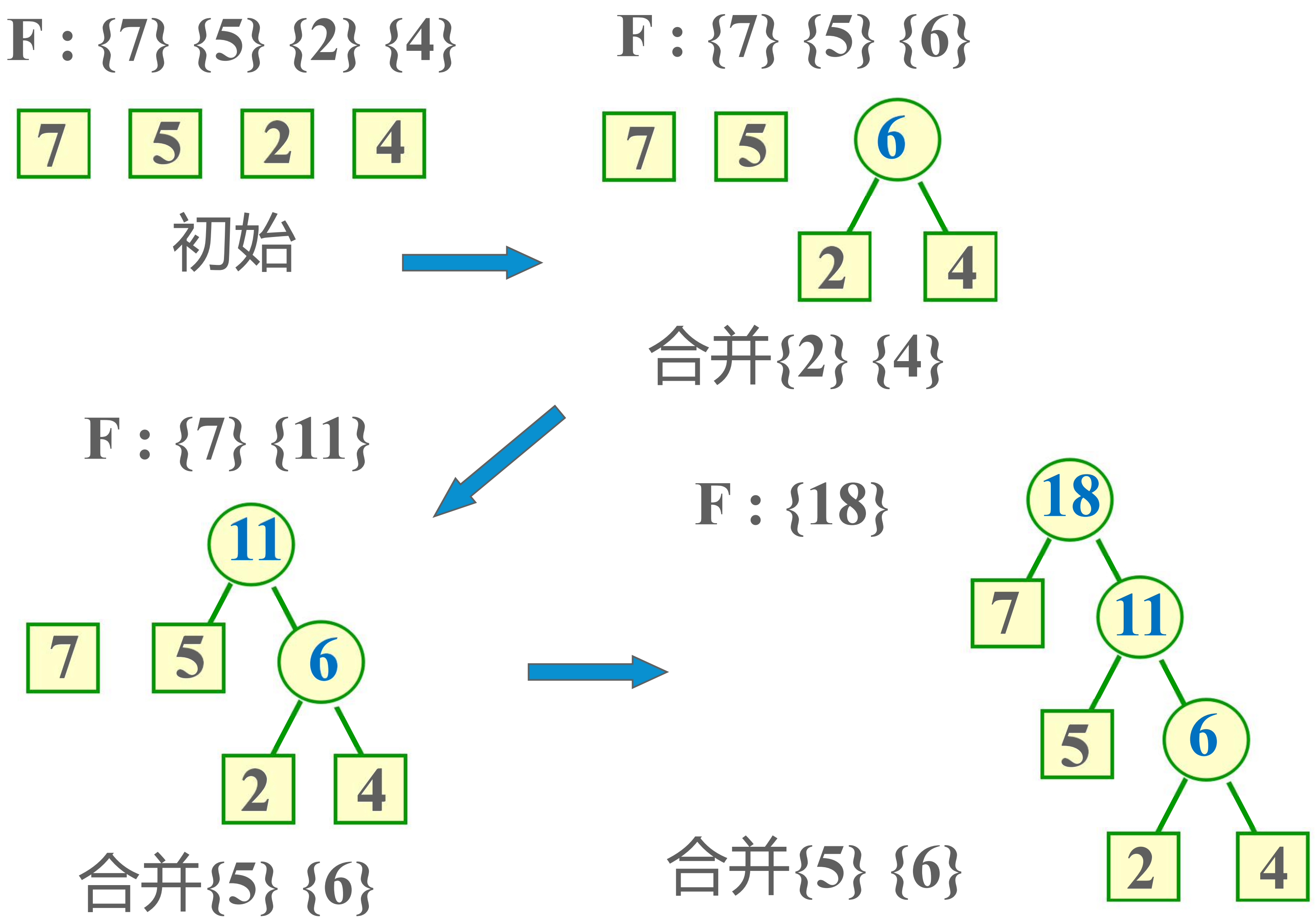
- 给定叶节点个数及权值，构造二叉树，其中带权路径长度最小的二叉树被称为Huffman树，也即最优二叉树。
- 如何构造最优二叉树？(两步)

Huffman树的构造算法

(0)构造 具有 n 棵二叉树的森林 $F = \{ T_0, T_1, T_2, \ldots, T_{n-1} \}$，其中每棵二叉树 T_i 只有一个带权值 w_i 的根结点, 其左、右子树均为空。 n 个权值为： $\{w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}\}$

(1)重复以下步骤, 直到 F 中仅剩一棵树为止：

- ((1))在 F 中选取两棵根结点权值最小的二叉树， 做为左、右子树构造一棵新的二叉树。置新的二叉树的根结点的权值为其左、右子树上根结点的权值之和。
- ((2))在 F 中删去这两棵二叉树。
- ((3))把新的二叉树加入 F。


F : {7} {5} {2} {4}
7 5 2 4
初始
F : {7} {5} {6}
7 5 6 2 4
合并{2} {4}
F : {7} {11}
11 7 5 6 2 4
合并{5} {6}
F : {18}
18 7 11 5 6 2 4
合并{5} {6}

Huffman树的构造（1）

自然可想：利用二叉链表。可先将节点的ElemType改为：

typedef struct {int weight; char ch;} ElemType; 然后呢？

霍夫曼树的生成过程与符号树的生成是不是有些类似？

区别：符号树是从栈中顺序选取节点，霍夫曼需要每次挑选权值最小的节点。

有一种结构，每次选取的元素按照权值决定，这结构是？

优先队列

基于优先队列的huffman树构造

假设已经实现了优先队列PriorityQueue

```
typedef struct   {int weight; char ch;} ElemType;
typedef struct Node {
    ElemType data;
    struct Node *LeftChild, *RightChild;
} BTNode, *HuffmanTree;
```

```
CreatHuffmanTree (HuffmanTree *T, ElemType w[], int n) {//伪码
  PriorityQueue PQ; HuffmanTree p, q,  r, cw[n];
  for(i=0;i<n;i++) {
      p = (BTNode*)malloc(sizeof(BTNode));
      p->data=w[i].data;      //w为字符及权值
      p->LChild=NULL; p->RChild=NULL;
      cw[i]=p;//生成节点p，放入到数组cw中，作为H的输入
  }
  CreatPriorityQueue  (&PQ, cw[],  n);  //创建优先队列
  //初始化完毕，生成了n棵树的森林，在优先队列中
```

```
    while(!IsEmpty(PQ)){
      DeQueue(&H, &p); QeQueue(&H, &q);
      r = (BTNode)malloc(sizeof(BTNode));
      r->data.weight = p->data.weight + q->data.weight;
      r->LChild=p; r->RChild = q;
      if(IsEmpty(PQ)){
            *T =  r;      return;
      }
      EnQueue(&PQ, r);
    }
}
```

Huffman树的构造（2）

优先队列如何实现？

如不用优先队列，则如何进行构造？

利用一维数组对静态链表的简化版实现来进行借鉴带双亲的孩子表示法。

双亲、左孩、右孩，权值信息存入一维数组。

（与教材动态分配数组方法有不同）

采用一维数组（静态链表）的Huffman树

```
#define N 100
typedef struct{
    int weight;
    int parent;//char c;节点内容
    int LChild, RChild;
}HTNode;
//索引=-1表示NULL
```

先建立一个HT包含所有节点

```
typedef struct{
    HTNode F[2*N-1];
    int size;//或root根
}HuffmanTree;
```

为什么2*N-1？
因为生成N-1个非叶节点。
无度为1的节点(严格二叉)

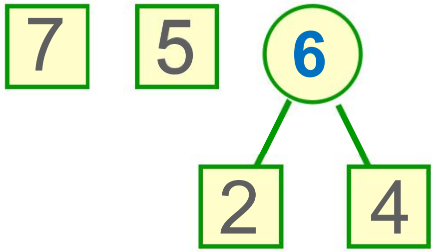
7 5 2 4

-1表示空

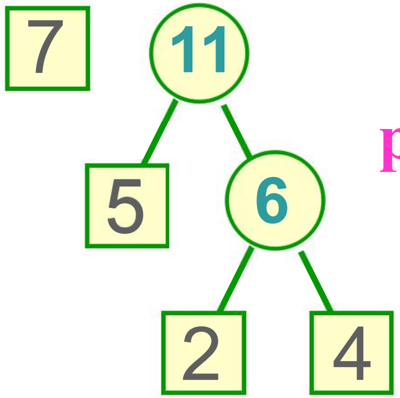
	weight	parent	lchild	rchild
0	7	−1	−1	−1
1	5	−1	−1	−1
2	2	−1	−1	−1
3	4	−1	−1	−1
4		−1	−1	−1
5		−1	−1	−1
6		−1	−1	−1

初始形态

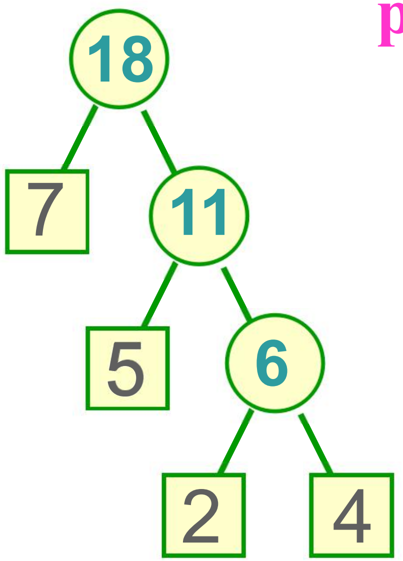
	weight	parent	lchild	rchild
0	7	−1	−1	−1
1	5	−1	−1	−1
p1 → 2	2	4 ~~−1~~	−1	−1
p2 → 3	4	4 ~~−1~~	−1	−1
i → 4	6	−1	2 ~~−1~~	3 ~~−1~~
5		−1	−1	−1
6		−1	−1	−1



总是在父节点为-1的节点里面找两个最小



	weight	parent	lchild	rchild
0	7	−1	−1	−1
p1 → 1	5	5 ~~−1~~	−1	−1
2	2	4	−1	−1
3	4	4	−1	−1
p2 → 4	6	5 ~~−1~~	2	3
i → 5	11	−1	1 ~~−1~~	4 ~~−1~~
6		−1	−1	−1



	weight	parent	lchild	rchild
p1 → 0	7	6 ~~−1~~	−1	−1
1	5	5	−1	−1
2	2	4	−1	−1
3	4	4	−1	−1
4	6	5	2	3
p2 → 5	11	6 ~~−1~~	1	4
i → 6	18	−1	0 ~~−1~~	5 ~~−1~~

整个过程循环多少次？ N-1，因生成N-1个新节点

利用静态链表创建huffman树的算法框架：

1、初始化，存入节点，所有节点的父、左右孩为-1

2、重复n-1次：

(1)从头扫描，找到父节点为-1的，权值最小的两个节点p1,p2

(2)p1,p2节点权值相加，权值放入表中当前行，将该行左右孩子赋值为p1,p2

(3)更改p1,p2的父节点为当前行索引位置

```
void CreatHuffmanTree (HuffmanTree *T, int w[], int n) {
    int i, j, p1, p2, min1, min2;                    //w为权值数组
    for (i = 0; i < n; i++)
        T->F[i].weight = w[i];
    T->size = n;
    for (i = 0; i < 2*n-1; i++) {
        T->F[i].parent = -1;
        T->F[i].LChild = -1;
        T->F[i].RChild = -1;
    } //初始化完毕
```

0	7	−1	−1	−1
1	5	−1	−1	−1
2	2	−1	−1	−1
3	4	−1	−1	−1
4		−1	−1	−1
5		−1	−1	−1
6		−1	−1	−1

```
for(i=n;i<n*2-1;i++){
        SelectMin1Min2(T, &p1, &p2);//p1,p2为索引
        T->F[i].LChild = p1;   T->F[i].RChild = p2;
        T->F[i].weight = T->F[p1].weight + T->F[p2].weight;
        T->F[p1].parent = T->F[p2].parent = i;
        T->size++;
    }
}
```

```
void SelectMin1Min2(HuffmanTree *T, int *p1, int *p2){
  int i, min1, min2;              //求最小值及次小值的函数
  min1=min2=INT_MAX;//最小值为整型数最大值
  for(i=0;i<T->size;i++){
      if(T->F[i].parent == -1){
          if(T->F[i].weight <min1){//比当前最小的小
              min2 = min1;//（即原最小是目前次最小）
              *p2=*p1;
              min1 = T->F[i].weight;//保存当前最小值
              *p1 = i;}
```

```
else if(T->F[i].weight <min2){
            *p2 = i;
            min2 = T->F[i].weight;
        }
    }
  }
}
```

如何编码使编码**连续出现时能够被正确解码？**

"前缀"指除了最后一个字符以外，一个字符串的全部头部组合。break的前缀为：b，br，bre，brea，break

前缀编码：在一个字符集中，任何一个字符的编码都不是另一个字符编码的前缀。

解码时候就可以能够一一对应了。

Huffman编码

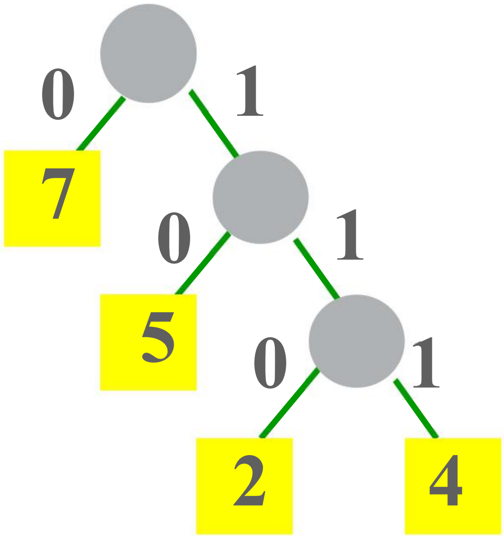
如果将左分支编码为0，右分支编码为1（也可以反过来编码），则huffman树中各节点的路径即可形成前缀编码。

7:0

5:10

2:110

4:111



（基于霍夫曼树，可一次性解决编码长度与解码两个问题）

给定字符串：”AATTTTCCSSSCCTTTSS”， 其中A,T,C,S各字符出现概率为{ 2/18, 7/18, 4/18, 5/18 }，直接用 { 2, 7, 4, 5 } 为各叶结点上的权值，建立Huffman树如下图。

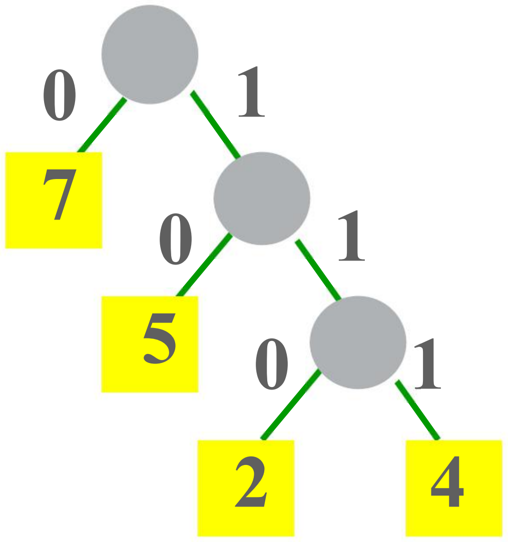
令左分支赋 0，右分支赋 1，可得Huffman编码 。

T: 0　S: 10　A: 110　C: 111

它的总编码长度：

$$7*1+5*2+(2+4)*3 = 35。$$

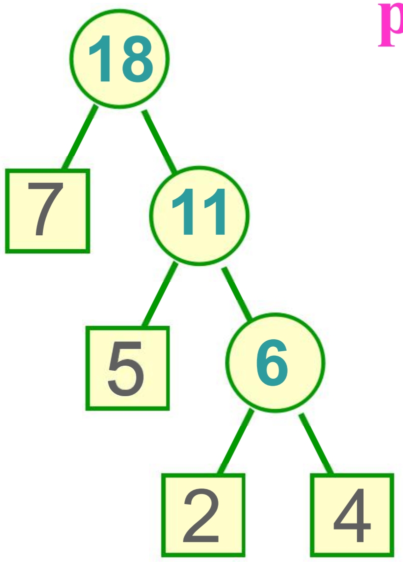
用Huffman编码得到的报文总编码长度正好等于Huffman树的带权路径长度WPL



给定一棵huffman树（1维数组中），如何得到各个节点的前缀编码？

节点编码为：

根节点出发的路径编号序列。



可由叶节点出发，找根，将沿途路径保存。

用什么保存呢？

	weight	parent	lchild	rchild
p1 → 0	7	6 ~~−1~~	−1	−1
1	5	5	−1	−1
2	2	4	−1	−1
3	4	4	−1	−1
4	6	5	2	3
p2 → 5	11	6 ~~−1~~	1	4
i → 6	18	−1	0 ~~−1~~	5 ~~−1~~

框架(利用栈)：

0、得到叶节点数n=(1+T.size) /2

1、对每个叶节点i循环：

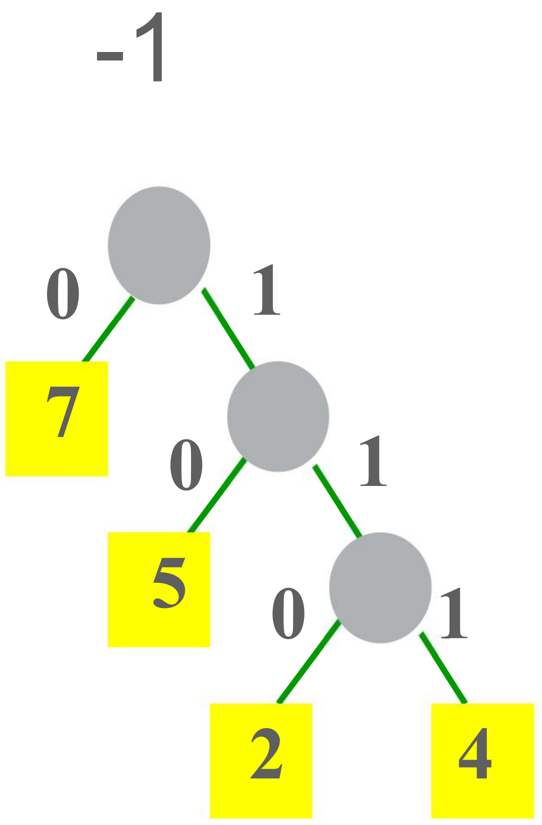
Init(S);　R=p的父节点;p为当前节点i;

While (R!=-1):

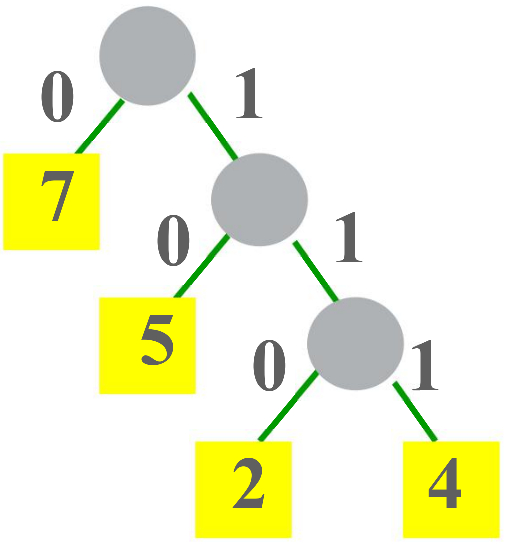
if R->left_child==p: push(0)

else:push(1)；更新p，更新R;

输出栈内节点(即为编码)



```
void GetPrefixCode(HuffmanTree T){//伪码
    int i,n=(1+T.size)/2, p, R;
    LinkStack L;    InitStack(&L);
    for(i=0;i<n;i++){//对n个节点循环
        R = T.F[i].parent; p = i;
        while(R!=-1){
            if(T.F[R].LChild == p) push(L, 0);
            else push(L, 1);
            p=R; R=T.F[R].parent;}
                //第i节点前缀编码均在L内
```



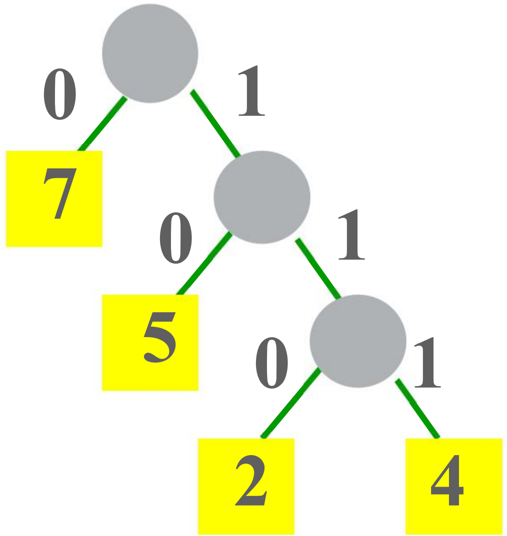
```
        while(!IsEmptyStack(L)){
            pop(L, &p);
            printf("%d", p);
        }
        printf("\n");
    }//n个节点的字符编码处理完毕
}
```

给定一棵huffman树（一维数组中），如何得到报文长度？

报文长度也就是树的WPL

1、找到每个叶节点到根的路径长度

2、该叶节点权值*路径长度



框架：

0、WPL=0；得到叶节点数n=(1+T.size) /2

1、对所有叶节点循环：

    1.1 R = 当前p的父节点；length=0;

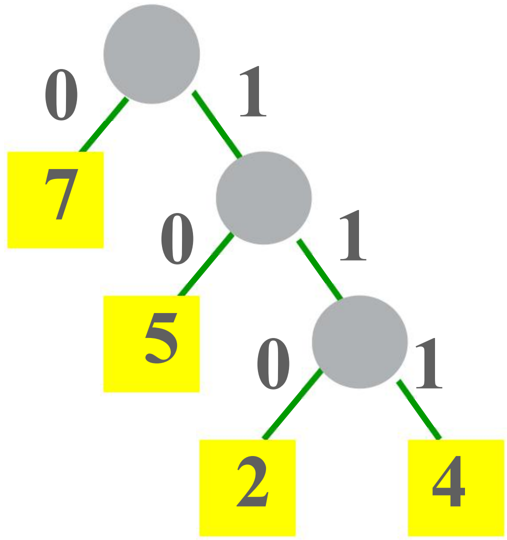
    1.2 while R!=-1:

        length++

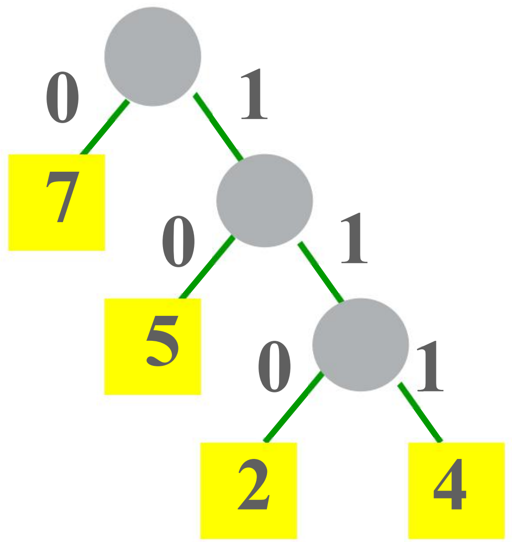
        令R为当前节点的父节点；

    1.3 WPL += T.F[i].weight * length;

2、返回WPL；



```
float GetHuffmanTreeWPL(HuffmanTree T){//伪码
    int i, n=(1+T.size)/2, length, R;    float WPL=0;
    for(i=0;i<n;i++){//对每个节点循环
        R=T.F[i].parent;         length = 0;
        while(R!=-1){
            length++;
            R=T.F[R].parent;
        }//得到第i节点到根的路径长度
        WPL += length*T.F[i].weight;
    }    return WPL;}
```

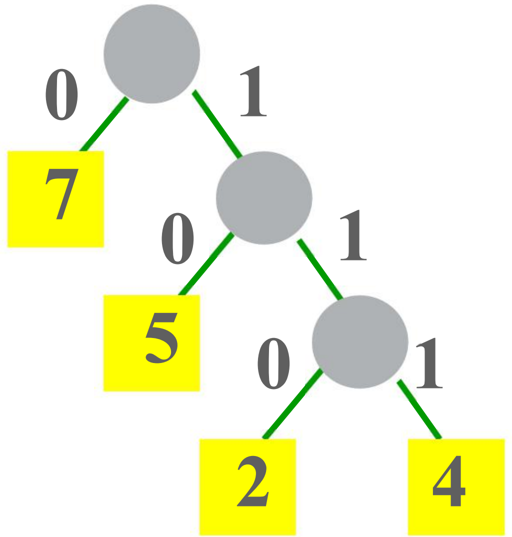


给定一棵huffman树（一维数组中），给定传输过来的报文数据，如何解码得到传输前的原报文？

0101101111

就是根据报文，找叶节点

报文控制着从根节点到叶节点的路径



思路：

1、依据报文从霍夫曼树的根节点行进

如果遇到叶节点，则输出叶节点的字符。回到根节点。

2、重复1直至报文结束

框架：给定HT，sequence　　0101101111

0、找到根节点编号，设为当前节点j；

1、do：

　　if j是叶节点：

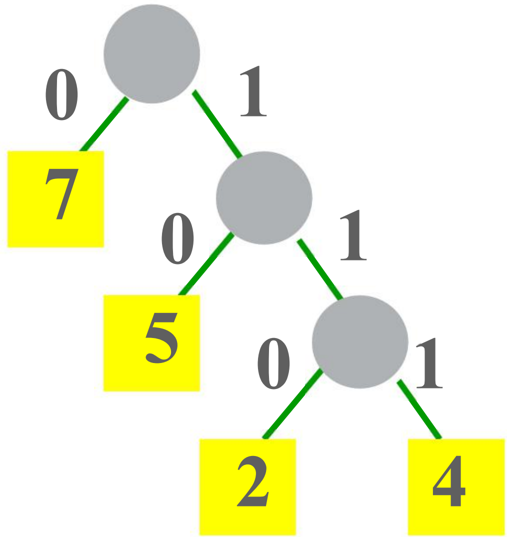
　　　　打印该节点；

　　　　当前节点j回到根节点

　　elif sequence[i]=='0'：j = j->LChild；左走

　　else：j = j->Rchild; 右走

while：sequence[i]!='\0'



```
void DecodeHuffman(HuffmanTree T, char *sequence){//伪码
    int i=0, j=T.size-1;
    do{   if(T.F[j].LChild==-1&&T.F[j].RChild==-1){
                printf("%c",T.F[j].ch);      j=T.size-1;
          }else{
                if(sequence[i]=='0') j=T.F[j].LChild;
                else j=T.F[j].RChild;
          }i++;   }
    while(sequence[i]!='\0')}//解码可在节点定义时，多设一
个ch域      //或者固定A,B,C,D...为索引0,1,2,3...权值也对应
```

如何构造优先队列

1、Naive思路：排序，初始n个节点时间复杂度O（n*n），每次出队两个节点，入队一个节点，需要重新排序

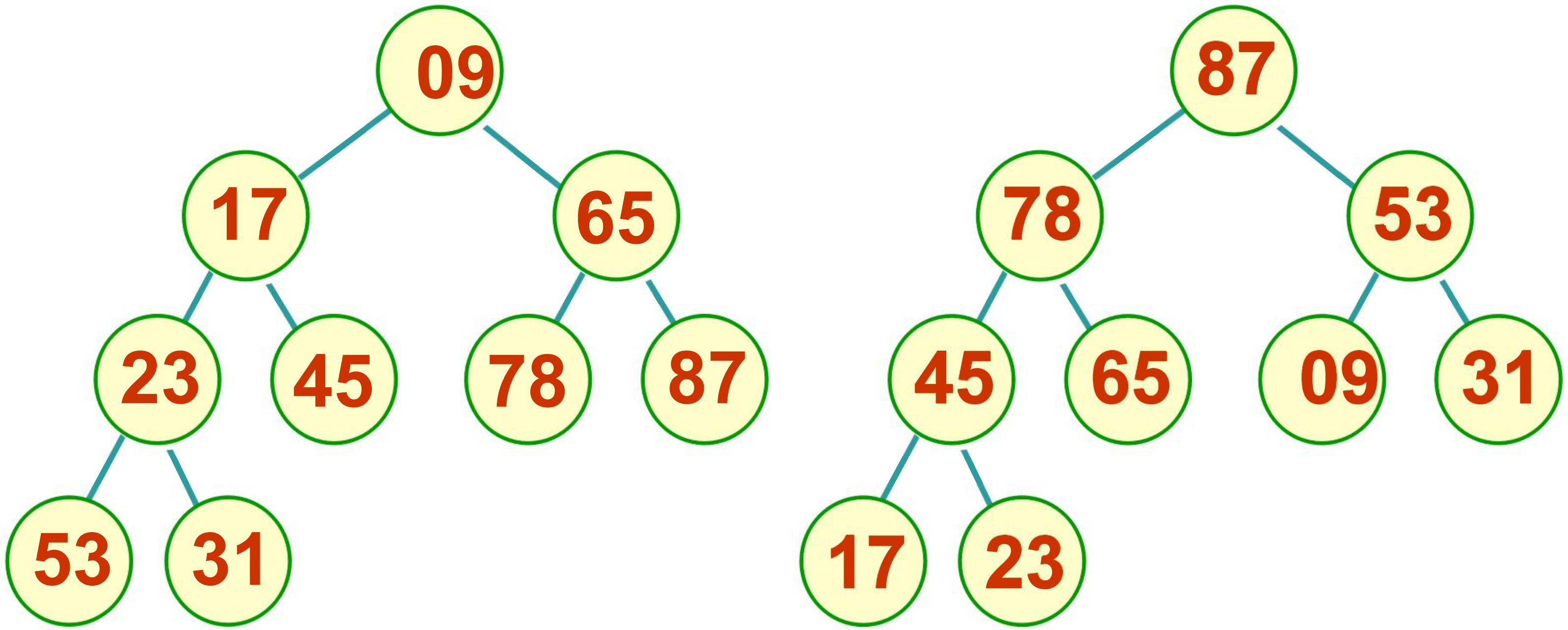
2、改进思路：改进排序算法使之成为O(nlogn)，每次出队两个节点，入队一个节点，还需要重新排序O(nlogn)

3、改进思路：不重新排序，而是对新生成的节点，在队列中找到位置插入。对顺序表示，需要挪动O(n)元素。

4、正解：用树状结构----堆结构

建立为O(nlogn)，每次入队出队时间复杂度为logn

堆



完全二叉树
顺序表示

$K_i \leq K_{2i+1}$ &&
$K_i \leq K_{2i+2}$

$K_i \geq K_{2i+1}$ &&
$K_i \geq K_{2i+2}$

堆 (Heap)

设有一个关键字集合，按完全二叉树的顺序存储方式存放在一个一维数组中。对它们从根开始，自顶向下，同一层自左向右从 0 开始连续编号。若满足

$$K_i \le K_{2i+1} \;\&\&\; K_i \le K_{2i+2}$$

或

$$K_i \ge K_{2i+1} \;\&\&\; K_i \ge K_{2i+2},$$

则称该关键字集合构成一个堆。

前者称为最小堆（小根堆），后者称为最大堆（大根堆）。

下午上机：

实现如下函数（先做1,2,3,4，字符权值数组可以先人工给）：

0、给定字符串统计各个字母频次，输出字符权值数组

1、给定权值数组，构造huffman树

2、给定huffman树，给出报文总编码长度

3、给定huffman树，给出各个字母的huffman编码

4、给定huffman树，给定接收的报文，解码出原报文

测试报文：AABBBBCCCDDEFFAAAABBCCC

下周：

堆与优先队列、判定树、并查集、二叉搜索树